УДК 519.216.1

Г. Н. Востров, канд. техн.наук,
А. Атие

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ СИНГУЛЯРНОГО РАЗЛОЖЕНИЯ МАТРИЦ

Задача оценивания параметров безусловных линейных регрессионных моделей в условиях плохой обусловленности корреляционной матрицы и квазимультиколлинеарности не может быть достаточно точно решена при использовании классического метода наименьших квадратов (МНК). Разработан метод оценивания параметров регрессионной модели на основе МНК и сингулярного разложения матриц эмпирических данных на случай квазимультиколлинеарности и плохой обусловленности корреляционной матрицы.

Ключевые слова: *выбросы в выборочных данных, регуляризация оценок параметров, ортогональные регрессоры, смещенные оценки параметров, сингулярное разложение матриц, метод складного ножа и скользящего исследования**,** неполный ранг матрицы*

G. N. Vostrov, PhD.,
A. Atie

GRADING PARAMETERS OF A REGRESSION MODEL BASED ON SINGULAR VALUE DECOMPOSITION MATRICES

The problem of estimating the parameters of unconditional linear regression models in conditions of poor conditionality of the correlation matrix, quasimulticollinearity, cannot be precisely solved when using the classical least squares method (LSM). Developed a method for estimating the parameters of a regression model based on the LSM and the singular value decomposition of matrices of empirical data in case of quasimulticollinearity and poor conditionality of the correlation matrix.

Keywords: *emissions in the sample data, regularization parameter estimates orthogonal covariates, biased estimates of the parameters, the singular value decomposition of matrices, the method of jackknife and slide examination, full rank matrix*

Г. Н. Востров, канд. техн. наук,
А. Атiє

ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ РЕГРЕСІЙНИХ МОДЕЛЕЙ НА ОСНОВІ СИНГУЛЯРНОГО РОЗКЛАДАННЯ МАТРИЦЬ

Оцінювання параметрів безумовних лінійних регресійних моделей в умовах поганої обумовленості кореляційної матриці і квазімультиколінеарності не може бути досить точно вирішена при використанні класичного методу найменших квадратів (МНК). Розроблено метод оцінювання параметрів регресійної моделі на основі МНК і сингулярного розкладання матриць емпіричних даних у разі квазімультиколінеарності і поганої обумовленості кореляційної матриці.

Ключові слова: *викиди у вибіркових даних, регуляризація оцінок параметрів, ортогональні регресори, зміщені оцінки параметрів, сингулярне розкладання матриць, метод складного ножа і ковзного іспиту, неповний ранг матриц*

Введение. Методы оценивания параметров в регрессионном анализе достаточно хорошо развиты и исследованы для случая безусловной регрессии при довольно жестких предположениях [1–5]. Однако в условиях мультиколлинеарности, плохой обусловленности матрицы выборочных данных, выборок небольшого объема, при наличии ошибок, если есть выбросы в выборочных данных и в других случаях оценки параметров регрессионных моделей либо не может быть вычислена классическим методом решения нормальных уравнений, либо обладают неустойчивостью, а сами модели далеко не всегда допускают четкую содержательную интерпретацию [1–3]. Отсюда следует необходимость развития методов оценивания параметров в регрессионном анализе, которые учитывают существенные отклонения от классических предпосылок, позволяющих регуляризовать оценку параметров.

Методы классического регрессионного анализа и процедуры регуляризации оценок параметров, основанные на методах решения некорректных задач [3–6] фактически по умолчанию постулируют равноценность регрессоров. Вопрос о значимости регрессоров рассматривается преимущественно с точки зрения включения или не включения их в модель [1,2]. При этом рассматривается вопрос управления вкладом отдельных регрессоров в обеспечение необходимых качеств регрессионной модели. Проблема управления вкладом отдельных наблюдений рассмотрена в работах [1, 7].

В случае ортогональных регрессоров оценка степени влияния и управления их вкладами в выходную переменную осуществляется просто. В то же время в общем случае проблема управления влиянием регрессоров на выходную переменную практически не разработана.

В регрессионном анализе созданы подходы к оцениванию параметров моделей, позволяющие уменьшить среднеквадратичную ошибку их оценки, улучшить прогностические возможности регрессионных моделей [3]. Некоторые из них основаны на использовании смещенных оценок параметров [6,8], а другие – связаны с оцениванием параметров при дополнительных ограничениях, что, как правило, приводит к отходу от традиционных критериев МНК.

При преодолении проблем регрессионного анализа эффективным оказывается путь, связанный с отказом от непосредственного обращения матрицы $X^T X$, где X – матрица выборочных (эмпирических) данных регрессоров которое осуществляется на основе сингулярного разложения матрицы X [9]. Применение сингулярного разложения не устраняет проблем, которые обычно возникают при практическом применении регрессионных моделей. Как правило, они связаны с ее содержательной интерпретируемостью, проверкой ее прогностической точности.

Для решения этих задач наиболее употребительными являются соответственно методы «складного ножа» и «скользящего исследования» [2].

В работе продолжен подход к оцениванию коэффициентов регрессии, позволяющий решить отмеченные проблемы регрессионного анализа. При этом ряд предложенных в литературе методов [2, 6] являются частными случаями развиваемого подхода, который не зависит от неизвестных параметров, что выгодно отличает его от регрессии [3]. Упрощается организация «скользящего экзамена», что позволяет использовать его для поиска выбросов, сравнивать устойчивость оценок коэффициентов регрессии. Предложенный подход может быть использован в сочетании с методом бутстрепа [5], а также с методами взвешивания наблюдений, тем самым он достаточно просто преобразуется в форму, сохраняющую достоинства робастного оценивания. В работе приведены результаты имитационного эксперимента, которые являются статистическим обоснованием предложенного подхода.

Регрессионное оценивание и сингулярное разложение. В линейных безусловных регрессионных моделях оценка вектора методом наименьших квадратов имеет вид

$$\hat{b} = \left(X^T X \right)^{-1} X^T \mathrm{Y}, \qquad (1)$$

где X – матрица значений входных параметров (регрессора) размерности $m \times n$, Y – вектор значений выходной переменной размерности m.

Известно, что всякая действительная матрица X представима в виде $X = S\Lambda C$, при этом выполняются условия $S^T S = I$, $C^T C = I$, $CC^T = I$; Λ – диагональная матрица, диагональные элементы которой принято называть сингулярными числами матрицы X. Оценка вектора может быть представлена в виде

$$\hat{a} = C^T \Lambda^{-1} S^T y. \qquad (2)$$

Оценка является несмещённой (хотя при конечной точности вычислений может возникнуть смещение, причем для выражения (2) оно существенно меньше). Ковариационная матрица оценки согласно (2) имеет вид

$$\mathrm{cov}(\hat{a}) = \sigma^2 C^T \Lambda^{-2} C, \qquad (3)$$

в то время как согласно выражению (1)

$$\mathrm{cov}(\hat{a}) = \sigma^2 (X^T X)^{-1}, \qquad (4)$$

где σ^2 – дисперсия случайной величины ε.

Суммарная дисперсия оценки $\hat{a}$ в соответствии с (2) определяется выражением

$$tr\,\mathrm{cov}(\hat{a}) = \sigma \sum_i \lambda_i^{-2}, \qquad (5)$$

из которого, следует, что при наличии малых λ_i, ее величина значительно возрастет.

Оценка $\hat{Y}$ вектора y

$$\hat{Y} = x\hat{a} = SS^T y\,, \qquad (6)$$

вытекающая из сингулярного разложения, не зависит от наличия малых сингулярных значений λ_i, в то время как в схеме вычислений (1) оценка $\hat{Y}$ определяется выражением

$$\hat{Y} = x(x^T x)^{-1} x^T y, \qquad (7)$$

из которого следует, что она весьма чувствительна к величине λ_i, что и является основной причиной неустойчивости оценки $\hat{Y}$ при классическом подходе.

Рассмотрим влияние ошибки измерения y на оценку вектора параметров a. Если вектор Y измеряется с ошибкой v, т.е. $\hat{Y} = y + v$, то оценка $\hat{a}$ вектора определяется равенствами

$$\begin{aligned}\hat{a} &= (x^T x)^{-1} x^T \hat{Y} = \tilde{a} + (x^T x)^{-1} x^T v = \\ &= \tilde{a} + C\Lambda^{-1} S^T v.\end{aligned} \qquad (8)$$

Норма $\|\tilde{a} - \hat{a}\|_2^2$ отклонения $\tilde{a}$ от $\hat{a}$ определяется соотношением

$$\begin{aligned}\|\tilde{a} - \hat{a}\|_2^2 &= v^T S^T \Lambda^{-2} S^T v = \\ &= \sum_j q_j^2 \lambda_j^{-2} = l^2 \sum_j \cos^2(\alpha_j) \lambda_j^{-2},\end{aligned} \qquad (9)$$

где $q_j = \sum_i S_{ij} v_i$, $l = \|v\|_2^2$, α_j– угол между v и j-м столбцом матрицы. Наличие малых значений λ_j делает оценку $\tilde{a}$ очень чувствительной к выбросам в направлении векторов, определяемых столбцами S, соответствующих малым значениям λ_j.

В тех случаях, когда матрица X имеет неполный ранг или с точностью до вычислительной погрешности близка к матрице неполного ранга, тогда некоторые λ_j равны нулю или отличны от нуля на величину δ, имеющую порядок ошибки округления. Хотя оценка (2) в этом случае не существует (если какое либо $\lambda_j = 0$) или определяется игрой ошибок округления), однако может быть построена оценка $\hat{a}_+ = C^T \Lambda^+ S^T y$,

$$\lambda_j^+ = \begin{cases} 0, & если\, \lambda_j < \delta_m \\ \lambda_j^{-1}, & если\, \lambda_j \ge \delta_m \end{cases},$$

где δ_m – критический уровень, близкий по порядку величин к погрешности вычисления.

В практических случаях все $\lambda_j \neq 0$, но при этом некоторые из них могут быть столь малы, что это приводит к чрезмерному возрастанию дисперсий ошибок. Поэтому этот подход можно распространить на случай «умеренно» малых λ_j.

Взвешенные оценки параметров линейной регрессии. Качество регрессионной модели зависит не только от совершенства математического аппарата оценивания ее параметров, но и от возможностей управления процессом построения модели. Это связано с тем, что не все строки матрицы X имеют одинаковую ценность с точки зрения представительности выборки и информационной надежности. Поэтому были предприняты попытки разработки процедур взвешивания выборочных вектор-строк матрицы X (взвешивание по столбцам), представляющих результаты отдельных испытаний. Доказано, что процедуры взвешивания строк матрицы в ряде случаев позволяют улучшить некоторые характеристики регрессионных моделей [6]. Тем не менее, далеко не всегда современные методы построения регрессионных моделей позволяют получить линейную модель, которая, с одной стороны, обладала бы «хорошими» статистическими свойствами, а с другой – допускала четкую содержательную интерпретацию.

Одна из причин трудностей регрессионного анализа связана с тем, что с точки зрения математического аппарата оценивания параметров моделей все выходные переменные (регрессоры) равноценны. Рассмотрим один подход к управлению степенью вклада регрессоров в дисперсию с помощью процедуры взвешивания при оценке параметров модели. Будем предполагать, что рассматривается классическая модель регрессивного анализа. Введем диагональную матрицу порядка $n \times n$ в выражение для оценки $\hat{a}$, используя выражение

$$\hat{a}_w = C^T W \Lambda^{-1} S^T Y. \qquad (10)$$

Элементы W выберем таким образом, чтобы при этом улучшались статистические свойства оценки $\hat{a}$. На данном этапе рассмотрим выбор W так, чтобы уменьшилось влияние мультиколлинеарности, минимизировалась среднеквадратическая ошибка оценки $\hat{a}$ и улучшились показатели устойчивости оценок. Очевидно, что если $W = I$, то $\hat{a}$

совпадают с оценками МНК, а если положить:

$$w_{ij} = \begin{cases} 0, если\ \lambda_j < \delta_m\ или\ i \neq j \\ 1, если\ \lambda_j \geq \delta_m \end{cases}, \quad (11)$$

то получим усеченную оценку $\hat{a}_+$, введенную в предыдущем разделе как средство борьбы с мультиколлинеарностью.

Если варьировать значения матрицы *W*, оценки $\hat{a}$ становятся *n*-параметрическими. Рассмотрим некоторые простейшие свойства взвешенных оценок $\hat{a}_w$. Даже при условии абсолютной точности вычисления $\hat{a}_w$ согласно (1) будут смещенными, так как $E(\hat{a}_w) = C^T WCa$, что в общем случае не равно *a*. Ковариационная матрица вектора $\hat{a}_w$ определяется выражением:

$$\mathrm{cov}(\hat{a}_w) = \sigma^2 C^T \Lambda^{-2} W^2 C, \quad (12)$$

где σ2 – дисперсия ξ в уравнении регрессии Y=Xa+ξ. Выражения для среднеквадратической ошибки оценок $\hat{a}_n$ и $\hat{a}$ имеют соответствующий вид:

E((âw - a)T(âw - a))=
= aTCT(I - W)2Ca + σ2tr(Λ-2W2), (13)
E((â - a)T(â - a))= σ2tr(Λ-2) , (14)

представим выражение (13) в форме:

E((âw - a)T(âw - a))=ρTΛT(I - W)2Λ-1ρ+
+ σ2tr(Λ-2W2), (15)

где ρ=ΛCa – взвешенный вектор; $Ca = \left(\sum_j C_{ij} a_i, \ldots \sum_j C_{nj} a_i \right)$.

Компоненты вектора Ca являются проекциями вектора, a на собственные векторы матрицы XTX.

Введение взвешенной оценки параметров âw оправдано, если существует такая матрица W, для которой средний квадрат ошибки взвешенных оценок â*w* меньше не взвешенной оценки a, получаемой из выражения (1).

Теорема 1. Средний квадрат ошибки âw достигает минимума, если диагональная матрица W определяется соотношением $w_{ij} = \frac{\rho_i^2}{\rho_i^2 + \sigma^2}, i = \overline{1, n}.$

Рассмотрим функционал E((âw-a)T(âw-a)), который после преобразований приводится к виду

$$E\left(\sum_i \left(\hat{a}_w^i - a_i \right)^2 \right) =$$
$$= E\left(\left(C^T \Lambda^{-1} W S^T Y - a \right)^T \left(C^T \Lambda^{-1} W S^T Y - a \right) \right) =$$
$$= E(\left(C^T WCa + C^T \Lambda^{-1} W S^T \xi - a \right)^T \times$$
$$\times \left(C^T WCa + C^T \Lambda^{-1} W S^T \xi - a \right)) =$$
$$= a^T C^T (W - I)^2 Ca + E\left(\xi^T S W^2 \Lambda^{-2} S^T \xi \right) =$$
$$= \rho^T \Lambda^{-2} (W - I)^2 \rho + \sigma^2 tr(W^2 \Lambda^{-2}).$$

Последнее слагаемое получаем из того, что tr (AB) = tr (BA) и E (ξTξ) = σ2.

Дифференцируя функционал по *w*i, получим:

$$\frac{\partial (\sum_i \rho_i^2 \lambda_i^{-2} (w_i - 1)^2 + \sigma^2 \sum_i w_i^2 \lambda_i^{-2})}{\partial w_i} =$$
$$= 2 \frac{\rho_i^2 (w_i - 1)}{\lambda_i^2} + 2 \frac{\sigma^2 w_i}{\lambda_i^2}.$$

Приравняв производную нулю и решив уравнение, находим

$$w_i^{opt} = \frac{\rho_i^2}{\rho_i^2 + \sigma^2}.$$

При этом

$$E((\hat{a}_{МНК} - a)^T (\hat{a}_{МНК} - a)) =$$
$$= E((\hat{a}_w - a)^T (\hat{a}_w - a)) = \sigma^2 \sum_i \lambda_i^{-2} -$$
$$-(\sum_i \rho_i^2 (w_i - 1)^2 \lambda_i^{-2} + \sigma^2 \sum_i w_i^2 \lambda_i^{-2}) =$$
$$= \sigma^4 \sum_i \lambda_i^{-2} (\rho_i^2 + \sigma^2)^{-1} > 0.$$

Отметим, что выигрыш в точности оценивания *a* не связан с потерей точности оценивания *Y*. Как правило, интерес представляет оценка не *Y* = *Xa*+*ξ*, а *E(Y)* = *Xa* = $\tilde{Y}$. При этом справедлива теорема 2.

Теорема 2. Средний квадрат ошибки $\hat{Y}_W$ относительно $\tilde{Y}$ достигает минимума, если матрица *W* определяется соотношением $w_{ij} = \frac{\rho_i^2}{\rho_i^2 + \sigma^2}, i = \overline{1, n}$.

Рассмотрим функционал

$$E((\hat{Y}_W - Y)^T (\hat{Y}_W - Y),$$

где *Y* = *E(Y)* = *Xa*, который приводится к виду:

$$E((SWS^TY-\tilde{Y})^T(SWS^TY-\tilde{Y}))=$$
$$=E((S(W-I)\Lambda Ca+SWS^T\xi)^T\times$$
$$\times(S(W-I)\Lambda Ca+SWS^T\xi))=$$
$$=a^TC^T\Lambda(I-W)^2\Lambda Ca+\sigma^2tr(W^2)=$$
$$=\rho^T(I-W)^2\rho+\sigma^2tr(W^2).$$

Дифференцируя функционал по w_i, получим

$$\frac{\partial(\sum_i\rho_i^2(1-w_i)^2+\sigma^2\sum_i w_i^2)}{\partial w_i}=$$
$$=2\rho_i^2(1-w_i)+2\sigma^2w_i.$$

При этом

$$E((\hat{Y}_{МНК}-Y)^T(\hat{Y}_{МНК}-Y))-$$
$$+E((\hat{Y}_W-Y)^T(\hat{Y}_W-Y))=$$
$$=n\sigma^2-(\sum_i\rho_i^2(1-w_i)^2+\sigma^2\sum_i w_i^2)=$$
$$=\sigma^4\sum_i(\rho_i^2+\sigma^2)^{-1}>0.$$

Из теоремы 2 следует, что математическое ожидание квадрата отклонения значений $\hat{Y}_W$ от $\tilde{Y}$ $=E(Y)=Xa$ всегда меньше математического ожидания квадрата разности $\hat{Y}$ - $\tilde{Y}$. Этот факт свидетельствует о большей точности взвешенных оценок регрессионных моделей по сравнению с классическими. Рассмотрим причины, которые обусловливают улучшение характеристики свойств как обычных, так и взвешенных регрессионных моделей, которые строятся на основе сингулярного разложения матрицы X. Ограничимся случаем безусловной регрессии.

Теорема 3. Вектор $\hat{Y} = Xa$ является проекцией вектора Y на подпространство, базис которого образует столбы матрицы S.

Доказательство теоремы 3.

Из $X=S\Lambda C$ и $\hat{a}=C^T\Lambda^{-1}S^TY$ следует, что $\hat{Y} = SS^TY$. Матрица $SS^T=(SS^T)(SS^T)$, следовательно, представляет собой проектор в подпространстве E^S, и коэффициентами разложения Y по этому базису являются $r=S^TY$.

Из равенства $Y=Xa$ следует, что $\hat{a}$ – вектором коэффициентов разложения Y по вектор-столбцам матрицы X, которые в общем случае не являются ортогональными. При переходе от подпространства E^X к подпространству E^S, порожденного соответственно с помощью оператора Λ^C, очевидны равенства

$$\beta=\Lambda^C\hat{a},\ x=S\Lambda^C \quad . \tag{16}$$

Таким образом, содержательный смысл сингулярного разложения применительно к регрессионному анализу состоит в том, что матрица S определяет базис пространства E^S, ортогональная проекция на которое вектора Y дает его линейную оценку $\hat{Y}$, а оператор Λ^C определяется преобразованием от перехода от подпространства E^X с неортогональным базисом к подпространству E^S с ортогональным базисом. Это свойство сингулярного разложения позволяет обосновать и развить ряд известных процедур регрессионного анализа. Рассмотрим процедуру взвешивания регрессоров. Из теоремы 1 следует, что построение взвешенных оценок $\hat{a}_w$, согласно (10) уменьшает дисперсию коэффициентов линейной регрессии, и из теоремы 2 следует, что среднеквадратичное отклонение $\hat{Y}_W$ от $\tilde{Y}$ значительно меньше, чем Y.

Таким образом, разработан новый метод построения регрессионных моделей, ориентированный на случаи квазимультиколлинеарности выборочных данных, а также плохой обусловленности корреляционной матрицы [6-10].

Список использованной литературы

1. Дрейпер Н. Прикладной регрессионный анализ : в 2 кн. [Текст] / Н. Дрейпер. – М..: Финансы и статистика, 1986. – Т 1. – С. 431–433; – Т 2. – С. 480 – 483.

2. Мостеллер Ф. Анализ данных и регрессия [Текст] / Мостеллер Ф., Тьюки Дж. – М. : Финансы и статистика. – Вып. 2. – 1982. – С. 572 – 576.

3. Hoerlb A. E. Technometrics [Text] / A. E. Hoerlb, R. W. Kerhara, Ridy Regression. – 1970. – V.12. – P.478 – 482.

4. Тихонов А. А. Методы решения некорректных задач. [Текст] / А. А. Тихонов, А. Я. Арсенин. – М. Наука, 1979. – 267 с.; 1986. – 284 с.

5. Мешалкин Л. Д. Использование весовой функции при оценке регрессионной зависимости [Текст] / Л. Д. Мешалкин // Многомерный статистический анализ в социально-экономических исследованиях. – М. : – 1974. – 486 с.

6. Стрижов В. В. Поиск параметрической регрессионной модели в индуктивно заданном множестве [Текст] / В. В. Стрижов // Вычислительных технологий. – 2007. – Т. 1. – С. 93 – 100.

7. Ивахненко А. Г. Моделирование сложных систем по экспериментальным данным. [Текст] / А. Г. Иваненко, Ю. П. Юрачковский. – М. : // Радио и связь – 1987. – С.120 – 127.

8. Haines G. V. Modeling by singular value decomposition and the elimination of statistically insignificant coefficients [Text] / G. V. Haines, R. A. D. Fiori // Computers and Geosciences. – 2013. – P. 19 – 28.
DOI: 10.1016/j.cageo.2013.04.021
URL: http://sci-hub.org/pdfcache/9702cfd50369c60202b792ec6d81160e.pdf.

9. Li S. a. Robust Parameters Estimation of Regression Model Based on Singular Value Decomposition [Text] / S. a. Li, J. a. b. Yang // Proceedings of the International Symposium on Test and Measurement. – 2003. – P. 4612 – 4616.

10. Qi C. A time/space separation-based Hammerstein modeling approach for nonlinear distributed parameter processes [Text] / C. Qi, H.-X. Li. // Computers and Chemical Engineering. – 2009. – P. 1247 – 1260.
DOI: 10.1016/j.compchemeng.2009.02.001
URL: http://libgen.org/scimag1/10.1016/j.compchemeng.2009.02.001.pdf

Получена 15.06.2013

References

1. Dreyper N. Prikladnoy Applied Regression Analysis : v 2 kn. [Text] / N. Dreyper. – Moscow : Finansyiistatistika, 1986. – T 1. – 431 p.; – T 2. – 480 p. [in Russian].

2. Mosteller F. Data Analysis and Regression. [Text] / F. Mosteller, D. Tyuki. – Moscow : Finansyiistati-stika – 1982. –Vyipusk 2. – 572 p. [in Russian].

3. Hoerlb A. E. Technometrics [Text] / A. E. Hoerlb, R. W. Kerhara, Ridy Regression. – 1970. – V. 12. – 478 p. [in Russian].

4. Tihonov A. A. Methods for Solving Ill-posed Problems [Text] / A. A. Tihonov, Ya. M. Arsenin. – Nauka, 1979. – 267 p.; – 1986. – 284 p. [in Russian].

5. Meshalkin L. D., The use of the Weight Function in the Evaluation of Regression Dependence [Text] / L. D. Meshalkin – // Multivariate Statistical Analysis of Socio-economic Research. – Moscow : – 1974. – 486 p. [in Russian].

6. Strizhov V. V. Search for a Parametric Regression Model to a given set of Inductively [Text] / V. V. Strizhov // Computational Technologies. – 2007. – T. 1. – C. 93 – 100. [in Russian].

7. Ivahnenko A. G. Modeling of Complex Systems from Experimental Data [Text] / A. G. Ivahnenko, Yu. P. Yurachkovskiy. – Moscow : Radio isvyaz, 1987. – 120 p. [in Russian].

8. Haines G.V. Modeling by Singular Value Decomposition and the Elimination of Statistically Insignificant Coefficients [Text] / G. V. Haines, R. A. D. Fiori // Computers and Geosciences.– 2013. – P. 19 – 28 [in English].
DOI: 10.1016/j.cageo.2013.04.021.
URL: http://sci-hub.org/pdfcache/9702cfd50369c60202b792ec6d81160e.pdf.

9. Li S. a. Robust Parameters Estimation of Regression Model Based on Singular Value Decomposition [Text] / S. a. Li, J. a. b. Yang. // Proceedings of the International Symposium on Test and Measurement. – 2003. – P. 4612 – 4616 [in English].

10. Qi C. A Time/space Separation-based Hammerstein Modeling Approach for Nonlinear Distributed Parameter Processes [Text] / C. Qi, H.-X. Li // Computers and Chemical Engineering. – 2009. – P. 1247 – 1260 [in English]
DOI: 10.1016/j.compchemeng.2009.02.001.
URL: http://libgen.org/scimag1/10.1016/j.compchemeng.2009.02.001.pdf.

Востров
Георгий Николаевич,
канд. техн. наук, доц. каф. прикладной математики и информационных технологий Одесского нац. политехн. ун-та,
+38(050)3168776,
vostrov@gmail.com

Атие Аднан,
Аспирант Одесского нац. политехн. ун-та,
+38(093)6568880,
adnanatee2010 @hotmail.com