УДК 004.61

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПРОЦЕСУ ФІЛЬТРАЦИИ У ГЕТЕРОГЕННІЙ СИСТЕМІ ЗА НАЯВНОСТІ ГРАНИЧНОГО ГРАДІЄНТУ

Савич В. С.
Одеський Національний Політехнічний Університет, УКРАЇНА

АНОТАЦІЯ. Виконано дослідження сталості фронтального витіснення для гетерогенних (багатокомпонентних) пластових систем, що представлено рідинами, за умови впливу граничного градієнта функції стану. Запропоновано математичну модель класу задач фронтального витіснення для гетерогенних трикомпонентних систем з граничним градієнтом в вигляді варіаційних нерівностей, що забезпечує спрощену числову реалізацію.

Вступ. Якісно новою, і такою, що раніше не віднайшла розв'язання, задачею вивчення гетерогенних (багатокомпонентних) систем, є дослідження *сталості фронтального витіснення* при взаємній фільтрації компонент гетерогенних систем та наявності впливу граничного градієнту функції стану. В даному випадку сталість фронтального витіснення визначає [1] «гладкість» границі розділу компонент, що фільтруються (дифундують у пористому середовищі).

Вперше показано, що дослідження гладкості границі розділу компонент, які фільтруються, може бути використано при розв'язанні задачі на утворення «застійних» зон, тобто невідфільтрованих зон компоненти, що витискається. В прикладному аспекті подібні задачі виникають, наприклад, при моделюванні нафтових родовищ, що розробляються у водонапірному режимі (витискання нафти водою). «Застійними» зонами тут виступають зони невідфільтрованої нафти, а забезпечення «гладкості» фронту витиснення (тобто запобігання утворення цих «застійних» зон) сприяє підвищенню нафтодобутку. Поставлену задачу було розв'язано також для випадку, коли компоненти гетерогенної системи мають аномальний характер (тобто їх фільтрація характеризується законом з граничним градієнтом [1, 2].

Мета роботи. Розробка класу математичних моделей (ММ) процесів фільтрації гетерогенних систем, динаміка яких визначається впливом граничного градієнту функції стану.

Основна частина. Умовою, що визначає границю розділу дифундуючих компонент у випадку спільної фільтрації двох рідин, що не змішуються, може слугувати «стрибок» насиченості в функції Баклея-Леверетта [1, 3, 4 — 6]

$$J(S) = \frac{k_1^0(S_1)}{\mu_1 k_1^0(S_1) + \mu_2 k_2^0(S_2)}, \tag{1}$$

де $k_1^0(S_1)$ и $k_2^0(S_2)$ — відносні фазові проникності рідин, що фільтруються; μ_1 и μ_2 — їх в'язкості; S_1 та S_2 — насиченості пористого простору рідинами, що фільтруються, відповідно.

Використовуючи рівняння «стрибка» насиченості (1) та рівняння динаміки процесу двофазної фільтрації з граничним градієнтом G, що описує фільтрацію при відхиленні від закону Дарсі [2], отримано ММ «поршневого» витискання у вигляді системи варіаційних нерівностей. При цьому «поршнем» виступає проміжний «агент», наприклад, піна або полімер, які є хорошими витискачами

$$\forall v,\, S_l \in K : -\frac{\partial S_1}{\partial t}(v - S_1) - \int_\Omega \frac{k_1}{\mu_1} J(S_1)\left\{[1 - S_1 G_1]\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_i}\left[\frac{\partial(v - S_1)}{\partial z_i}\right]dz\right\} +$$

$$+ \int_\Omega \frac{k_1}{\mu_1} J(S_1)\left\{[1 - S_1 G_1]\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}|v|\right]\right\}dz - \int_\Omega \frac{k_1}{\mu_1} J(S_1)\left\{[1 - S_1 G_1]\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}|S_1|\right]\right\}dz \ge \sum_{m=1}^{M_1}\zeta_m Q_m, \tag{2}$$

$$-\frac{\partial S_2}{\partial t} - \frac{k_2}{\mu_2} J(S_2)\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}\right] = \sum_{m=1}^{M_2}\zeta_m Q_m, \tag{3}$$

$$-\frac{\partial S_3}{\partial t}(v-S_3)-\int_\Omega \frac{k_3}{\mu_3}J(S_3)\left\{[1-S_3\,G_3]\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial S_3}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial(v-S_3)}{\partial z_i}\right]dz\right\}+$$

$$+\int_\Omega \frac{k_3}{\mu_3}J(S_3)\left\{[1-S_3\,G_3]\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}|v|\right]\right\}dz-\int_\Omega \frac{k_3}{\mu_3}J(S_3)\left\{[1-S_3\,G_3]\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}|S_3|\right]\right\}dz\geq 0\,. \quad (4)$$

Початкові та граничні умови відповідно приймають вигляд

$$S_l(0,z)=S_{l_0}(z),\quad l=\overline{1,3}\,, \quad (5) \qquad\qquad (\partial P/\partial\eta)\big|_\Gamma>0,. \quad (6)$$

У виразах (2) — (6), крім вище зазначених, використано позначення: P — шукана функція внутрішньо пластового тиску; v — пробна функція, оптимальне значення якої $v^*=P$.

В числовій реалізації ММ виду (2) — (6) являє собою складну обчислювальну задачу, оскільки необхідно розв’язувати спільну систему варіаційних нерівностей (2), (4) та рівняння (3), що визначають динаміку процесу фільтрації гетерогенної системи. Задача ускладнюється тим, що необхідно враховувати граничні умови на двох границях : «вода — проміжний «агент» та «проміжний «агент» — нафта». Для спрощення числової реалізації застосовано наступний формальний прийом.

На кожній з границь прийнято відповідно очевидні умови $S_2=(1-S_3)$ та $S_1=(1-S_3)$. З урахуванням даних умов вирази (2) — (4) зводяться до вигляду

$$\forall v,S_l\in K:-\frac{\partial S_3}{\partial t}(v-S_3)-\int_\Omega \frac{k_1}{\mu_1}J(S_3)\left\{S_3G_1\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial S_3}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial(v-S_3)}{\partial z_i}\right]dz\right\}+$$

$$+\int_\Omega \frac{k_1\rho_1}{\mu_1}J(S_3)\left\{S_3\,G_1\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}|v|\right]\right\}dz-\int_\Omega \frac{k_1\rho_1}{\mu_1}J(S_3)\left\{S_3\,G_1\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}|S_3|\right]\right\}dz\geq\sum_{m=1}^{M_1}\zeta_m Q_m\,, \quad (7)$$

$$-\frac{\partial S_3}{\partial t}-\frac{k_2}{\mu_2}J(S_3)\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}\right]=\sum_{m=1}^{M_2}\zeta_m Q_m\;, \quad (8)$$

$$-\frac{\partial S_3}{\partial t}(v-S_3)-\int_\Omega \frac{k_3}{\mu_3}J(S_3)\left\{[1-S_3\,G_3]\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial S_3}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial(v-S_3)}{\partial z_i}\right]dz\right\}+$$

$$+\int_\Omega \frac{k_3}{\mu_3}J(S_3)\left\{[1-S_3\,G_3]\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}|v|\right]\right\}dz-\int_\Omega \frac{k_3}{\mu_3}J(S_3)\left\{[1-S_3\,G_3]\cdot\left[\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2}|S_3|\right]\right\}dz\geq 0\,. \quad (9)$$

У підсумку отримано, що система виду (7) — (9) з початковими (5) та граничними (6) умовами не є зв’язаною.

Висновок. Таким чином, вихідна задача (2) — (6) «розпадається» на дві більш прості задачі (7), (9), (5), (6) та (8), (9), (5), (6), які можна розв’язувати послідовно, що зменшує час чисельного розв’язку на $(25...40)\%$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бернадинер М. Г. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей / М. Г. Бернадинер, В. М. Ентов. — М.: Наука, 1975. — 199 с.
2. Верлань А. Ф. Математическое моделирование аномальных диффузионных процессов / А. Ф. Верлань, С. А. Положаенко, Н. Г. Сербов. — К.: Наукова думка, 2011. — 416 с.
3. Азиз Х. Математическое моделирование пластовых систем / Х. Азиз, Э. Сеттари. — М.: Недра, 1982. — 406 с.
4. Кричлоу Генри Б. Современная разработка нефтяных месторождений. — М.: Недра, 1979. — 302 с.
5. Ахметов И. М. Применение композитных систем в технологических рперациях эксплуатации скважин / И. М. Ахметов, Н. М. Шерстнев. — М.: Недра, 1989. — 213 с.
6. Мелик-Асланов Л. С. Нефтеотдача при вытеснении нефти из пласта водой. — Баку: Азернешр, 1989. — 108 с.