

УДК 621.391

С.В. Семенюк, магістр, Одес. нац. политехн. ун-т

## АНАЛИЗ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ ПО АНАЛОГОВЫМ ПРОТОТИПАМ

*С.В. Семенюк. Аналіз і проектування динамічних характеристик цифрових фільтрів за аналоговими прототипами.* Розглянуто можливості визначення динамічних характеристик фільтрів на основі стаціонарного коефіцієнта передачі. Розглянуто порівняльний аналіз динамічних характеристик цифрових фільтрів і фільтра Баттерворта нижніх частот третіх порядків двома методами проектування фільтрів: методом білінійного  $z$ -перетворення і методом інваріантного перетворення імпульсної характеристики. Показано переваги цих методів проектування фільтрів за аналоговими прототипами. Визначено динамічні характеристики цифрових фільтрів третіх порядків за аналоговими прототипами.

*Ключові слова:* динамічний коефіцієнт передачі, цифровий фільтр, дискретне перетворення Фур'є, зворотне дискретне перетворення Фур'є.

*С.В. Семенюк. Анализ и проектирование динамических характеристик цифровых фильтров по аналоговым прототипам.* Рассмотрены возможности определения динамических характеристик фильтров на основании стационарного коэффициента передачи. Рассмотрен сравнительный анализ динамических характеристик цифровых фильтров и фильтра Баттерворта нижних частот третьих порядков двумя методами проектирования фильтров: методом билинейного  $z$ -преобразования и методом инвариантного преобразования импульсной характеристики. Показаны преимущества этих методов проектирования фильтров по аналоговым прототипам. Определены динамические характеристики цифровых фильтров третьих порядков по аналоговым прототипам.

*Ключевые слова:* динамический коэффициент передачи, цифровой фильтр, дискретное преобразование Фурье, обратное дискретное преобразование Фурье.

*S.V. Semenyuk. Analysis and design of dynamic characteristics of digital filters on analog prototypes.* Possibilities of determining the dynamic characteristics of filters on the basis of stationary gain are considered. The comparative analysis of the dynamic characteristics of digital filters and Butterworth low-pass filter of the third orders by two methods of designing filters is considered: by the bilinear  $z$ -transformation method, and by impulse response invariant transformation method. The advantages of these methods of designing filters on analog prototypes are shown. Dynamic characteristics of digital filters of the third orders on the analog prototypes are determined.

*Keywords:* dynamic gain, digital filter, discrete Fourier transform, inverse discrete Fourier transform.

Проектирование цифровых фильтров может осуществляться разнообразными методами. Цифровые фильтры используются в современных системах передачи информации. Фильтры нижних частот, будучи низкочастотным прототипом, проектируются в основном на основании рекурсивных фильтров. При постоянно меняющемся внешнем воздействии информацию о реакции фильтра получают из динамических режимов. При проектировании по аналоговому прототипу применяются метод билинейного  $z$ -преобразования и метод инвариантного преобразования импульсной характеристики [1]. Предлагается исследование динамики аналоговых и цифровых фильтров нижних частот третьих порядков, в предположении, что эффекты квантования отсутствуют.

Анализ фильтров нижних частот является основой анализа любого фильтра, т. к. от них всегда можно перейти к полосовому фильтру и к фильтру высоких частот. Для анализа фильтров и сигналов применяют преобразование Фурье и Лапласа [1].

В реальных условиях любой процесс или сигнал имеют начало и конец и, кроме этого, исследуемый сигнал может менять свои параметры в процессе развития. В таких случаях необходимо переходить к частотно-временным методам анализа и динамическим характеристикам цепей, которые в последнее время получили широкое развитие [1].

К частотно-временным методам анализа относятся: метод динамического коэффициента передачи (ДКП) [2], применение текущего и мгновенного спектров [3], оконное преобразование Фурье и вейвлет-преобразование [4], в которых используется ДКП в комплексной или операторной формах, соответственно

$$K(j\omega, t) = \int_0^t h(t) e^{-j\omega t} dt; \quad K(p, t) = \int_0^t h(t) e^{-pt} dt, \quad (1)$$

где  $h(t)$  — импульсная характеристика цепи;

$\omega$  — круговая частота.

В этом случае можно определить закон изменения огибающей сигнала на любой частоте при изменениях амплитуды, частоты, фазы либо других параметров.

Стационарный коэффициент передачи в операторной форме [2] имеет вид

$$K(p) = \frac{M(p)}{N(p)},$$

где  $M(p)$ ,  $N(p)$  — полиномы переменной  $p$  с действительными коэффициентами.

Для этого импульсную характеристику фильтра следует представить обратным преобразованием Фурье или обратным преобразованием Лапласа, которое вычисляется с помощью вычетов, взятых в полюсах стационарного коэффициента передачи, в виде

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi j} \int_{C-j\infty}^{C+j\infty} K(p) e^{pt} dp = \sum_{i=1}^n \frac{M(p_i)}{N'(p_i)} e^{p_i t}, \quad (2)$$

где  $p_i$  —  $i$ -й корень знаменателя  $N(p)$ .

Для аналогового фильтра нижних частот (ФНЧ) третьего порядка ( $n = 3$ ) с коэффициентом передачи [5]

$$K(p) = \frac{\omega_0^3}{Q} \frac{1}{p^3 + 2\omega_0 Q^{-1} p^2 + (\omega_0^2 + \omega_0^2 Q^{-2}) p + \omega_0^3 Q^{-1}},$$

и с корнями  $p_1 = -\alpha_1 = -2\alpha_2$  и  $p_{2,3} = -\alpha_2 \pm j\omega_c$  согласно выражению (1) после нормирования  $K(j\omega, t)$

по частоте  $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$  и по времени  $y = 2\alpha_2 t$  и с учетом  $\omega_c \approx \omega_0$  получен нормированный ДКП

$$K(j\Omega, y) = K(j\Omega) \left[ 1 - e^{-\frac{y}{2} - jQ\Omega y} \left[ \left( 1 + j\frac{\Omega}{Q} - \Omega^2 \right) e^{-\frac{y}{2}} + (1 + j\Omega Q) \left[ \left( \frac{2Q + j\Omega}{2Q^2} \right) \sin(Qy) - \frac{j\Omega}{Q} \cos(Qy) \right] \right] \right],$$

где  $K(j\Omega) = \frac{1}{(1 + jQ\Omega)(1 + j\Omega Q^{-1} - \Omega^2)}$  — нормированный коэффициент передачи;

$\alpha$  — затухание цепи;

$\omega_c$  — частота собственных колебаний цепи;

$\omega_0$  — частота среза цепи;

$Q = \frac{\omega_0}{2\alpha}$  — добротность цепи,

построен модуль ДКП как функция частоты  $\Omega$  и времени  $y$ , и как функция времени  $y$  при  $\Omega=0$  (1); 1,5 (2); 2 (3) (рис. 1 а, б, соответственно), при  $Q=1$ .

Трехмерное изображение модуля ДКП (рис. 1, а) позволяет достаточно точно производить анализ фильтра и по частоте, и по времени. Значения коэффициента передачи в начале времени значительно отличаются от стационарного: частотная характеристика расширяется (рис. 1, а), а временная зависимость приобретает колебательный характер (рис. 1, а, б). Из приведенной переходной характеристики (кривая 1, рис. 1, б) реакция фильтра имеет колебательный характер, типичный для фильтров третьего порядка [5].

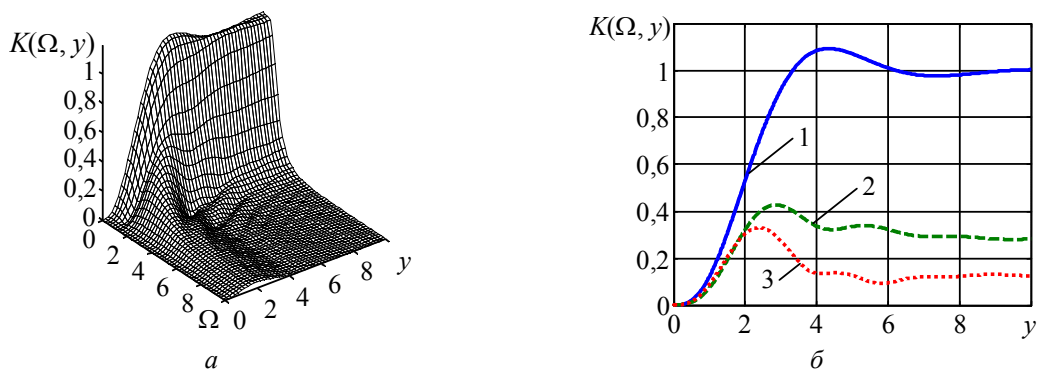


Рис. 1. Модуль ДКП аналогового ФНЧ порядка  $n=3$  как функция частоты  $\Omega$  и времени  $y$  (а) и как функция времени  $y$  при  $\Omega=0$  (1); 1,5 (2); 2 (3) (б), при  $Q=1$

Так для денормированного ФНЧ Баттерворта 3-го порядка стационарный коэффициент передачи в операторной форме [6]

$$K(p) = \frac{\omega_{\Pi}^3}{p^3 + 2\omega_{\Pi}p^2 + 2\omega_{\Pi}^2p + \omega_{\Pi}^3},$$

где  $p_1 = -\omega_{\Pi}$ ,  $p_{2,3} = -0,5\omega_{\Pi} \pm j0,866\omega_{\Pi}$  — корни коэффициента передачи;

$\omega_{\Pi}$  — частота среза.

Нормированный ДКП фильтра Баттерворта согласно выражению (1) принимает вид

$$K(j\Omega, y) = K(j\Omega) \left[ 1 - e^{-j\Omega y - \frac{y}{2}} \left[ (1 + j\Omega - \Omega^2) e^{-\frac{y}{2}} + (1 + j\Omega) \left[ \left( \frac{j\Omega + 2}{\sqrt{3}} \right) \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right) - j\Omega \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y\right) \right] \right] \right].$$

Этот результат, а также анализ динамических характеристик ФНЧ Баттерворта третьего порядка полностью совпадают с известными данными [6].

Недостатком таких вычислений является необходимость определения импульсной характеристики цепи  $h(t)$ , что для цепей выше второго порядка чаще всего затруднительно.

Предлагается развитие метода [2] путем использования стационарного коэффициента передачи в операторной  $K(p)$  или комплексной  $K(j\omega)$  формах с коэффициентами, зависящими от параметров цепи.

Для анализа цифровых ФНЧ следует использовать метод билинейного  $z$ -преобразования, осуществляемый переменной [1]

$$p = \frac{2(1 - z^{-1})}{T(1 + z^{-1})},$$

где  $T$  — период (интервал) дискретизации;

$z = e^{j\omega T}$  — переменная для перехода из  $z$ -области в частотную.

Частотная характеристика цифрового фильтра (ЦФ) обращается в нуль на частоте  $\pi T^{-1}$ .

При этом отсутствует эффект наложения сдвинутых амплитудно-частотных характеристик аналогового фильтра, но т.к. аналоговые и цифровые частоты не совпадают, происходит деформация частотной шкалы и деформированная частота для аналогового фильтра

$$\omega' = \frac{2}{T} \operatorname{tg}\left(\frac{\omega T}{2}\right).$$

При аппроксимации частотной характеристики ЦФ метод билинейного преобразования [1] оправдан из-за абсолютно точного совпадения частотных характеристик аналогового и цифрового фильтров в диапазоне частот  $|\omega| \leq 0,25\pi T^{-1}$ .

Тогда коэффициент передачи цифрового ФНЧ третьего порядка, полученный методом билинейного  $z$ -преобразования,

$$K(z) = \frac{a_0(1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3})}{1 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3}},$$

где  $a_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  и  $b_3$  — коэффициенты, полученные при переходе от аналогового фильтра к цифровому.

Для перехода от аналогового фильтра к ЦФ используется метод инвариантного преобразования импульсной характеристики [1]. Отсчеты импульсной характеристики

$$h_n = h(nT),$$

где  $nT$  — точки отсчета;

$n = 0, 1, \dots, N - 1$  — номер отсчета (выборки);

$N$  — количество отсчетов.

Интервал дискретизации удовлетворяет критерию Найквиста-Котельникова [1]

$$T \leq \frac{1}{2f_s},$$

где  $f_s$  — верхняя частота сигнала.

При нарушении данного критерия возникает эффект наложения.

Коэффициент передачи цифрового ФНЧ Баттерворта третьего порядка при этом равен  $z$ -преобразованию от импульсной характеристики [1]

$$K(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Th_n z^{-n} = \frac{a_0 z^{-1} + a_1 z^{-2}}{1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}},$$

где  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  и  $b_3$  — коэффициенты коэффициента передачи.

Для сохранения размерности в процессе расчета  $K(z)$  умножается на  $T$ .

При первостепенном значении импульсной характеристики  $h_n$ , которая воспроизводится с абсолютной точностью при проектировании ЦФ, метод инвариантного преобразования импульсной характеристики [1] оправдан.

Для анализа и проектирования цифровых фильтров предлагается использовать прямое и обратное дискретные преобразования Фурье конечных дискретных сигналов длины  $N$  [2]:

$$K(jm\Delta\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n e^{-j\Delta\Omega Tmn} = \sum_{n=0}^{N-1} h_n e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} = \sum_{n=0}^{N-1} h_n W^{mn}; \quad (3)$$

$$h_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} K(jm\Delta\Omega) e^{j\frac{2\pi}{N}mn} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} K(jm\Delta\Omega) W^{-mn}, \quad (4)$$

где  $\Delta\Omega = \frac{2\pi}{NT}$  — интервал между соседними спектральными линиями;

$h_n$  — выборки импульсной характеристики,  $0 \leq n \leq N - 1$ ;

$W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$  — комплексное число, у которого число данных равно  $N$ ;

$K(jm\Delta\Omega)$  — выборки коэффициента передачи,  $0 \leq m \leq N - 1$ ;

$m$  — номер отсчета.

Дискретное преобразование из частотной области во временную выполняется выражением (4).

Для определения ДКП ЦФ использован переход от (3) к

$$K(m, n) = \sum_{n=0}^k h_n W^{mn},$$

где  $k = 0, 1, \dots, N - 1$ .

ДКП позволяет количественно оценить оптимальный порядок ЦФ при обработке сигналов конечной длины, а также оценить реакцию фильтра, в т.ч. фильтра Баттерворта, на сигнал.

График вертикальных и горизонтальных пересечений матрицы ДПФ для рассмотренного ФНЧ третьего порядка и ФНЧ Баттерворта третьего порядка совпадает с [5] методом билинейного преобразования с количеством отсчетов  $N = 64$ , периодом дискретизации  $T = \pi/(4\omega_0)$  и добротностью  $Q = 1$  приведен на рис. 2.

Видно, что полученная характеристика ДКП ЦФ совпадает с аналоговым вариантом (см. рисунок 1, а), несмотря на погрешность дискретизации и деформацию частотной шкалы.

Графики модуля и фазы ДКП цифрового ФНЧ Баттерворта третьего порядка методом инвариантного преобразования импульсной характеристики [1] с количеством отсчетов  $N = 256$ , периодом дискретизации  $T = \pi/(32\omega_{\Pi})$  и добротностью  $Q = 1$  приведены на рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика (кривая 3, рис. 3, а) с увеличением отсчетов  $m$  от 0 до  $0,5N$  в стационарном режиме достигает нуля, а стационарная динамическая фазовая характеристика (кривая 3, рис. 3, б) с увеличением отсчетов  $m$  стремится к  $-270^\circ$ .

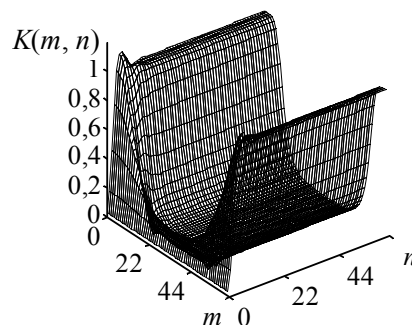


Рис. 2. Модуль ДКП цифрового ФНЧ третьего порядка и ФНЧ Баттерворта третьего порядка

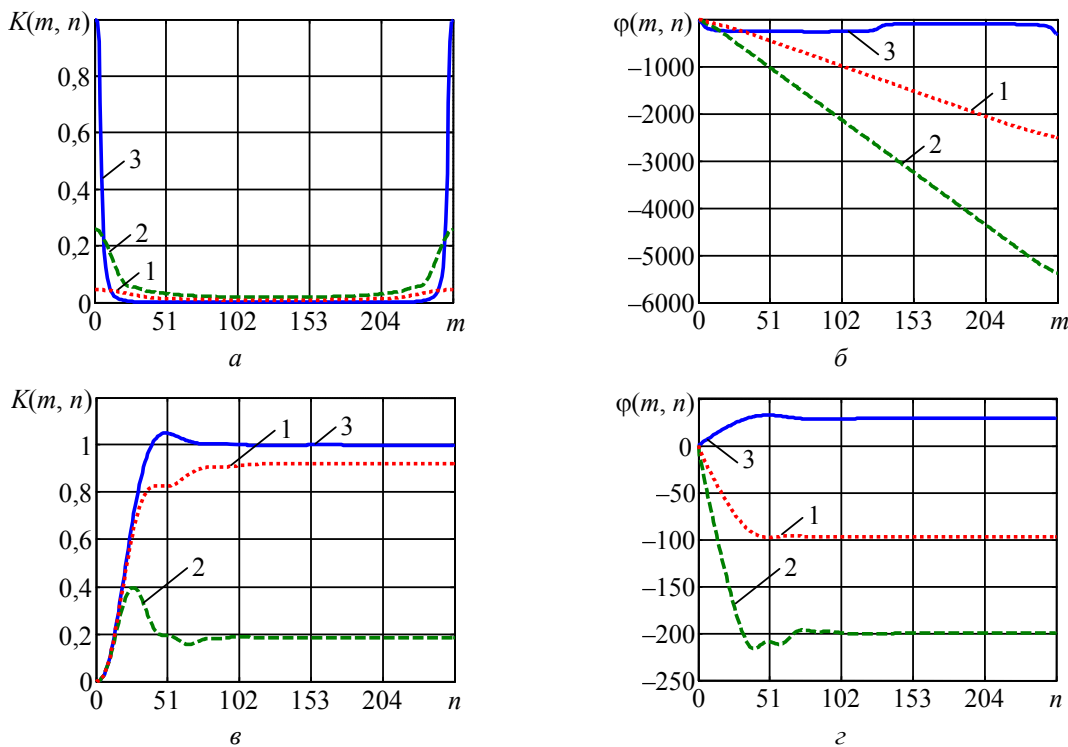


Рис. 3. Модуль и фаза ДКП цифрового ФНЧ Баттерворта 3-го порядка как функция частоты  $m$  при  $k=7$  (1); 15 (2); 255 (3) (а, б) и как функция времени  $n$  для значений  $k=3$  (1); 7 (2); 255 (3) (в, г)

Таким образом, метод билинейного преобразования по сравнению с методом инвариантного преобразования импульсной характеристики приводит к лучшей аппроксимации исходной частотной характеристики, отображая мнимую ось  $p$ -плоскости непосредственно в круг единичного радиуса на  $z$ -плоскости. Динамические резонансные характеристики заметно отлича-

ются от стационарных характеристик из-за динамических искажений. Данный метод динамических режимов позволяет проводить анализ не отдельно в плоскости времени или частоты, а одновременно на частотно-временной плоскости, что расширяет его возможности.

### Литература

1. Гоноровский, И.С. Радиотехнические цепи и сигналы: учеб. пособие для вузов / И.С. Гоноровский. — [5-е изд.]. — М.: Дрофа, 2006. — 719 с.
2. Філіпський, Ю.К. Динаміка сигнальних перетворень: навч. посіб. для студентів ВНЗ / Ю.К. Філіпський. — Одеса: ОДПУ, 2006. — 104 с.
3. Харкевич, А.А. Спектры и анализ / А.А. Харкевич. — М.: Физматгиз, 1962. — 236 с.
4. Воробьев, В.И. Теория и практика вейвлет-преобразования / В.И. Воробьев, В.Г. Грибунин. — СПб.: ВУС, 1999. — 204 с.
5. Филипский, Ю.К. Анализ динамических характеристик аналоговых и цифровых фильтров произвольных порядков / Ю.К. Филипский, С.В. Семенюк // Пр. Одес. политехн. ун-ту. — Одесса, 2012. — Вып. 1(36). — С. 130 — 136.
6. Филипский, Ю.К. Применение операторного метода к определению отклика динамических систем / Ю.К. Филипский, С.В. Семенюк // Тр. Одес. политехн. ун-та. — Одесса, 2010. — Вып. 1 (33)-2(34). — С. 130 — 134.

### References

1. Gonorovskiy, I.S. Radiotekhnicheskie tsepi i signaly: ucheb. posobie dlya vuzov [Radio Circuits and Signals: Manual for higher education] / I.S. Gonorovskiy. — 5<sup>th</sup> edition. — Moscow, 2006. — 719 p.
2. Filipskiy, Yu.K. Dynamika syhnalnykh peretvoren: navch. posib. dlia studentiv VNZ [Dynamics of Signal Change: a teach. manual for students of higher educational establishments] / Yu.K. Filipskiy. — Odessa, 2006. — 104 p.
3. Kharkevich, A.A. Spektry i analiz [Spectra and Analysis] / A.A. Kharkevich. — Moscow, 1962. — 236 p.
4. Vorob'ev, V.I. Teoriya i praktika veyvlet-preobrazovaniya [Theory and Practice of Wavelet Transforms] / V.I. Vorob'ev, V.G. Gribunin. — St.-Peterburg, 1999. — 204 p.
5. Filipskiy, Yu.K. Analiz dinamicheskikh kharakteristik analogovykh i tsifrovyykh filtrov proizvol'nykh poryadkov [Analysis of dynamic characteristics of analogue and digital filters of random orders] / Yu. K. Filipskiy, S.V. Semenyuk // Pr. Odes. Politekhn. Un-tu. [Proc. of the Odessa Polytech. Univ.] — Odessa, 2012. — Issue 1(36). — pp. 130 — 136.
6. Filipskiy, Yu.K. Primenenie operatornogo metoda k opredeleniyu otklika dinamicheskikh sistem [Application of operational method to determination of dynamic systems response] / Yu.K. Filipskiy, S.V. Semenyuk // Tr. Odes. Politekhn. Un-ta. [Proc. of the Odessa Polytech. Univ.]. — Odessa, 2010. — Issue 1 (33)-2(34). — pp. 130 — 134.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. политехн. ун-та Ситников В.С.

Поступила в редакцию 11 апреля 2012 г.