УДК 004.55

ПРИМЕНЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ КОМПЬЮТЕРНЫХ СИСТЕМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Ухина А.В., Шульгин М.Р.
д.т.н., профессор каф. КС Ситников В.С.
Одесский Национальный Политехнический Университет, УКРАИНА

АННОТАЦИЯ. В работе рассматривается задача устойчивости компьютерных систем высокого порядка. В ходе анализа найдены соотношения верхней границы треугольника устойчивости и ограничения на коэффициенты передаточной функции.

Введение. При разработке специализированных компьютерных, программируемых мобильных и робототехнических систем возникает задача перестройки коэффициентов системы для соответствия условиям их функционирования. В этом случае задача обеспечения устойчивости системы очень важна. Поэтому при перестройке параметров необходимо оценить возможность такой перестройки без выхода системы за границы устойчивости. Для систем выше второго порядка эта задача не является простой.

Цель работы. Упростить процесс оценки устойчивости системы выше второго порядка на основе треугольника устойчивости и неравенств допустимых значений коэффициентов передаточной функции системы.

Основная часть работы. В большинстве задач устойчивости рассматривается характеристическое уравнение системы

$$D(z)=\sum_{i=0}^{n} b_i z^{n-i},$$

где b_i - коэффициенты знаменателя передаточной функции системы (в большинстве случаев $b_0=1$), n - порядок системы.

Оценить устойчивость системы n-го порядка можно по критерия Джури [1], в соответствии с которым должны выполняться неравенства для характеристического уравнения вида

$$D(1)>0;\ (-1)^n D(-1)>0. \qquad (1)$$

Этот критерий хорошо работает при постоянных коэффициентах передаточной функции системы, а при перестройке одного или нескольких коэффициентов возникают проблемы. Необходимо найти границы изменения этих коэффициентов для обеспечения устойчивости.

Для системы второго порядка, передаточная функция которого имеет вид

$$H_2(z)=\frac{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}$$

Характеристическое уравнение будет равно

$$D(z)=z^2+b_1z+b_2.$$

В этом случае из (1) можно записать

$$1+b_1+b_2>0;$$
$$1-b_1+b_2>0.$$

Тогда в координатах (b_1, b_2) можно найти образующие линии треугольника устойчивости

$$\begin{cases} b_2>-1-b_1 \\ b_2>-1+b_1. \end{cases}$$

Однако у этого треугольника нет верхней границы $b_{2\max}$. Рассмотрим вариант комплексно сопряженных корней характеристического уравнения

$$z_{1,2}=\alpha e^{\pm j\varphi}, \qquad (2)$$

где α - модуль ($|\alpha|\le 1$), φ - аргумент.

Тогда на основании теоремы Виета [2] можно записать

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -b_1 \\ z_1 \cdot z_2 = b_2 \end{cases} \qquad (3)$$

Подставляя (2) в (3) получим

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = \alpha(e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}) \\ z_1 \cdot z_2 = \alpha e^{j\varphi} \cdot \alpha e^{-j\varphi}) \end{cases}$$

На основании формулы Эйлера и правилам действий с комплексными числами получим

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2\alpha\cos\varphi = -b_{1,} \\ z_1 \cdot z_2 = \alpha^2 = b_2. \end{cases}$$

Тогда $b_{2\max} \le 1$, так как $|\alpha| \le 1$.

Для описания систем более высокого порядка можно поступить следующим образом. Рассмотрим характеристическое уравнение 4-го порядка

$$D(z) = z^4 + b_1 z^3 + b_2 z^2 + b_3 z + b_4.$$

Тогда по критерию Джури запишем

$$\begin{cases} 1 + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 > 0 \\ 1 - b_1 + b_2 - b_3 + b_4 > 0. \end{cases}$$

Объединим коэффициенты

$$\begin{cases} d_1 = b_1 + b_3 \\ d_2 = b_2 + b_4. \end{cases}$$

В этом случае линии, образующие треугольник устойчивости, будут иметь вид

$$\begin{cases} 1 + d_1 + d_2 > 0 \\ 1 - d_1 + d_2 > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} d_2 > -1 - d_1 \\ d_2 > -1 + d_1 \end{cases}$$

В этом случае в координатах (d_1, d_2) опять нет верхней границы устойчивости, которую по аналогии можно найти из теоремы Виета и формул Эйлера:

$$\begin{cases} 2[\alpha\cos\varphi + \beta\cos\psi] == -b_1 \\ \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta(\cos\varphi + \cos\psi) = b_2 \\ 2\alpha\beta[\alpha\cos\psi + \beta\cos\varphi] = -b_3 \\ \alpha^2\beta^2 = b_4, \end{cases}$$

где $z_{1,2} = \alpha e^{\pm j\varphi}, z_{3,4} = \beta e^{\pm j\psi}$.

На основании этих уравнений можно найти ограничивающие неравенства:

$$\begin{cases} -4 < -b_1 < 4 \\ -2 < b_2 < 6 \\ -4 < -b_3 < 4 \\ 0 < b_4 < 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} -8 < -d_1 < 8 \\ -2 < d_2 < 7, d_{2\max} = 7. \end{cases}$$

Выводы. В результате проведенного анализа получена возможность оценить верхнюю границу треугольника устойчивости и найти ограничения на перестраиваемые коэффициенты. Эти соотношения значительно упрощают оценку устойчивости системы при необходимости перестройки коэффициентов. Оценить во времени упрощение сложно, так как такое уравнение 4-го порядка решается через кубическую революванту, а для этого необходимо провести дополнительные преобразования

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Astrom K.J. Computer controlled systems: Theory and design / K.J. Astrom, B. Witternmark – Prentice-Hall.Inc. – 1987 – C. 480
2. Бронштейн И.Н. Справочник по математике / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев – М.: Наука, 1980 – С. 976.