УДК 004.61

Informatics and Mathematical Methods in Simulation
Vol. 6 (2016), No. 4, pp. 372-378

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ФІЛЬТРАЦІЇ З РОЗРИВНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ У ГЕТЕРОГЕННИХ СИСТЕМАХ ЗА УМОВИ НЕТОЧНИХ ВИХІДНИХ ДАНИХ

С.А. Положаєнко, В.С. Савіч

Одеський національний політехнічний університет,
просп. Шевченка, 1, Одеса, 65044, Україна; e-mail: savichsp@gmail.com

Запропоновано процедуру розв'язання задачі фільтрації з розривними коефіцієнтами у гетерогенних системах (середовищах), засновану на застосуванні вейвлет-перетворення диференційної моделі. Особливість процедури полягає у можливості отримання розв'язку при неповному або неточному векторі вихідних даних. На підставі кратномасштабного аналізу отримано коефіцієнти вейвлет-функцій розкладання з компактними носіями у просторах Соболєва.

Ключові слова: гетерогенна система (середовище), фільтрація з розривними коефіцієнтами, вейвлет-розкладання, кратномасштабний аналіз, простір Соболєва.

Вступ

Загальну теорію можливості розв'язування крайових задач для лінійних та квазілінійних диференційних рівнянь параболічного типу з розривними коефіцієнтами розроблено О.А. Ладиженською в роботах [1, 2]. На основі цієї теорії було розв'язано низку прикладних задач однофазної фільтрації як для стаціонарного [1], так і для нестаціонарного [1, 2] випадків.

Одначе досі не віднайшла свого розв'язання задача нестаціонарної фільтрації для багатофазних та гетерогенних систем, що описуються рівняннями параболічного типу з розривними коефіцієнтами та з коефіцієнтами, що квадратично інтегруються. В практичних додатках, за умови застосування неточних даних ця задача ускладнюється може бути віднесена до класу некоректних задач через виникнення несталості розв'язку. Для розв'язування такої задачі скористаємося проекційним методом Гальоркіна, в якому базисна (координатна) система функцій співпадає з проекційною системою. В якості базисних функцій приймемо багатомірні вейвлети Добеші [3], які залежать як від просторової змінної r, так і від часової змінної t, а коефіцієнти розкладання розв'язку задачі визначаються в рамках регулярного кратномасштабного вейвлет-аналізу [4]. Варіаційну задачу, що при цьому утворюється, будемо розв'язувати регуляризуючим методом О.М. Тихонова [5] із застосуванням принципу узагальнюючої нев'язки [6].

Мета роботи

Розробка вейвлет-методу розв'язування задачі нестаціонарної фільтрації з розривними коефіцієнтами у гетерогенних системах для випадку неточних або неповних вихідних даних, зокрема даних вимірювання.

Основна частина

Розглянемо диференційне рівняння несталого пласко-радиального осесиметричного фільтраційного потоку в круговому пласті радіуса R. В центрі якого розташовано свердловину радіусом r_0:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{k(r,t)}{\mu}r\frac{\partial P(r,t)}{\partial r}\right)=\frac{\partial P(r,t)}{\partial t},\ \ r_0<r<R,\ \ t\in(t_0,t_1), \tag{1}$$

при початковій умові

$$P(r,t_0)=\psi_0(r),\ \ r\in(r_0,R) \tag{2}$$

та крайових умовах

$$P(r_0,t)=P_0(t),\ \ P(R,t)=0,\ \ t\in(t_0,t_1). \tag{3}$$

У виразах (1)-(3) $P(r,t)=\Delta p(r,t)=p_0-p(r,t)$; $p(r,t)$ – тиск рідини в точці r в момент часу t; p_0 – початковий пластовий тиск; $k(r,t)$ – проникність пласта; μ – густина рідини (або гетерогенної системи), що фільтрується.

Будемо вважати, що функції $\psi_0(r)$ та $P_0(t)$ задовольняють наступним умовам:

– $\psi_0(r)=\overset{0}{W}{}_2^1(Q_r)$, тобто така, що квадратично інтегрується на $[r_0,R]$ разом з узагальненою похідною $(d\psi_0/dr)$ в смислі Соболєва [1, 2], та приймає «в середньому квадратичному» нульові граничні значення;

– $\|P_0(t)\|_{t_Q|t_0,t_1|}\le\nu_1$, $\|P_0'(t)\|_{t_Q|t_0,t_1|}\le\nu_2$.

Нехай $Q_{r_0,R}=\Omega_{0,R}\times(t_0,t_1)$ – циліндр на площині змінних (r,t). $\Omega_{0,R}=(r_0,R)$, і функція $k(r,t)$ задовольняє на Q_{t_0,t_1} умовам:

– $\nu_3\le k(r,t)\le\nu_4$, $\nu_3>0$;

– $k(r,t)$ має узагальнену похідну $[\partial k(r,t)/\partial r]$, для якої $\max\limits_{Q_{t_0,t_1}}\left|\frac{\partial k(r,t)}{\partial r}\right|<\infty$.

Передостання умова забезпечує рівномірну (по r та t) параболічність рівняння (1).

Для однорідного пласта ($k(r,t)=\text{const}$) крайові задачі з крайовими умовами першого та другого роду розглянуто в [7, 8]. Необхідність врахування гетерогенної структури пористого середовища в гідродинамічних задачах відмічається у багатьох відомих роботах з фільтрації (наприклад, [8, 9-13]), але не має остаточного розв’язання. Дослідження задач фільтрації у гетерогенних середовищах в основному орієнтовані на *точні вихідні дані* (або *дані вимірювань*, в той час коли на практиці ці дані можуть бути отримані (або виміряні) лише наближено. Неврахування даного факту може спричинити значні відхилення отриманого розв’язку від розв’язку при точних даних (несталий розв’язок). Крім того, існуючі методи розв’язування задач фільтрації (зокрема, методи засновані на застосуванні перетворення Фур’є) не дають можливості визначити структурні особливості процесу, що надто важливо для гетерогенних систем, і можуть бути використані лише у випадку існування класичного розв’язку задачі.

Після очевидних перетворень (замін змінних) задача (1)-(3) зводиться до наступної задачі:

$$Lu(r,t) \equiv \frac{\partial}{\partial t} u(r,t) - Mu(r,t) = f(r,t), \quad r \in (0,l), \quad t \in (0,l), \tag{4}$$

$$u(r,t) = \psi_0(r), \quad r \in (0,l), \tag{5}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \in (0,T). \tag{6}$$

Тут $T = l$, $l = 2m - 1$; m – порядок вейвлетів, які будуть використовуватися у подальшому для вейвлет-розкладань функцій $k(r,t)$, $f(r,t)$ та $u(r,t)$:

$$Mu \equiv \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{c}{R - r_0} k(r,t) u_r\right] + \frac{c\, k(r,t) \cdot u_r}{r_0\, l + r(R - r_0)}, \quad c = \frac{l\,(t_1 - t_0)}{\mu\,(R - r_0)},$$

$$f(r,t) = \frac{\partial f_1(r,t)}{\partial r} - f_0(r,t), \quad f_1(r,t) = -\frac{c\, k(r,t)}{l(R - r_0)} \cdot P_0(t), \tag{7}$$

$$f_0(r,t) = \frac{c}{l} \cdot \frac{k(r,t)}{r_0\, l + r(R - r_0)} \cdot P_0(t) + \left(1 - \frac{r}{l}\right) \cdot P_0'(t).$$

З метою спрощення запису після заміни змінних збережено позначення для $k(r,t)$, $\psi_0(r)$, $P_0(t)$ та $P_0'(t)$.

Задачу (4)-(6) назвемо умовно задачею $A_{1,0}(Q_T)$, де $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $\Omega = (0,l)$; перший з індексів в позначенні задачі означає, що крайові умови є умовами першого роду, а другий – що ці умови однорідні (тобто нульові).

У подальшому будемо використовувати введені в [1, 2] функціональні простори $W_2^{1,0}(Q_T)$, $W_2^{1,1}(Q_T)$, $W_2^{2,1}(Q_T)$, $V_2(Q_T)$ та $V_2^{1,0}(Q_T)$, а також відповідні їм простори $\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$, $\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$, $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(Q_T)$, $\overset{0}{V}{}_2(Q_T)$ та $\overset{0}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$. Нуль зверху над позначенням простору означає, що беруться лише ті елементи даного простору, які обертаються на нуль у «середньому квадратичному» на боковій границі $S_T = \{(r,t) : r = 0 \cup r = l\}$ циліндру Q_T.

Під розв'язком задачі $A_{1,0}(Q_T)$ будемо розуміти узагальнений розв'язок в смислі визначення з [1, 2]. А саме узагальненим розв'язком з $V_2^{1,0}(Q_T)$ ($W_2^{1,0}(Q_T)$) задачі $A_{1,0}(Q_T)$ будемо називати функцію $u(r,t)$ з $\overset{0}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ ($\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$), яка задовольняє рівнянню (4) та початковій умові (5) в смислі інтегральної тотожності

$$\int_{Q_r}\left[u\eta_t - \frac{c}{R - r_0} k(r,t) u_r \eta_r + \frac{k(r,t)}{r_0\, l + r(R - r_0)} u_r \eta\right] dr\, dt =$$

$$= \int_{Q_r}\left\{\frac{c\, k(r,t)}{l(R - r_0)} \cdot P_0(t)\eta_r - \left[\frac{c}{l} \cdot \frac{c\, k(r,t)}{l(R - r_0)} \cdot P_0(t) + \right.\right. \tag{8}$$

$$\left.\left. + \left(1 - \frac{r}{l}\right) P_0'(t)\right]\eta\right\} dr\, dt + \int_\Omega \psi_0(r)\eta(r,0)\, dr$$

при будь-якій функції $\eta(r,t)$ з $\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$, що дорівнює нулю при $t=T$. Відповідність крайовим умовам (6) міститься в тому, що $u \in \overset{0}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ ($u \in \overset{0}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$), тобто умови (6) задовольняються у «середньому квадратичному». При цьому похідні u_r, η_r та η_t в (8) є узагальненими похідними. Будь-який узагальнений розв'язок з $u \in \overset{0}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ задачі $A_{1,0}(Q_T)$ буде її узагальненим розв'язком з $\overset{0}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ [1].

З доведених теорем у роботі [2] витікає, що за умов, зазначених вище для функцій $\psi_0(r)$, $k(r,t)$ та $P_0(t)$ існує єдиний узагальнений розв'язок задачі $A_{1,0}(Q_T)$ з $u \in \overset{0}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$, що належить $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(Q_T)$ та задовольняє рівнянню $Lu=f$, $f \in L_2(Q_T)$ ($f \equiv \dfrac{\partial f_1}{\partial r} - f_0$) майже скрізь в Q_T.

Виконаємо вейвлет-представлення розв'язку задачі. В крупномасштабному аналізі (КМА) в $L_2(\Re^2)$, який використовує ортонормовані базиси вейвлетів, будь-якій функції $u(x)$ з $L_2(\Re^2)$ відповідає ряд [4]

$$u(x)=\langle u,f\rangle \times \varphi(x)+\sum_{\lambda \in \underset{j=0}{\cup} \Lambda_j} \langle u,\psi_\lambda\rangle \times \psi_\lambda(x), \tag{9}$$

$\psi_\lambda(x)=2^j \psi_\ell(2^j \cdot x-k)$, $\Lambda_j=\{\lambda=(\ell,j,k): 1\le \ell \le 3, k \in Z^2\}$, $Z^2=Z\times Z$, Z – множина цілих невід'ємних чисел; $k=(k_1,k_2)\in Z^2$; $x=(x_1,x_2)\in \Re^2$ (для задачі $A_{1,0}(Q_T)$ $x_1=r, x_2=t$); $\langle \cdot,\cdot \rangle$ – знак скалярного добутку.

Функції

$$\varphi(x-k),\ \psi_\lambda(x)=2^j \psi_t(2^j \cdot x-k),\ \lambda=(\ell,j,k),\ 1\le \ell \le 3, k\in Z^2, \tag{10}$$

де

$$\varphi(x-k)=\varphi(x_1-k_1)\varphi(x_2-k_2),\ \varphi_1(x-k)=\varphi(x_1-k_1)\varphi(x_2-k_2),$$

$$\psi_2(x-k)=\psi(x_1-k_1)\varphi(x_2-k_2),\ \psi_3(x-k)=\psi(x_1-k_1)\psi(x_2-k_2)$$

утворюють сепарабельний отронормований базис (ОНБ) в $L_2(\Re^2)$.

Функції $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ при $x \in \Re^1$, які називаються відповідно скейлінг-функції (така, що масштабує) та вейвлет-функції, мають компактні носії в $(0,l)$ та визначаються як ряд [14]

$$\varphi(x)=\sqrt{2}\sum_{k=0}^{l} h_k^{(m)} \times \varphi(2x-k),\ \ \psi(x)=\sqrt{2}\sum_{k=0}^{l} g_k^{(m)} \times \varphi(2x-k), \tag{11}$$

$l=2m-1$ ($m \ge 1$ — ціле додатне число); $g_k^{(m)}=(-1)^k \times h_k^{(m)}$. Коефіцієнти $h_k^{(m)}$ для вейвлетів Хаара ($m=1$) мають значення $h_0^{(1)}=h_1^{(1)}=1/\sqrt{2}$, а для вейвлетів Добеші ${}_m\varphi(x)$ порядку $m>1$ значення $h_k^{(m)}$ для $m=\overline{2,10}$ наведено в [15].

Локальну та глобальну регулярність вейвлетів з компактними носіями детально досліджено в [15]. При цьому методами Фур'є встановлено, що для вейвлетів $\varphi(x)$, $x \in \Re$, значення глобального показника Гельдера не менше за 2.158 при $m \geq 7$.

Кратномасштабний аналіз в $L_2(\Re^2)$ складається з послідовності просторів апроксимацій $\{V_j\}(j \geq 0) V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_j \subset \ldots$, де V_j – замкнутий простір в $L_2(\Re^2)$ з базисом

$$\varphi_j(x) = 2^j \varphi(2^j \cdot x - k), \quad x = (x_1, x_2) \in \Re^2, \quad k = (k_1, k_2) \in Z^2.$$

Оскільки функція $\varphi(x)$, $x \in \Re^1$, фінітна на $[0, l]$ при будь-якому $m \geq 1$ та двічі неперервно диференціюється на $[0, l]$ при $m \geq 7$, то послідовність $\{V_j\}(j \geq 0)$ при виборі базису $\{\varphi_j(x - k)\}$ на основі функції $\varphi(x)$ з $l = 2m - 1$, $m \geq 7$ буде породжувати (за визначенням у [4]) 2-регулярний КМА в $L_2(\Re^2)$. Це означає, що для будь-якого цілого m і для будь-якого мультиіндексу $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, що задовольняє умові $|\alpha| \leq 2$ ($|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$), для функції $g(x) = \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2)$ виконується нерівність

$$\left|\partial^\alpha g(x)\right| \leq C_m \left(1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)^{-m}.$$

Якщо P_j – ортогональний проектор простору $L_2(\Re^2)$ на V_j, то на підставі теореми, сформульованої та доведеної в [4], для будь-якої функції з простору Соболєва $W_2^1(Q_T)$ послідовність $P_j f$ збігається до f в $W_2^1(Q_T)$-нормі, тобто:

$$\lim_{j \to \infty} \left\| \partial^\alpha P_j f - \partial^\alpha f \right\|_{L_2(Q_T)} = 0, \quad |\alpha| \leq 1. \tag{12}$$

У відповідності до вище згаданої теореми з [4], розподіл (узагальнена функція) f належить $W_2^1(Q_T)$ тоді і тільки тоді, коли її вейвлет-коефіцієнти $\alpha\langle\lambda\rangle = \langle f, \psi_\lambda \rangle$ в базисі (10), що відповідає 2-регулярному КМА, задовольняють умові

$$\sum_{j=0} \sum_{\lambda \in \Lambda} 4^j \left|\alpha(\lambda)\right|^2 < \infty. \tag{13}$$

Для виконання умови (13) достатньо вважати, що вейвлет-коефіцієнти $d_{i,j,k_1,k_2} = \langle f, \psi_{i,j,k_1,k_2} \rangle$ функції f задовольняє нерівностям

$$d_{i,j,k_1,k_2} \leq 2^{-2j} \eta_j \quad \left(i = \overline{1,3}; j \geq 0; k_1, k_2 = \overline{0, 2^j - 1}\right), \tag{14}$$

де $\sum_{j=0}^{\infty} \eta_j^2 < \infty$, наприклад, $\eta_j = j^{-(1+\gamma)/2}, \gamma > 0$.

Висновок

Виконано розв'язання задачі фільтрації з розривними коефіцієнтами у гетерогенному середовищі, здійснене у вигляді вейвлет-перетворення. Відмінність запропонованого підходу полягає в тому, що розв'язок задачі можна отримати у випадках, коли вихідні дані є неточними (або неповними) внаслідок похибок вимірювань.

Список літератури

1. Ладыженская, О.А. Краевые задачи математической физики / О.А. Ладыженская. — М.: Наука, 1975. — 407 с.
2. Ладыженская, О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцев. — М.: Наука, 1987. — 736 с.
3. Чуи, К.. Введение в вейвлеты / К. Чуи. — М.: Мир, 2004. — 412 с.
4. Новиков, И.Я. Основы теории всплесков / И.Я. Новиков, С.Б. Стечкин // Успехи математических наук. — 1998. — Т. 53, № 6. — С. 53-128.
5. Тихонов, А.Н. Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. — М.: Наука, 1979. — 285 с.
6. Гончарский, А.В. Обобщенный принцип невязки / А.В. Гончарский, А.С. Леонов, А.С. Ягола // Журнал вычичслительной математики и мате матической физики. — 2009. — Т. 14. — № 2. — С. 295-302.
7. Соболев, С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике / С.Л. Соболев. — М.: Наука, 2001. — 255 с.
8. Басниев, К.С. Подземная гидравлика / К.С. Басниев А.М. Власов, И.Н. Кочина и др. — М.: Недра, 2012. — 303 с.
9. Щелкачев, В.Н. Основы и приложения теории неустановившейся фильтрации. Ч. 1. / В.Н. Щелкачев. — М.: Нефть и газ, 2005. — 586 с.
10. Saez, A. The effective homogeneous behavior of homogeneous porous media // A. Saez, C.J. Otero, I. Rusinek // Transport in porous media. — 1989. — № 4. — Pp. 212-238.
11. Chauveteau, G. Rodlike Polymer Solution Flow Through Fines Pores: Influence of Pole Size on Rheological Behavior / G. Chauveteau // Journal of the Rheological. — 1999. — V. 26 (2). — P. 111-142.
12. Enevoldsen, J. Pressure Drop Throgh Gravel Packs / J. Enevoldsen, H. K. Rasmusen / J. Enevoldsen // Annual Transactions of the Nordic Rheology Society. — 1995. — V. 3. — P. 45-47.
13. Bayada, G. Inequations variationnelles elliptiques avec conditions aux limites periodiques / G. Bayada // J. Anal. Math. — 1978.— Vol. 34.— P. 47-53.
14. Дремин, И.М. Вейвлеты и их использование // И.М. Дремин, О.В. Иванов, В.А. Нечитайло // Успехи математических наук. — 2011. — Т. 171. — № 5. — С. 465-501.
15. Quintard, M. Two phase flow in heterogeneous porous media: the method of large-scale averaging / M. Quintard, S. Whitaker // Transport in porous media. — 1988. — № 3. — Pp. 357-413.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ФИЛЬТРАЦИИ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ГЕТЕРОГЕННЫХ СИСТЕМАХ В УСЛОВИЯХ НЕТОЧНЫХ ВХОДНЫХ ДАННЫХ

С.А. Положаенко, В.С. Савич

Одесский национальный политехнический университет,
просп. Шевченко, 1, Одесса, 65044, Украина; e-mail: savichsp@gmail.com

Предложена процедура решения задачи фильтрации с разрывными коэффициентами в гетерогенных системах (средах), основанная на применении вейвлет-преобразования дифференциальной модели. Особенность процедуры состоит в возможности получения решения при неполном или неточном векторе входных данных. На основе кратномасштабного анализа получены коэффициенты вейвлет-функций разложения с компактными носителями в пространствах Соболева.

Ключевые слова: гетерогенная система (среда), фильтрация с разрывными коэффициентами, вейвлет-разложение, кратномасштабный анализ, пространство Соболева.

MATHEMATICAL MODELLING OF FILTERING WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENTS IN HETEROGENEOUS SYSTEM IN TERMS OF UNCERTAINTY OF THE INPUT DATA

S. Polozhaenko, V. Savich

Odesa National Polytechnic University,
1 Shevchenko Str., Odesa, 65044, Ukraine; e-mail: savichsp@gmail.com

A procedure for solving the problem of filtration with discontinuous coefficients in heterogeneous systems (environments), based on the application of wavelet transform of the differential model. The peculiarity of the procedure is the ability to produce solutions with incomplete or inaccurate vector input. Based on multiresolution analysis obtained coefficients of wavelet decomposition function with compact support in Sobolev spaces.

Keywords: heterogeneous system (medium), filtration with discontinuous coefficients, wavelet decomposition, multiresolution analysis, Sobolev space.