ISSN 2076-2429 (print)
ISSN 2223-3814 (on line)

УДК 624.072.2

В.Ф. Оробей, д-р техн. наук, проф.,
Е.В. Слабенко, магистр,
Н.Г. Сурьянинов, д-р техн. наук, проф.,
Одес. нац. политехн. ун-т

РАСЧЕТ НЕРАЗРЕЗНОЙ БАЛКИ СТУПЕНЧАТО-ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В.Ф. Оробей, Є.В. Слабенко, М.Г. Сур'янінов. **Розрахунок нерозрізної балки східчасто-змінного перерізу чисельно-аналітичним методом граничних елементів.** Пропонується застосування чисельно-аналітичного методу граничних елементів для розрахунку систем із ступінчасто-змінною жорсткістю. Як подібну конструкцію розглянуто нерозрізну балку. Велика розрідженість матриці фундаментальних функцій завдання за визначенням виключає накопичення похибок. Запропонований підхід можна розповсюдити на системи з розподіленими параметрами.
Ключові слова: нерозрізна балка, ступінчасто-змінний переріз, метод граничних елементів, крайова задача.

В.Ф. Оробей, Е.В. Слабенко, Н.Г. Сурьянинов. **Расчет неразрезной балки ступенчато-переменного сечения численно-аналитическим методом граничных элементов.** Предлагается применение численно-аналитического метода граничных элементов для расчета систем со ступенчато-переменной жесткостью. В качестве подобной конструкции рассмотрена неразрезная балка. Большая разреженность матрицы фундаментальных функций задачи по определению исключает накопление погрешностей. Предложенный подход можно распространить на системы с распределенными параметрами.
Ключевые слова: неразрезная балка, ступенчато-переменное сечение, метод граничных элементов, краевая задача.

V.F. Orobey, E.V. Slabenko, N.G. Suryaninov. **Calculation of a continuons beam of step-variable section by the numerical-analytical boundary elements method**. Numerical-analytical boundary elements method is offered for the calculation of the systems with step-variable rigidity. As a similar construction a continuous beam is considered. Large sparseness of the matrix of fundamental functions of the problem by definition precludes the accumulation of errors. It is noted that the given approach can be spread over the systems with the distributed parameters.
Keywords: continuous beam, step-variable section, boundary elements method, boundary problem.

Расчет систем со ступенчато-переменным поперечным сечением имеет важное практическое значение, т.к. такие системы можно рассматривать как переходное звено между системами с постоянной геометрией и с непрерывно распределенными параметрами.

В этом случае все ступени описываются дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, решения которых всегда можно получить. При достаточном числе ступеней решения для дискретизированного таким образом стержня и стержня с распределенными параметрами будут мало различаться. Эта простая идея довольно долго не могла быть реализована из-за отсутствия соответствующего метода расчета. Метод начальных параметров (МНП), методы сил и перемещений, МКЭ и другие методы приводят алгоритм расчета к произведениям матриц фундаментальных функций, что при большом числе ступеней существенно ухудшает точность результатов вследствие неустранимых погрешностей округления. Численно-аналитический метод граничных элементов (ЧА МГЭ) свободен от этого недостатка [1].

В ряде случаев, при малом числе ступеней, целесообразней использовать рекуррентные соотношения метода начальных параметров, что может существенно уменьшить порядок матрицы ортонормированных фундаментальных функций.

Уравнения ЧА МГЭ при граничных значениях $x = l_i$ для ступеней принимают вид [1]

$$\begin{aligned} Y^{0-1}(l) &= A^{0-1}(l)\cdot X_{(0)}^{0-1} + B^{0-1}(l); \\ Y^{1-2}(l) &= A^{1-2}(l)\cdot X_{(0)}^{1-2} + B^{1-2}(l); \\ Y^{2-3}(l) &= A^{2-3}(l)\cdot X_{(0)}^{2-3} + B^{2-3}(l), \end{aligned} \tag{1}$$

где $Y^{0-1}(l) = X_{(0)}^{1-2}$; $Y^{1-2}(l) = X_{(0)}^{2-3}$.

Если в последнее уравнение из (1) вместо матриц $X_{(0)}^{2-3}$, $X_{(0)}^{1-2}$ подставить выражения для матриц $Y^{1-2}(l)$, $Y^{0-1}(l)$, то получим уравнение метода начальных параметров для ступенчатого стержня

$$Y^{2-3}(l) = A_{\Pi}\cdot X_{(0)}^{0-1} + B_{\text{СП}}. \tag{2}$$

Здесь матрица граничных значений фундаментальных функций определяется в виде произведения

$$A_{\Pi} = \cdot A^{2-3}(l)\cdot A^{1-2}(l)\cdot A^{0-1}(l), \tag{3}$$

а матрица нагрузки в виде суммы произведений

$$B_{\text{СП}} = A^{2-3}(l)\cdot A^{1-2}(l)\cdot B^{0-1}(l) + A^{2-3}(l)\cdot B^{1-2}(l) + B^{2-3}(l). \tag{4}$$

Обобщая полученные выражения на случай m ступеней, приходим к рекуррентным соотношениям метода начальных параметров.

Матрица A_{Π} вычисляется как произведение матриц A_i всех ступеней

$$A_{\Pi} = \prod_{i=1}^{m} A_{m+1-i}, \tag{5}$$

где нижний индекс обозначает номер ступени стержня.

Матрица нагрузки вычисляется как сумма произведений

$$B_{\text{СП}} = \sum_{i=1}^{m} A_{\Pi i}\cdot B_i, \tag{6}$$

где $$A_{\Pi i} = \prod_{j=1}^{m-i} A_{m+1-j}, \tag{7}$$

причем, если $j < m - i$, то $A_{\Pi \text{i}} = E$, где E — единичная матрица.

Уравнение (2) можно записать для многоступенчатого стержня как

$$Y(l) = A_{\Pi}(l)\cdot X(0) + B_{\text{СП}}(l), \tag{8}$$

где вектор $Y(l)$ содержит конечные граничные параметры, вектор $X(0)$ — начальные параметры, а вектор $B_{\text{СП}}(l)$ — внешнюю нагрузку всего стержня.

Рассмотрим неразрезную балку, у которой в каждом пролете сечения различны (см. рисунок) [2]. Соотношение моментов инерции поперечных сечений $I_1 : I_2 : I_3 : I_4 = 1:2:3:2{,}5.$

Для определения НДС балки используем алгоритм ЧА МГЭ.

1. Разбиваем балку на четыре стержня, нумеруем узлы и стрелками указываем начало и конец каждого стержня.

2. Поскольку элементы балки испытывают только поперечный изгиб, используем следующие матрицы фундаментальных функций и нагрузки:

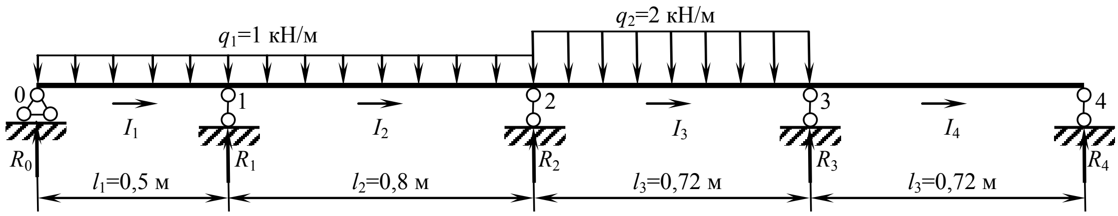
ISSN 2076-2429 (print)
ISSN 2223-3814 (on line)

$$A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & x & -x^2/2 & -x^3/6 \\ & 1 & -x & -x^2/2 \\ & & 1 & x \\ & & & 1 \end{array}; \qquad B = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{|c|} \hline qB_{11} - qB_{11} \\ -B_{21} \\ B_{31} \\ B_{41} \\ \hline \end{array}, \tag{9}$$

где элементами матрицы нагрузки являются:

$$\begin{gathered} B_{11} = M\frac{(x-a_M)_+^2}{2} + F\frac{(x-a_F)_+^3}{6} + q\left[\frac{(x-a_н)_+^4}{24} - \frac{(x-a_к)_+^4}{24}\right]; \\ B_{21} = M(x-a_M)_+^2 + F\frac{(x-a_F)_+^2}{2} + q\left[\frac{(x-a_н)_+^3}{6} - \frac{(x-a_к)_+^3}{6}\right]; \\ B_{31} = M \cdot H(x-a_M)_+ + F(x-a_F)_+ + q\left[\frac{(x-a_н)_+^2}{2} - \frac{(x-a_к)_+^2}{2}\right]; \\ B_{41} = M \cdot \delta(x-a_M)_+ + F \cdot H(x-a_F)_+ + q[(x-a_H)_+ - (x-a_K)_+]. \end{gathered} \tag{10}$$

Матрицы X_*, Y, B B примут вид (11).



Неразрезная балка ступенчато-переменного сечения

Из матрицы X_* следует, что в матрице A_* нужно обнулить 1, 3, 5, 9 и 13 столбцы, т.к. в соответствующих строках матрицы X_* равны нулю начальные параметры (реализованы условия опирания заданной расчетной схемы балки). На место нулевых параметров переносятся независимые параметры матрицы Y. Зависимые параметры матрицы Y переносятся согласно уравнениям совместности перемещений и равновесия узлов 1, 2, 3. В результате переноса параметров получаются следующие компенсирующие элементы матрицы A_*:

$$A(4,1) = -1;\ A(8,3) = -1;\ A(12,5) = -1;\ A(14,9) = -1;\ A(16,13) = -1;$$

$$A(2,6) = -I_1/I_2 = -0{,}5;\ \ A(3,7) = -1;\ A(6,10) = -I_2/I_3 = -2/3;$$

$$A(7,11) = -1;\ \ A(10,14) = -I_3/I_4 = -3/2{,}5;\ \ A(11,15) = -1.$$

$$X_*=\begin{array}{r|c|}\hline 1 & EI_1\nu^{0-1}_{(0)}=0;\ Q^{0-1}_{(0)}\\ \hline 2 & EI_1\phi^{0-1}_{(0)}\\ \hline 3 & M^{0-1}_{(0)}=0;\ Q^{1-2}_{(l)}\\ \hline 4 & Q^{0-1}_{(0)}\\ \hline\hline 5 & EI_2\nu^{1-2}_{(0)}=0;\ Q^{2-3}_{(1)}\\ 6 & EI_2\phi^{1-2}_{(0)}\\ \hline 7 & M^{1-2}_{(0)}\\ \hline 8 & Q^{1-2}_{(0)}\\ \hline\hline 9 & EI_3\nu^{2-3}_{(0)}=0;\ EI_4\phi^{3-4}_{(l)}\\ \hline 10 & EI_3\phi^{2-3}_{(0)}\\ \hline 11 & M^{2-3}_{(0)}\\ \hline 12 & Q^{2-3}_{(0)}\\ \hline\hline 13 & EI_4\nu^{3-4}_{(0)}=0;\ Q^{3-4}_{(l)}\\ \hline 14 & EI_4\phi^{3-4}_{(0)}\\ \hline 15 & M^{3-4}_{(0)}\\ \hline 16 & Q^{3-4}_{(0)}\\ \hline\end{array};\quad Y=\begin{array}{r|c|}\hline 1 & EI_1\nu^{0-1}_{(l)}=0\\ \hline 2 & EI_1\phi^{0-1}_{(l)}=EI_1\phi^{1-2}_{(0)}\\ \hline 3 & M^{0-1}_{(l)}=M^{1-2}_{(0)}\\ \hline 4 & Q^{0-1}_{(l)}\\ \hline\hline 5 & EI_2\nu^{1-2}_{(l)}=0\\ 6 & EI_2\phi^{1-2}_{(l)}=EI_2\phi^{2-3}_{(0)}\\ \hline 7 & M^{1-2}_{(l)}=M^{2-3}_{(0)}\\ \hline 8 & Q^{1-2}_{(l)}\\ \hline\hline 9 & EI_3\nu^{2-3}_{(l)}=0\\ \hline 10 & EI_3\phi^{2-3}_{(l)}=EI_3\phi^{3-4}_{(0)}\\ \hline 11 & M^{2-3}_{(l)}=M^{3-4}_{(0)}\\ \hline 12 & Q^{2-3}_{(l)}\\ \hline\hline 13 & EI_4\nu^{3-4}_{(l)}=0\\ \hline 14 & EI_4\phi^{3-4}_{(l)}\\ \hline 15 & M^{3-4}_{(l)}=0\\ \hline 16 & Q^{3-4}_{(l)}\\ \hline\end{array};\quad B=\begin{array}{r|c|}\hline 1 & -q_1l_1^4/24\\ \hline 2 & -q_1l_1^3/6\\ \hline 3 & q_1l_1^2/2\\ \hline 4 & q_1l_1\\ \hline\hline 5 & -q_1l_2^4/24\\ \hline 6 & -q_1l_2^3/6\\ \hline 7 & q_1l_2^2/2\\ \hline 8 & q_1l_2\\ \hline\hline 9 & -q_2l_3^4/24\\ \hline 10 & -q_2l_3^3/6\\ \hline 11 & q_2l_3^2/2\\ \hline 12 & q_2l_3\\ \hline\hline 13 & 0\\ \hline 14 & 0\\ \hline 15 & 0\\ \hline 16 & 0\\ \hline\end{array}. \qquad (11)$$

Матричное уравнение краевой задачи для балки примет вид

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16				
1		l_1		$-l_1^3/6$														$Q^{0-1}_{(0)}$		$-q_1l_1^4/24$
2		1		$-l_1^2/2$		$-1/2$												$EI_1\phi^{0-1}_{(0)}$		$-q_1l_1^3/6$
3				l_1			-1											$Q^{1-2}_{(l)}$		$q_1l_1^2/2$
4	-1			1														$Q^{0-1}_{(0)}$		q_1l_1
5						l_2	$-l_2^2/2$	$-l_2^3/6$										$Q^{2-3}_{(1)}$		$-q_1l_2^4/24$
6						1	$-l_2$	$-l_2^2/2$		–2/3								$EI_2\phi^{1-2}_{(0)}$		$-q_1l_2^3/6$
7							1	l_2			-1							$M^{1-2}_{(0)}$		$q_1l_2^2/2$
8			-1					1									×	$Q^{1-2}_{(0)}$	=	q_1l_2
9										l_3	$-l_3^2/2$	$-l_3^3/6$						$EI_4\phi^{3-4}_{(l)}$		$-q_2l_3^4/24$
10										1	$-l_3$	$-l_3^2/2$		–3/2,5				$EI_3\phi^{2-3}_{(0)}$		$-q_2l_3^3/6$
11											1	l_3			-1			$M^{2-3}_{(0)}$		$q_2l_3^2/2$
12					-1							1						$Q^{2-3}_{(0)}$		q_2l_3
13														l_4	$-l_4^2/2$	$-l_4^3/6$		$Q^{3-4}_{(l)}$		0
14									-1					1	$-l_4$	$-l_4^2/2$		$EI_4\phi^{3-4}_{(0)}$		0
15															1	l_4		$M^{3-4}_{(0)}$		0
16													-1			1		$Q^{3-4}_{(0)}$		0

Решением приведенной системы уравнений в MATLAB получены значения граничных параметров балки (табл. 1).

ISSN 2076-2429 (print)
ISSN 2223-3814 (on line)

Таблица 1

Граничные параметры неразрезной балки ступенчато-переменного сечения

№ п/п	Граничные параметры	№ п/п	Граничные параметры
1	$Q_{(0)}^{0-1} = -320,29$ Н	9	$EI_4\phi_{(l)}^{3-4} = 4,89$ Нм^2
2	$EI_1\phi_{(0)}^{0-1} = 2,28$ Нм^2	10	$EI_3\phi_{(0)}^{2-3} = 7,02$ Нм^2
3	$Q_{(l)}^{1-2} = -456,05$ Н	11	$M_{(0)}^{2-3} = -79,98$ Нм
4	$Q_{(0)}^{0-1} = 179,71$ Н	12	$Q_{(0)}^{2-3} = 774,51$ Н
5	$Q_{(1)}^{2-3} = -665,49$ Н	13	$Q_{(l)}^{3-4} = 56,57$ Н
6	$EI_2\phi_{(0)}^{1-2} = 1,30$ Нм^2	14	$EI_4\phi_{(0)}^{3-4} = -9,78$ Нм^2
7	$M_{(0)}^{1-2} = -35,14$ Нм	15	$M_{(0)}^{3-4} = -40,73$ Нм
8	$Q_{(0)}^{1-2} = 343,95$ Н	16	$Q_{(0)}^{3-4} = 56,57$ Н

Реакции балки по данным таблицы 1:

$$R_0 = X(4,1) = Q_{(0)}^{0-1} = 179,71\text{ Н};$$

$$R_1 = -X(1,1) + X(8,1) = -Q_{(l)}^{0-1} + Q_{(0)}^{1-2} = 320,29 + 343,95 = 664,24\text{ Н};$$

$$R_2 = -X(3,1) + X(12,1) = -Q_{(l)}^{1-2} + Q_{(0)}^{2-3} = 456,05 + 774,51 = 1230,56\text{ Н};$$

$$R_3 = -X(5,1) + X(16,1) = -Q_{(l)}^{2-3} + Q_{(0)}^{3-4} = 665,49 + 56,57 = 722,06\text{ Н};$$

$$R_4 = -X(13,1) = -56,57\text{ Н}.$$

Уравнения равновесия балки выполняются точно

$$\sum Y = R_0 + R_1 + R_2 + R_3 + R_4 - q_1(l_1 + l_2) - q_2 l_3 = 179,71 + 664,24 + 1230,56 +$$
$$+722,06 - 56,57 - 1000\cdot(0,5+0,8) - 2000\cdot 0,72 = 2796,57 - 2796,57 = 0;$$

$$\sum m_0 = q_1(l_1+l_2)^2/2 - q_2\cdot l_3\cdot\left(l_1 + l_2 + \frac{l_3}{2}\right) + R_1 l_1 + R_2\cdot(l_1+l_2) + R_3\cdot(l_1+l_2+l_3) +$$
$$+R_4\cdot(l_1+l_2+l_3+l_4) = -1000(0,5+0,8)^2/2 - 2000\cdot 0,72\cdot(0,5+0,8+0,72/2) +$$
$$+664,24\cdot 0,5 + 1230,56\cdot(0,5+0,8) + 722,06\cdot(0,5+0,8+0,72) - 56,57\cdot(0,5+0,8+$$
$$+0,72+0,72) = 3390,41 - 3390,41 = 0.$$

Используя начальные параметры балки (см. таблицу 1), можно определить НДС во внутренних точках. Средствами MATLAB [3] в численной форме НДС представлено в табл. 2.

Анализ таблицы 2 показывает, что результаты ЧА МГЭ и метода сил практически совпадают.

Таблица 2

НДС неразрезной балки ступенчато-переменного сечения

№ п/п	x, м	Поперечная сила Q, кН	Изгибающий момент M, Нм	Изгибающий момент M, Нм [2]	Угол поворота $EI\phi$, Нм^2	Прогиб EIv, Нм^3
1	0	179,71	0		2,28	0
2	0,1	79,71	12,97		1,55	0,20
3	0,2	–20,29	15,94		0,02	0,28
4	0,25	–70,29	13,68		–0,73	0,26
5	0,3	–120,29	8,91		–1,31	0,21
6	0,4	–220,29	–8,11		–1,43	0,06
7	0,5	–320,29	–35,14	–35,3	0,65	0,00
8	0,6	243,95	–5,75		1,63	0,13
9	0,7	143,95	13,65		1,39	0,29
10	0,8	43,95	23,04		0,43	0,38
11	0,9	–56,05	22,44		–0,75	0,36
12	1,0	–156,05	11,83		–1,65	0,24
13	1,1	–256,05	–8,77		–1,76	0,06
14	1,2	–356,05	–39,38		–0,60	–0,07
15	1,3	–456,05	–79,98	–79,4	2,34	0,00
16	1,4	574,51	–12,53		3,83	0,33
17	1,5	374,51	34,92		3,40	0,70
18	1,6	174,51	62,37		1,72	0,97
19	1,7	–25,49	69,82		–0,54	1,03
20	1,8	–225,49	57,28		–2,71	0,86
21	1,9	–425,49	24,73		–4,13	0,51
22	2,02	–665,49	–40,73	–40,6	–3,91	0,00
23	2,1	56,57	–36,21		–2,68	–0,26
24	2,2	56,57	–30,55		–1,34	–0,46
25	2,3	56,57	–24,89		–0,24	–0,54
26	2,4	56,57	–19,23		0,65	–0,52
27	2,5	56,57	–13,58		1,30	–0,42
28	2,6	56,57	–7,92		1,73	–0,26
29	2,7	56,57	–2,26		1,94	–0,08
30	2,74	56,57	0,00		1,96	0,00

Таким образом, матрица коэффициентов $\boldsymbol{A}$ для ступенчатого объекта формируется посредством операции квазидиагонализации (матричного суммирования), а ее большая разреженность по определению исключает накопление погрешностей. Поэтому в ЧА МГЭ можно разбивать объект на большое число ступеней (1000 и более), при этом исключаются недостатки существующих методов, а результаты будут стремиться к точным значениям.

Литература

1. Дащенко, А.Ф. Численно-аналитический метод граничных элементов / А.Ф. Дащенко, Л.В. Коломиец, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов. — Одесса: ВМВ, 2010. — В 2 т. — Т. 1. — 416 с. — Т.2. — 512 с.
2. Афанасьев, А.М. Сборник задач по сопротивлению материалов / А.М. Афанасьев, А.С. Вольмир, Ю.П. Григорьев и др. Под ред. А.А. Уманского. — М.: Наука, 1973. — 496 с.
3. Дащенко, А.Ф. MATLAB в механике деформируемого твердого тела. Алгоритмы и программы: Учеб. пособие / А.Ф. Дащенко, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов. — Харьков: Бурун книга, 2011. — 480 с.

ISSN 2076-2429 (print)
ISSN 2223-3814 (on line)

References

1. Dashchenko, A.F. Chislenno-analiticheskiy metod granichnykh elementov [Numerical-Analytical Method of Boundary Elements] / A.F. Dashchenko, L.V. Kolomiec, V.F. Orobey, N.G. Suryaninov. — Odessa: BMB, 2010. — Vol. 1 — 416 p. — Vol. 2 — 512 p.
2. Afanasiev, A.M. Sbornik zadach po soprotivleniu materialov [Collection of Tasks on Strengt of Materials] / A.M. Afanasiev, A.S. Volmir, U.P. Grigoriev, A.A. Umanskiy — M.:, 1973. — 496 p.
3. Dashchenko, A.F. MATLAB v mehanike deformiruemogo nverdogo tela/ Algoritmy I programmi. Uchebnoe posobie. [MATLAB in Deformable Solid Body Mechanics. Algorithms and Programs. Training aid.] / A.F. Dashchenko, V.F. Orobey, N.G. Suryaninov. — Kharkov, 2011. — 480 p.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. гос. акад. стр-ва и архитектуры Гришин А.В.

Поступила в редакцию 18 мая 2012 г.