УДК 621.941

А.А. ОРГИЯН, В.В. СТРЕЛЬБИЦКИЙ, И.М. ТВОРИЩУК
Одесский национальный политехнический университет

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ЛЕЗВИЙНОЙ ОБРАБОТКЕ ПРЕРЫВИСТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В статье предложена математическая модель, описывающая расчет параметрических колебаний при прерывистом резании. Действующие на резец внезапно приложенные силовые параметрические возмущения отрицательно влияют на износ резца и качество обрабатываемой поверхности. В технической литературе для определения устойчивых и неустойчивых состояний технологической системы используется метод сшивания с учетом условий периодичности. Аналитические расчеты амплитуд параметрических колебаний в научно-технической литературе практически отсутствуют. Разработанная математическая модель позволяет выполнить расчеты амплитуд колебаний с учетом того, что начальные условия при последующих врезаниях и выводах инструмента задаются не произвольно, а являются решением уравнений на предыдущих врезаниях и выходах, что позволяет точнее задавать условия сшивания.

Ключевые слова: резание, нагрузка, параметрические колебания, устойчивость, уравнения движения.

A.A. ORGIJAN, V.V. STRELBITSKIY, I.M. TVORISCHUK
Odessa national polytechnic university

SIMULATION OF PARAMETRIC VIBRATIONS IN BORING PROCESS OF NON-CONTINUOUS SURFACES

Finishing operations grinding (boring) is often performed on holes with a discontinuous surface. Such a surface is formed in the presence of grooves, samples, as well as at intersections of the hole being treated with others. Periodic repetition of the cutting in and out of the tool causes, with intermittent cutting, higher-level oscillations than with continuous cutting. The discontinuity of the surface being treated leads to a periodic rupture of the connection between the elements of the elastic system of the machine. Thus, the closed dynamic system of the machine becomes a system with variable characteristics. If we disturb the state of equilibrium of such a system, then there will be some kind of oscillations, they can not be called free, since one of its parameters periodically changes in the system, but they can not be called forced, since the external action is not a disturbing force, but enter into the component part of the equations of motion. Such oscillations can be correctly called parametric. Parametric resonance arises with an infinite number of values of the disturbance frequency, and the ratio of the oscillation frequency to the frequency of the parameter variation (p / ω) can be equal, etc. Therefore, the problem of studying parametric oscillations is an actual problem. The article proposes a mathematical model describing the calculation of parametric oscillations during intermittent cutting. The suddenly applied force parametric disturbances acting on the cutter negatively affect the wear of the tool and the quality of the machined surface. In technical literature, the method of stitching is used to determine the stable and unstable states of a technological system, taking into account the conditions of periodicity. There are practically no analytical calculations of the amplitudes of parametric oscillations in the scientific and technical literature. The developed mathematical model makes it possible to perform calculations of the oscillation amplitudes taking into account the fact that the initial conditions for subsequent insertions and tool terminals are not arbitrarily set, but are solutions of the equations on previous inserts and exits, which makes it possible to specify the cross-linking conditions more accurately.

Keywords: cutting, load, parametric oscillations, stability, equations of motion.

Постановка проблемы. Финишные операции обтачивания (растачивания) часто выполняются на отверстиях с прерывистой поверхностью. Такая поверхность образуется при наличии пазов, выборок, а также при пересечениях обрабатываемого отверстия с другими.

Периодические повторения врезания и выхода инструмента вызывают при прерывистом резании колебания более высокого уровня, чем при непрерывном резании [1–4].

Прерывистость обрабатываемой поверхности приводит к периодическому разрыву связей между элементами упругой системы станка. Таким образом, замкнутая динамическая система станка становится системой с переменными характеристиками. Если нарушить состояние равновесия такой системы, то возникнут своеобразные колебания: их нельзя назвать свободными, так как в системе периодически изменяется один из ее параметров, но их нельзя назвать и вынужденными, так как внешнее воздействие не является возмущающей силой, а входят в составную часть уравнений движения. Такие колебания называются параметрическими [1, 2]. Параметрический резонанс возникает при бесчисленном множестве значений частоты возмущения, причем отношение собственной частоты колебаний технологической системы (ТС) к частоте изменения параметра (p/ω) может равняться $\frac{1}{2};1;\frac{3}{2};\ 2;\ \frac{5}{2}$ и т.д.

Поэтому проблема исследования параметрических колебаний является актуальной задачей.

Анализ последних публикаций. В технической литературе, посвященной исследованию обработки прерывистых поверхностей, вопросу устойчивости процесса резания уделено не достаточно внимания [3, 4].

Следует отметить, что приведенные в них данные обладают малой информативностью и не показывает всех особенностей процесса обработки.

Поэтому **целью исследования** является теоретическое исследование влияния факторов, вызывающих явление параметрического резонанса при точении, на ширину областей неустойчивости, установление влияния параметров технологической системы на динамику процесса растачивания прерывистых отверстий.

Изложение основного материала. Параметрические колебания описываются уравнением Хилла типа [1, 2]:

$$\ddot{q} + p^2\left[1 - 2\nu\varphi_1(t)\right]y = 0\ ,$$

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } \ iT < t < iT + \Delta T, \\ 0 \text{ при } \ iT + \Delta T < t < (i+1)T. \end{cases},$$

где $p^2 = \dfrac{c}{m} + \dfrac{Kp}{2m} - \dfrac{b^2}{4m^2}$; $2\nu = \dfrac{Kp}{2mp^2}$;

c – жесткость технологической системы;

m – приведенная к резцу масса ТС;

Kp – коэффициент резания;

2ν – коэффициент возбуждения колебаний;

b – коэффициент демпфирования.

Пользуясь условиями периодичности решений и сшивания нами получено условие устойчивости в общем случае, когда жесткость системы изменяется по кусочно-постоянному закону с произвольным промежутком времени Δt [5]. На рис.1 приведены расчеты колебаний системы и заштрихованы области устойчивости, по оси x отложены значения $(p/\omega)^2$, по оси y – угол наклона луча (2ν).

Для аналитического расчета амплитуд колебаний разработана методика математического моделирования параметрических колебаний.

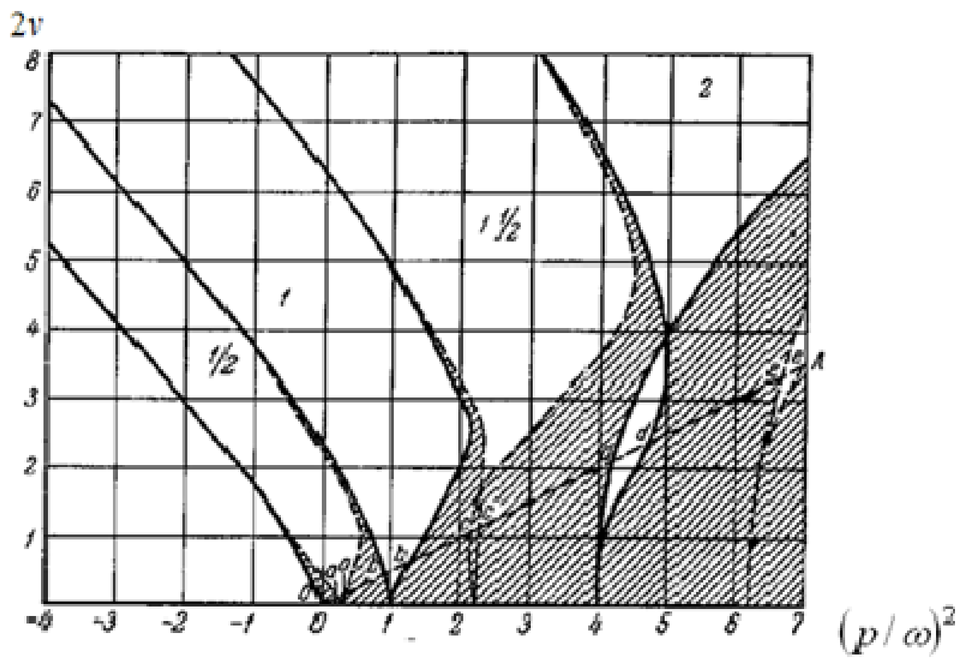


Рис. 1. Амплитуды и области устойчивости (заштрихованы) параметрических колебаний

Уравнения движения при прерывистом резании могут быть представлены в виде

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + (C + \nu_0 Kp)x = 0\ , \tag{1}$$

где ν_0 принимает значение 0 или 1 в определенные интервалы времени, соответствующие резанию или без резания.

Уравнение (1) запишем в виде

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + C\nu_0 x = 0\,. \tag{2}$$

Таким образом, при резании имеем

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + (C + Kp)x = 0\ , \tag{3}$$

а при прохождении паза уравнение примет вид

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + Cx = 0\,.$$

Параметры m, b, С и Kp – известны.

Решения уравнения (2) представим в виде

$$x(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t), \tag{4}$$

где $x_1(t)$ и $x_2(t)$ – два линейно независимых решения уравнения (2), а A и B – произвольные постоянные.

Подставляя в уравнение (2) искомое решение вида $exp(t)$, запишем

$$e^{pt}(mp^2 + bp + C_V) = 0\,. \tag{5}$$

Это равенство должно быть тождественно по отношению к параметру *t*.

Характеристическое уравнение дифференциального уравнения (2), являющегося следствием тождества (5), имеет вид

$$mp^2 + bp + C_V = 0\,. \tag{6}$$

Найдем корни квадратного уравнения (6)

$$p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mc}}{2m}\,. \tag{7}$$

Конкретизируем формулу (4), для 3-х значений дискриминанта:
при значении дискриминанта $D=b^2 - 4mc>0$,

$$x(t) = A\exp(p_1 t) + B\exp(p_2 t), \tag{8}$$

при значении дискриминанта $D=b^2 - 4mc=0$,

$$x(t) = (A+B)\exp(p_1 t), \tag{9}$$

при значении дискриминанта D<0,

$$x(t) = e^{\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t), \tag{10}$$

где

$$p_{1,2} = \alpha \pm j\beta,\ \alpha = -\frac{b}{2m};\ \beta = \frac{(4mc - b^2)^{0,5}}{2m}\,.$$

Для определения постоянных *A*, *B* в уравнение (10) по начальному условию $x(t_0)$ запишем

$$x(t_0) = e^{\alpha t_0}(A\cos\beta t_0 + B\sin\beta t_0), \tag{11}$$

Производная для выражения (10) имеет вид

$$\dot{x}(t) = e^{\alpha t}(A\cos\beta t + B\sin\beta t) + e^{\alpha t}(-A\beta\sin\beta t + B\beta\cos\beta t),$$

Для определения постоянных *A*, *B* в уравнение (10) по начальным условиям для неизвестного решения уравнения (2), заменим *t* на t_0 в выражении для производной:

$$\dot{x}(t_0) = e^{\alpha t_0}\left[A(\alpha\cos\beta t_0 - \beta\sin\beta t_0) + B(\alpha\sin\beta t_0 + \beta\cos\beta t_0)\right], \tag{12}$$

Решая систему уравнений (11) и (12), определяя переменные *A* и *B* по начальным условиям для решения (10), запишем это решение для первого интервала при резании (ν=1):

$$\begin{aligned} A &= \exp(-\alpha_1 t_0)\left[x(t_0)\cos\beta_1 t_0 - \frac{1}{\beta_1}(\dot{x}(t_0) - \alpha_1 x(t_0))\sin\beta_1 t_0\right], \\ B &= \exp(-\alpha_1 t_0)\left[x(t_0)\sin p_1 t_0 + \frac{1}{\beta_1}(\dot{x}(t_0) - \alpha_1 x(t_0))\cos\beta_1 t_0\right]. \end{aligned} \tag{13}$$

Для дальнейшего построения математической модели важно отметить следующее обстоятельство. При изучении устойчивости при прерывистом резании для перемещений и скорости решения сшивают вначале каждого интервала (при *t*=(0+*i*), где *i*=0,1,2...), а также внутри каждого интервала в зависимости от промежутков времени с резанием и без резания, причем *T* период интервала равен времени одного оборота инструмента или заготовки. В настоящий модели для получения решений при прерывистом резании задаются начальные условия в начале процесса, а в конце каждого интервала времени, где происходит переход от колебаний при резании к свободным колебаниям без резания (и наоборот), определяются начальные условия из решений, полученных на предыдущем интервале. Таким образом, на каждом последующем интервале и внутри него вычисляются соответствующие начальные условия.

Таким образом, по аналогии с (13), как и при решении системы (11) или (12), получаем

$$\begin{aligned} A_V^n &= \exp(-\alpha_V t_n)\left[x(t_n)\cos\beta_V t_0 - \frac{1}{\beta_V}(\dot{x}(t_n) - \alpha_V x(t_n))\sin\beta_V t_n\right], \\ B_V^n &= \exp(-\alpha_V t_n)\left[x(t_n)\sin\beta_V t_n + \frac{1}{\beta_V}(\dot{x}(t_n) - \alpha_V x(t_n))\cos\beta_V t_n\right]. \end{aligned} \tag{14}$$

Выражение (14) отражают разные интервалы наличия резания или его отсутствия с помощью индекса ν, а символом *n* отражен номер пары смежных интервалов, причем на каждой паре расположен один интервал с резанием и один интервал без резания (на одном интервале вынужденные колебания, а на другом – свободные колебания).

Таким образом, выражение (10) с учетом ограничения указанных выше пар интервалов с номером “*n*” нагруженности и ненагруженности может быть записано так:

$$x(t) = (A_\nu^n \cos\beta_\nu t + B_\nu^n \sin\beta_\nu t)\exp(\alpha_\nu t). \tag{15}$$

Из (15) легко получаем основное аналитическое решение

$$x(t) = (AB)_\nu^n \exp(\alpha_\nu t)\sin(\varphi_\nu^n + \beta_\nu t), \tag{16}$$

$$\text{где} \quad \alpha_\nu = -\frac{b}{2m};\; \beta_\nu = \frac{\sqrt{4m(c+\nu K_p)-b^2}}{2m},\; \nu = \begin{cases} 0 - \text{åñòüðåçàíèå}, \\ 1 - \text{íåò ðåçàíèÿ}. \end{cases}, \tag{17}$$

Выражения (17) получены из приведенных выше формул (9), (10) и (11), однако здесь имеется привязка к интервалам нагрузки и ее отсутствия.

В процессе преобразования выражения (15) и приведения к виду (16), получаем:

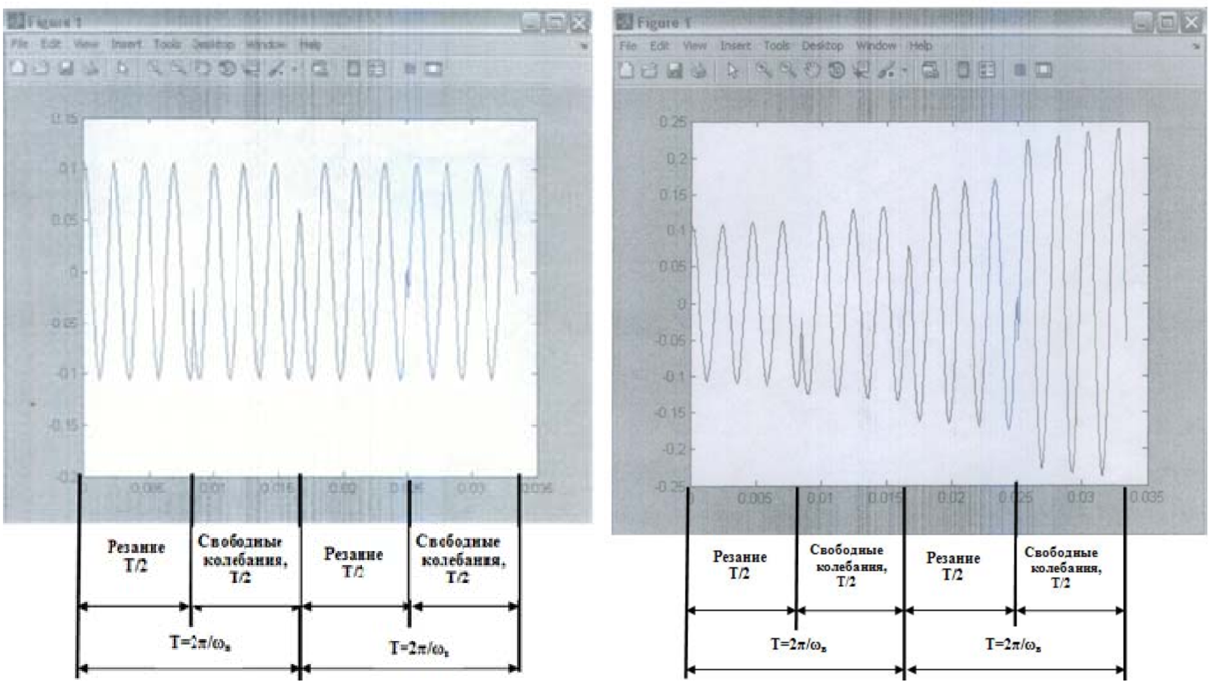
$$(AB)_\nu^n = \sqrt{x^2(t_n) + \frac{1}{\beta^2}(\dot{x}(t_n) - \alpha_\nu x(t_n))^2},$$

и

$$\phi_\nu^n = arctg\frac{B_\nu x(t_n)}{\dot{x}(t_n) - \alpha_\nu x(t_n)}. \tag{18}$$

В выражении (18) символами $x(t_n)$ и $\dot{x}(t_n)$ обозначены начальные условия для решения уравнения (2) на левом конце каждого из смежных интервалов (рис. 2).

На рис. 2 приведены решения уравнения (18), определяющие амплитуды колебаний резца.



а) б)

Рис. 2. Амплитуды колебаний (расчет) при резании с одни пазом, при значениях параметров ТС: *n* = 3600 Гц, *m* = 0,00004 кг·с^2·мм$^{-1}$, *с* =300 кг·мм$^{-1}$, *Kp* = 0,700 кг·мм$^{-1}$, *b* = 0,001 кг·с·мм$^{-1}$ (а) и *b* = - 0,001 кг·с·мм$^{-1}$ (б)

На рис. 2 видно изменение траектории движения резца из-за изменения фазовых углов.

Таким образом, главная идея предложенного математического моделирования процесса прерывистого резания состоит в том, что начальное условие для следующего интервала рассчитывается на основе использования решения уравнения на данном интервале. Это нужно понимать так, что для определения начальных условий для каждого следующего интервала необходимо использовать выражение (16) на текущем интервале и применить метод сшивания решений на смежных интервалах с учетом условий периодичности.

Выводы

Анализируя полученные в работе теоретические зависимости устойчивости ТС при прерывистом резании, можно сделать вывод, что предложенная модель позволяет повысить точность расчетов амплитуд колебаний и условий сшивания уравнений с учетом того, что начальные условия при последующих врезаниях и выводах инструмента являются решением уравнений на предыдущих врезаниях и выходах.

Литература

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко, Д.Х. Янг, У. Уивер. – М. : Машиностроение, 1985. – 472 с.
2. Ден-Гартог Д.П. Механические колебания / Д.П. Ден-Гартог. – М. : Физматгиз, 1960. – 574 с.
3. Копелев Ю.Ф. Параметрические колебания станков при резании : автореф. дис. … д-ра техн. Наук : 05.03.01 / ЭНИМС ; Ю.Ф. Копелев. – М., 1985. – 32 с.
4. Оргиян А.А. Условие параметрической неустойчивости замкнутой динамической системы расточного станка / А.А. Оргиян, Е.В. Зюзина // Резание и инструмент в технологических системах : междунар. науч.-техн. сб. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2006. – Вып.70. – С. 362–369.
5. Оргиян А. А. Интенсивность параметрических резонансов при прерывистом резании / А.А. Оргиян, И.М. Творищук // Сучасні технології в машинобудуванні = Modern technologies in mechanical engineering : зб. наук. пр. – Харків : НТУ "ХПІ", 2014. – Вип. 9. – С. 124–133.

References

1. Timoshenko S.P. Kolebaniya v injenernom dele / S.P. Timoshenko, D.H. YAng, U. Uiver. – M. : Mashinostroenie, 1985. – 472 s.
2. Den-Gartog D.P. Mehanicheskie kolebaniya / D.P. Den-Gartog. – M. : Fizmatgiz, 1960. – 574 s.
3. Kopelev YU.F. Parametricheskie kolebaniya stankov pri rezanii : avtoref. dis. … d-ra tehn. Nauk : 05.03.01 / ENIMS ; YU.F. Kopelev. – M., 1985. – 32 s.
4. Orgiyan A.A. Uslovie parametricheskoy neustoychivosti zamknutoy dinamicheskoy sistemyi rastochnogo stanka / A.A. Orgiyan, E.V. Zyuzina // Rezanie i instrument v tehnologicheskih sistemah : mejdunar. nauch.-tehn. sb. – Harkov : NTU «HPI», 2006. – Vyip.70. – S. 362–369.
5. Orgiyan A. A. Intensivnost parametricheskih rezonansov pri preryivistom rezanii / A.A. Orgiyan, I.M. Tvorischuk // Suchasni tehnologiï v mashinobuduvanni = Modern technologies in mechanical engineering : zb. nauk. pr. – Harkiv : NTU "HPI", 2014. – Vip. 9. – S. 124–133.

Рецензія/Peer review : 10.05.2018 р. Надрукована/Printed :16.07.2018 р.
Стаття рецензована редакційною колегією