МАШИНОБУДУВАННЯ
ТЕХНОЛОГІЯ МЕТАЛІВ
МАТЕРІАЛОЗНАВСТВО

MACHINE BUILDING
PROCESS METALLURGY
MATERIALS SCIENCE

УДК 539.3

Ю.П. Глухов, канд. физ.-мат. наук, доц., Ин-т механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, г. Киев

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ПОЛОСЫ НА ЖЕСТКОМ ОСНОВАНИИ

Введение. Практически во всех областях естествознания и техники возникают проблемы, связанные с теорией распространения упругих волн. Одной из интересных и актуальных проблем, анализ которой невозможно провести в рамках классической теории распространения упругих волн, является теория распространения упругих волн в телах с начальными напряжениями, круг прикладных аспектов которой весьма широк.

Анализ последних исследований и публикаций. В данной статье в рамках линеаризированной теории упругости для тел с начальными напряжениями [1] рассмотрена плоская установившаяся задача о возмущении движущейся с постоянной скоростью поверхностной нагрузкой двухслойной полосы, лежащей на жестком основании.

Предположим, что движение верхнего слоя полосы может быть описано системой уравнений из теории пластин, учитывающей влияние инерции вращения и поперечного сдвига. Подстилающий слой, лежащий на жестком основании, имеет начальные напряжения и состоит из сжимаемого материала с произвольным упругим потенциалом. К свободной границе полосы приложена движущаяся с постоянной скоростью **v** нагрузка, вызывающая в рассматриваемой слоистой среде плоское деформированное состояние. Аналогичная задача для двухслойного полупространства рассмотрена в работе [2].

Целью работы является решение плоской установившейся задачи о возмущении движущейся с постоянной скоростью поверхностной нагрузки двухслойной предварительно напряженной полосы на жестком основании.

Изложение основного материала. Для пластины, находящейся под воздействием поперечных и тангенциальных поверхностных сил, в подвижной системе координат уравнения движения могут быть записаны, как показано в [2]:

DOI 10.15276/opu.2.44.2014.03

ISSN 2076-2429 (print)
ISSN 2223-3814 (on line)

$$
\begin{gathered}
2h\left(\frac{2G_1}{1-\nu_1}-\rho_1 v^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}-\tau=P_1;\\
2h\left(\kappa G_1-\rho_1 v^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y_1^2}-2\kappa G_1 h\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}-q=P_2;\\
\frac{2h^2}{3}\left(\frac{2G_1}{1-\nu_1}-\rho_1 v^2\delta_0\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}+2\kappa G_1\left(\frac{\partial w}{\partial y_1}-\varphi\right)-\tau=0,
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где $2h$ — толщина пластины;

G_1, ν_1 и ρ_1 — модуль сдвига, коэффициент Пуассона и плотность материала пластины, соответственно;

u и w — перемещения срединной поверхности пластины $\left(y_2=0\right)$;

δ_0 — постоянная, которая принимает значение 1 или 0 в зависимости от учета или пренебрежения инерцией вращения пластины при выводе уравнений (1);

φ — угол поворота поперечного сечения пластины;

κ — коэффициент сдвига Тимошенко;

q и τ — соответственно нормальные и касательные напряжения, действующие на поверхности раздела пластины и подстилающего слоя;

P_1 и P_2 — касательные и нормальные составляющие нагрузки на свободной поверхности пластины.

Изгибающий момент в пластине в подвижной системе координат

$$M=\frac{4}{3}\frac{G_1 h^3}{1-\nu_1}\frac{d\varphi}{dy_1}. \tag{2}$$

Предполагая, что картина деформаций инвариантна относительно времени в движущейся вместе с нагрузкой системе координат, уравнение установившегося движения подстилающего предварительно напряженного слоя

$$\left(\eta_1^2\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)\left(\eta_2^2\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)\chi^{(j)}=0,\ j=1,2. \tag{3}$$

Корни η_1 и η_2 определяются из уравнения

$$\eta^4+2A\eta^2+A_1=0, \tag{4}$$

где для сжимаемого материала

$$
\begin{gathered}
2A\tilde{\omega}_{2222}\tilde{\omega}_{2112}=\tilde{\omega}_{2222}(\tilde{\omega}_{1111}-\tilde{\rho}v^2)+\tilde{\omega}_{2112}(\tilde{\omega}_{1221}-\tilde{\rho}v^2)-(\tilde{\omega}_{1122}+\tilde{\omega}_{1212})^2;\\
2A_1\tilde{\omega}_{2222}\tilde{\omega}_{2112}=(\tilde{\omega}_{1111}-\tilde{\rho}v^2)(\tilde{\omega}_{1221}-\tilde{\rho}v^2);\quad \tilde{\rho}\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\rho,
\end{gathered}
$$

ρ — плотность материала полупространства в естественном состоянии;

λ_i — начальные удлинения ($\lambda_i=\text{const}$);

$\tilde{\omega}$ — тензор, который характеризует материал подстилающего слоя.

Предполагается, что возможны два варианта контакта элементов полосы между собой и жестким основанием.

При $y_2=-h$ условия контакта между пластиной и подстилающим слоем

$$\tilde{Q}_{22}=q;\quad u_2=w;\quad \theta^{\{1\}}\tilde{Q}_{21}=\tau;\quad (1-\theta^{\{1\}})\tilde{Q}_{21}=\theta^{\{1\}}(u_1-u-h\varphi). \tag{5}$$

Контакт слоя с жестким основанием при $y_2=-h-H$

$$u_2=0;\quad (\theta^{\{2\}}-1)\tilde{Q}_{21}=\theta^{\{2\}}u_1. \tag{6}$$

Здесь $\theta_1^{\{s\}}=1 \quad (s=1,2)$ соответствует жесткому контакту, а $\theta_1^{\{s\}}=0$ — нежесткому контакту элементов слоистой среды между собой и основанием. H — толщина подстилающего слоя.

При изложенных выше условиях имеем плоскую установившуюся задачу, состоящую в совместном решении уравнений движения (3) при соответствующих граничных условиях (1), (5), (6) и условия затухания на бесконечности.

Перемещения и напряжения в формулах (5) и (6) через функции $\chi^{(j)} \quad (j=1,2)$

$$u_i=-\beta_{i1}^{(i)}\frac{\partial^2\chi^{(i)}}{\partial y_1\partial y_2}+\left(\beta_{i1}^{(j)}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\beta_{i2}^{(j)}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)\chi^{(j)};\quad i,j=1,2;\quad i\neq j;$$
$$\tilde{Q}_{ij}=\left(\alpha_{ij}^{(12)}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\alpha_{ij}^{(22)}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)\frac{\partial\chi^{(2)}}{\partial y_{2-\delta_{ij}}}+\left(\alpha_{ij}^{(11)}\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}+\alpha_{ij}^{(21)}\frac{\partial^2}{\partial y_2^2}\right)\frac{\partial\chi^{(1)}}{\partial y_{1+\delta_{ij}}}, \tag{7}$$

где в случае сжимаемых тел

$$\alpha_{jj}^{(12)}=\tilde{\omega}_{jj11}(\tilde{\omega}_{1221}-\tilde{\rho}\mathrm{v}^2);\quad \alpha_{jj}^{(22)}=\tilde{\omega}_{jj11}\tilde{\omega}_{2222}-\tilde{\omega}_{jj22}(\tilde{\omega}_{1122}+\tilde{\omega}_{2121});$$
$$\alpha_{jj}^{(21)}=\tilde{\omega}_{jj22}\tilde{\omega}_{2112};\quad \alpha_{jj}^{(11)}=\tilde{\omega}_{jj22}(\tilde{\omega}_{1111}-\tilde{\rho}\mathrm{v}^2)-\tilde{\omega}_{jj11}(\tilde{\omega}_{1212}+\tilde{\omega}_{2211});$$
$$\alpha_{ij}^{(11)}=\tilde{\omega}_{ij21}(\tilde{\omega}_{1111}-\tilde{\rho}\mathrm{v}^2);\quad \alpha_{ij}^{(21)}=\tilde{\omega}_{ij21}\tilde{\omega}_{2112}-\tilde{\omega}_{ij12}(\tilde{\omega}_{1212}+\tilde{\omega}_{2211});$$
$$\alpha_{ij}^{(12)}=\tilde{\omega}_{ij12}(\tilde{\omega}_{1221}-\tilde{\rho}\mathrm{v}^2)-\tilde{\omega}_{ij21}(\tilde{\omega}_{1122}+\tilde{\omega}_{2121});\quad \alpha_{ij}^{(22)}=\tilde{\omega}_{ij12}\tilde{\omega}_{2222};$$
$$\beta_{j1}^{(j)}=\tilde{\omega}_{1212}+\tilde{\omega}_{2211};\quad \beta_{i1}^{(j)}=\tilde{\omega}_{1jj1}-\tilde{\rho}\mathrm{v}^2;\quad \beta_{i2}^{(j)}=\tilde{\omega}_{2jj2};\quad i,j=1,2;\quad i\neq j.$$

Результаты. Решение задачи найдем с помощью интегрального преобразования Фурье по переменной y_1. Определим решение задачи в общем виде для случаев неравных и равных корней уравнения (4), для различных условий сопряжения элементов полосы и основания и для любой скорости движения нагрузки. Решение преобразованных уравнений (3) с учетом затухания на бесконечности будем искать в виде

$$\chi^{(j)F}=[1-\delta_{j2}(1-\delta_{\mu_1\mu_2})]\{C_1^{(j)}e^{k\gamma_1(y_2+h)}+C_3^{(j)}e^{-k\gamma_2(y_2+h)}+$$
$$+[1-\delta_{\mu_1\mu_2}+\delta_{\mu_1\mu_2}(y_2+h)](C_2^{(j)}e^{k\gamma_2(y_2+h)}+C_4^{(j)}e^{-k\gamma_1(y_2+h)})\}, \tag{8}$$

где $C_m^{(j)} \quad (j=1,2;\quad m=\overline{1,4})$ — постоянные интегрирования;

$$\delta_{\eta_1\eta_2}=\begin{cases}0, & \eta_1\neq\eta_2\\ 1, & \eta_1=\eta_2\end{cases};\quad \delta_{j2}=\begin{cases}0, & j=1\\ 1, & j=2\end{cases}.$$

Введем постоянные интегрирования

$$C_m^{(1)}=C_m;\quad m=\overline{1,4};\quad C_m^{(2)}=i\gamma_m C_m;\quad C_{m+2}^{(2)}=i\gamma_{3-m}C_{m+2};\quad m=1,2. \tag{9}$$

С учетом (8) и (9) соотношения (2) и (7)

$$M^F=\frac{4}{3}\frac{iG_1h^3k}{1-\mathrm{v}_1}\varphi^F;$$
$$u_n^F=i^n\sum_{j=1}^{4}\left[\sum_{m=1}^{2}\alpha_{jm}^{(n)}{y_2}^{m-1}\right]C_je^{(-1)^{j+\tau}\gamma_\tau y_2};$$
$$\tilde{Q}_{nm}^F=i^{(1-\delta_{nm})}\sum_{j=1}^{4}\left[\sum_{q=1}^{2}\gamma_{jq}^{(nm)}{y_2}^{q-1}\right]C_je^{(-1)^{\tau+j}\gamma_\tau y_2};$$
$$n,m=\overline{1,2};\quad \tau=\delta_{1j}+\delta_{4j}+2(\delta_{2j}+\delta_{3j}), \tag{10}$$

 ISSN 2076-2429 (print)
ISSN 2223-3814 (on line)

где

$$\gamma_{jj}^{(1)} = k(\delta_{\mu_1\mu_2}\varsigma_{jj}^{(21)} - \varsigma_{jj}^{(11)}); \quad \gamma_{jj}^{(3)} = k(\delta_{\mu_1\mu_2}\varsigma_{jj}^{(22)} + \varsigma_{jj}^{(12)});$$

$$\gamma_{jj}^{(2)} = -\{\delta_{\mu_1\mu_2}\zeta_{jj}^{(2)} + k[(1-\delta_{\mu_1\mu_2})\varsigma_{jj}^{(12)} + \delta_{\mu_1\mu_2}(y_2+h)(\varsigma_{jj}^{(12)} - \varsigma_{jj}^{(22)})]\};$$

$$\gamma_{jj}^{(4)} = -\{\delta_{\mu_1\mu_2}\zeta_{jj}^{(1)} - k[(1-\delta_{\mu_1\mu_2})\varsigma_{jj}^{(11)} + \delta_{\mu_1\mu_2}(y_2+h)(\varsigma_{jj}^{(21)} + \varsigma_{jj}^{(11)})]\};$$

$$\gamma_{mj}^{(1)} = k(\delta_{\mu_1\mu_2}\varsigma_{mj}^{(21)} - \varsigma_{mj}^{(11)}); \quad \gamma_{mj}^{(3)} = k(\delta_{\mu_1\mu_2}\varsigma_{mj}^{(22)} - \varsigma_{mj}^{(12)});$$

$$\gamma_{mj}^{(2)} = \delta_{\mu_1\mu_2}\zeta_{mj}^{(2)} - k[(1-\delta_{\mu_1\mu_2})\varsigma_{mj}^{(12)} + \delta_{\mu_1\mu_2}(y_2+h)(\varsigma_{mj}^{(22)} + \varsigma_{mj}^{(12)})];$$

$$\gamma_{mj}^{(4)} = \delta_{\mu_1\mu_2}\zeta_{mj}^{(1)} - k[(1-\delta_{\mu_1\mu_2})\varsigma_{mj}^{(11)} - \delta_{\mu_1\mu_2}(y_2+h)(\varsigma_{mj}^{(21)} - \varsigma_{mj}^{(11)})];$$

$$\alpha_1^{(1)} = -k(\tau_1^{(11)} + \delta_{\mu_1\mu_2}\tau_1^{(21)}); \quad \alpha_1^{(3)} = k(\tau_1^{(12)} - \delta_{\mu_1\mu_2}\tau_1^{(22)});$$

$$\alpha_1^{(2)} = -\{\delta_{\mu_1\mu_2}\xi_1^{(2)} + k[(1-\delta_{\mu_1\mu_2})\tau_1^{(12)} + \delta_{\mu_1\mu_2}(y_2+h)(\tau_1^{(12)} + \tau_1^{(22)})]\};$$

$$\alpha_1^{(4)} = -\{\delta_{\mu_1\mu_2}\xi_1^{(1)} - k[(1-\delta_{\mu_1\mu_2})\tau_1^{(11)} + \delta_{\mu_1\mu_2}(y_2+h)(\tau_1^{(11)} - \tau_1^{(21)})]\};$$

$$\alpha_2^{(1)} = k(\delta_{\mu_1\mu_2}\tau_2^{(11)} - \tau_2^{(21)}); \quad \alpha_2^{(3)} = -k(\delta_{\mu_1\mu_2}\tau_2^{(12)} + \tau_2^{(22)});$$

$$\alpha_2^{(2)} = \delta_{\mu_1\mu_2}\xi_2^{(2)} - k[(1-\delta_{\mu_1\mu_2})\tau_2^{(22)} - \delta_{\mu_1\mu_2}(y_2+h)(\tau_2^{(12)} - \tau_2^{(22)})];$$

$$\alpha_2^{(4)} = \delta_{\mu_1\mu_2}\xi_2^{(1)} - k[(1-\delta_{\mu_1\mu_2})\tau_2^{(21)} + \delta_{\mu_1\mu_2}(y_2+h)(\tau_2^{(11)} + \tau_2^{(21)})];$$

$$\varsigma_{jj}^{(np)} = \gamma_p(\alpha_{jj}^{(1n)} - \alpha_{jj}^{(2n)}\gamma_p^2); \quad \zeta_{jj}^{(p)} = \alpha_{jj}^{(11)} + 2(-1)^p\alpha_{jj}^{(22)}\gamma_p^2 - 3\alpha_{jj}^{(21)}\gamma_p^2;$$

$$\varsigma_{mj}^{(2p)} = \gamma_p^2(\alpha_{mj}^{(12)} - \alpha_{mj}^{(22)}\gamma_p^2); \quad \tau_1^{(1p)} = \gamma_p\beta_{11}^{(1)}; \quad \tau_2^{(1p)} = \beta_{21}^{(2)}\gamma_p^2;$$

$$\varsigma_{mj}^{(1p)} = (\alpha_{mj}^{(11)} - \alpha_{mj}^{(21)}\gamma_p^2); \quad \zeta_{mj}^{(p)} = \gamma_p(-\alpha_{mj}^{(12)} + 2(-1)^m\alpha_{mj}^{(21)} + 3\alpha_{mj}^{(22)}\gamma_p^2);$$

$$\tau_1^{(2p)} = \gamma_p(\beta_{11}^{(2)} - \beta_{12}^{(2)}\gamma_p^2); \quad \xi_1^{(p)} = \beta_{11}^{(1)} - 2(-1)^p\beta_{12}^{(2)}\gamma_p^2;$$

$$\tau_2^{(2p)} = \beta_{21}^{(1)} - \beta_{22}^{(1)}\gamma_p^2; \quad \xi_2^{(p)} = \gamma_p(\beta_{21}^{(2)} - 2(-1)^p\beta_{22}^{(1)}).$$

Подставляя (10) в преобразованную систему уравнений (1), (5) и (6), получаем систему алгебраических уравнений относительно неизвестных $\tilde{C}_m \quad (m=\overline{1,5}) \; (\tilde{C}_m = C_m, \; m=\overline{1,4}, \; \tilde{C}_5 = \varphi^F)$:

$$\sum_{m=1}^{5} a_{jm}\tilde{C}_m = b_j; \quad j = \overline{1,5}, \tag{11}$$

где

$$a_{11} = k^2[(k\theta_1\alpha_1^{(1)} + 2\kappa G_1\alpha_2^{(1)})\theta^{\{1\}} - (1-\theta^{\{1\}})\gamma_{21}^{(1)}];$$

$$a_{12} = k^2[(k\theta_1\tilde{\alpha}_1^{(2)} + 2\kappa G_1\tilde{\alpha}_2^{(2)})\theta^{\{1\}} - (1-\theta^{\{1\}})\tilde{\gamma}_{21}^{(2)}];$$

$$a_{13} = k^2[(k\theta_1\alpha_1^{(3)} + 2\kappa G_1\alpha_2^{(3)})\theta^{\{1\}} - (1-\theta^{\{1\}})\gamma_{21}^{(3)}];$$

$$a_{14} = k^2[(k\theta_1\tilde{\alpha}_1^{(4)}C_4 + 2\kappa G_1\tilde{\alpha}_2^{(4)})\theta^{\{1\}} - (1-\theta^{\{1\}})\tilde{\gamma}_{21}^{(4)}];$$

$$a_{15} = i\theta^{\{1\}}(k^2\theta_4 + 2\kappa G_1); \quad a_{21} = k^2(k\theta_3\alpha_2^{(1)} + \gamma_{22}^{(1)});$$

$$a_{22} = k^2(k\theta_3\tilde{\alpha}_2^{(2)} + \tilde{\gamma}_{22}^{(2)}); \quad a_{23} = k^2(k\theta_3\alpha_2^{(3)} + \gamma_{22}^{(3)});$$

$$a_{24} = k^2(k\theta_3\tilde{\alpha}_2^{(4)} + \tilde{\gamma}_{22}^{(4)}); \quad a_{25} = 2ik\kappa G_1 h; \quad a_{31} = k^2(2\kappa G_1\alpha_2^{(1)} - \theta^{\{1\}}\gamma_{21}^{(1)});$$

$$a_{32} = k^2(2\kappa G_1\tilde{\alpha}_2^{(2)} - \theta^{\{1\}}\tilde{\gamma}_{21}^{(2)}); \quad a_{33} = k^2(2\kappa G_1\alpha_2^{(3)} - \theta^{\{1\}}\gamma_{21}^{(3)});$$

$$a_{34}=k^2(2\kappa G_1\tilde{\alpha}_2^{(4)}-\theta^{\{1\}}\tilde{\gamma}_{21}^{(4)});\quad a_{35}=i(k^2\theta_2+2\kappa G_1);\quad a_{41}=\alpha_2^{(1)}e^{-k\gamma_1 H};$$
$$a_{42}=\tilde{\alpha}_2^{(2)}e^{-k\gamma_2 H};\quad a_{43}=\alpha_2^{(3)}e^{k\gamma_2 H};\quad a_{44}=\tilde{\alpha}_2^{(4)}e^{k\gamma_1 H};$$
$$a_{51}=[(\theta^{\{2\}}-1)k\gamma_{21}^{(1)}-\theta^{\{2\}}\alpha_1^{(1)}]e^{-k\gamma_1 H};\quad a_{52}=[(\theta^{\{2\}}-1)k\tilde{\gamma}_{21}^{(2)}-\theta^{\{2\}}\tilde{\alpha}_1^{(2)}]e^{-k\gamma_2 H};$$
$$a_{53}=[(\theta^{\{2\}}-1)k\gamma_{21}^{(3)}-\theta^{\{2\}}\alpha_1^{(3)}]e^{k\gamma_2 H};\quad a_{45}=a_{55}=0;$$
$$a_{54}=[(\theta^{\{2\}}-1)k\tilde{\gamma}_{21}^{(4)}-\theta^{\{2\}}\tilde{\alpha}_1^{(4)}]e^{k\gamma_1 H};\quad b_1=i\delta_{2\theta}P_1^F;\quad b_2=-P_2^F;\quad b_3=b_4=b_5=0;$$
$$\theta=\theta^{\{1\}}+\theta^{\{2\}};\quad \theta_1=2h\left(\frac{2G_1}{1-\nu_1}-\rho_1\nu^2\right);\quad \theta_2=\frac{2h^2}{3}\left(\frac{2G_1}{1-\nu_1}-\delta_0\rho_1\nu^2\right);$$
$$\theta_3=2h(\kappa G_1-\rho_1\nu^2);\quad \theta_1 h+\theta_2=\theta_4;$$
$$\gamma_{21}^{(2)}\Big|_{y_2=-h-H}\equiv\tilde{\gamma}_{21}^{(2)};\quad \gamma_{21}^{(4)}\Big|_{y_2=-h-H}\equiv\tilde{\gamma}_{21}^{(4)};\quad \alpha_1^{(2)}\Big|_{y_2=-h-H}\equiv\tilde{\alpha}_1^{(2)};$$
$$\alpha_1^{(4)}\Big|_{y_2=-h-H}\equiv\tilde{\alpha}_1^{(4)};\quad \alpha_2^{(2)}\Big|_{y_2=-h-H}\equiv\tilde{\alpha}_2^{(2)};\quad \alpha_2^{(4)}\Big|_{y_2=-h-H}\equiv\tilde{\alpha}_2^{(4)}.$$

Решение системы (11)

$$\tilde{C}_m=\Delta_m(k)/\Delta(k);\quad j=\overline{1,5}, \tag{12}$$

где

$$\Delta(k)=k^4(e^{-k(\gamma_1+\gamma_2)H}K_{45}^{12}M_{345}-e^{-k(\gamma_1-\gamma_2)H}K_{45}^{13}M_{245}-$$
$$-e^{k(\gamma_1-\gamma_2)H}K_{45}^{24}M_{135}+e^{k(\gamma_1+\gamma_2)H}K_{45}^{34}M_{125}+K_{45}^{23}M_{145}+K_{45}^{14}M_{235});$$
$$\Delta_1(k)=i\delta_{2\theta}k^2P_1^F(e^{k(\gamma_1+\gamma_2)H}K_{23}^{25}K_{45}^{34}-e^{k(\gamma_1-\gamma_2)H}K_{23}^{35}K_{45}^{24}+K_{23}^{45}K_{45}^{23})+$$
$$+k^2P_2^F(e^{k(\gamma_1+\gamma_2)H}K_{13}^{25}K_{45}^{34}-e^{k(\gamma_1-\gamma_2)H}K_{13}^{35}K_{45}^{24}+K_{13}^{45}K_{45}^{23});$$
$$\Delta_2(k)=-i\delta_{2\theta}k^2P_1^F(e^{k(\gamma_1+\gamma_2)H}K_{23}^{15}K_{45}^{34}-K_{23}^{35}K_{45}^{14}+e^{-k(\gamma_1-\gamma_2)H}K_{23}^{45}K_{45}^{13})-$$
$$-k^2P_2^F(e^{k(\gamma_1+\gamma_2)H}K_{13}^{15}K_{45}^{34}-K_{13}^{35}K_{45}^{14}+e^{-k(\gamma_1-\gamma_2)H}K_{13}^{45}K_{45}^{13});$$
$$\Delta_3(k)=i\delta_{2\theta}k^2P_1^F(e^{k(\gamma_1-\gamma_2)H}K_{23}^{15}K_{45}^{24}-K_{23}^{25}K_{45}^{14}+e^{-k(\gamma_1+\gamma_2)H}K_{23}^{45}K_{45}^{12})+$$
$$+k^2P_2^F(e^{k(\gamma_1-\gamma_2)H}K_{13}^{15}K_{45}^{24}-K_{13}^{25}K_{45}^{14}+e^{-k(\gamma_1+\gamma_2)H}K_{13}^{45}K_{45}^{12});$$
$$\Delta_4(k)=-i\delta_{2\theta}k^2P_1^F(K_{23}^{15}K_{45}^{23}-e^{-k(\gamma_1-\gamma_2)H}K_{23}^{25}K_{45}^{13}+e^{-k(\gamma_1+\gamma_2)H}K_{23}^{35}K_{45}^{12})-$$
$$-k^2P_2^F(K_{13}^{15}K_{45}^{23}-e^{-k(\gamma_1-\gamma_2)H}K_{13}^{25}K_{45}^{13}+e^{-k(\gamma_1+\gamma_2)H}K_{13}^{35}K_{45}^{12});$$
$$\Delta_5(k)=i\delta_{2\theta}k^4P_1^F(e^{k(\gamma_1+\gamma_2)H}K_{23}^{12}K_{45}^{34}-e^{k(\gamma_1-\gamma_2)H}K_{23}^{13}K_{45}^{24}+K_{23}^{14}K_{45}^{23}+$$
$$+K_{23}^{23}K_{45}^{14}-e^{-k(\gamma_1-\gamma_2)H}K_{23}^{24}K_{45}^{13}+e^{-k(\gamma_1+\gamma_2)H}K_{23}^{34}K_{45}^{12})+$$
$$+k^4P_2^F(e^{k(\gamma_1+\gamma_2)H}K_{13}^{12}K_{45}^{34}+e^{k(\gamma_1-\gamma_2)H}K_{13}^{13}K_{45}^{24}+K_{13}^{14}K_{45}^{23}+$$
$$+K_{13}^{23}K_{45}^{14}-e^{-k(\gamma_1-\gamma_2)H}K_{13}^{24}K_{45}^{13}+e^{-k(\gamma_1+\gamma_2)H}K_{13}^{34}K_{45}^{12});$$

$$M_{ijn}=\begin{vmatrix}a_{1i}&a_{1j}&a_{1n}\\a_{2i}&a_{2j}&a_{2n}\\a_{3i}&a_{3j}&a_{3n}\end{vmatrix};\quad K_{pq}^{ij}=\begin{vmatrix}a_{pi}&a_{pj}\\a_{qi}&a_{qj}\end{vmatrix};\quad i,j,n,p,q=\overline{1,5}.$$

Выводы. Трансформанты характеристик напряженно-деформированного состояния определяются согласно (10) с учетом (12). Для того чтобы перейти в формулах (10) к оригиналам, следует воспользоваться обратным преобразованием Фурье.

Литература

1. Гузь, А.Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями: монография / А.Н. Гузь; НАН Украины. Ин-т механики им. С.П. Тимошенко. — К.: А.С.К., 2004. — 671 с.

2. Бабич, С.Ю. Об одной динамической задаче для слоистого сжимаемого полупространства с начальными напряжениями / С.Ю. Бабич, Ю.П. Глухов, А.Н. Гузь // Прикл. механика. — 2008. — Т. 44, № 4. — С. 35 — 55.

References

1. Guz, A.N. (2004). *Elastic Waves in Bodies with Initial (Residual) Stresses.* Kyiv: A.S.K.
2. Babich, S.Yu., Glukhov, Yu.P. and Guz, A.N. (2008). A dynamic problem for a prestressed compressible layered half-space. *International Applied Mechanics*, 44(4), 388-405.

АНОТАЦІЯ / АННОТАЦИЯ / ABSTRACT

Ю.П. Глухов. **Динамічна задача для двохшарової полоси на жорсткій основі.** Наведено проміжні результати дослідження плоских задач про збурення рухомим поверхневим навантаженням багатошарової основи з початковими (залишковими) напруженнями. У рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями розглянуті постановка і метод розв'язання плоскої усталеної задачі про збурення двохшарової заздалегідь напруженої полоси на жорсткій основі поверхневим навантаженням, що рухається з постійною швидкістю. Розглянута модель шаруватого середовища "пластина і заздалегідь напружений шар". Рівняння руху пластини записуються з урахуванням зсуву і інерції обертання. Матеріал шару вважається стисливим, ізотропним в природному стані. Форма пружного потенціалу має загальний вигляд і повинна бути конкретизована лише при виконанні чисельних розрахунків. За допомогою методу інтегральних перетворень Фур'є отримано в загальному вигляді фундаментальне розв'язання задачі при різних умовах контакту і швидкостях руху навантаження.
Ключові слова: початкове напруження, навантаження, що рухається з постійною швидкістю, двошарова полоса, стисливий матеріал.

Ю.П. Глухов. **Динамическая задача для двухслойной полосы на жестком основании.** Приведены промежуточные результаты исследования плоских задач о возмущении подвижной поверхностной нагрузкой многослойного основания с начальными (остаточными) напряжениями. В рамках линеаризированной теории упругости для тел с начальными напряжениями рассмотрены постановка и метод решения плоской установившейся задачи о возмущении движущейся с постоянной скоростью поверхностной нагрузки двухслойной предварительно напряженной полосы на жестком основании. Рассмотрена модель слоистой среды "пластина и предварительно напряженный слой". Уравнения движения пластины записываются с учетом сдвига и инерции вращения. Материал слоя предполагается сжимаемым, изотропным в естественном состоянии. Форма упругого потенциала имеет общий вид и должна быть конкретизирована лишь при выполнении численных расчетов. С помощью метода интегральных преобразований Фурье получено в общем виде фундаментальное решение задачи при различных условиях контакта и скоростях движения нагрузки.
Ключевые слова: начальное напряжение, движущаяся с постоянной скоростью нагрузка, двухслойная полоса, сжимаемый материал.

Yu.P. Glukhov. **Dynamic problem for two-layered stripe on the rigid basis.** The intermediate results of the study of planar problems about perturbation by movable surface load of multilayer base with initial (residual) stresses are presented. Within the bounds of linearizired theory of elasticity for bodies with initial stresses there are considered the statement and method of solving a planar problem of the perturbation of the surface load moving with a constant speed of two-layered pre-stressed stripe with the rigid basis. The model of the layered medium "a plate and pre-stressed layer" is considered. Equations of plate motion are written taking into account the shift and rotary inertia. Layer material is assumed compressible, isotropic in the natural state. The form of elastic potential has a general form and must be specified only while implementation of numeral calculations. With the help of the Fourier integral transform method a fundamental solution to the problem is obtained in general form under various conditions of contact and speeds of load.
Keywords: initial stress, load moving with a constant speed, two-layered stripe, compressible material.

Рецензент д-р техн. наук., проф. Одес. нац. политехн. ун-та Сурьянинов Н.Г.

Поступила в редакцию 7 марта 2014 г.