УДК 517.972.5+519.217.4.001.57

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПРОПИТКИ ГРУНТА ЧЕРЕЗ ОСНОВАНИЕ ЗЕМЛЯНОГО ГИДРОТЕХНИЧЕСКОГО СООРУЖЕНИЯ

С.А. Положаенко[1], С.Д. Кузниченко[2]

[1] Одесский национальный политехнический университет,
просп. Шевченко, 1, Одесса, 65044, Украина; e-mail: polozhaenko@mail.ru
[2] Одесский государственный экологический университет,
ул. Львовская, 15, Одесса, 65016, Украина

Предложено решение задачи фильтрации жидкости через основание земляного гидротехнического сооружения с помощью метода математического и численного моделирования аномальных диффузионных процессов, основанного на применении и развитии аппарата вариационных неравенств.

Ключевые слова: аномальные диффузионные процессы, математическое моделирование, вариационные неравенства

Постановка проблемы

Процесс просачивания жидкости через сложно структурированные пластовые горизонты можно отнести к классу диффузионных процессов, которые характеризуются аномальностью протекания физических явлений. Аномальность проявляется в нарушении линейного закона фильтрации – закона Дарси, и является характерной для определенных классов систем «жидкость / пористая среда». Аномальный характер протекания процесса диффузии в данном случае обусловлен приобретением жидкостью псевдопластических реологических свойств в результате взаимодействия с физической средой (например, глиной и глинизированными породами).

Рассмотрим земляное гидротехническое сооружение (бассейн) для которого построим математическую модель фильтрации жидкости через его основание. Выполним адаптацию данной математической модели к реальным условиям и проведем ее численное исследование, что важно на этапе проектирования гидротехнического сооружения для оценки возможного влияния пропитки на динамику уровня грунтовых вод.

По физике протекающих процессов данная модель описывает фильтрацию жидкости в скелете пористой среды. Особенностью предлагаемой математической модели может служить то, что поверхность раздела между влажной (пропитанной) и сухой частями грунта под основанием бассейна рассматривается как некоторая мембрана с односторонней проводимостью. Такое предположение вытекает из условия, что грунт под основанием бассейна имеет пусть малые, но конечные значения пористости и проницаемости [1]. В этом случае микроструктуирование грунта обусловливает существенно односторонний характер градиента пропитки под основанием бассейна.

Математически адекватным описанием данного физического процесса может служить аппарат вариационных неравенств, применяемый для построения математической модели реологии аномальных жидкостей [2].

Материалы и методы исследования

При разработке математической модели будем использовать расчетную схему, представленную на рис. 1 (для простоты предлагается симметричность схемы бассейна).

Задача пропитки (фильтрации) ставится для бассейна, ограниченного с боковых сторон непроницаемыми плотинами, и достаточно протяженного по пространственной координате z_1 (т.е. предполагается выполненным условие $L >> l$). Грунт под основанием бассейна имеет известные физические характеристики: пористость $m(z)$ и проницаемость $k(z)$ (рассматривается линейный случай). Основой для построения математической модели рассматриваемого процесса явились модели предложенные в [2, 3].

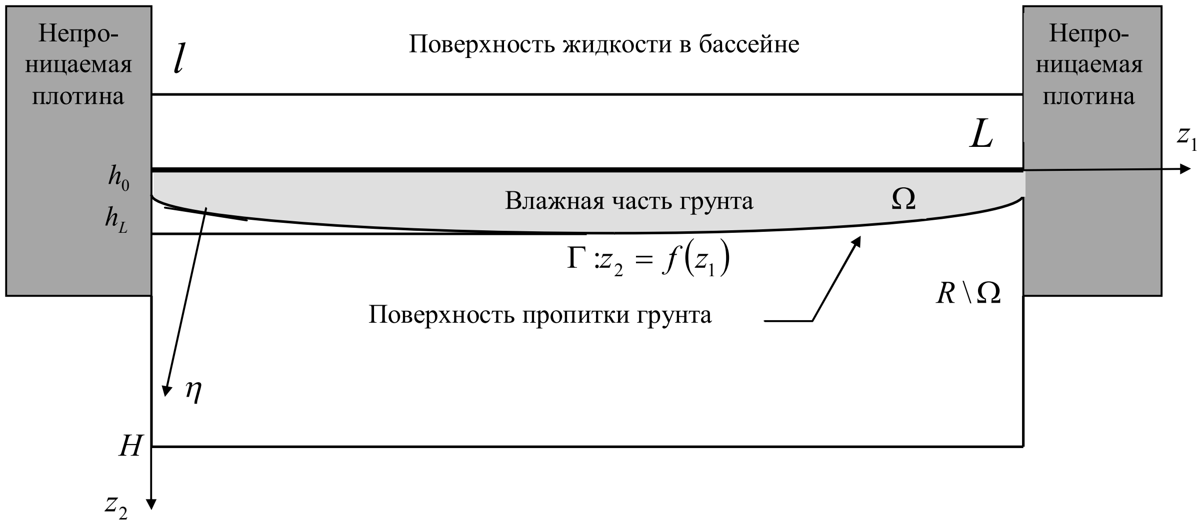

Рис. 1. Схема пропитки грунта под основанием бассейна

Предполагается, что задача рассматривается в прямоугольнике $R = \phi(z)$, $z = [z_1, z_2]$, который является поперечным сечением под основанием плотины. Неизвестной в задаче является (в поперечном сечении) влажная часть $\Omega \subset R$ грунта. Формализуем постановку задачи и приведем ее к вариационному неравенству.

Пусть $L, h_L, h_0, H \in R$ – геометрические размеры пространственной области, причем $L > 0$, $0 < h_0 < H$, $0 < h_L < H$. Необходимо найти функцию $z_2 = f(z_1)$, $0 \le z_1 \le L'$, с $f(0) = h_0$ и $f(z_1) > h$, представляющую собой уравнение поверхности раздела влажной и сухой частей плотины ($L' = 0.5L$ – ввиду симметричности схемы бассейна). При решении поставленной задачи воспользуемся функцией пьезометрического напора жидкости

$$u(z),\ \forall z \in \overline{\Omega},$$

где $\overline{\Omega}$ – замыкание Ω (т.е. $\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \Sigma$); Σ – граница области Ω.

Данное замечание следует из условия $u(z) \equiv f(z_1)$, причем, для неизвестной части Γ общей границы Σ, можно записать

$$\Gamma : z_2 = f(z_1),\ 0 < z_1 < L'. \qquad (1)$$

Для определения множества функций, на котором будем искать решение задачи, введем в рассмотрение функцию $v(z) = u(z) - f(z_1)$ и вариацию $\zeta(z) = \min[u(z) - f(z_1)]$, непрерывные на $\overline{\Omega}$ и обращающиеся в нуль на границе Γ. Запишем очевидные соотношения

$$\int_R \left(\frac{\partial v}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial z_1} + \frac{\partial v}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial z_2} \right) dz = \int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial z_1} + \frac{\partial v}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial z_2} \right) dz =$$
$$= \int_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial z_1} + \frac{\partial u}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial z_2} \right) dz_1 dz_2 - \int_\Omega \frac{\partial f(z_1)}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial z_2} dz.$$

Первый член в последнем выражении тождественно равен нулю. Тогда окончательно можно записать

$$-\int_\Omega \frac{\partial f(z_1)}{\partial z_2} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial z_2} dz_1 dz_2 = -\int_R I_\Omega \frac{\partial \zeta}{\partial z_2} dz,$$

где I_Ω – характеристическая функция в Ω, причем она тождественно равна нулю везде на $R \setminus \Omega$, т.е. последний интеграл не равен нулю только в области Ω.

Из приведенных соотношений очевидно равенство

$$-\left\{ \frac{\partial^2 [u - f(z_1)]}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 [u - f(z_1)]}{\partial z_1^2} \right\} = \frac{\partial}{\partial z_2} I_\Omega \text{ в } R. \qquad (2)$$

Задача (2) интегрируется

$$\omega(z) = \int_0^{f(z_1)} \{u(z) - f(z_1)\} dz_2, \ \forall z \in \Omega$$

или, с учетом ранее принятых обозначений, имеем

$$-\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z_2^2} \right) = -I_\Omega \text{ в } R,$$

а значит,

$$-\left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial z_1^2}(v - \omega) + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z_2^2}(v - \omega) \right] \geq -(v - \omega) \qquad (3)$$

почти везде в R для любой $v(z) \geq 0$ в R.

Таким образом, приходим к выводу, что в качестве выпуклого множества K допустимых функций для искомого вариационного неравенства необходимо взять множество неотрицательных $\omega(z)$ с соответствующими граничными условиями:

$$\omega(0, z_2) = \begin{cases} \frac{1}{2L'}({h_0}^2 - z_2^2), & 0 \leq z_2 \leq h_0, \\ 0, & h_0 < z_2 \leq H, \end{cases} \qquad (4)$$

$$\omega(L', z_2) = \begin{cases} \frac{1}{2L'}\left(h_L^{\ 2} - z_2^2\right), & 0 \le z_2 \le h_L, \\ 0, & h_L < z_2 \le H, \end{cases} \tag{5}$$

$$\omega(z_1, 0) = \frac{1}{2l} h_L^2 + \left[\left(h_0^2 - h_L^2\right) z_1\right], \quad 0 \le z_1 \le L'. \tag{6}$$

Таким образом, получено решение поставленной задачи в следующем виде. Для совокупности $\{f, u\}$ при $u(z) \in H^1(\Omega)$ (где $H^1(\Omega)$ – гильбертово пространство непрерывно дифференцируемых функций) и гладкой $f(z_1)$, функция $\omega(z)$ является решением следующей задачи Коши

$$\omega(z) = 0 \text{ на } \Gamma : z_2 = f(z_1), 0 < z_1 < L',$$

$$\frac{\partial \omega(z)}{\partial z_2} = \frac{\partial [u(z) - f(z_1)]}{\partial z_2} \text{ в } \Omega; \ \omega(z) = 0, \forall z \in R \setminus \Omega, \tag{7}$$

$$\omega(z) \in K : \int_R \left\{ \frac{\partial \omega}{\partial z_1} \left[\frac{\partial (v - \omega)}{\partial z_1} \right] + \frac{\partial \omega}{\partial z_2} \left[\frac{\partial (v - \omega)}{\partial z_2} \right] \right\} dz \ge -\int_R (v - \omega) dz, \forall v(z) \in K,$$

где K определяет множество допустимых функций, причем функция $\omega(z)$ – представляет собой искомое решение поставленной задачи реологии.

Неравенство (7), дает возможность отыскать неизвестную границу $\Gamma : z_2 = f(z_1), 0 < z_1 < L'$, представляющую собой поверхность раздела между влажной и сухой частями грунта под основанием бассейна.

Выполним адаптацию вариационного неравенства (7) для решения прикладных задач. Функцию пьезометрического давления $u(z)$ выразим через физические величины и пространственные параметры, поддающиеся непосредственному измерению,

$$u(z) = l + \frac{m}{\gamma} P(z), \tag{8}$$

где l – уровень жидкости в бассейне (заметим, что математически $l \equiv z_2$ или $l = Cz_2$); m – пористость грунта; γ – удельный вес жидкости; $P(z)$ – функция давления жидкости в бассейне.

С учетом (8) запишем (7) относительно искомой функции $f(z_1)$

$$f(z_1) \in K : \int_R \left\{ \left\{ \left[\frac{\partial C z_2}{\partial z_1} + \frac{m}{\gamma} \frac{\partial P(z)}{\partial z_1} \right] - \frac{\partial f(z_1)}{\partial z_1} \right\} \left\{ \frac{\partial v}{\partial z_1} - \left\{ \left[\frac{\partial C z_2}{\partial z_1} + \frac{m}{\gamma} \frac{\partial P(z)}{\partial z_1} \right] - \frac{\partial f(z_1)}{\partial z_1} \right\} \right\} + \right.$$

$$\left. + \left\{ \left[C + \frac{m}{\gamma} \frac{\partial P(z)}{\partial z_2} \right] - \frac{\partial f(z_1)}{\partial z_2} \right\} \left\{ \frac{\partial v}{\partial z_2} - \left\{ \left[C + \frac{m}{\gamma} \frac{\partial P(z)}{\partial z_2} \right] - \frac{\partial f(z_1)}{\partial z_2} \right\} \right\} \right\} dz \ge \tag{9}$$

$$\ge \int_R \{ v - [C z_2 - f(z_1)] \} dz \forall v(z) \in K,$$

которое дополним граничным условием задачи Коши

$$f(z_1) = 0,\ \forall z \in R \setminus \Omega . \qquad (10)$$

Неравенство (9) для граничного условия вида (10) решается с помощью подхода, предложенного в [4].

Результаты исследования и их анализ

Используем расчетную схему (рис. 1) и соотношения (8)-(10) для моделирования процесса пропитки грунта под основанием бассейна прямоугольной формы при исходных данных в соответствии с табл. 1.

Таблица 1.

Исходные данные для моделирования процесса пропитки грунта под основанием гидротехнического сооружения (бассейна)

№ п/п	Наименование параметра	Обозначение	Единица измерения	Значение
1	Длина бассейна	L	м	100
2	Ширина бассейна	B	м	$B_1 = 50$ $B_2 = 80$
3	Шаг дискретизации по пространственной координате z_1	Δz_1	м	5
4	Уровень жидкости в бассейне	l	м	$l_1 = 3$ $l_2 = 5$
5	Пористость грунта	m	%	15
6	Удельный вес жидкости	γ	кг/м^3	1000
7	Удельное давление жидкости	P_y	кг/м^2	1000

Моделирование выполним для двух значений уровня жидкости в бассейне l_1 и l_2, а также для разных соотношений длины L и ширины B бассейна. Результаты моделирования приведены на рис. 2.

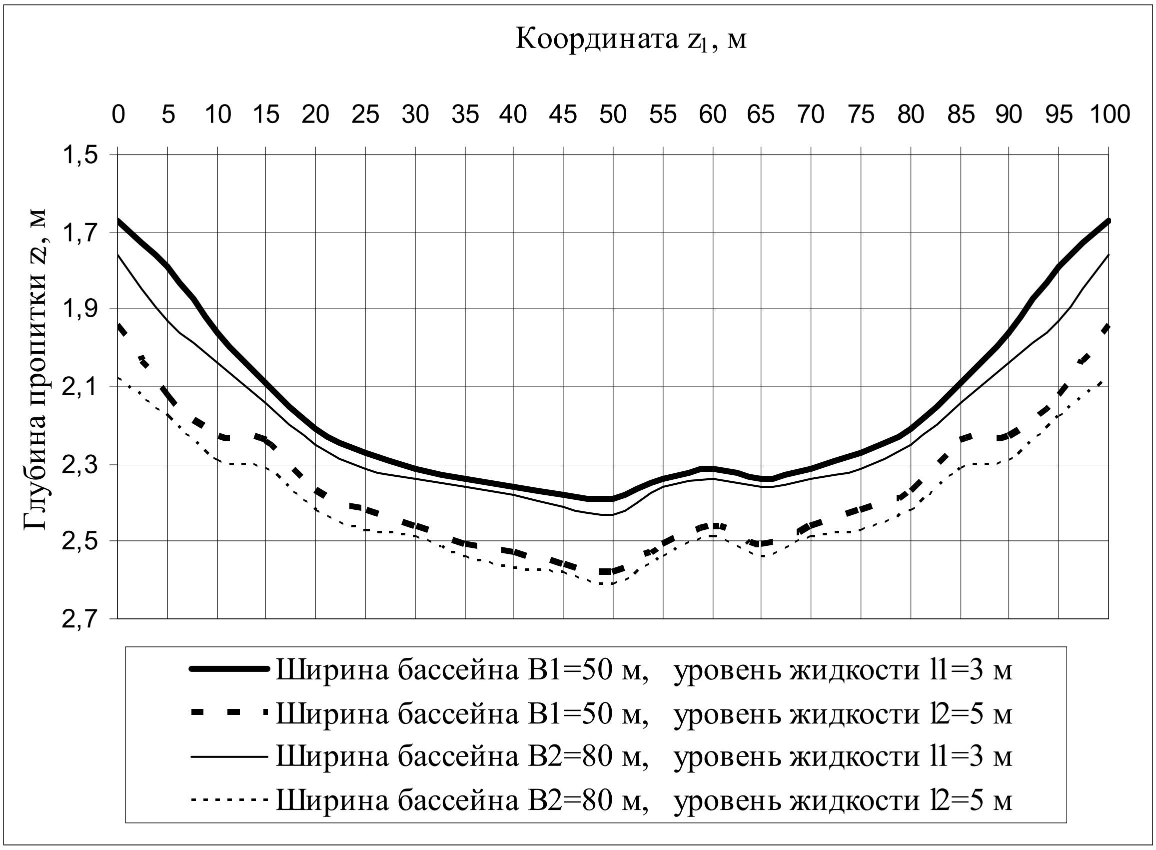

Рис. 2. Результаты моделирования процесса пропитки грунта под основанием гидротехнического сооружения (бассейна)

Анализ результатов моделирования позволяет сделать следующие выводы. Соотношение длины L и ширины B бассейна практически не влияет на глубину пропитки z_2, но заметно оказывает влияние на форму границы $\Gamma: z_2 = f(z_1),\ 0 < z_1 < L'$ (с ростом ширины B бассейна граница Γ имеет меньший "завал" вблизи стенок бассейна). Значительно большее влияние на глубину пропитки z_2 оказывает уровень жидкости в бассейне l. Поэтому проводимые исследования должны быть учтены при анализе уровня грунтовых вод в месте строительства гидротехнического сооружения. Моделирование дает возможность оценить безопасный уровень жидкости в бассейне, обеспечивающий надежную сухую грунтовую прослойку между влажной пропитанной частью под его основанием и горизонтами грунтовых вод (последние могут быть определены пробными бурениями или моделированием).

Список литературы

1. Киндерлерер Д. Введение в вариационные неравенства и их приложения / Д. Киндерлерер, Г. Стампаккья. – М.:Мир, 1983. – 256 с.
2. Положаенко С.А. Модель процесса аномальной реалогии с односторонней проводимостью границы // Труды Одесского политехнического университета. – 2000. – Вып. 1(10). – С. 124-129.
3. Положаенко С.А. Математическая модель фильтрации грунтовых вод для класса гидротехнических земляных сооружений // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. – 2005. – Вип.17. – С. 206-210.
4. Верлань А.Ф. Математическое моделирование аномальных диффузионных процессов / А.Ф. Верлань, С.А. Положаенко, Н.Г. Сербов. – К.: Наукова думка, 2011. – 416 с.

С.А. Положаєнко, С.Д. Кузніченко
МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ПРОСОЧЕННЯ ҐРУНТУ ЧЕРЕЗ ОСНОВУ ЗЕМЛЯНОЇ ГІДРОТЕХНІЧНОЇ СПОРУДИ

Розглянуто рішення задачі фільтрації рідини через основу земляної гідротехнічної споруди за допомогою методу математичного та чисельного моделювання аномальних дифузійних процесів на основі застосування і розвитку апарату варіаційних нерівностей.

Ключові слова: аномальні дифузійні процеси, математичне моделювання, варіаційні нерівності.

S. Polozhaenko, S. Kuznichenko
MODELING OF GROUND ACROSS THE BASE IMPREGNATION GROUND WATER PLANTS

Proposed solution of the problem of fluid filtration through the bottom of an earthen hydraulic structures by using the mathematical and numerical modeling of anomalous diffusion processes based on the application and development apparatus of variational inequalities.

Keywords: anomalous diffusion processes, mathematical modeling, variational inequalities