

УДК 534. 232

ДИНАМИКА ЗАТОПЛЕННОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СТРУЙНОЙ ОБОЛОЧКИ

Ю. М. Дудзинский

*Одесский национальный политехнический университет,
65044, пр. Шевченка, 1, г. Одесса, Украина*

The forced vibrations of elastic underwater jet's membrane as the model of uniflow and counter flow axially symmetric hydrodynamic radiators are considered. The dependence of amplitude of the forced vibrations on frequency as a function of geometrical and hydrodynamic parameters of jet membrane is calculated. Influence of liquid properties and geometrical parameters on peak frequency description and quality-factor is analyzed. The numerical work is compared with experimental results.

ВВЕДЕНИЕ

В осесимметричных гидродинамических излучателях (ГДИ) часть энергии затопленной струи преобразуется в энергию акустических волн, а рабочая жидкость одновременно является источником колебаний и объектом озвучивания [1]. Схема прямоточного ГДИ с кольцевым соплом и ступенчатым препятствием представлена на рис. 1а. Частоту основной гармоник акустического сигнала задаёт упругая затопленная струйная оболочка 2 (цилиндрической или конической формы). Осесимметричная струя вытекает из кругового щелевого сопла 1 и формируется в оболочку ступенчатым препятствием 3. Накопителем энергии является неустойчивый первичный вихрь 4 с развитой кавитацией в форме тороида (рис. 1б). Пульсации вихря возбуждают струйную оболочку, которая совершает изгибные колебания. В фазе растяжения её свободного основания каверны из первичного вихря переносятся потоком наружу. За счёт эффекта Кармана создаётся вторичный тороидальный вихрь [2], что хорошо видно на фотографии противоточного ГДИ (рис. 1г). Паровые каверны внутри вторичного тороида синфазно схлопываются и генерируют упругие волны высокой интенсивности. При оптимальной скорости струи на выходе кольцевого сопла, когда частота пульсаций вихря совпадает с собственной частотой оболочки, наблюдается максимальный уровень тонального звука [3]. В случае противоточного ГДИ (рис. 1в) жидкость вытекает из сопла 1 и формируется в упругую затопленную струйную оболочку 2 отражателем с параболической лункой 3. Во внутренней области образуется неустойчивый первичный вихрь с развитой кавитацией 4 в форме тороида. Принцип гидродинамического звукообразования полностью идентичен описанному выше [4, 5].

Чем больше амплитуда деформации свободного края оболочки, тем большее количество паровых каверн переместится из первичного тороидального вихря во вторичный, следовательно, будет выше уровень акустического сигнала. Поскольку между этими процессами прямая зависимость, то амплитуду вынужденных колебаний упругой струйной оболочки можно оценивать по уровню звука [5]. В данной работе представлены результаты теоретического анализа добротности осесимметричной струйной оболочки и экспериментального исследования добротности осесимметричных ГДИ.

Часто задачи о вынужденных осесимметричных колебаниях цилиндрических оболочек, находящихся под действием акустического поля давлений, решаются методом Фу-

рье [6, 7]. Используемые в этой методике ряды для функции прогиба обладают медленной сходимостью. Для того чтобы охватить влияние концевых закреплений для некоторых оболочек, требуется привлекать несколько десятков членов ряда. Это обусловлено тем, что собственные частоты ω_k осесимметричных колебаний оболочки при относительно малых числах изгибных полуволн k практически остаются неизменными. Поэтому результаты этих вычислений применимы, как правило, для больших значений k . Однако в осесимметричных ГДИ потоком жидкости формируются оболочки средней длины. Уравнение вынужденных колебаний интегрируется в замкнутом виде. Полученное решение может быть использовано для сравнения с приближёнными решениями в более сложных задачах этого типа.

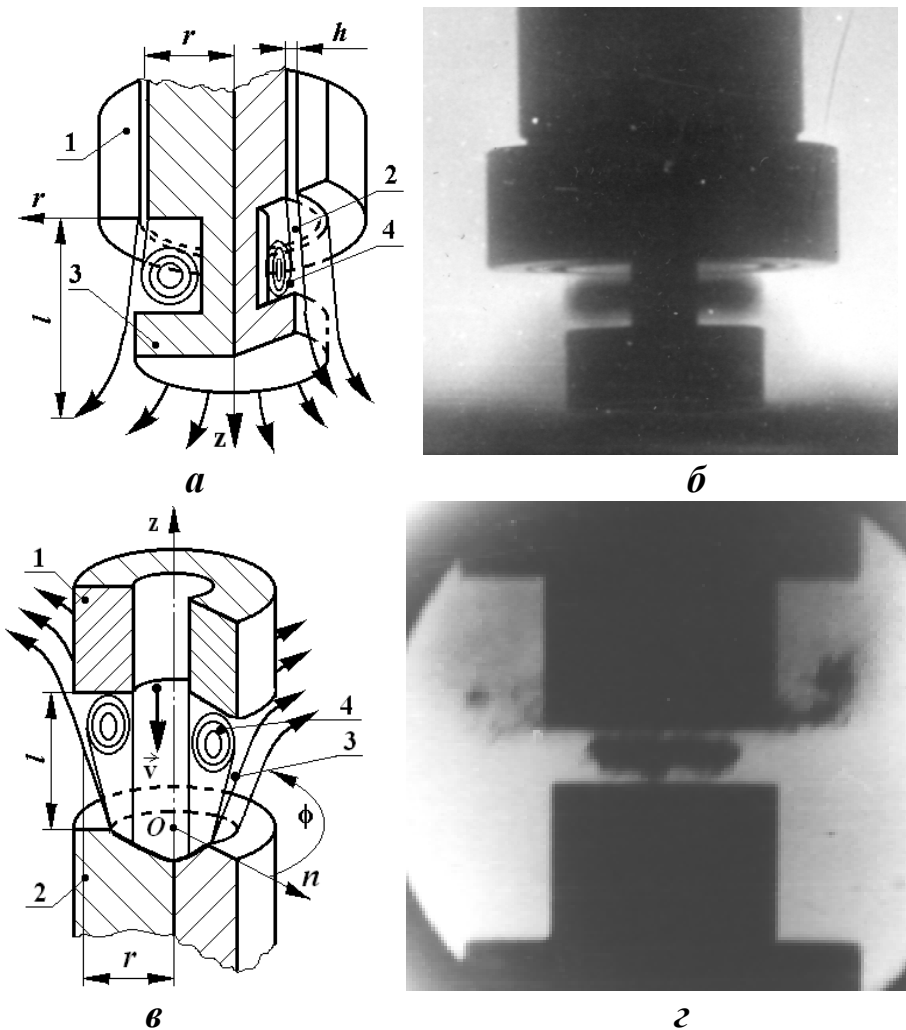


Рис.1.

1. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СТРУЙНОЙ ОБОЛОЧКИ

Ранее было показано, что резонансная частота осесимметричных гидродинамических излучателей зависит от свойств рабочей жидкости, гидростатического давления в ней, геометрических параметров оболочки и граничных условий на её торцах [3, 4, 5]. В качестве модели прямоточных и противоточных ГДИ рассматривается упругая затопленная осесимметричная цилиндрическая струйная оболочка.

Уравнения осесимметричных колебаний цилиндрической оболочки имеют вид [6]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial z} - \frac{h^2}{12r} \cdot \frac{\partial^3}{\partial z^3} \right) w = -\frac{1-\nu^2}{Eh} \cdot q_z, \quad (1)$$

$$\left(\frac{\nu}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial z} - \frac{h^2}{12r} \cdot \frac{\partial^3}{\partial z^3} \right) u + \frac{h^2}{12r^2} \left(r^2 \cdot \frac{\partial^4}{\partial z^4} + \frac{1}{r^2} + \frac{12}{h^2} \right) w = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1-\nu^2}{Eh} \cdot q_r, \quad (2)$$

где h , r – толщина стенки и средний радиус оболочки, ρ , E , ν – плотность, модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки, q_z , q_r – соответственно растягивающая и изгибающая силы, действующие на единицу площади оболочки, u , w – деформации удлинения и изгиба, соответственно. Длина образующей цилиндра – ℓ .

Рассматриваем оболочку средней длины ($\pi r/\ell \sim 1$), причём условимся, что верхнее её значение позволяет пренебрегать продольными силами инерции ($q_z = 0$). В этом случае пренебрежение q_z не приведёт к существенной погрешности [3, 7, 8]. В уравнении (1) отбросим третье слагаемое, которое имеет порядок $(h/r)^2$ по сравнению со вторым слагаемым. Тогда при отсутствии осевых сил из (1) следует соотношение

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\nu}{r} \cdot w,$$

которое подставим в (2). Также в выражении (2) пренебрегаем вторым слагаемым во второй скобке, как малым порядка $(h/r)^2$ и приходим к одному дифференциальному уравнению четвёртого порядка в частных производных

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + D \frac{\nu}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{Eh}{r^2} w = -q_r, \quad (3)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12 \cdot (1-\nu^2)}.$$

Поскольку осесимметричная струя затоплена в жидкости с теми же свойствами, то коэффициентом Пуассона можно пренебречь ($\nu = 0$) [9]. Тогда уравнение (3) с учётом силы инерции единичной поверхности оболочки принимает вид

$$\frac{Eh^3}{12} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{Eh}{r^2} w = -q_r. \quad (4)$$

Предполагаем, что оболочка деформируясь под действием сил, равномерно распределённых по её внутренней поверхности, совершает только изгибные гармонические колебания, т. е.

$$q_r = Q_0 \exp(i\omega t), \quad w(z, t) = w(z) \exp(i\omega t).$$

С учётом этого предположения выражение (4) принимает вид

$$\frac{\partial^4 w}{\partial z^4} - k^4 w = -f_0, \quad (5)$$

$$k = \sqrt[4]{\frac{12(\rho r^2 \omega^2 - E)}{Eh^2 r^2}}, \quad f_0 = \frac{12Q_0}{Eh^3}. \quad (6)$$

Общее решение неоднородного уравнения (5) имеет вид [10]

$$w(z) = C_1 \cdot \operatorname{ch}(kz) + C_2 \cdot \operatorname{sh}(kz) + C_3 \cdot \cos(kz) + C_4 \cdot \sin(kz) + \frac{f_0}{k^4}. \quad (7)$$

Неизвестные коэффициенты C_1, C_2, C_3 и C_4 вычислим из граничных условий. Для прямого ГДИ (рис. 1а) на одном конце ($z = 0$) имеет место жёсткое защемление оболочки, другой ($z = \ell$) – свободный [6]:

$$w(0) = w'(0) = 0; \quad w''(\ell) = w'''(\ell) = 0. \quad (8)$$

Для противоточного ГДИ (рис. 1б) на одном конце ($z = 0$) имеет место жёсткое защемление оболочки, на другом конце ($z = \ell$) – сдвиг, продольное перемещение и перерезывающее усилие равны нулю [6]:

$$w(0) = w'(0) = 0; \quad w'(\ell) = w''(\ell) = 0. \quad (9)$$

В случае прямого осесимметричного гидродинамического излучателя при граничных условиях (8) амплитуда вынужденных изгибных колебаний оболочки примет вид

$$w_{\text{прям}}(z) = \frac{f_0}{2k^4 (1 + \cos(k\ell) \cdot \operatorname{ch}(k\ell))} \cdot [\cos(kz) + \cos(k(\ell - z)) \cdot \operatorname{ch}(k\ell) + \cos(k\ell) \cdot \operatorname{ch}(k(\ell - z)) + \operatorname{ch}(kz) - \sin(k(\ell - z)) \cdot \operatorname{sh}(k\ell) + \sin(k\ell) \cdot \operatorname{sh}(k(\ell - z))]. \quad (10)$$

Тогда амплитуда колебаний свободного края оболочки ($z = \ell$):

$$w_{\text{прям}}^{\text{ВЧ}} = \frac{f_0 (\cos(k\ell) + \text{ch}(k\ell))}{k^4 (1 + \cos(k\ell) \cdot \text{ch}(k\ell))}. \quad (11)$$

Как следует из выражения (6), функции (10) и (11) испытывают разрыв при $k = 0$. Это условие должно соответствовать резонансным колебаниям оболочки на частоте ω_0 . Следовательно, выражениями (10) и (11) можно пользоваться в интервале частот выше резонансной, когда $(\rho r^2 \omega^2 - E) > 0$. Рассмотрим область ниже резонансной частоты, для которой $(\rho r^2 \omega^2 - E) < 0$. Проведя математические преобразования, аналогично приведенным в [8], из формулы (11) получаем

$$w_{\text{прям}}^{\text{НЧ}} = \frac{f_0 \cos(\bar{p}\ell) \cdot \text{ch}(\bar{p}\ell)}{2\bar{p}^4 (1 + \text{sh}^2(\bar{p}\ell) + \cos^2(\bar{p}\ell))}, \quad p = \sqrt[4]{\frac{12(E - \rho r^2 \omega^2)}{E h^2 r^2}}, \quad \bar{p} = \frac{p}{\sqrt{2}}. \quad (12)$$

В случае противоточного осесимметричного гидродинамического излучателя при граничных условиях (9) амплитуда вынужденных изгибных колебаний струйной оболочки примет вид

$$w_{\text{прот}}(z) = \frac{f_0}{2k^4 \sin(k\ell) \cdot \text{sh}(k\ell)} [\cos(k\ell) \cdot \text{ch}(k(\ell - z)) - \sin(k\ell) \cdot \text{sh}(k(\ell - z)) - \text{ch}(kz) - \text{ch}(k\ell) \cdot \cos(k(\ell - z)) - \text{sh}(k\ell) \cdot \sin(k(\ell - z)) + \cos(kz) + 2\text{sh}(k\ell) \cdot \sin(k\ell)]. \quad (13)$$

Аналогично выше приведенному для конца оболочки ($z = \ell$) получим выражения выше и ниже резонансной частоты.

$$w_{\text{прот}}^{\text{ВЧ}} = \frac{f_0}{k^4 \sin(k\ell) \cdot \text{sh}(k\ell)} [\sin(k\ell) \cdot \text{sh}(k\ell) + \cos(k\ell) - \text{ch}(k\ell)], \quad (14)$$

$$w_{\text{прот}}^{\text{НЧ}} = \frac{f_0 [3 \sin(\bar{p}\ell) \cdot \text{sh}(\bar{p}\ell) - 2 \cos(\bar{p}\ell) \cdot \text{ch}(2\bar{p}\ell) + \cos(2\bar{p}\ell) - \text{ch}(2\bar{p}\ell)]}{4\bar{p}^4 [\cos(2\bar{p}\ell) - \text{ch}(2\bar{p}\ell)]}. \quad (15)$$

2. АНАЛИЗ ТЕОРЕТИЧЕСКИХ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Используя полученные выше функции амплитуды вынужденных колебаний незащемленного края (11, 12, 14, 15), можно построить АЧХ затопленных струйных оболочек и по ним теоретически определить их добротность. Для проверки соответствия приведенной математической модели параметрам реального устройства были исследованы амплитудно-частотные характеристики прямоточных и противоточных осесимметричных гидродинамических излучателей (рис. 1). В экспериментах изменялись геометрические и гидродинамические параметры ГДИ обоих типов: средний радиус, длина, толщина струйной оболочки, скорость струи на выходе из сопла. При этом исследования проводились в жидкостях с различными свойствами – отстоянной в течение трёх недель водопроводной воде и трансформаторном масле.

На рис. 2 представлены сплошными линиями амплитудно-частотные характеристики противоточного излучателя в воде (кривая 1) и трансформаторном масле (кривая 2). Частота основной гармоники генерируемого акустического сигнала изменялась за счёт скорости струи на выходе из сопла (рис. 1в, 1г). Там же пунктирными линиями представлены теоретические АЧХ струйной оболочки в относительных единицах, вычисленные по формулам (14) и (15). Параметры оболочки: средний радиус $r = 4.5\text{мм}$, высота $\ell = 3.5\text{мм}$, толщина водяной $h_1 = (0.235 \dots 0.238)\text{мм}$, масляной $h_2 = (0.175 \dots 0.18)\text{мм}$. Модуль упругости струйной оболочки E можно выразить [9, 11] через адиабатический модуль объёмной упругости жидкости

$$E = \frac{K_{ad}}{3(1-2\nu)} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \chi_i (P^* + \Delta P_{cm})^i, \quad (16)$$

где P^* – предел прочности жидкости на разрыв (для воды 0.51МПа , для трансформаторного масла 0.39МПа), ΔP_{cm} – избыточное, по сравнению с атмосферным, статическое давление в герметичной ёмкости, $\chi_1, \chi_2, \chi_3 \dots$ – коэффициенты, которые практически не изменяются в широком диапазоне температур [9, 11], но зависят от объёма включений (мелкодисперсные твёрдые частицы, растворённый газ, зародыши кавитационных пузырьков и др.). Как видно на рис. 2, большая плотность и, соответственно, большая удельная масса ($\rho_1 h_1 > \rho_2 h_2$) единичной площадки водяной струйной оболочки по сравнению с масляной приводит к понижению резонансной частоты и существенному уменьшению добротности ГДИ. Этот фактор, очевидно, является решающим при замене рабочей жидкости на другую, не смотря на больший предел прочности воды и, соответственно, больший модуль упругости водяной оболочки по сравнению с масляной.

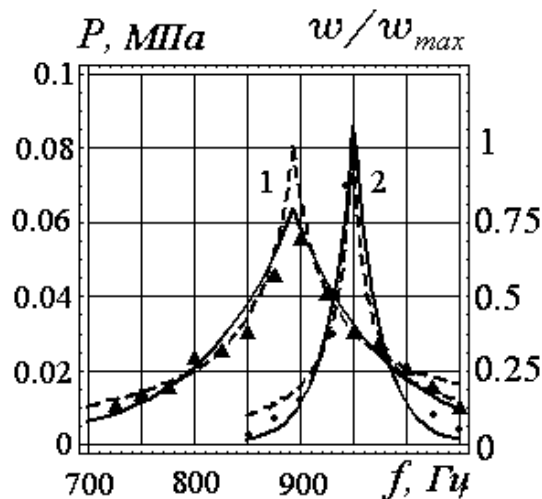


Рис.2.

На рис. 3 сплошными линиями представлены теоретические зависимости добротности затопленных осесимметричных струйных оболочек от среднего радиуса r , полученные из графиков функций изгибных колебаний по формулам (14) и (15). Экспериментальные добротности осесимметричных противоточных ГДИ там же изображены пунктирными линиями для воды (кривые 1) и трансформаторного масла (кривые 2). Изменение радиуса осуществлялось путём замены сопла 1 и отражателя 2 излучателя (рис. 1в).

При этом можно регулировать высоту оболочки ($\ell \approx r$), изменяя расстояние между соплом и отражателем, а толщина h остаётся неизменной. Частота возбуждения регулировалась за счёт изменения скорости струи на выходе из сопла [4, 8]. Характеристики рабочих жидкостей: температура, гидростатическое давление, концентрация инородных включений – поддерживались неизменными. Акустический сигнал регистрировался калиброванным сферическим пьезокерамическим гидрофоном, измерения его параметров производились с помощью электронного вольтметра, осциллографа и спектроанализатора. Видно, что с увеличением характерного размера пульсирующего тела (r) добротность колебательной системы уменьшается, асимптотически приближаясь к значению $Q = 10 \dots 12$.

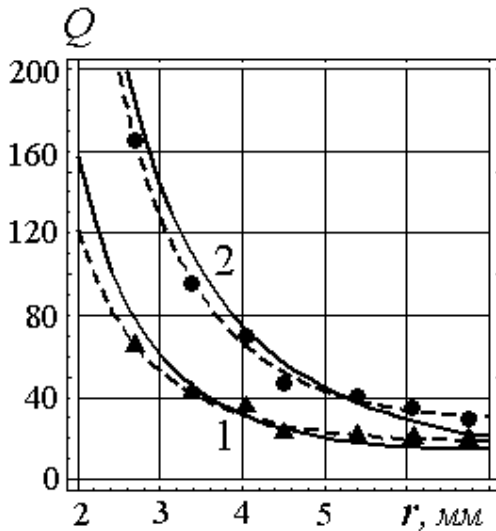


Рис.3.

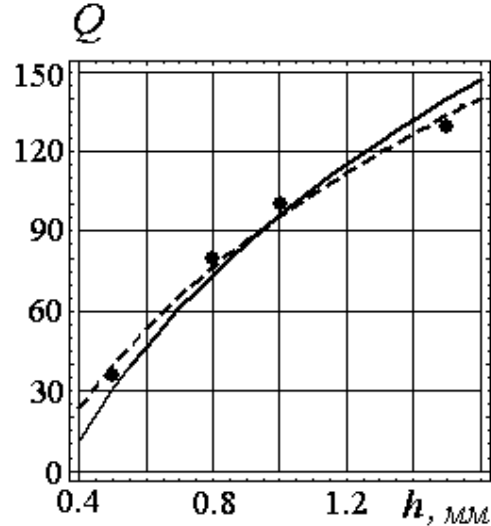


Рис.4.

На рис. 4 сплошной линией представлена теоретическая зависимость добротности от толщины h затопленной осесимметричной струйной оболочки, полученная из графиков функций изгибных колебаний по формулам (11) и (12). При этом средний радиус r оставался неизменным. Рабочей жидкостью в этом эксперименте являлась отстоянная водопроводная вода. Пунктирная линия – регрессия значений добротности, вычисленных по экспериментальным амплитудно-частотным характеристикам прямоточных ГДИ. Видно, что с увеличением толщины возрастает добротность гидродинамического излучателя. Как следует из выражений (3), это связано с возрастанием жёсткости цилиндрической струйной оболочки ($D \sim h^3$). С другой стороны, замедление роста функции $Q(h)$ связано с одновременным увеличением удельной массы (ρh) единичной площадки струйной оболочки.

ВЫВОДЫ

По результатам выполненных исследований могут быть сделаны следующие выводы.

- Рассмотрены уточнённые модели осесимметричных гидродинамических излучателей прямоточного и противоточного типа.
- Представлена и решена задача вынужденных колебаний затопленной осесимметричной цилиндрической струйной оболочки при разных граничных условиях – применительно к данным моделям.

- Показано соответствие между функциями амплитуды изгибных колебаний незащемленного края оболочки и АЧХ реальных излучателей. Это позволяет оценивать на стадии проектирования характеристики ГДИ разных типов по их геометрическим и гидродинамическим параметрам, свойствам рабочей жидкости и условиям в ней вдали от струйной оболочки.
- Проанализировано влияние геометрических параметров затопленной струйной оболочки на добротность рассмотренной динамической системы. Показано, что для обоих типов гидродинамических излучателей добротность уменьшается с возрастанием среднего радиуса и увеличивается с возрастанием толщины оболочки.
- Проанализировано влияние свойств рабочей жидкости на добротность гидродинамических излучателей. При этом использование рабочей жидкости с большей плотностью понижает резонансную частоту и уменьшает добротность осесимметричных ГДИ более существенно, чем повышение этих характеристик за счёт большего модуля объёмной упругости жидкости.
- Получено не только качественное, но и количественное соотношение между теоретическими и экспериментальными результатами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаренко А. Ф. Гидродинамические излучатели // Ультразвук. Маленькая энциклопедия / Под ред. И.П. Голяминой. – М.: ”Советская энциклопедия”, 1979. – с.79-81.
2. Дудзинский Ю. М., Сухарьков О. В. Энергетика прямого гидродинамического излучателя в условиях гидростатического давления // Акустичний вісник, НАН України. – 2004. – Т. 7, №1. – С. 44 – 49.
3. Дудзінський Ю. М., Сухарьков О. В., Манічева Н. В. Модель прямого гідродинамічного випромінювача з кільцевим соплом і східчастою перешкодою // Акустичний вісник, НАН України. – 2004. – Т. 7, №4. – С. 48 – 51.
4. Дудзинский Ю. М., Назаренко О. А. Колебания затопленной осесимметричной струи-оболочки // Акуст. Вісник. – 2001. – Т.3, №4. – С. 27 – 35.
5. Дудзинский Ю. М., Дащенко О. Ф. Собственные колебания струйной оболочки в условиях гидростатического давления // Прикл. мех. – 2004. – **40**, № 12. – С. 92 – 98.
6. Огибалов П.М, Колтунов М.А. Оболочки и пластины.– М: Изд-во МГУ, 1969.– 695 с.
7. Koval'chuk P.S., Filin V.G. Circumferential Traveling Waves in Field Cylindrical Shells // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, N 2. – P. 192 – 196.
8. Дудзинский Ю. М., Попов В. Г. Вынужденные колебания осесимметричной затопленной струйной оболочки // Прикл. мех. – 2005. – **41**, № 4. – С. 60 – 65.
9. Корнфельд М. Упругость и прочность жидкостей. – М.: Гос. изд - во технико-теоретической литературы, 1951. – 200с.
10. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – С. 472 – 473.
11. Зарембо Л. К., Красильников В. А. Введение в нелинейную акустику.– М.: Наука, 1966.– 520с.