Одеський національний політехнічний університет

УСОВ АНАТОЛІЙ ВАСИЛЬОВИЧ
ШПИНКОВСЬКИЙ ОЛЕКСАНДР АНАТОЛІЙОВИЧ
ШПИНКОВСЬКА МАРІЯ ІВАНІВНА

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ТА ЇХ РЕАЛІЗАЦІЯ У СЕРЕДОВИЩІ SCILAB

Навчальний посібник

Одеса ОНПУ - 2018

Одеський національний політехнічний університет

УСОВ АНАТОЛІЙ ВАСИЛЬОВИЧ
ШПИНКОВСЬКИЙ ОЛЕКСАНДР АНАТОЛІЙОВИЧ
ШПИНКОВСЬКА МАРІЯ ІВАНІВНА

ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ТА ЇХ РЕАЛІЗАЦІЯ У СЕРЕДОВИЩІ SCILAB

Навчальний посібник

Затверджено
на засіданні кафедри ВММС
протокол № 1 от 30.08. 2018 г.

Одеса ОНПУ - 2018

Навчальний посібник «Чисельні методи та їх реалізація у середовищі Scilab» для студентів вищих навч. закладів / Уклад. **Усов А.В., Шпинковський О.А., Шпинковська М.І.**. – Одеса: ОНПУ. 2018. – 194 с.

ББК: 22.192я73

УДК: 519.6(075.8)

Рекомендовано до друку вченою радою
Одеського національного політехнічного університету
(протокол № 6 від «18» червня 2013 р.)

Рецензенти:

Дащенко О.Ф., доктор технічних наук, професор, директор інституту машинобудування Одеського національного політехнічного університету,
м. Одеса

Глушков О.В., доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої та прикладної математики Одеського державного екологічного університету,
м. Одеса

Кондратенко Ю.П., доктор технічних наук, професор кафедри інтелектуальних інформаційних систем Чорноморського державного університету ім. Петра Могили,
м. Миколаїв

У навчальному посібнику розглянуто традиційні методи обчислювальної математики, умови їх застосування, порівняльний аналіз, способи оцінки отриманих похибок. Запропоновано приклади розв'язання типових задач, блок-схеми алгоритмів, лабораторний практикум для реалізації чисельних методів у середовищі Scilab, завдання для проведення практичних занять. Для студентів, що навчаються за напрямами: «Прикладна механіка», «Комп'ютерні науки», іншими напрямами підготовки бакалаврів, магістрів ОНПУ та інших вищих навчальних закладів.

ISBN - 978-617-7111-11-4

Зміст

ВСТУП

Розвиток техніки і науки нашої держави тісно пов'язано з використанням комп'ютерів. Їх застосування дозволяє від простих розрахунків і оцінок перейти до нової стадії роботи – детальному математичному моделюванню і дослідженню складних реальних процесів і об'єктів. Дослідження моделі проводиться за допомогою спеціально розроблених чисельних методів, призначених для розв'язання більш простих математичних проблем – обчислення інтегралів, розв'язання скалярних і диференціальних рівнянь і їхніх систем, апроксимації функцій, оптимізації різного роду функцій. Для розв'язання кожної задачі існує кілька методів. Навчитися правильно відбирати, використовувати і програмувати потрібний метод – задача чисельних методів.

Для розв'язання перерахованих проблем потрібна розробка докладного алгоритму, що зводить всі обчислення до послідовності арифметичних і логічних дій. Вибір того чи іншого алгоритму здійснюється з урахуванням пам'яті і швидкодії комп'ютера: занадто складний метод приводить до нереальних витрат часу роботи комп'ютера, занадто простий – найчастіше не дає необхідної точності.

У даному посібнику приводяться описи різних методів для розв'язання конкретних математичних проблем, умови їх застосування, способи оцінки отриманої похибки, порівняльний аналіз цих методів, блок-схеми для реалізації методів на комп'ютерах будь-якою мовою програмування. Математично точне обґрунтування алгоритмів і їхньої збіжності приводиться в літературі, список якої є присутнім наприкінці посібника, а в тексті є відповідні посилання на неї.

В якості обчислювального інструмента при вивченні дисципліни рекомендується використання системи комп'ютерної математики *SciLab*, призначену для інженерних і наукових обчислень. Це спеціальний математичний пакет наукових програм для чисельних обчислень, який вільно розповсюджується разом з початковими кодами. Її переваги в порівнянні з іншими подібними системами:

1. *SciLab* - вільно-поширювана програма, яку разом з документацією англійською мовою можна отримати на сайті *www.scilab.org*. Існують версії *SciLab* для операційних систем *Windows* і *Linux*;
2. *SciLab* має просту і потужну мову програмування і дозволяє створювати додатки, які запускаються з середовища *SciLab*;

3. *SciLab* має великий набір математичних функцій, у тому числі для вирішення завдань лінійної алгебри і оптимізації.

Чисельні методи - навчальний предмет, мета якого познайомити студентів із загальними методами чисельного розв’язання різноманітних математичних завдань. Мета лабораторних робіт, що наведені у посібнику, полягає в знайомстві студентів з найбільш плідними, передовими і потужними математичними методами розв'язання практичних задач із використанням обчислювальної техніки.

РОЗДІЛ 1. НАБЛИЖЕНІ ОБЧИСЛЕННЯ ТА ПОХИБКИ

Розв'язок прикладних і математичних задач, як правило, пов'язане з наближеними значеннями величин та обчисленнями. [1-2].

Математична модель задачі — це наближене подання реального об'єкта. Вихідні дані, одержувані з експерименту, можна в основному визначити лише приблизно. Навіть точні числа, такі як $\pi, e, \sqrt{3}, \frac{6}{7}$ і т.п., при обчисленнях заміняють десятковими дробами, залишаючи певне число знаків після коми.

Обчислювальні методи в основному також є наближеними. Навіть при використанні найпростішої формули результат, як правило, одержують наближеним.

Тому, перш ніж розпочати вивчення обчислювальних методів, варто ознайомитися із загальними правилами дій над наближеними числами й оцінки похибок.

1.1. Абсолютна та відносна похибки

Абсолютна похибка наближеного числа. Якщо a_0 — деяке число (відоме точно або не точно), а a — число, прийняте за наближене значення числа a_0, то помилкою наближеного числа a називають різницю $a_0 - a$. Звичайно точне число a_0 не відомо, тому помилку наближеного числа a визначити не можна [2-4]. Однак майже завжди можна вказати число, що оцінює цю помилку. Число $\Delta(a) > 0$, що задовольняє нерівності

$$|a_0 - a| < \Delta(a), \tag{1.1}$$

називається <u>абсолютною похибкою</u> <u>(граничною абсолютною похибкою)</u> наближеного числа a. Таке визначення абсолютної похибки не є однозначним. Так, якщо $a = \pi$, а за наближене значення взяти a = 3,14, то, з огляду на те, що 3,140 < π < 3,142, можна записати: $|\pi - a| < 0{,}002$, $|\pi - a| < 0{,}01$, $|\pi - a| < 0{,}1$. Кожне із чисел 0,002, 0,01, 0,1 буде абсолютною похибкою числа a. Але чим ближче між собою числа $|a_0 - a|$ й $\Delta(a)$, тим точніше абсолютна похибка оцінює фактичну помилку. Як абсолютна похибка наближеного числа a беруть по можливості найменше із чисел, що задовольняють нерівності (1.1). Нерівність (1.1) рівносильна нерівностям

$$a - \Delta(a) \le a_0 \le a + \Delta(a),$$

які умовно записують у такий спосіб: $a_0 = a \pm \Delta(a)$, тобто a_0 приблизно дорівнює a з абсолютною похибкою $\Delta(a)$. Так, наприклад, у попередньому прикладі можна записати π = 3,14 ± 0,002.

Абсолютну похибкою іноді називають оцінкою точності наближеного числа.

Відносна похибка наближеного числа. Крім величини абсолютної похибки, необхідно ще знати її відношення до вимірюваної величині, в основному виражене у відсотках.

Відносною похибкою $\delta(a)$ наближеного числа a називається відношення абсолютної похибки $\Delta(a)$ до модуля цього числа:

$$\delta(a) = \frac{\Delta a}{|a|} \tag{1.2}$$

або у відсотках

$$\delta(a) = \frac{\Delta a}{|a|} \cdot 100\%.$$

Так, відносна похибка числа 3,14, прийнятого за наближене значення числа π, при Δ(3,14) = 0,002 дорівнює δ(3,14) = $\frac{0.002}{3.14}$ = 0,00064, або 0,064 %.

У технічних розрахунках точність вимірів звичайно характеризують відносною похибкою. Результат вважають хорошим, якщо відносна похибка не перевищує 0,1%. З формули (1.2) слідує, що

$$\Delta(a) = |a| \cdot \delta(a). \tag{1.3}$$

1.2. Правило округлення чисел

Округлення числа полягає у відкиданні в ньому всіх цифр, що розташовані за деяким розрядом. При цьому якщо округлене число ціле, то відкинуті цифри цілої частини заміняють нулями. Округлення звичайно роблять за наступним правилом: Якщо перша відкинута цифра, менше п'яти, то попередня цифра не міняється. Якщо перша відкинута цифра, більше п'яти, то попередня цифра збільшується на одиницю. Якщо перша відкинута цифра, дорівнює п'яти, то придатне кожне із зазначених правил, але найчастіше округляють так, щоб остання цифра, була парною. Якщо вона непарна, то до неї додають одиницю, якщо ж парна, то залишають без змін (правило парної цифри).

Приклад 1. Округлити число π = 3,14159... до а) одного; б) трьох;

в) чотирьох десяткових знаків.

а) $3{,}14159 \approx 3{,}1$ (округлення до 0,1);

б) $3{,}14159 \approx 3{,}142$ (округлення до 0,001);

в) $3{,}14159 \approx 3{,}1416$ (округлення до 0,0001).

При округленні цілих чисел замість відкинутих цифр записують не нулі, а число 10 у відповідному степені.

Приклад 2. Округлити число 246250 до а) сотень тисяч; б) десятків тисяч; в) сотень.

а) $246250 \approx 2 \cdot 10^5$ (округлення до 10^5);

б) $246250 \approx 25 \cdot 10^4$ (округлення до 10^4);

в) $246250 \approx 2462 \cdot 10^2$ (округлення до 10^2).

Степінь числа 10 вказує на кількість округлених знаків.

Якщо при округленні числа останні зберігають нулі, то їх варто записувати. Так, число 1,2997, округлене до 0,001, приймає вид 1,300.

При округленні числа виникає додаткова похибка — похибка округлення $\Delta_0(a)$, що не перевершує половини одиниці розряду останньої цифри, що зберігається (або п'яти одиниць першого відкинутого розряду).

Так, у прикладах 1, 2 маємо наступні похибки округлення:

$\Delta_0(3{,}1) = 0{,}04159 \le 0{,}05$, $\Delta_0(3{,}142) = 0{,}00041 \le 0{,}0005$; $\Delta_0(25 \cdot 10^4) = 3750 \le 0{,}5 \cdot 10^4$.

Абсолютна похибка округленого числа є сума його первісної абсолютної похибки й похибки округлення. Наприклад, нехай $\Delta_0(3{,}142)$

= 0,2, при округленні 3,142 до 0,1 одержуємо 3,1 й $\Delta_0(3{,}1)$ = 0,042, тоді $\Delta_0(3{,}1)$ = 0,2+0,042 = 0,242. Звичайно абсолютну й відносну похибки округляють до однієї, рідше до двох цифр, відмінних від нуля. Округлення похибок роблять тільки у бік збільшення до тих же розрядів, що й наближене число. Так, при $\Delta(3{,}1)$ = 0,242 розуміють $\Delta(3{,}1)$ = 0,3.

1.3. Значущі, вірні й сумнівні цифри

Значущою цифрою наближеного числа називається будь-яка його цифра починаючи з першої ненульової (рахуючи з ліва на право). Наприклад, у числі 0,00030900 перші чотири нулі не є значущими цифрами. Всі інші цифри (включаючи й наступні три нулі) – значущі [2-3].

У цілому округленому числі значущими звичайно вважають всі збережені цифри. Так, в округленому числі $120\cdot10^3$ цифри 1, 2, 0 — значущі.

Вірною цифрою (вірним знаком) наближеного числа a називається будь-яка його значуща цифра, для якої абсолютна похибка $\Delta(a)$ не перевершує половини розряду цієї цифри. Інші значущі цифри числа a називаються сумнівними.

Таким чином, якщо $\Delta(a)\ \le 0{,}5\cdot10^{-n}$, то цифри числа a, починаючи з першої значущої й кінчаючи стоячою в n-м розряді після коми,— вірні, а розташовані далі—сумнівні. Наприклад, число 647,326 при $\Delta(a)$=0,03$\le$0,5$\cdot10^{-1}$ має чотири вірні цифри 6, 4, 7, 3 і дві сумнівні 2, 6.

У математичних таблицях значень функцій приводяться тільки вірні цифри. Абсолютна похибка табличних значень, наприклад, у тризначних таблицях не перевершує $0{,}5\cdot10^{-3}$, у семизначних — $0{,}5\cdot10^{-7}$. Точність наближеного числа залежить не від кількості значущих цифр, а від кількості вірних цифр. Остаточний наближений результат звичайно округляють до його вірних цифр, залишаючи одну сумнівну. При розрахунках з наближеними числами в проміжних результатах зберігають одну, дві, а іноді й три сумнівні цифри.

Приклад 3. Задані числа при зазначених абсолютних похибках округлити до вірних цифр. Визначити абсолютну похибку результату:

1) a_1 =2,6219, $\Delta(a_1)$= 0,024; 2) a_2 = 47,35, $\Delta(a_2)$ = 1,3;

3) a_3 = 6,9971, $\Delta(a_3)$ = 0,0009; 4) a_4=0,648, $\Delta(a_4)$= 0,04.

Р о з в ’ я з а н н я . 1) Оскільки 0,024 < 0,05, то число a_1 варто округлити до 0,1. Одержимо число $a_1 \approx 2{,}6$ з двома вірними цифрами. Визначимо абсолютну похибку результату

$$\Delta(2{,}6) = 0{,}024 + |\, 2{,}6219 - 2{,}6 \,| = 0{,}0459 \approx 0{,}05.$$

2) Оскільки 1,3 < $0{,}5 \cdot 10^1$, то число a_2 варто округлити до десятків. Одержимо число $a_2 \approx 5 \cdot 10$ з однією вірною цифрою. Абсолютна похибка результату

$$\Delta(5 \cdot 10) = 1{,}3 + 2{,}65 = 3{,}95 \approx 4.$$

3) Оскільки 0,0009 < 0,005, то округлення числа робимо до 0,01. Одержимо число $a_3 \approx 7{,}00$ з трьома вірними цифрами. Абсолютна похибка результату

$$\Delta(a_3) = 0{,}0009 + |\, 7{,}00 - 6{,}9971 \,| = 0{,}0038 \approx 0{,}004.$$

У числі 7,00 записані нулі свідчать про три його вірні знаки й цей запис відрізняється від 7 або 7,0.

4) Оскільки 0,04 < 0,05, то число a_4 округляємо до 0,1. Одержимо число $a_4 \approx 0{,}6$ з однією вірною цифрою. Абсолютна похибка результату

$$\Delta(0{,}6) = 0{,}04 + 0{,}048 = 0{,}088 > 0{,}05,$$

т. е. цифра 6 уже сумнівна. Тому при округленні рекомендується залишати одну-дві сумнівні цифри, тобто

$$a_4 \approx 0{,}65, \quad \Delta(0{,}65) = 0{,}042 \approx 0{,}05.$$

Термін «вірні цифри» не слід розуміти буквально. Так, у числі 7,00, що заміняє число 6,9971, всі знаки вірні $|6{,}9971 - 7{,}00| < 0{,}005$, але жодна із цифр чисел 6,9971 й 7,00 не збігається. Однак вірні знаки наближеного числа часто збігаються з відповідними цифрами точного числа. Абсолютна похибка визначає число десяткових знаків наближеного числа.

Відносна похибка наближеного числа безпосередньо залежить від числа його вірних знаків. Є спеціальні таблиці, що визначають відносні похибки залежно від числа вірних знаків. Так, наприклад, якщо наближене число a має три вірних знаки, те його відносна похибка $\delta(a)$ перебуває в межах від 0,05 до 0,5 % (залежить від першої значущої цифри числа a). При збільшенні числа вірних знаків на 1 відносна похибка зменшується в 10 разів.

Зауваження. На практиці звичайно вважають, що число a є наближенням числа a_0 з n вірними десятковими знаками, якщо $\Delta(a) \le 10^{-n}$.

При такому визначенні в числі a = 647,35 при $\Delta(a)$ = 0,095 < 0,1 будуть вірними цифри 6, 4, 7, 3. Відповідно до колишнього визначення, оскільки $\Delta(a)$ < 0,5, у цьому числі будуть вірними лише цифри 6, 4, 7.

1.4. Похибки при арифметичних діях з наближеними числами

Похибки при арифметичних діях з наближеними числами виражаються через похибки первісних величин на підставі властивостей, які приведемо без доказу.

1) Абсолютна похибка алгебраїчної суми декількох чисел дорівнює сумі абсолютних похибок доданків:

$$\Delta(a_1 + \ldots + a_n) = \Delta(a_1) + \ldots + \Delta(a_n). \qquad (1.4)$$

З (1.4) слідує, що якщо всі доданки $a_1,\ldots,a_n$ (незалежно від їх знаків) мають ту саму абсолютну похибку $\Delta(a)$, то

$$\Delta(a_1 + \ldots + a_n) = n\Delta(a) \qquad (1.5)$$

Однак при великій кількості доданків ця формула дає завищені результати, оскільки відхилення доданків від їхніх точних значень можуть мати різні знаки й у сумі великої кількості доданків частково компенсуватися. У теорії ймовірностей доводиться, що при великому n можна прийняти

$$\Delta(a_1 + \ldots + a_n) = \sqrt{3n}\Delta(a), (n > 10) \qquad (1.6)$$

Приклад 4. У трикутнику дані сторони a=17,3 см, b=23,6 см, c = 14,2 см , причому $\Delta(a)$ = $\Delta(b)$ = $\Delta(c)$ = 0,1 см. Визначити його периметр p й $\Delta(p)$.

Розв’язання: p=17,3+23,6+14,2=55,1(см). По формулі (1.5) маємо $\Delta(55{,}1) = 3 \cdot 0{,}1 = 0{,}3$ (см). У числі p=55,1 остання цифра сумнівна. Результат можна записати у вигляді p = 55,1 ± 0,3 (см).

Ясно, що абсолютна похибка суми наближених чисел не менше найбільшої з абсолютних похибок доданків. Тому при обчисленні суми наближених чисел всі доданки варто округляти до кількості десяткових знаків числа з найбільшою абсолютною похибкою, залишаючи один сумнівний знак (а при великій кількості доданків - два). Отриманий результат округляється на один знак.

2) Відносна похибка суми декількох чисел визначається, на підставі (1.2), по формулі

$$\delta(a_1 + \ldots + a_n) = \frac{\Delta(a_1 + \ldots + a_n)}{|a_1 + \ldots + a_n|} = \frac{\Delta(a_1) + \ldots + \Delta(a_n)}{|a_1 + \ldots + a_n|}.$$

Якщо $a_1,...,a_n$—числа одного знаку, то відносна похибка $\delta(a_1+...+a_n)$ укладена між найменшою й найбільшою з відносних похибок доданків:

$$\min\{\delta(a_1),...,\delta(a_n)\} \le \delta(a_1+...+a_n) \le \max\{\delta(a_1),...,\delta(a_n)\}$$

Так, у попередньому прикладі

$$\delta(a)=0{,}58\%, \delta(b)=0{,}42\%, \delta(c)=0{,}70\% \text{ й } 0{,}42\% \le \delta(p) \le 0{,}70\%.$$

У дійсності

$$\delta(p)=\frac{0{,}3}{55{,}1}\cdot 100\% = 0{,}54\%.$$

При вирахуванні двох чисел одного знака відносна похибка різниці

$$\delta(a_1-a_2)=\frac{\Delta(a_1-a_2)}{|a_1-a_2|}=\frac{\Delta(a_1)+\Delta(a_2)}{|a_1-a_2|}$$

може виявитися значно більше відносних похибок кожного з даних чисел. Це в основному буває, якщо $|a_1 — a_2|$ — мале число.

Приклад 5. Обчислити абсолютну й відносну похибки різниці чисел a_1=9,78, $\Delta(a_1)=0{,}01$ і a_2=9,22, $\Delta(a_2)=0{,}01$.

Розв'язання: a_1-a_2=0,56, $\Delta(a_1-a_2)=0{,}01+0{,}01=0{,}02, \delta(a_1-a_2)=\frac{0{,}02}{0{,}56}\cdot 100\% \approx$

$\approx 3{,}57\%$, хоч $\delta(a_1)=\frac{0{,}01}{9{,}78}\cdot 100\% \approx 0{,}102\%$, $\delta(a_2)=\frac{0{,}01}{9{,}22}\cdot 100\% \approx 0{,}108\%$.

Звичайно вирахування близьких чисел намагаються уникати, заміняючи його по можливості іншими діями.

3) Відносна похибка добутку декількох чисел дорівнює сумі відносних похибок співмножників:

$$\delta(a_1...a_n)=\delta(a_1)+...+\delta(a_n). \tag{1.7}$$

Абсолютна похибка добутку обчислюється по формулі (1.3)

$$\Delta(a_1...a_n)=|a_1...a_n|\delta(a_1...a_n).$$

Зокрема, якщо в добутку са число с точне, то $\delta(c)=0$ и

$$\delta(ca)=\delta(a); \Delta(ca)=|ca|\delta(a)=|c|\Delta(a).$$

Звідси й з формули (4) одержуємо

$$\Delta(c_1a_1+...+c_na_n)=|c_1|\Delta(a_1)+...+|c_n|\Delta(a_n). \tag{1.8}$$

4) Відносна похибка частки дорівнює сумі відносних похибок діленого й дільника:

$$\delta\left(\frac{a_1}{a_2}\right)=\delta(a_1)+\delta(a_2). \tag{1.9}$$

Зокрема, $\delta\left(\frac{1}{a}\right)=\delta(a)$

Абсолютну похибку частки визначають по формулі (1.3).

Якщо кількість чисел у добутку або відношенні велика, а відносна похибка кожного числа приблизно однакова (дорівнює $\delta(a)$), то, аналогічно формулі (1.6), відносна похибка результату обчислюється по формулах

$$\delta(a_1a_2...a_n)=\sqrt{3n}\,\delta(a) \qquad (n>10),$$

$$\delta\left(\frac{a_1a_2...a_n}{b_1b_2...b_m}\right)=\sqrt{3(n+m)}\,\delta(a) \qquad (n+m>10).$$

При наявності декількох співмножників, в одного із яких відносна похибка у багато разів більше, ніж в інших (він обчислений найменш точно), відносна похибка добутку буде визначатися саме по цій похибці. Тому число вірних знаків в інших співмножників треба вибирати по найменш точному числу, залишаючи один сумнівний. Аналогічно надходимо й при діленні.

1.5. Похибка обчислення наближених значень функції однієї змінної

Нехай задана деяка диференціальна функція $y=f(x)$ і $\bar{x}$ — наближене значення аргументу x. Наближеним значенням $\bar{y}$ функції y вважають те значення, що вона приймає при наближеному значенні аргументу, тобто $\bar{y}=f(\bar{x})$. Виникає питання про похибки цього наближення [2-4]. Як відомо з курсу математичного аналізу, при досить малому приросту аргументу Δx приріст функції Δy приблизно дорівнює її диференціалу:

$$\Delta y = f(x)-f(\bar{x}) \approx dy = f'(\bar{x})\Delta x.$$

Звідси, якщо відомо абсолютну похибку аргументу $\Delta(\bar{x})>\left|x-\bar{x}\right|$, абсолютну похибку функції можна визначити по формулі

$$\Delta(\bar{y})=\left|f'(\bar{x})\right|\Delta(\bar{x}). \qquad (1.10)$$

Відносна похибка функції, відповідно до формули (2),

$$\delta(\bar{y})=\frac{\Delta(\bar{y})}{\left|\bar{y}\right|}=\left|\frac{f'(\bar{x})}{f(\bar{x})}\right|\Delta(\bar{x}). \qquad (1.11)$$

Як приклади визначимо абсолютні й відносні похибки деяких основних елементарних функцій.

1) Логарифмічна функція $f(x)=log_a x$. Абсолютна похибка логарифмічної функції, відповідно до формули (1.10), має вигляд

$$\Delta(\log_a \bar{x}) = \frac{1}{|\bar{x}|}|\log_a e|\Delta(\bar{x}) = |\log_a e|\frac{\Delta(\bar{x})}{|\bar{x}|} = |\log_a e|\delta(\bar{x}),$$

де

$$\delta(\bar{x})\frac{\Delta(\bar{x})}{|\bar{x}|}.$$

Зокрема, якщо a=10, то $lge\approx$0,5 й $\Delta(\lg \bar{x}) \approx 0{,}5\delta(\bar{x})$, якщо ж $a=e$, то $\Delta(\ln \bar{x}) = \delta(\bar{x})$ (lne=1). Абсолютна похибка логарифмічної функції з основою e дорівнює відносній похибці аргументу. Відносну похибку функції знаходимо по формулі (1.11):

$$\delta(\log_a \bar{x}) = \left|\frac{\log_a e}{\log_a \bar{x}}\right|\delta(\bar{x}).$$

2) Степенева функція f(x) = x^α, де α -будь-яке дійсне число.

$$\Delta(\bar{x}^\alpha) = \left|\alpha \bar{x}^{\alpha-1}\right|\Delta(\bar{x}), \quad \delta(\bar{x}^\alpha) = \left|\frac{\alpha \bar{x}^{\alpha-1}}{\bar{x}^\alpha}\right|\Delta(\bar{x}) = |\alpha|\frac{\Delta(\bar{x})}{|\bar{x}|} = |\alpha|\delta(\bar{x}).$$

Слідуючи, відносна похибка степеневої функції пропорційна відносної похибці аргументу. Зокрема,

$$\delta(\bar{x}^2) = 2\delta(\bar{x}), \delta(\bar{x}^3) = 3\delta(\bar{x}), \quad \delta(\sqrt{\bar{x}}) = \frac{1}{2}\delta(\bar{x}), \delta(\sqrt[3]{\bar{x}}) = \frac{1}{3}\delta(\bar{x}).$$

3) Показникова функція $f(x) = a^x$.

$$\Delta(a^{\bar{x}}) = a^{\bar{x}}|\ln a|\Delta(\bar{x}), \quad \delta(a^{\bar{x}}) = |\ln a|\Delta(\bar{x}).$$

4) Тригонометричні функції $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$.

$$\Delta(\sin \bar{x}) = |\cos \bar{x}|\Delta(\bar{x}) \le \Delta(\bar{x}), \quad \Delta(\cos \bar{x}) = |\sin \bar{x}|\Delta(\bar{x}) \le \Delta(\bar{x}).$$

Отже, абсолютні похибці функцій синус і косинус не перевершують абсолютної похибки аргументу

$$\delta(\sin \bar{x}) = |ctg\,\bar{x}|\Delta(\bar{x}), \delta(\cos \bar{x}) = |tg\,\bar{x}|\Delta(\bar{x}).$$

Похибки, що виникають при рішенні математичних задач чисельними методами, грубо можна розділити на дві групи. Першу групу становлять похибки, що не залежать від конкретного змісту задачі, а також похибки, викликані діями над наближеними числами. До другої групи відносяться похибки, що виникають за рахунок того, що математична задача як правило, заміняється спрощеною, близькою за результатом наближеної задачі. Ці похибки (похибки методу) визначаються залежно від характеру задачі.

Приклади для самостійного розв’язання можна взяти з розділу завдань для лабораторних робіт згідно варіанта.

Запитання до розділу 1

1. Дайте означення наближеного числа.
2. Назвіть причини виникнення похибок.
3. Як класифікуються похибки? Дайте їх означення.
4. Які цифри називаються значущими? Наведіть приклади.
5. Які цифри називаються вірними? Наведіть приклади.
6. Що таке округлення чисел? Які є правила округлень? Наведіть приклади.
7. Через що виражаються похибки при арифметичних діях з наближеними числами?
8. Як обчислюється абсолютна та відносна похибки функції однієї змінної?

РОЗДІЛ 2. РОЗВ’ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Розв’язання нелінійних рівнянь і систем є не тільки важливою самостійною задачею, але і частиною інших задач обчислювальної математики, наприклад, розв’язання нелінійних диференціальних рівнянь або знаходження власних значень матриць. З ними пов'язана побудова різноманітних моделей пристроїв і систем автоматики й інформаційно-вимірювальної техніки.

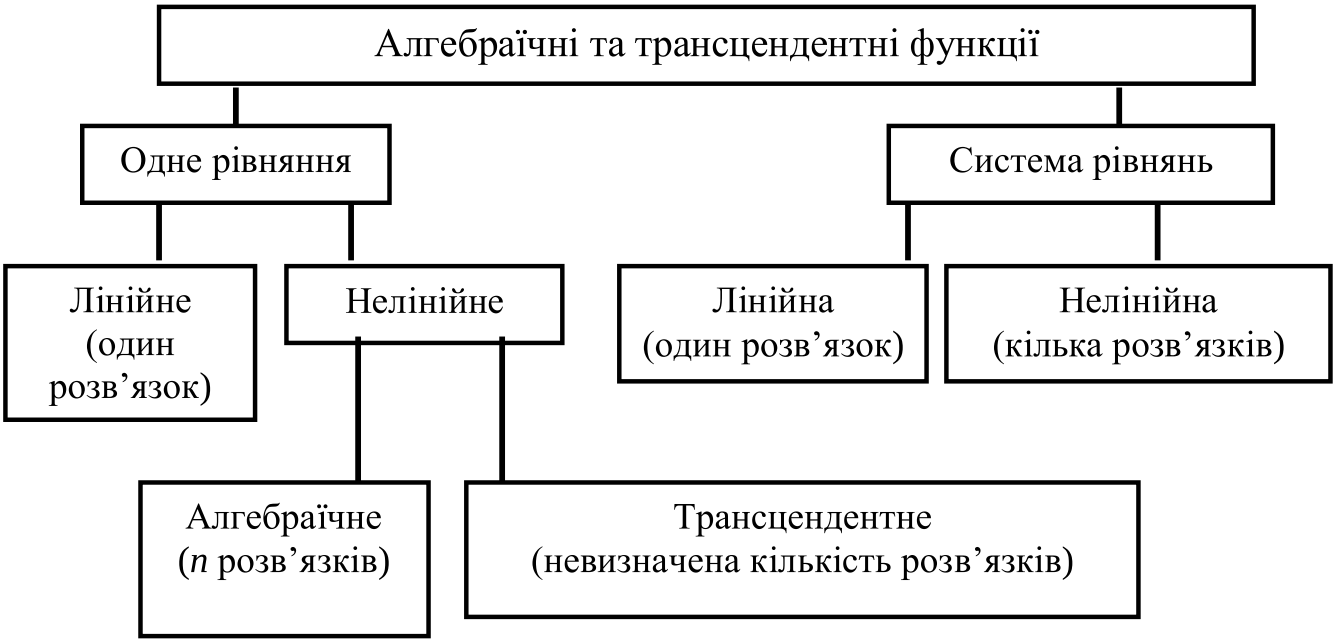


Рис.2.1. Класифікація задач, що зводяться до розв’язання алгебраїчних та трансцендентних рівнянь.

Задачі, що зводяться до розв’язання алгебраїчних і трансцендентних рівнянь, можна класифікувати по числу рівнянь і в залежності від передбачуваного характеру і числа рішень (рис.2.1) [1-3,5].

Трансцендентними називаються нелінійні рівняння, що містять тригонометричні або інші спеціальні функції, наприклад, логарифмічну або експонентну. Рівняння, що не містять спеціальних функцій, а тільки степені аргументу з відповідними коефіцієнтами, є нелінійними алгебраїчними.

Застосування прямих методів розв'язання таких рівнянь можливо лише для алгебраїчних рівнянь, причому практично доцільно при порядку не більш третього. Тому на перший план виходять ітераційні методи, особливо при наявності ефективних алгоритмів, що реалізують на ЕОМ.

Стосовно алгебраїчних рівнянь можна вказати ряд властивостей, використання яких дозволить прискорити процес розв'язання задачі [4,6]. Загальний вигляд алгебраїчного рівняння:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 .$$

(2.1)

Властивості алгебраїчних рівнянь:

1. Основна теорема алгебри. Алгебраїчне рівняння порядку n має n коренів, що можуть бути як дійсними, так і комплексними. Кожен корінь рахується стільки разів, яка його кратність. Кратність кореня x_0 дорівнює k, якщо

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(k-1)}(x_0) = 0 .$$

2. Якщо всі коефіцієнти a_i, рівняння (2.1) дійсні, то всі комплексні корені утворять комплексно сполучені пари.

3. Теорема Декарта. Кількість позитивних дійсних коренів дорівнює або менше кількості змін знаків у послідовності коефіцієнтів a_i**,** (це твердження справедливе відносно кількості від'ємних дійсних коренів при заміні в (2.1) x на ($-x$)).

4. Теорема Лагранжа. Верхня границя додатних дійсних коренів визначається як

$$R = 1 + \sqrt[k]{\frac{B}{a_0}}; a_0 > 0$$

де a_k — перший від'ємний коефіцієнт; B – найбільша абсолютна величина від'ємного коефіцієнта.

5. Теорема Гюа. Якщо рівняння (2.1) має дійсні корені і дійсні коефіцієнти, то

$$a_k^2 > a_{k-1}a_{k+1}$$

У суворо математичному змісті, знайшовши один який-небудь корінь x_1 можна розділити рівняння на $(x - x_1)$, тим самим понизивши його степінь. Однак ця процедура може призвести до нагромадження помилок у коефіцієнтах одержуваних рівнянь, а отже, і в коренях. Відомі дві теореми, одна з яких дозволяє відокремити корені, тобто установити можливо тісні проміжки $[\alpha;\beta]$, у яких міститься один і тільки один корінь рівняння, а друга – оцінити степінь наближення.

Теорема 1.Якщо безперервна функція *f(x)* приймає значення різних знаків на кінцях відрізка $[\alpha;\beta]$,тобто $f(\alpha)f(\beta)<0$,то усередині цього відрізка міститься щонайменше один корінь рівняння $f(x)=0$, тобто знайдеться хоча б одне число $\xi \in (\alpha;\beta)$ таке, що $f(\xi)=0$.

Теорема 2. Нехай ξ - точний, а $\bar{x}$-наближений корені рівняння *f(x)=0,* що знаходяться на тому самому відрізку$[\alpha;\beta]$,причому $| f'(x) \geq m, \alpha \leq x \leq \beta |$. Тоді

$$|\bar{x} - \xi| \leq \frac{|f(\bar{x})|}{m}$$

2.1. Рівняння з одним невідомим

Знаходження коренів рівняння - це одна з найдавніших математичних проблем, що не втратила своєї гостроти й у наші дні: вона часто зустрічається в найрізноманітніших областях науки і техніки [4]. У практичних розрахунках часто треба ров'язувати рівняння типу

$$x = \varphi(x)$$

де *f(x)* - деяка функція, що вважається неперервною.

Коренем або розв’язком цього рівняння називають таке число ***x***, при якому дане рівняння перетворюється в тотожність. Точне розв’язання поставленої проблеми далеко не завжди можливо, тому доводиться використовувати наближені методи розв’язання. Однак точне розв’язання рівнянь у більшості випадків не є необхідним, тому задачу відшукання коренів рівняння можна вважати практично вирішеною, якщо можливо визначити корені з потрібним степенем точності [4]. Слід зазначити, що більшість наближених методів розв’язання рівнянь розраховано на знаходження тільки одного кореня, хоча в дійсності таких коренів може бути кілька. Тому процедура розв’язання рівняння розкладається на два етапи:

1. Визначення інтервалу, у якому міститься один корінь.
2. Уточнення значення кореня до деякого заданого степеня точності.

Відрізком (інтервалом) [*a*,*b*] відділення (ізоляції) кореня рівнянняназивають відрізок осі абсцис, на якому міститься тільки один корінь даного рівняння. Іншими словами, якщо зазначена нижня границя a і верхня границя b для кореня x, і відомо, що при $a<x<b$ корінь єдиний, то корінь x відділений.

2.2. Визначення інтервалу відділення кореня

Якщо приблизно відомо відрізок $[\alpha, \beta]$, на якому необхідно відокремити корінь, то розбиваємо його на n рівних по довжині частин точками x_i, причому $\alpha=x_0<x_1<x_2<...<x_n=\beta$. Обчислюємо значення функції $f(x)$ у цих точках, тобто $y_i=f(x_i)$, $i=0, 1, 2,..., n$. Для кожного i-го інтервалу $[x_i, x_{i-1}]$ аналізуємо знаки y і y_1 (при цьому відкидається окремий випадок, коли $y_i=0$ чи $y_{i-1}=0$, тому що в цьому випадку вирішена глобальна проблема розв'язання рівняння (1.1)). Можливі два випадки:

1. Значення y_i та y_{i-1} мають різні знаки. Тоді в інтервалі $[x_i, x_{i-1}]$ є хоча б один корінь. Для уточнення числа коренів досліджуємо знак першої похідної $f(x)$ на знайденому інтервалі. Якщо в інтервалі $[x_i, x_{i-1}]$ похідна знакопостійна, то в ньому міститься лише один корінь; якщо похідна змінює знак, потрібні додаткові дослідження [2-5].
2. Значення y_i та y_{i-1} мають однакові знаки. У цьому випадку на інтервалі
$[x_i, x_{i-1}]$ або немає коренів, або їх деяке (швидше всього, парне) число. Якщо похідна $f'(x)$ на інтервалі не змінює знак, то коренів у ньому немає. Знайдений інтервал $[x_i, x_{i-1}]$, у якому похідна не змінює знак і функція на кінцях інтервалу має різні знаки, приймається як інтервал відділення кореня.

У принципі, інтервал відділення кореня можна також визначити, провівши аналіз поводження функції $f(x)$ за допомогою обчислення першої похідної і знаходженню точок перегину функції (що дозволяє побудувати приблизний графік функції).

2.3. Графічний метод розв'язання рівнянь

У найпростішому варіанті цей метод полягає в тому, що будується графік функції $y=f(x)$ і як корінь приймаються абсциси точок перетину графіка функції з віссю OX. Такий спосіб є досить грубим у силу неточностей побудови графіків функцій, та й графіки можна побудувати лише для вузького класу математичних функцій. Іноді вихідне рівняння доцільно представити у вигляді $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$, тоді розв'язанням рівняння будуть точки перетину графіків функції $y=\varphi_1(x)$ і $y=\varphi_2(x)$.

Як приклад, розглянемо графічне розв'язання рівняння $x*2^x - 1 = 0$ [4]. Представимо це рівняння у вигляді $x=2^{-x}$. Побудувавши графіки функцій $y=x$ і $y=2^{-x}$, знаходимо їхню точку перетину $x \approx 0,64$. Це значення можна вважати грубим наближенням кореня (рис.2.2).

На практиці графічний метод розв'язання рівнянь в основному застосовується для наближеної локалізації інтервалу відділення.

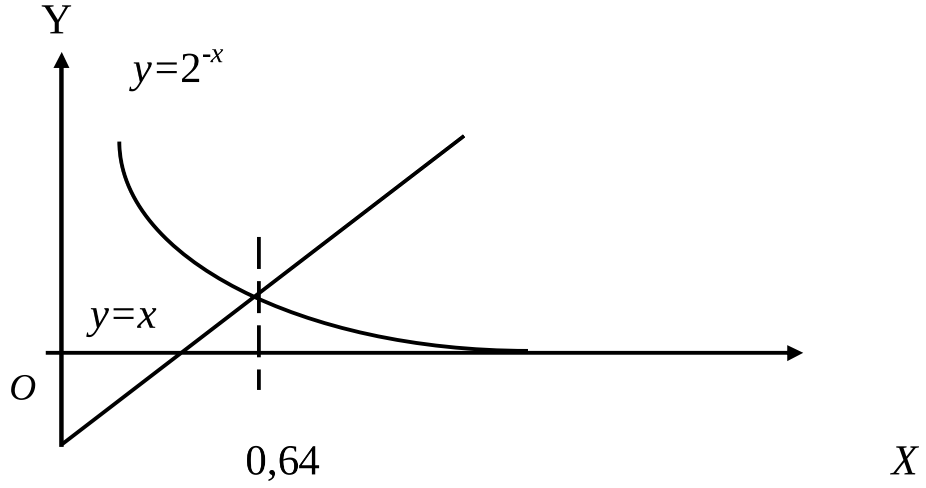


Рис.2.2. Графічне розв'язання рівняння

2.4. Метод поділу навпіл (дихотомії)

Задача ставиться у вигляді: потрібно знайти корінь рівняння $f(x)=0$ на інтервалі відділення $[a,b]$ із заданою точністю ε (при цьому вважається, що функція $f(x)$ на цьому відрізку неперервна) [1-6]. Метод поділу навпіл заснований на наступній теоремі з курсу математичного аналізу: якщо функція неперервна на відрізку $[a,b]$ і приймає на кінцях цього відрізку значення різних знаків, то всередині відрізку $[a,b]$ існує принаймні один корінь рівняння $f(x)=0$. Такі міркування дають можливість побудови послідовності відрізків, що входять друг у друга, причому кожний з них буде містити корінь рівняння.

Візьмемо середину відрізка $[a,b]$ $c=(a+b)/2$, позначимо її як с, і обчислимо в ній значення функції $f(c)$. Якщо $f(c)=0$, то c - шуканий корінь рівняння. Якщо $f(c)\neq 0$, тоді порівнюємо знаки функції в точках a і c. Таке порівняння зручно робити шляхом множення функцій $f(a)$ і $f(c)$, якщо цей добуток більше 0, то знаки функції однакові, у противному випадку - різні. Якщо $f(a)\cdot f(c)<0$, то відкидається відрізок $[c,b]$, тому що на ньому коренів ні, у випадку

$f(a)\cdot f(c)>0$ відкидається відрізок $[a,c]$. Відкидання відрізка відбувається шляхом відповідного присвоєння $b=c$ чи $a=c$. У результаті такої операції ми знову одержали відрізок $[a,b]$, що містить корінь, але його розмір менше вихідного (рис.2.3). Подібну процедуру повторюють доти, поки не стане вірним умова $|b-a|<2\varepsilon$. Після цього, як наближене розв'язання рівняння з точністю ε, приймається середина отриманого відрізка $x=(a+b)/2$.

Переваги методу поділу навпіл:

1. Універсальність, тому що процедура пошуку передбачає перебування одного кореня для будь-яких неперервних функцій $f(x)$, у тому числі не диференційовних.

2. Метод стійкий до помилок округлення, що виникають при обчисленнях. Точність відповіді гарантована.

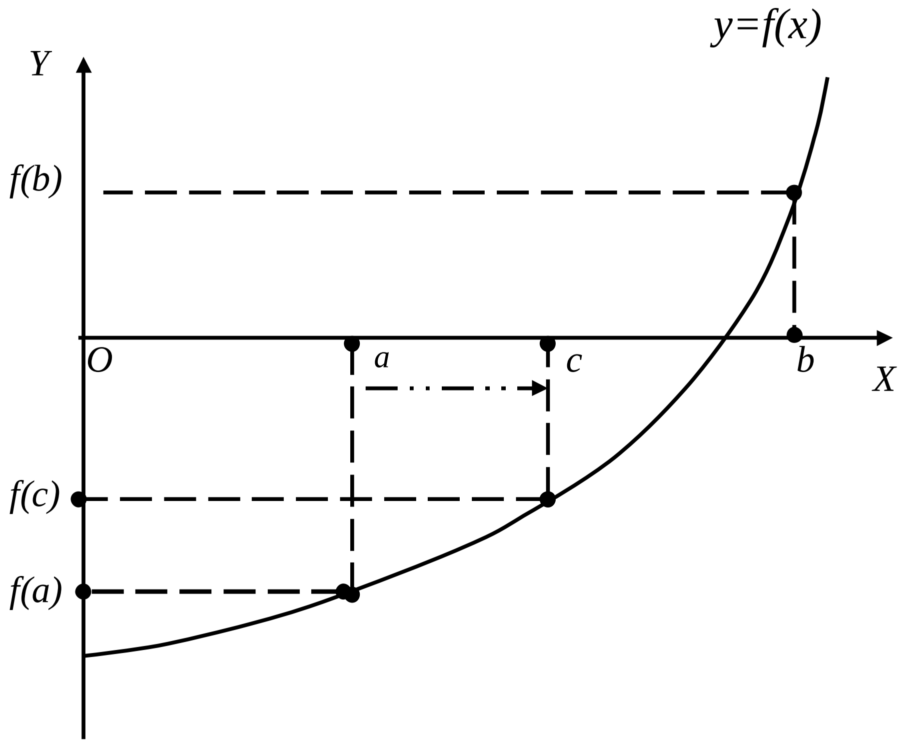


Рис.2.3. Ілюстрація методу поділу навпіл

Недоліки методу поділу навпіл:

1. Мала швидкість збіжності: за одну ітерацію точність збільшується приблизно вдвічі.

2. Для застосування його необхідно заздалегідь знайти інтервал відділення (якщо ж він попередньо не знайдений і в пропонованому відрізку міститься декілька коренів, то заздалегідь неможливо сказати, до якого з них зійдеться процес).

На початку алгоритму можна також ввести перевірку на знакозмінність функції *f(x)* на кінцях вихідного відрізка [*a*,*b*] (якщо він заданий невірно, то алгоритм не приведе до розв’язання). Розглянемо застосування методу поділу навпіл на прикладі розв’язання рівняння $x^3+3x^2-1=0$ на інтервалі відділення [0,1] з точністю ε=0,001 [5].

Середина вихідного відрізка *c*=0,5; *f*(0,5)=-0,125, *f*(0) - *f*(0,125) > 0, тому з відрізків [0;0,5] і [0,5;1] вибираємо другий, переносимо точку *a* в точку *c* шляхом присвоєння *a*=0,5, поділяємо новий відрізок [0,5;1] навпіл і т.і.

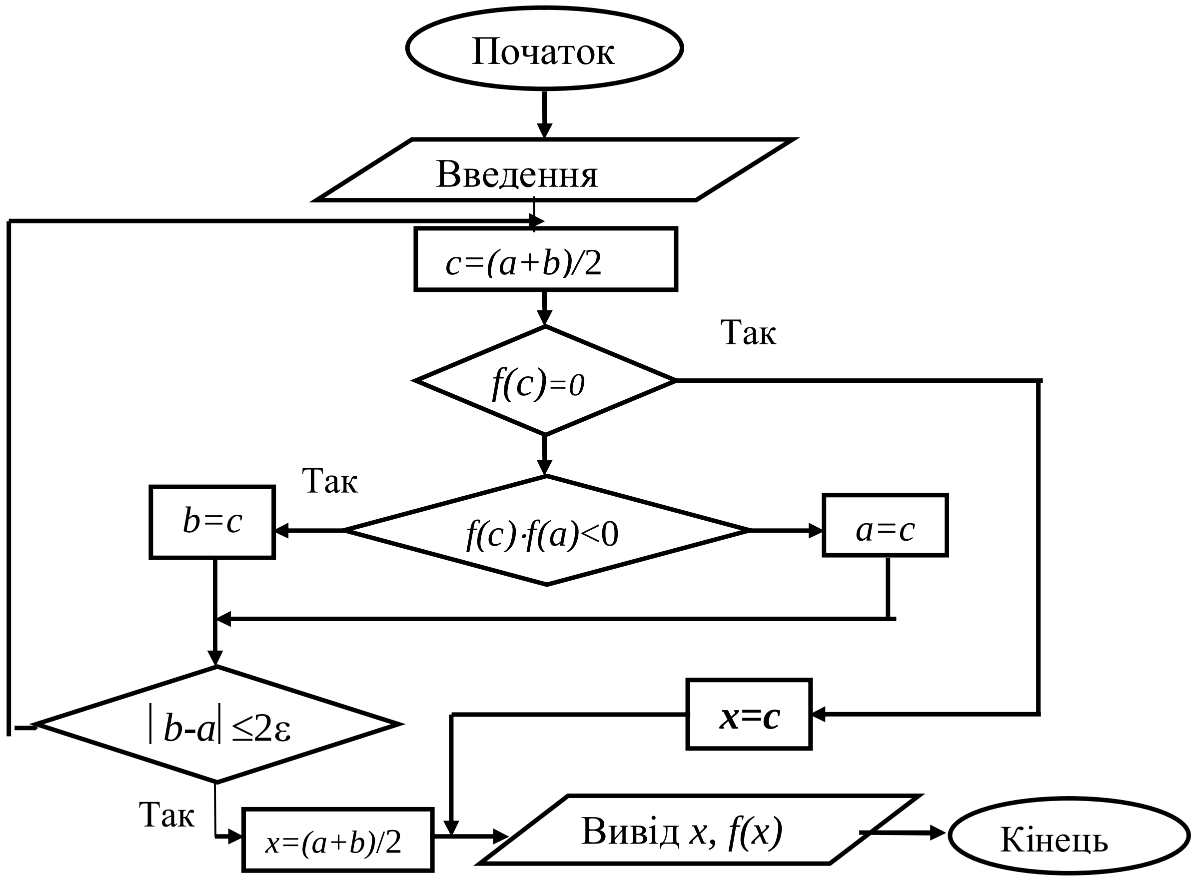


Рис.2.4. Алгоритм методу поділу навпіл

Продовження обчислень наводиться в таблиці:

Відрізок [*a*,*b*]	Середина відрізка *c*	Знак *f(a)·f(c)*
[0;1]	0,5	+
[0,5;1]	0,75	-

[0,5;0,75]	0,625	-
[0,5;0,625]	0,5625	-
[0,5;0,5625]	0,53125	-
[0,5;0,53125]	0,51562	+
[0.5156;0,5312]	0,52342	+
[0,5234;0,5312]	0,5273	+
[0,5273;0,5312]	0,5292	+
[0,5292;0,5312]	0,5302	

Довжина отриманого відрізка $|b\text{-}a|$=0,00195<2ε=0,002, тобто шукана точність досягнута. Розв'язання рівняння x≈0,5302±0,001.

2.5. Комбінований метод хорд і дотичних

Застосування цього методу припускає, що на відрізку [a,b] функція $f(x)$ відділена (тобто на кінцях відрізка має різні знаки), а $f'(x)$ і $f''(x)$ неперервні і знакопостійні у середині цього відрізка [3-5].

Розглянемо комбінований метод хорд і дотичних розв'язання рівнянь, по якому одночасно застосовується і метод хорд і метод дотичних, що дозволяє організувати більш швидкий обчислювальний процес. Звернемося до геометричної інтерпретації (рис.2.5). У точці B проведемо дотичну до кривий $y=f(x)$ до перетину з віссю OX. Абсцису точки перетину позначимо через d. Проведемо хорду AB і абсцису точки перетину позначимо c. Отриманий відрізок [c,d] містить шуканий корінь рівняння і його довжина значно менше вихідного відрізка [a,b]. Отриманий відрізок [c,d] також містить корінь рівняння, але розмір його набагато менше, ніж вихідний відрізок [a,b]. Продовжуючи проводити аналогічні побудови, можна звузити відрізок до необхідної точності ε.

Слід зазначити, що дотична повинна проводитися з тієї точки на границі інтервалу відділення, у якій знак функції збігається зі знаком другої похідної.

Алгоритм методу складається в наступному (будемо виходити з того, що дотичну потрібно проводити з точки b):

1. Знаходимо точки c і d , для чого робимо обчислення по формулах

$$c=a-f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} \qquad (2.2)$$

$$d = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \qquad (2.3)$$

2. Порівнюємо довжину отриманого відрізка з точністю ε. Якщо $|d\text{-}c| \le 2\varepsilon$, то кінець алгоритму, а як корінь береться значення $x=(b+a)/2$.

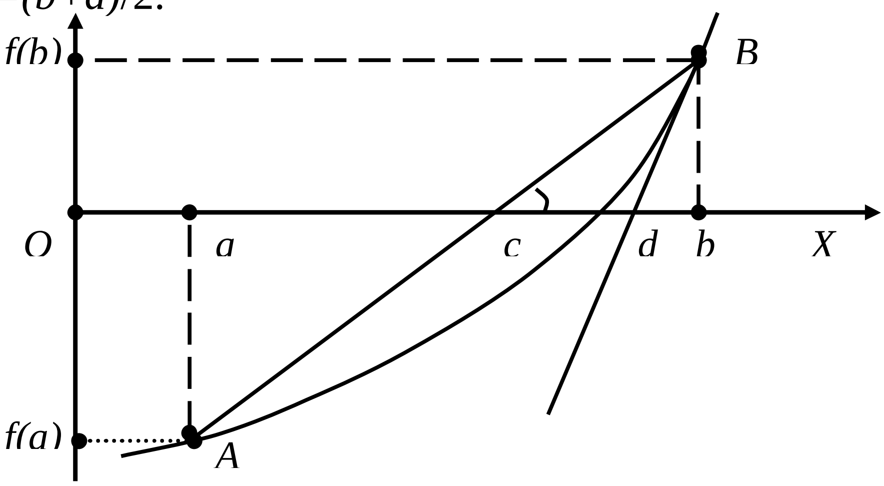


Рис.2.5. Ілюстрація методу хорд і дотичних

Якщо ж ця умова не виконується, робимо присвоєння $a=c$, $b=d$ і повертаємося до пункту 1. Відзначимо, що питання вибору точки проведення дотичної зважується один раз. Якщо дотичну потрібно проводити не з точки b, а з точки a, то в алгоритмі ці точки у формулах треба поміняти місцями. Для ілюстрації уточнимо значення кореня попереднього рівняння $x^3+3x^2-1=0$ на відрізку [0,5;0,55] з точністю ε=0,0001. Знаходимо похідні $f'(x)=3x^2+6x$ і $f''(x)=6x+6$. Знаходимо $f(0,55)=0,0738>0$ і $f''(0,55)=4,2075>0$. Звідси випливає, що дотичну необхідно проводити з точки $b=0,55$. Використовуючи формули (2.2) і (2.3), знаходимо

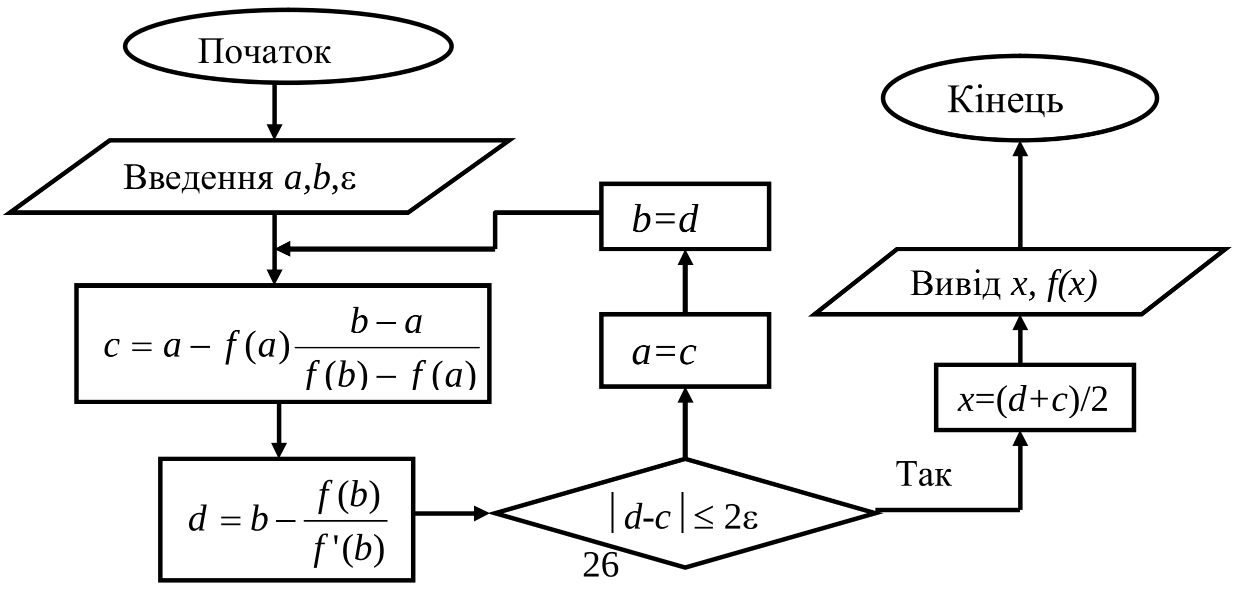


Рис.2.6. Блок-схема комбінованого алгоритму методу хорд і дотичних

$$d = 0{,}55 - \frac{0{,}07387}{3 \cdot 0{,}55^2 + 6 \cdot 0{,}55} = 0{,}53244$$

$$c = 0{,}5 - (-0{,}125) \cdot \frac{0{,}5 - 0{,}55}{-0{,}125 - 0{,}07387} = 0{,}531427$$

Отримано новий інтервал, що містить корінь:[0,531427;0,53244]. Наступна ітерація:

$$d = 0{,}53244 - \frac{0{,}001419}{4{,}045117} = 0{,}5320988$$

$$c = 0{,}531427 - (-0{,}0026742) \cdot \frac{(-0{,}00997)}{-0{,}001433 - 0{,}0026742} = 0{,}5320761$$

дає значення інтервалу [0,5320761;0,5320988], довжина якого 0,0000227<2ε = 0,0002, звідси, як наближене розв’язання рівняння, приймаємо значення 0,5320 ± 0,0001.

2.6. Ітераційний метод (послідовних наближень)

Нехай дано рівняння (2.1). Щоб вирішувати його ітераційним методом, необхідно записати його в наступному вигляді :

$$x = \varphi(x) \tag{2.4}$$

Таке перетворення можна зробити декількома способами. Наприклад, до обох частин рівняння (2.1) можна додати $\boldsymbol{x}$.

Для розв’язання рівняння (2.4) ітераційним методом виберемо початкове наближене x_0 (міркування по його вибору приведено нижче) і обчислимо подальше наближення по формулах

$$x_1 = \varphi(x_0)$$

$$x_2 = \varphi(x_1)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), (k = 0,1,2,...)$$

Остання формула називається <u>рекурентною</u> і визначає закон побудови послідовності. Послідовність $\{x_n\}$, члени якої обчислюються по приведеній формулі, називається <u>ітераційною.</u> Має місце наступний факт: якщо ітераційна послідовність збігається і $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$, то ξ є коренем рівняння (2.1) [3-4]. Послідовність $\{x_n\}$ не завжди збігається, тому приведемо достатню умову збіжності ітераційної послідовності: якщо $|\varphi'(x)| < 1$, то ітераційний процес збігається, якщо ж $|\varphi'(x)| > 1$, то процес розбігається. Для застосування ітераційного методу доцільно будь-яким грубим способом (наприклад, графічним) знайти наближене значення кореня, оцінити значення похідної в цій точці і порівняти її з 1 [14]. У випадку виконання умови $|\varphi'(x)| < 1$ можливе застосування ітераційного алгоритму для уточнення кореня, причому як перше наближення береться знайдена точка. Як наближене значення кореня при реалізації алгоритму доцільно вибирати такий член ітераційної послідовності $\{x_n\}$, для якого виконується умова $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$ [3].

Іноді як критерій зупинки обчислювального процесу вибирають перевищення числа ітерацій (повторень числа кроків алгоритму) над заздалегідь заданою величиною. Такий критерій обумовлений тією обставиною, що, якщо $\lim_{n\to\infty} x_n = \xi$, то для даного ξ знайдеться таке n, що $|x_n - \xi| < \varepsilon$ [5-6].

Викладений алгоритм послідовних наближень може бути поліпшений за допомогою прийомів екстраполяції та інтерполяції (однієї з найвідоміших модифікацій є метод Ньютона-Рафсона [1], що використовує у своїх обчисленнях похідні функції $\varphi(x)$) .

До недоліків ітераційних методів варто віднести:

1. Обмежена область застосування (не для всіх рівнянь).
2. Необхідність попередньої перевірки послідовності $\{x_n\}$ на збіжність.

Перевагами є:

1. Простота реалізації на комп'ютері.
2. Відсутність необхідності попереднього знаходження інтервалу відділення $[a,b]$.
3. Випадковий характер вибору вихідної точки $\boldsymbol{x_0}$.

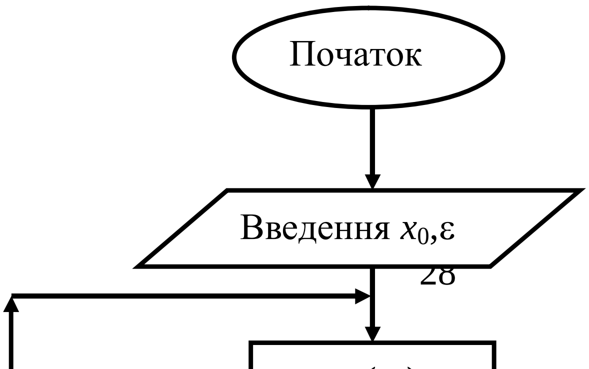


Рис.2.7. Алгоритм методу ітерацій

Розглянемо застосування ітераційного методу для розв'язання рівняння $x^3+10x-10=0$ з точністю $\varepsilon=0{,}0001$. Представимо рівняння у вигляді $x=1-0{,}1x^3$, тобто у вигляді (2.4), причому $\varphi(x) = 1-0{,}1x^3$. Покладемо початкове наближення $x_0=1$. Наступні обчислення виглядають у такий спосіб (з точністю до четвертого десяткового знака):

$x_1=1-0{,}1x^3_0=1-0{,}1\cdot1^3=0{,}9$

$x_2=1-0{,}1x^3_1=1-0{,}1\cdot0{,}9^3=0{,}9271$

$x_3=1-0{,}1x^3_2=1-0{,}1\cdot0{,}9271^3=0{,}9203$

$x_4=1-0{,}1x^3_3=1-0{,}1\cdot0{,}9203^3=0{,}9221$

$x_5=1-0{,}1x^3_4=1-0{,}1\cdot0{,}9221^3=0{,}9216$

$x_6=1-0{,}1x^3_5=1-0{,}1\cdot0{,}9216^3=0{,}9217$

$x_7=1-0{,}1x^3_6=1-0{,}1\cdot0{,}9217^3=0{,}9217$

Так як $x_7-x_6<\varepsilon$, то отримане значення кореня $x=0{,}9217$ можна вважати наближеним розв'язанням заданого рівняння.

Завдання для самостійного розв'язання

1.1. Відокремити корені графічно або аналітично (за допомогою похідної) і уточнити один з них методом ітерацій з точністю до 0,001.

1. $\ln x + (x+1)^3=0$
2. $x\cdot2^x=1$
3. $x-\cos x=0$
4. $3x+\cos x+1=0$

5. $x+\ln x=0,5$
6. $2-x=\ln x$
7. $(x-1)^2=0,5e^x$
8. $2,2x-2^x=0$
9. $x^2+4\sin x=0$
10. $2x-\lg x=7$
11. $3x-e^x=0$
12. $5x-8\ln x=8$
13. $x(x+1)^2=1$
14. $x=(x+1)^3$
15. $x^2=\sin x$
16. $2x+\cos x=0,5$
17. $\sin 0,5x+1=x^2$
18. $\lg(2+x)+2x=3$
19. $\lg(1+2x)=2-x$
20. $x+\cos x=1$

1.2. Відокремивши корінь графічно або аналітично, знайти один з коренів рівняння за допомогою комбінованого методу хорд і дотичних з точністю 0,001:

1. $2x^3-3x^2-12x-5=0$
2. $x^3-3x^2+3=0$
3. $x^3+3x^2-24x-10=0$
4. $2x^3+9x^2-21=0$
5. $x^3+3x^2-2=0$
6. $x^3+3x^2-24x+10=0$
7. $2x^3+9x^2-10=0$
8. $x^3+3x^2-3=0$
9. $x^3-3x^2-24x-5=0$
10. $x^3-12x^2-5=0$
11. $2x^3-3x^2-12x+12=0$
12. $x^3-3x^2+1,5=0$
13. $x^3+3x^2-24x-3=0$
14. $2x^3+9x^2-4=0$
15. $x^3+3x^2-1=0$
16. $x^3-3x^2-24x-3=0$
17. $x^3-12x+6=0$
18. $2x^3-3x^2-12x+10=0$
19. $x^3-3x^2+2,5=0$
20. $x^3+3x^2-3,5=0$

1.3. Розв'язати дане рівняння на заданому інтервалі відділення з точністю 0,001 методом дихотомії і комбінованим методом хорд і дотичних:

1. $e^{x-2}-ln(x+2)=0$ $\quad x\in[2;3]$
2. $x^3-9x^2+5x-6=0$ $\quad x\in[8;9]$
3. $e^x-1/x=1$ $\quad x\in[0,5;1]$
4. $arctg(2x)-1/(1+x)=0$ $\quad x\in[0;1]$
5. $e^x-lnx-20=0$ $\quad x\in[3;3,2]$
6. $\sqrt{x}-tg(1-x)=0$ $\quad x\in[0;1]$
7. $\sin\sqrt{x}-\cos\sqrt{x}+2\sqrt{x}=0$ $\quad x\in[0;0,2]$
8. $x^4+2x^3-x-1=0$ $\quad x\in[0,8;1]$
9. $x^3-e^{4x}+3,5=0$ $\quad x\in[0;1]$
10. $tg^3x-tgx-1=0$ $\quad x\in[0,8;1]$
11. $x^3+5x^2+3x-2=0$ $\quad x\in[-2;-1]$
12. $-x^3-2x^2-3x+1=0$ $\quad x\in[0;1]$
13. $x^3-4x^2-x+3=0$ $\quad x\in[0;1]$
14. $3x^3-2x^2+x-3=0$ $\quad x\in[1;2]$
15. $2x^3-3x^2+x-4=0$ $\quad x\in[1;2]$
16. $x^4-x^3+x-5=0$ $\quad x\in[-2;-1]$
17. $x^4-x^3+x-5=0$ $\quad x\in[1;2]$
18. $x^3+x^2+x+2=0$ $\quad x\in[-2;-1]$
19. $x^4+x^3+x^2+x-3=0$ $\quad x\in[0;1]$
20. $x^3+3x^2-1=0$ $\quad x\in[-1;0]$

Запитання до розділу 2

1. Наведіть класифікацію нелінійних рівнянь та систем.
2. Сформулюйте основну теорему алгебри та теорему Декарта.
3. Сформулюйте тереми Гюа та Лагранжа.
4. Поясніть визначення інтервалу виділення кореня.
5. Поясніть графічний метод роз'язання рівнянь.
6. Поясніть ідею методу поділу навпіл.
7. Поясніть ідею методу хорд.
8. Поясніть ідею методу дотичних.
9. Поясніть ідею методу просої ітерації.
10. Складіть програму для розв'язання рівнянь на ЕОМ методом дихотомії.

11. У чому відміна методів дотичних та хорд?
12. Які недоліки та переваги кожного з методів?

РОЗДІЛ 3. РОЗВ’ЯЗАННЯ СИСТЕМ РІВНЯНЬ

3.1. Системи лінійних рівнянь

Задачі лінійної алгебри (у тому числі і розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь) мають важливе прикладне значення при розв’язанні різних проблем науки і техніки, у першу чергу при розв’язанні різних економічних задач, а також при реалізації алгоритмів математичної фізики, обчислювальної математики, обробці результатів експериментальних досліджень тощо [2,7-9]. Система лінійних рівнянь (СЛР) щодо невідомих $\boldsymbol{x_j}$, виглядає в такий спосіб:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = a_{10} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = a_{20} \\ - - - - - - - - - - - - - - \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = a_n \end{cases} \tag{3.1}$$

де x_j - невідомі величини, a_{ij}- задані елементи матриці системи лінійних рівнянь. Дану систему можна записати й у наступному вигляді:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = a_{i0}, (i = 1,2,\ldots,n)$$

Застосовується також запис СЛР у матричній формі:

$$Ax = A_0,$$

де A - квадратна матриця розміром $n \times n$, x і A_0 - вектори-стовпці довжиною n.

У загальному випадку кількість рівнянь може не збігатися з числом змінних, але ми будемо розглядати тільки ті СЛР, у яких ця умова виконується. Кожне з n рівнянь СЛР визначає в n-мірному просторі гіперплощина, перетинання їх визначає розв’язання. Відомо, якщо визначник матриці A нульовий, тобто $det\ A = 0$, то СЛР не має розв’язання або має безліч рішень. При $det\ A \neq 0$ - система має єдине розв’язання. На рис.3.1 показана існування розв'язання системи 2-х рівнянь; якщо det=0, то нахили прямих рівні, і такі прямі або рівнобіжні, або збігаються.

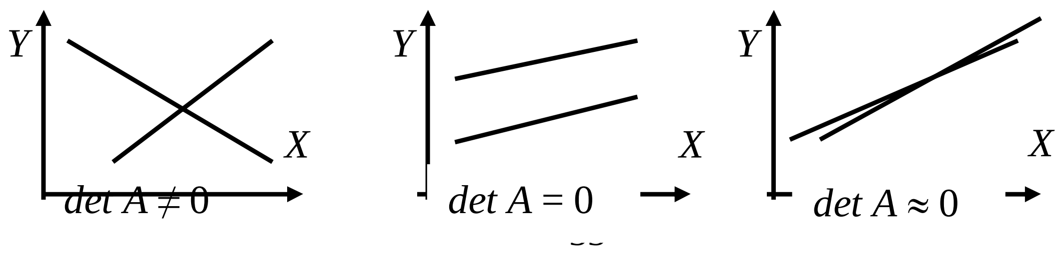


Рис.3.1.Геометрична ілюстрація існування розв’язання СЛР

Якщо $det\ A \approx 0$, то система погано обумовлена, і для її розв’язання застосовуються спеціальні методи розв’язання [1,8]. Система називається добре обумовленою, якщо невеликі зміни в коефіцієнтах і вільних членах системи незначно впливають на розв’язання.

Методи розв’язання лінійних систем поділяють на прямі й ітераційні [1,3]. Прямі методи дають розв’язання за кінцеве число кроків, вони прості й універсальні (методи Гауса, Жордана-Гауса). Їх застосовують для розв’язання систем невеликого порядку $n \le 200$. Ітераційні методи застосовуються для систем спеціального вигляду зі слабко заповненою матрицею великого порядку $n \approx 10^3$-10^5. За допомогою ітераційних методів розв’язання одержують як межу послідовних наближень, що обчислюються деяким однаковим процесом (метод простих ітерацій, метод Зейделя). При застосуванні ітераційних методів істотним є не тільки збіжність побудованих послідовних наближень, але і швидкість збіжності. У цьому розумінні кожен ітераційний метод не є універсальним; даючи швидку збіжність для одних матриць СЛР, він може повільно збігатись або навіть зовсім не збігатись для інших.

Розв’язання СЛР можна знайти і за правилом Крамера [3] через відношення визначників. Але цей спосіб незручний для обчислень, тому що визначник знайти не простіше, ніж вирішити вихідну систему.

3.2. Метод виключення Гауса

Цей метод, заснований на послідовному виключенні невідомих, має безліч варіантів. Розходження між ними - у порядку виключення невідомих і в способі збереження проміжних результатів [1,7,8]. У загальному випадку метод полягає в приведенні системи (3.1) до системи трикутного вигляду, у якій останнє рівняння містить тільки одну змінну (коефіцієнти при інших дорівнюють 0), а всі інші рівняння знизу нагору будуть містити на одну змінну більше, ніж попереднє рівняння.

Будь-яку сумісну СЛР можна привести до описаного вигляду за допомогою наступних елементарних перетворень:

1) множення рівнянь на постійний множник;

2) додавання двох рівнянь;

Для того, щоб привести СЛР до зазначеного вигляду, потрібно виконати наступні кроки:

а) вибрати провідне рівняння і провідну змінну. Поділити всі коефіцієнти у провідному рівнянні на коефіцієнт при провідній змінній;

б) виключити провідну змінну з рівнянь, розташованих нижче в системі шляхом множення провідного рівняння на придатний множник і додавання до інших рівнянь;

в) повторити крок а), вибираючи провідне рівняння з усіх рівнянь системи, що не були провідними на попередніх кроках.

Процедура закінчується тоді, коли вихідна система буде приведена до трикутного вигляду або коли буде встановлено несумісність системи. Усі розрахунки краще вести в матричному вигляді, переходячи від запису СЛР (3.1) до матриці в такий спосіб

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{20} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{n0} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

Тоді шукана форма буде мати вигляд (з верхньою діагональною матрицею, у якої всі елементи нижче головної діагоналі дорівнюють 0)

$$\begin{pmatrix} 1 & b_{12} & \cdots & b_{1n} & b_{10} \\ 0 & 1 & \cdots & b_{2n} & b_{20} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{n0} \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Дія алгоритму знаходження трикутного вигляду матриці починається з першого рядка і першого стовпця: розділимо перший рядок матриці (3.2) на коефіцієнт a_{11}, потім для кожного k-го рядка (k=2,3,...,n) робимо наступні операції: перший рядок множимо на (-a_{k1}) і складаємо с k-м рядком, при цьому елементи першого стовпця с a_{21} по a_{n1} приймають нульові значення:

$$\begin{pmatrix} 1 & d_{12} & d_{1n} & d_{10} \\ 0 & d_{22} & d_{2n} & d_{20} \\ . & . & . & . \\ 0 & d_{n2} & d_{nn} & d_{n0} \end{pmatrix}$$

Надалі алгоритм повторюється для всіх рядків. У загальному випадку для кожного m-го рядка, починаючи з першого, проводяться наступні дії:

а) усі коефіцієнти m-го рядка поділяються на елемент a_{mm};

б) для всіх рядків $k>m$ повторюємо операції: множимо m-й рядок на коефіцієнт $-a_{mk}$ і складаємо з k-м рядком.

Якщо коефіцієнт a_{mm} дорівнює 0, то рядок $k>m$ міняється місцями з обраним, щоб a_{mm} не дорівнював нулю. Дії повторюються до одержання матриці вигляду (3.3). Після этого значення останньої змінної $x_n=b_{n0}$. Значення інших змінних одержуємо за формулою:

$$x_k = \left(b_{k0} - \sum_{j=k+1}^{n} b_{kj} x_j \right), (k = n-1, n-2, ..., 1) \qquad (3.4)$$

Розглянемо алгоритм Гауса на прикладі розв'язання СЛР розміром 3х3:

$$\begin{cases} 3x_1+3x_2+9x_3=33 \\ 2x_1+3x_2+8x_3=29 \\ 2x_1+5x_2+13x_3=46 \end{cases} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 9 & 33 \\ 2 & 3 & 8 & 29 \\ 2 & 5 & 13 & 46 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 7 & 24 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Відповідь: $x_3=3$; $x_2=1$; $x_1=1$.

У процесі розв'язання методом Гауса можливі 3 випадки:

1. На останньому кроці одержуємо шукану трикутну матрицю, у цьому випадку СЛР має єдине розв'язання.

2. На деякому кроці k у системі виходить рядок s, у якому усі коефіцієнти при невідомих і вільний член рівні 0: $a_{sj}^{k}=0$, ($j=1,2,...,n$), $a_{s0}=0$. У цьому випадку СЛР має нескінченну множину розв'язань.

3. На кроці k виходить рядок, у якому усі коефіцієнти при змінних дорівнюють нулю, а вільний член не дорівнює нулю: $a_{sj}^{k}=0$, ($j=1,2,...,n$), $a_{s0}\neq 0$. Вихідна система не має розв'язання (несумісна).

Таким чином, обчислення по методу Гауса можна розкласти на два етапи: побудова системи (3.3) прямий хід методу і обчислення змінних по формулах (3.4) зворотний хід методу.

При реалізації на комп'ютері методу Гаусса потрібно n комірок оперативної пам'яті, при обчисленнях виконується $2/3n^3$ арифметичних дій, половина з них множень і половина ділень.

3.3. Метод Жордана-Гауса

За методом Жордана-Гауса розрахунки виконуються аналогічно методу Гауса, але розв’язання системи знаходиться відразу без зворотного ходу. Для цього за допомогою уже наведених елементарних перетворень вихідна матриця вигляду (3.2) зводиться до матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & b_{10} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & b_{20} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & b_{n0} \end{pmatrix} \qquad (3.5)$$

у якій на головній діагоналі одиниці, а всі інші елементи, крім стовпця вільних членів, дорівнюють нулю. Метод вимагає більше обчислень для одержання матриці (3.5), ніж за методом Гауса, але виграш у швидкодії виходить у результаті відсутності зворотного ходу алгоритму. Метод Жордана-Гауса застосовується для розв’язання СЛР, у матриці яких багато нулів.

У загальному випадку методи Гаусса і Жордана-Гаусса є точними, але в силу похибок, що виникають при обчисленнях, розв’язання СЛР, отримане з їх допомогою, є наближеним. Контроль отриманих результатів можна провести шляхом обчислення нев’язок (чим вони чисельно менше, тим більше точно розв’язана СЛР)

$$r_k = a_{k0} - \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j, (k = 1,2,..., n)$$

3.4. Ітераційні методи розв’язання СЛР

Для застосування ітераційних методів розв’язання СЛР необхідно від запису $Ax=A_0$ перейти до еквівалентного запису

$$x = Bx + b_0, \qquad (3.6)$$

де B - квадратна матриця розміром $n\times n$, x и b_0 - вектори-стовпці довжиною n. Задамося початковим наближенням x^0 і на його основі побудуємо послідовність наближень до повного розв’язання за рекурентною формулою (верхній індекс відповідає номеру кроку алгоритму)

$$x^{k+1} = Bx^k + b_0 \qquad (3.7)$$

У розширеному вигляді дана формула має вигляд:

$$x_i^{k+1} = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_j^k + b_{0i}, i = 1,2,...,n$$

Обчислення продовжуються доти, поки не стане вірною умова:

$$\left| x_i^{k+1} - x_j^k \right| \lhd \varepsilon, i = 1,2,...,n$$

де **ε** - задана похибка. Обчислення за представленою формою мають назву <u>методу простих ітерацій</u>. Для збіжності ітераційного процесу достатньо, щоб у будь-якому рядку матриці B сума відношень коефіцієнтів системи до діагональних коефіцієнтів, узятим з того ж рядка, була строго менше одиниці [1-4], тобто всі коефіцієнти системи повинні бути малі у порівнянні з діагональними.

Метод простих ітерацій при виконанні даної умови збігається незалежно від вибору початкового вектора x^0. Для представлення вихідної системи СЛР (3.1) у вигляді, придатному для використання ітераційних методів, необхідно кожне рівняння розділити на діагональний елемент і розв'язати відносно невідомих:

$$\begin{cases} x_1 = -(a_{12}/a_{11})x_2 - (a_{13}/a_{11})x_3 \cdot -... - (a_{1n}/a_{11})x_n + a_{10}/a_{11} \\ x_2 = -(a_{21}/a_{22})x_1 - (a_{23}/a_{22})x_3 \cdot -... - (a_{2n}/a_{22})x_n + a_{20}/a_{22} \\ . \\ x_3 = -(a_{n1}/a_{nn})x_1 - (a_{n2}/a_{nn})x_3 \cdot +... + a_{n0}/a_{nn} \end{cases}$$

Наведемо вже розглянутий приклад СЛР до вигляду (3.6):

$$\begin{cases} x_1 = 11 - x_2 - 3x_3 \\ x_2 = 29/3 - 2/3x_1 - 8/3x_3 \\ x_3 = 46/13 - 2/13x_1 - 5/13x_2 \end{cases}$$

Різновидом методу простих ітерацій є <u>метод Зейделя</u>**,** у якому для обчислення на k-й ітерації i-ї змінної використовуються значення вже обчислених перемінних $j<i$. Обчислювальна схема цього методу виглядає в такий спосіб (для k-ї ітерації):

$$x_i^k = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} x_j^k + \sum_{j=i}^{n} b_{ij} x_j^{k-1} + b_{0i}, i = 1,2,...,n$$

3.5. Системи нелінійних рівнянь

Система нелінійних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} f_1(x_1,\dots x_n)=0 \\ \dots \\ f_n(x_1,\dots x_n)=0 \end{cases} \qquad (3.8)$$

де $x_1,\dots,x_n$ - невідомі змінні, а система (3.8) називається звичайною системою порядку *n*, якщо хоча б одна із функцій $f_i(x_1,...,x_n)$ нелінійна.

Розв'язання систем нелінійних рівнянь – одна із складних задач обчислювальної математики. Складність полягає у тому, щоб з'ясувати: чи має система розв'язок, і, якщо – так, то скільки. Уточнення розв'зків у заданій області – більш проста задача. Нехай функції f_i визначені в областях $\Omega_i, i=\overline{1,n}$. Тоді область $\Omega=\bigcap_{i=1}^{n}\Omega_i$ і буде тією областю, де можна знайти розв'язок. Найбільш відомими методами уточнення розв'язків є метод простих ітерацій та метод Ньютона.

3.6. Метод Ньютона

Нехай (A_k) — деяка послідовність невироджених *n*-матриць [5-6]. Тоді, очевидно, послідовність задач

$$x=x-A_kF(x),\ k=0,1,2,...$$

маємо ті ж розв'язки, що і вихідне рівняння *F(x)*=0, і для приближеного знаходження цих розв'язків можна формально записати ітераційний процес

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}-A_kF(x^{(k)}),\ k=0,1,2,... \qquad (3.9)$$

який має вигляд метода простих ітерацій при $\Phi(x)=\Phi_k(x)=x-A_kF(x)$. У випадку $A_k=A$ - це дійсно метод простих ітерацій з лінійною збіжністю послідовності ($x^{(k)}$) Якщо же A_k різні за різних *k*, то формула (3.9) визначає велику кількість ітераційних методів з матричними параметрами A_k. Розглянемо деякі з цих методів. Припустимо $A_k = [F'(x^{(k)})]^{-1}$, де

$$F'(x) = J(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

— матриця Якобі вектор-функція *F(x)*. Підставимо це A_k в (3.9), отримаємо явну формулу метода Ньютона

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left[F'(x^{(k)})\right]^{-1} F(x^{(k)}), \qquad (3.10)$$

Цю формулу, що вимагає перетворення матриць на кожній ітерації, можна переписати в неявному вигляді:

$$F'(x^{(k)})(x^{(k+1)} - x^{(k)}) = -F(x^{(k)}). \qquad (3.11)$$

Використання (3.11) припускає при кожному $k = 0,1,2,\dots$ розв'язок лінійної алгебраїчної системи

$$F'(x^{(k)})p^{(k)} = -F(x^{(k)})$$

відносно векторній поправці $p^{(k)} = \left(p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, \dots, p_n^{(k)}\right)^T$, а потім добавлення цієї поправки до поточного наближення для отримання наступного:

$$x^{(k+1)} = x^k + p^{(k)}.$$

До розв'язку таких лінійних систем можна використовувати найрізноманітніші методи як прямі, так і ітераційні в залежності від розмірності n розв'язуваної задачі і специфіки матриць Якобі $J(x^{(k)})$.

Порівнюючи (3.11) з формальним розкладом *F(x)* в ряд Тейлора

$$F(x) = F(x^{(k)}) + F'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) + \frac{1}{2!}F''(x^{(k)})(x - x^{(k)})^2 + \dots,$$

бачимо, що послідовність (x_k) в методі Ньютона отримується в результаті заміни при кожному *k*=0,1,2,... нелінійного рівняння *F(x)* = 0 чи, при допустимій гладкості *F(x)*, рівняння

$$F(x^{(k)}) + F'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) + \frac{1}{2!}F''(x^{(k)})(x - x^{(k)})^2 + \dots = 0$$

лінійним рівнянням

$$F(x^{(k)}) + F'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) = 0$$

тобто з покроковою лінеаризацією. Як наслідок цього факту, можна полягати, що при допустимій гладкості *F(x)* і достатньо гарному початковому наближенні $x^{(0)}$ збіжність, яка виникає методом Ньютона послідовності (x_k) до розв'язку x^* буде квадратичною і в багаторазовому випадку.

Новим, порівняно з скалярним випадком, фактором, який ускладнює використання метода Ньютона до розв'язання n-вимірних систем, є необхідність розв'язання *n*-вимірних лінійних задач на кожній ітерації, обчислення яких збільшується зі збільшенням *n*, тобто кажучи, непропорційно швидко. Зменшення таких затрат є одним з напрямків модифікації метода Ньютона.

3.7. Модифікований метод Ньютона

Модифікований метод Ньютона полегшує першу задачу. Модифікація полягає в том, що матриця обчислюється не в кожній точці, а лише в початковій.

Якщо матрицю Якобі *F'(x)* обчислювати і перетворити лише один раз — в початковій точці $x^{(0)}$, то від метода Ньютона (3.11) перейдемо до модифікованого методу Ньютона

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left[F'(x^{(0)})\right]^{-1} F(x^{(k)}) \qquad (3.12)$$

Цей метод потребує значно менших обчислень на один ітераційний крок, але ітерації при цьому може потребуватися значно більше для досягнення заданої точності в порівнянні з основним методом Ньютона (3.11), оскільки, будучи частковим випадком методу ітерацій $A_k = [F'(x^{(k)})]^{-1}$, він має лише швидкість збіжності геометричної прогресії.

Компромісний варіант — це обчислення і перетворення матриць Якобі не на кожному ітераційному кроці, а через декілька кроків (інколи такі методи називаються рекурсивними). Наприклад, просте чергування основного (3.11) і модифікованого (3.12) методів Ньютона приводить до ітераційної формули

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \left[F'(x^{(k)})\right]^{-1} F(x^{(k)}) \qquad (3.13)$$

де $A_k = [F'(x^{(k)})]^{-1}$ $k = 0,1,2,\ldots$ За $x^{(k)}$ тут приймається результат останнього прийому одного кроку основного, а потім одного кроку модифікованого метода, тобто

$$\begin{cases} z^{(k)} = x^{(k)} - A_k F(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} = z^{(k)} - A_k F(z^{(k)}). \end{cases} \qquad (3.14)$$

Доведено, що такий процес при певних умовах призводить до кубічно-збіжних послідовностей ($x^{(k)}$). Приклади та завдання до розв'язання систем нелінійних рівнянь наведено у матеріалах до лабораторної роботи №4.

Завдання до самостійного розв'язання

3.1. Розв'язати систему лінійних рівнянь за допомогою методу Гауса або Жордана-Гауса:

1. $\begin{cases} 5x_1+4x_2+x_3+3x_4= -1 \\ 17x_1+2x_2+8x_3+7x_4=0 \\ x_1+3x_2+10x_3+7x_4=8 \\ -2x_1+x_2+3x_3+2x_4=3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3=13 \\ x_2+5x_3+5x_4=29 \\ 7x_1+5x_2+4x_3+9x_4=50 \\ 3x_1+2x_2+x_3+3x_4=17 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x_1-2x_2-8x_4=16 \\ 5x_1+2x_2-x_3-26x_4= -1 \\ 6x_1+x_2+2x_3-4x_4=19 \\ 2x_1+x_3+2x_4=9 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1-4x_2-3x_3+3x_4= -24 \\ 2x_1+7x_2+8x_3-x_4=43 \\ 3x_1+14x_2+5x_3=29 \\ x_1+5x_2+x_3=7 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x_1-x_2-3x_3-5x_4=15 \\ 2x_1+18x_2+5x_4=83 \\ x_1+5x_2+2x_3+6x_4=18 \\ 3x_2+x_3+2x_4=8 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x_1+2x_2-4x_3+2x_4=35 \\ 5x_1-7x_2+9x_3-10x_4=-81 \end{cases}$

$2x_1+10x_3=-6$
$x_2+3x_3+4x_4=52$

7. $\begin{cases} 4x_1-7x_2-5x_3-5x_4=47 \\ 14x_1-24x_2-6x_3-5x_4=12 \\ x_2+4x_3+2x_4=-10 \\ 2x_1-3x_2+x_3=14 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 7x_1-7x_2+2x_3+2x_4=39 \\ 17x_1-6x_2+7x_3+9x_4=91 \\ x_1+2x_2+4x_4=14 \\ 2x_1+x_3+3x_4=19 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x_1-x_2-x_3+8x_4=18 \\ 2x_1+x_2+5x_3-5x_4=45 \\ 2x_1+3x_3+10x_4=30 \\ x_1+2x_3+3x_4=19 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1+43x_3-4x_4=18 \\ x_1+x_2+24x_3+17x_4=-8 \\ 2x_2-x_3+6x_4=-2 \\ x_2+3x_3+5x_4=-3 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2x_1+7x_2-7x_3+3x_4=1 \\ 3x_1+10x_2-8x_3+x_4=-7 \\ x_1+3x_2-2x_3+4x_4=5 \\ -2x_1+x_2-17x_3+5x_4=23 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1+9x_2-5x_3=-5 \\ x_1+4x_2-5x_3+2x_4=-2 \\ 2x_1+5x_2-x_3-2x_4=-4 \\ 3x_1+7x_2+x_4=4 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1-4x_2+26x_3-8x_4=78 \\ x_1+2x_2+x_3=3 \\ x_2-2x_3-2x_4=-4 \\ 2x_1+6x_2-5x_3+5x_4=-17 \end{cases}$

14. $x_3-3x_4=-8$

$x_1+5x_2-8x_3+3x_4=18$
$5x_1+14x_2-7x_3+4x_4=46$
$x_1+3x_2-2x_3-x_4=4$

15. $$\begin{cases} 2x_1+6x_2-5x_3+5x_4=6 \\ x_1+2x_2+3x_4=6 \\ 3x_1+5x_2-18x_3+x_4=4 \\ x_2-2x_3-4x_4=-4 \end{cases}$$

16. $$\begin{cases} 4x_1+10x_3-2x_4=10 \\ 3x_1+10x_2-9x_3+4x_4=35 \\ x_1+7x_3-2x_4=-5 \\ 2x_2-5x_3-x_4=-4 \end{cases}$$

17. $$\begin{cases} 2x_2-5x_3+5x_4=5 \\ x_1+4x_2-6x_3+5x_4=18 \\ -3x_1+x_2-24x_3+7x_4=9 \\ 2x_1+14x_3-4x_4=-2 \end{cases}$$

18. $$\begin{cases} 3x_1+4x_2+9x_3-2x_4=-4 \\ x_1+7x_3-2x_4=12 \\ 2x_2-6x_3+7x_4=0 \\ 2x_1-x_2+17x_3-7x_4=26 \end{cases}$$

19. $$\begin{cases} 3x_1+10x_2-5x_3-8x_4=-6 \\ 2x_1+3x_2+5x_3+x_4=-9 \\ x_3+x_4=1 \\ x_1+2x_2+2x_3-3x_4=-13 \end{cases}$$

20. $$\begin{cases} 5x_1+6x_2+17x_3-4x_4=22 \\ 3x_1-x_2+24x_3+43x_4=10 \\ x_1+2x_2+x_3=-2 \\ x_3+2x_4=5 \end{cases}$$

3.2. Розв’язати систему лінійних рівнянь за допомогою методу простих ітерацій або методу Зейделя з точністю 0,001:

1. $x_1=0{,}23x_1+0{,}04x_2+0{,}21x_3-0{,}18x_4+1{,}24$

$x_2=0{,}45x_1-0{,}23x_2+0{,}06x_3-0{,}88$
$x_3=0{,}26x_1+0{,}34x_2-0{,}11x_3+0{,}62$
$x_4=0{,}05x_1-0{,}26x_2+0{,}34x_3-0{,}12x_4-1{,}17$

2. $$\begin{cases} x_1=0{,}21x_1+0{,}12x_2-0{,}34x_3-0{,}16x_4-0{,}64 \\ x_2=0{,}34x_1-0{,}08x_2+0{,}17x_3-0{,}18x_4+1{,}42 \\ x_3=0{,}16x_1+0{,}34x_2+0{,}15x_3-0{,}31x_4-0{,}42 \\ x_4=0{,}12x_1-0{,}26x_2-0.08x_3+0{,}25x_4+0{,}83 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} x_1=0{,}32x_1-0{,}18x_2+0{,}02x_3+0{,}21x_4+1{,}83 \\ x_2=0{,}16x_1+0{,}12x_2-0{,}14x_3+0{,}27x_4-0{,}65 \\ x_3=0{,}37x_1+0{,}27x_2-0{,}02x_3-0{,}24x_4+2{,}23 \\ x_4=0{,}12x_1+0{,}21x_2+0{,}18x_3+0{,}25x_4-1{,}13 \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} x_1=0{,}42x_1-0{,}32x_2+0{,}03x_3+0{,}44 \\ x_2=0{,}11x_1-0{,}26x_2-0{,}36x_3+1{,}42 \\ x_3=0{,}12x_1+0{,}08x_2-0{,}14x_3-0{,}24x_4-0{,}83 \\ x_4=0{,}15x_1-0{,}35x_2-0{,}18x_3-1{,}42 \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} x_1=0{,}18x_1-0{,}34x_2-0{,}12x_3+0{,}15x_4-1{,}33 \\ x_2=0{,}11x_1+0{,}23x_2-0{,}015x_3+0{,}32x_4+0{,}84 \\ x_3=0{,}05x_1+0{,}12x_2+0{,}14x_3-0{,}18x_4-1{,}16 \\ x_4=0{,}12x_1+0{,}08x_2+0{,}06x_3+0{,}57 \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} x_1=0{,}13x_1+0{,}23x_2-0{,}44x_3-0{,}05x_4+2{,}13 \\ x_2=0{,}24x_1-0{,}31x_3+0{,}15x_4-0{,}18 \\ x_3=0{,}06x_1+0{,}15x_2-0{,}23x_4+1{,}44 \\ x_4=0{,}72x_1-0{,}08x_2-0{,}05x_3+2{,}42 \end{cases}$$

7. $$\begin{cases} x_1=0{,}17x_1+0{,}31x_2-0{,}18x_3+0{,}22x_4-1{,}71 \\ x_2=-0{,}21x_1+0{,}33x_3+0{,}22x_4+0{,}62 \\ x_3=0{,}32x_1-0{,}18x_2+0{,}05x_3-0{,}19x_4-0{,}89 \\ x_4=0{,}12x_1+0{,}28x_2-0{,}14x_3+0{,}94 \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} x_1=0{,}13x_1+0{,}27x_2-0{,}22x_3-0{,}18x_4+1{,}21 \\ x_2=-0{,}21x_1-0{,}45x_3+0{,}18x_4-0{,}33 \\ x_3=0{,}12x_1+0{,}13x_2-0{,}33x_3+0{,}18x_4-0{,}48 \\ x_4=0{,}33x_1-0{,}05x_2+0{,}06x_3-0{,}28x_4-0{,}17 \end{cases}$$

9. $\begin{cases} x_1=0{,}19x_1-0{,}07x_2+0{,}38x_3-0{,}21x_4-0{,}81 \\ x_2=-0{,}22x_1+0{,}08x_2+0{,}11x_3+0{,}33x_4-0{,}64 \\ x_3=0{,}51x_1-0{,}07x_2+0{,}09x_3-0{,}11x_4+1{,}71 \\ x_4=0{,}33x_1-0{,}41x_2-1{,}21 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1=0{,}22x_1-0{,}11x_3+0{,}31x_4+2{,}7 \\ x_2=0{,}38x_1-0{,}12x_3+0{,}22x_4-1{,}5 \\ x_3=0{,}11x_1+0{,}23x_2-0{,}51x_4+1{,}2 \\ x_4=0{,}17x_1-0{,}21x_2+0{,}31x_3-0{,}17 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1=0{,}07x_1-0{,}08x_2+0{,}11x_3-0{,}18x_4-0{,}51 \\ x_2=0{,}18x_1+0{,}52x_2+0{,}21x_4+1{,}17 \\ x_3=0{,}13x_1+0{,}31x_2-0{,}21x_4-1{,}02 \\ x_4=0{,}08x_1-0{,}33x_3+0{,}28x_4-0{,}28 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1=0{,}05x_1-0{,}06x_2-0{,}12x_3+0{,}14x_42{,}17 \\ x_2=0{,}04x_1-0{,}12x_2+0{,}08x_3+0{,}11x_4+1{,}4 \\ x_3=0{,}34x_1+0{,}08x_2-0{,}06x_3+0{,}14x_4-2{,}1 \\ x_4=0{,}11x_1+0{,}12x_2-0{,}03x_4-0{,}8 \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1=0{,}08x_1-0{,}03x_2-0{,}04x_4-1{,}2 \\ x_2=0{,}31x_1+0{,}27x_3-0{,}08x_4+0{,}81 \\ x_3=0{,}33x_1-0{,}07x_3+0{,}21x_4-0{,}92 \\ x_4=0{,}11x_1+0{,}03x_3+0{,}58x_4+0{,}17 \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1=0{,}12x_1-0{,}23x_2+0{,}25x_3-0{,}16x_4+1{,}24 \\ x_2=0{,}14x_1+0{,}34x_2-0{,}18x_3+0{,}24x_4-0{,}89 \\ x_3=0{,}33x_1+0{,}03x_2+0{,}16x_3+-0{,}32_4+1{,}15 \\ x_4=0{,}12x_1-0{,}05x_2+0{,}15x_4-0{,}57 \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1=0{,}23x_1-0{,}14x_2+0{,}06x_3-0{,}12x_4+1{,}21 \\ x_2=0{,}12x_1+0{,}32x_3-0{,}18x_4-0{,}72 \\ x_3=0{,}08x_1-0{,}12x_2+0{,}23x_3+0{,}32x_4-0{,}58 \\ x_4=0{,}25x_1+0{,}22x_2+0{,}14x_3+1{,}56 \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1=0{,}14x_1+0{,}23x_2+0{,}18x_3+0{,}17x_4-1{,}42 \\ x_2=0{,}12x_1-0{,}14x_2+0{,}08x_3+0{,}09x_4-0{,}83 \\ x_3=0{,}16x_1+0{,}24x_2-0{,}35x_4+1{,}21 \\ x_4=0{,}23x_1-0{,}08x_2+0{,}05x_3+0{,}25x_4+0{,}65 \end{cases}$

17.
$$\begin{cases} x_1=0{,}24x_1+0{,}21x_2+0{,}06x_3-0{,}34x_4+1{,}42 \\ x_2=0{,}05x_1+0{,}32x_2+0{,}12x_4-0{,}57 \\ x_3=0{,}35x_1-0{,}27x_2-0{,}05x_4+0{,}68 \\ x_4=0{,}12x_1-0{,}43x_2+0{,}04x_3-0{,}21x_4-2{,}14 \end{cases}$$

18.
$$\begin{cases} x_1=0{,}17x_1+0{,}27x_2-0{,}13x_3-0{,}11x_4-1{,}42 \\ x_2=0{,}13x_1-0{,}12x_2+0{,}09x_3-0{,}06x_4+0{,}48 \\ x_3=0{,}11x_1+0{,}05x_2+-0{,}02x_3+0{,}12x_4-2{,}34 \\ x_4=0{,}13x_1+0{,}18x_2+0{,}24x_3+0{,}43x_4+0{,}72 \end{cases}$$

19.
$$\begin{cases} x_1=0{,}15x_1+0{,}05x_2-0{,}08x_3+0{,}14x_4-0{,}48 \\ x_2=0{,}32x_1-0{,}13x_2-0{,}12x_3+0{,}11x_4+1{,}24 \\ x_3=0{,}21x_1-0{,}16x_2+0{,}36x_3-0{,}88 \\ x_4=9{,}17x_1+0{,}06x_2-0{,}08x_3+0{,}12x_4+1{,}15 \end{cases}$$

20.
$$\begin{cases} x_1=0{,}28x_1-0{,}17x_3+0{,}06x_4+0{,}21 \\ x_2=0{,}52x_1+0{,}12x_3+0{,}17x_4-1{,}17 \\ x_3=0{,}17x_1-0{,}18x_2+0{,}21x_3-0{,}81 \\ x_4=0{,}11x_1+0{,}22x_2+0{,}03x_3+0{,}05x_4+0{,}72 \end{cases}$$

Запитання до розділу 3

1. Місце розв'язання СЛР у науці і техніці.
2. Наведіть різні форми запису СЛР.
3. Сформулюйте процедуру розв'язання СЛР методом Гауса.
4. Сформулюйте процедуру розв'язання СЛР методом Жордана-Гауса.
5. Назвіть відміни методів Гауса та Жордана-Гауса.
6. Що уявляють собою прямий та зворотний ходи методу Гауса?
7. Назвіть можливі випадки розв'язання СЛР методом Гауса.
8. Яка особливість ітераційних методів розв'язання СЛР?
9. Що уявляє собою метод Ньютона розв’язання систем нелінійних рівнянь?

РОЗДІЛ 4. ЧИСЕЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ

Задачі, у яких потрібно обчислення визначених інтегралів, виникають майже в усіх галузях прикладної математики [1, 9-10]. Іноді вдається знайти аналітичну формулу, тобто виразити невизначений інтеграл у вигляді комбінацій алгебраїчних і трансцендентних функцій, визначений інтеграл при цьому обчислюється шляхом підстановки меж інтегрування за формулою Ньютона-Лейбніца

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{4.1}$$

де a і b - нижня і верхня межі інтегрування,

$f(x)$ - безупинна функція на відрізку $[a,b]$,

$F(x)$ - первісна для підінтегральної функції $f(x)$.

Зазначена формула в практичних задачах застосовується рідко, тому що тільки для вузького класу підінтегральних функцій можна точно знайти первісну.

Таким чином, до чисельного інтегрування звертаються в тих випадках, коли не можна через елементарні функції аналітично записати первісну інтеграла (4.1) або коли подібний запис має складний вигляд. При цьому звичайно заміняють $f(x)$ на таку апроксимуючу функцію $\varphi(x) \approx f(x)$, щоб інтеграл від неї легко обчислювався в елементарних функціях.

При наближеному обчисленні інтеграла використовується той факт, що інтеграл чисельно дорівнює площі фігури, обмеженої: знизу - віссю абсцис, з боків - прямими $x=a$ і $x=b$, зверху - графіком функції $y=f(x)$ (рис.4.1). Використання наближених методів припускає два способи розбивки вихідного інтервалу на менші:

1. Розбиття на підінтервали робиться заздалегідь, звичайно їхні розміри вибираються рівними.
2. Місце розташування і довжина підінтервалів визначається шляхом аналізу в процесі виконання алгоритму інтегрування.

Наведемо характеристику методів, що застосовуються для чисельного інтегрування.

Методи Ньютона-Котеса: засновані на поліноміальній апроксимації підінтегральної функції (для конкретної функції по декількох крапках підбирається поліном відповідного степеня).

Алгоритми методів прості і легко піддаються програмній реалізації (методи прямокутників, трапецій, Симпсона).

Сплайнові методи: базуються на апроксимації підінтегральної функції сплайнами, що представляють собою кусковий поліном.

Методи Гаусса-Кристоффеля: для досягнення більшої точності при апроксимації підінтегральної функції використовують нерівновіддалені вузли (крапки обчислення функції), обрані за алгоритмом, що забезпечує мінімальну похибку інтегрування для найбільш складних функцій.

Методи Монте-Карло: вузли вибираються за допомогою датчика випадкових чисел, відповідь носить імовірнісний характер.

Спеціальні методи: алгоритми розробляються на основі обліку особливостей конкретних підінтегральних функцій, что дозволяє істотно скоротити час і зменшити похибку обчислення інтегралів.

4.1. Метод прямокутників

Розіб'ємо відрізок $[a,b]$ на n рівних по довжині підінтервалів у такий спосіб:

$$a=x_0<x_1<...<x_n = b$$

Довжина кожного підінтервалу дорівнює: $h = (b-a)/n$, тобто $x_{i+1}=x_i + h$.

У кожнім підінтервалі замінимо площу отриманої фігури площею прямокутника, безумовно, з якоюсь похибкою (тобто апроксимуємо підінтегральну функцію поліномом нульового степеня)

$$S_i=f(\xi_i)h, \quad x_i< \xi_i<x_{i+1}$$

Тоді значення площі всіх прямокутників, що утворились, (і наближене значення інтеграла) буде дорівнювати:

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)/n*\left[f(\xi_0)+f(\xi_1)+...+f(\xi_n)\right]$$

У залежності від того, яку точку ми вибираємо в якості ξ_i, ми можемо одержати метод лівих прямокутників ($\xi_i=x_i$), метод правих прямокутників ($\xi_i=x_{i+1}$) (ілюстрація на рис.4.1), і метод середніх прямокутників ($\xi_i=(x_i+x_{i+1})/2$). З усіх перерахованих методів найменшу похибку має останній.

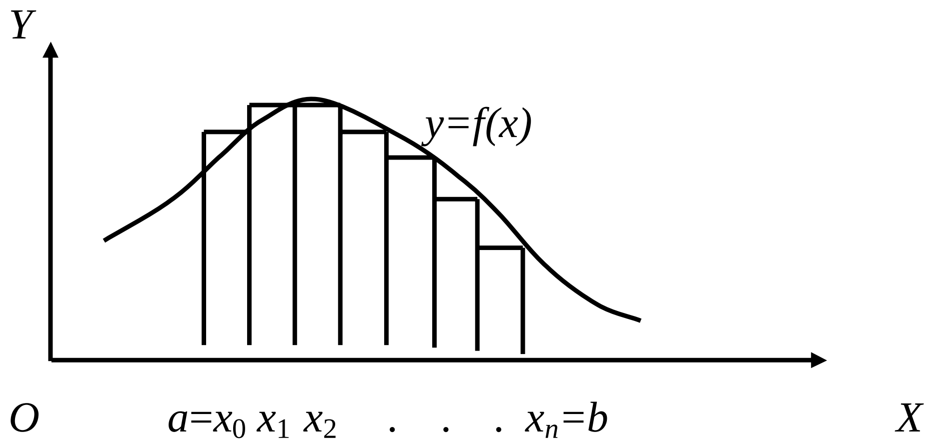


Рис. 4.1.Ілюстрація методу правих прямокутників.

Незалежно від обраного методу в процесі чисельного інтегрування похибка, викликана неточним описом функції *f(x)* більш простою функцією $\varphi(x)$, буде зменшуватись при збільшенні числа розбиття ***n*** за рахунок більш точної апроксимації підінтегральної функції (помилка методу або помилка обмежень), але при цьому буде зростати похибка за рахунок підсумовування часткових інтегралів, викликана кінцівкою розрядної сітки комп'ютера (так звана помилка округлення).

Сумарна функція помилки буде мати явний мінімум, тобто оптимальне число розбиття. Для всіх методів помилка округлення приблизно дорівнює $1/h$. Для методу середніх прямокутників помилка обмежень дорівнює

$$R \approx h^2/24\sum_{i=1}^{n} hf''(x_i) \approx h^2/24\int_{x_0}^{x_n} f''(x)dx$$

Степінь кроку h, що пропорційна величина помилки R, називається порядком методу інтегрування. Метод середніх прямокутників має другий порядок.

Приведена вище формула дозволяє оцінити порядок отриманої помилки до обчислення інтеграла, але для практичного застосування вона малопригодна. На практиці для оцінки помилок застосовується наступна формула (формула Рунге)

$$R \approx (I_h - I_{2h})/(2^p - 1)$$

де I_h , I_{2h} -значення інтеграла, обчислені відповідно з кроками h і $2h$,

p – порядок методу, що застосовується.

Ця формула дозволяє оцінити похибку у ході обчислювального процесу при реалізації того чи іншого методу.

4.2. Метод трапецій

Як і в попередньому випадку, розбиваємо відрізок $[a,b]$ на n рівних частин. На кожнім підінтервалі $[x_i, x_{i+1}]$ підінтегральну функцію $f(x)$ замінимо поліномом першого ступеня (рис.3.2), при цьому проведемо пряму через значення функції на межах підінтервалу. Таким чином, обчислення площі криволінійної фігури в підінтервалі замінюємо обчисленням площі трапеції, що дорівнює добутку висоти h на півсуму основ $(f(x_i)+f(x_{i+1}))2$.

Значення всього інтеграла при цьому дорівнює

$$I = \int_a^b f(x)dx \approx h/2*\left[f(x_0)+2f(x_1)+\ldots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right]$$

Для методу трапецій помилка обмеження дорівнює

$$R \approx h^2/12\int_{x_0}^{x_n} f''(x)dx$$

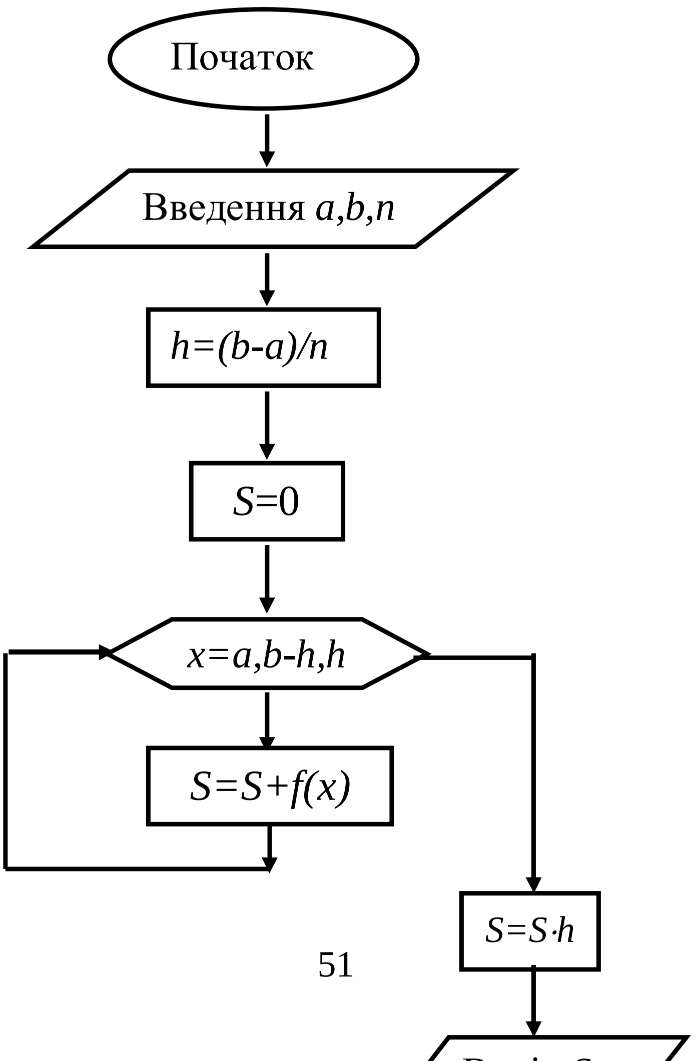


Рис.4.2. Алгоритм методу лівих прямокутників

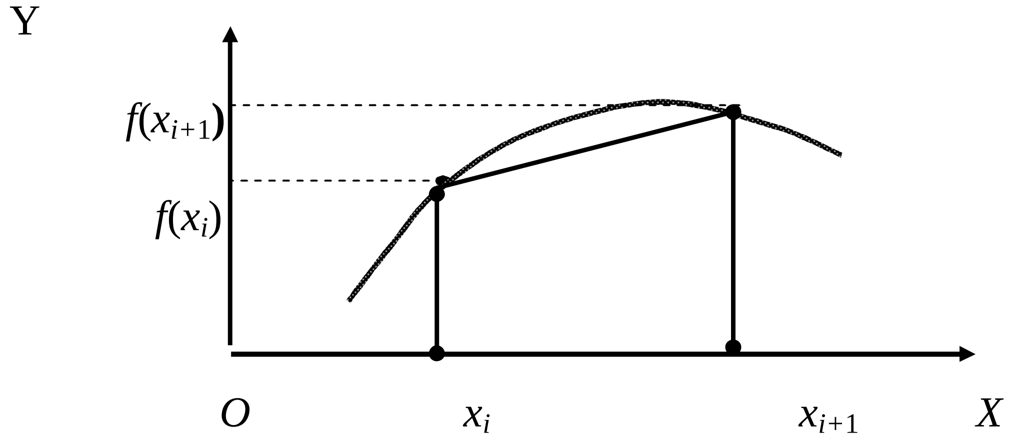


Рис.4.3. Ілюстрація методу трапецій

Приведена формула показує, що метод трапецій має більшу похибку, ніж метод середніх прямокутників, хоча апроксимація підінтегральної функції проводилася поліномом першого, а не нульового степеня. Якщо підінтегральна функція задана аналітично, то переважніше з методів другого порядку застосовувати метод середніх прямокутників внаслідок його меншої похибки.

4.3. Екстраполяційний перехід до межі

Для того, щоб зменшити помилку при чисельному інтегруванні, можна порівняно просто удосконалити метод трапецій. Нехай I_h - значення інтеграла, отримане по формулі трапецій із кроком h, а I_k - значення інтеграла з кроком k, тоді більш точне значення інтеграла може бути отримано по формулі Ричардсона

$$I = I_h + \frac{(I_h + I_k)}{(k^2 / h^2 - 1)}$$

Викладений метод називається екстраполяційним переходом до межі і має краще, ніж у методі трапецій, наближення. Якщо ж друга похідна $f''(x)$ постійна на $[a,b]$, то помилка обмежень у формулі Ричардсона дорівнює 0.

4.4. Метод Симпсона

Припустимо, що ми обчислили значення того самого інтеграла за формулою трапецій із кроками *h* і *k=2h*, тоді

$$I_h = h/2*(f(x_0)+2f(x_1)+...+f(x_n))$$

$$I_k = k/2*(f(x_0)+2f(x_1)+...+f(x_n))$$

При підстановці цих значень у формулу Ричардсона, одержимо наступний вираз для обчислення інтеграла:

$$I = h/3*(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+...+4f(x_{n-1})+f(x_n))$$

Метод обчислення визначених інтегралів по цій формулі має назву методу Симпсона, при цьому підінтегральна функція апроксимується параболою, що проходить через 3 точки (рис.4.4).

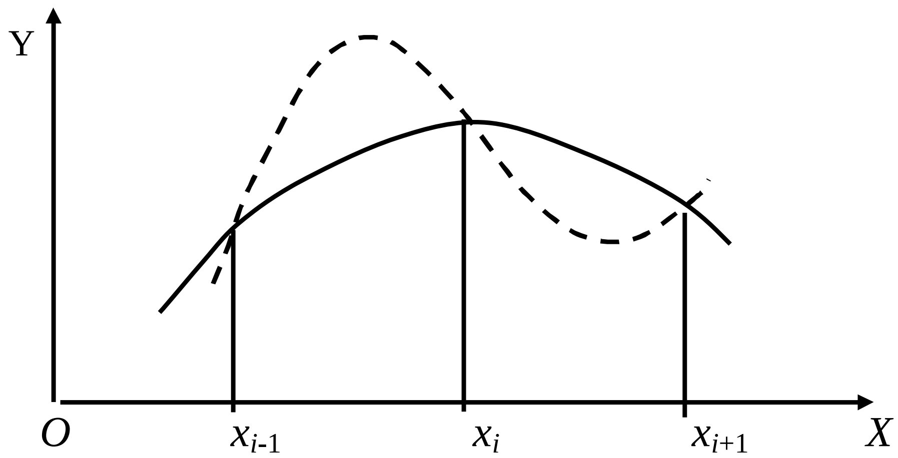


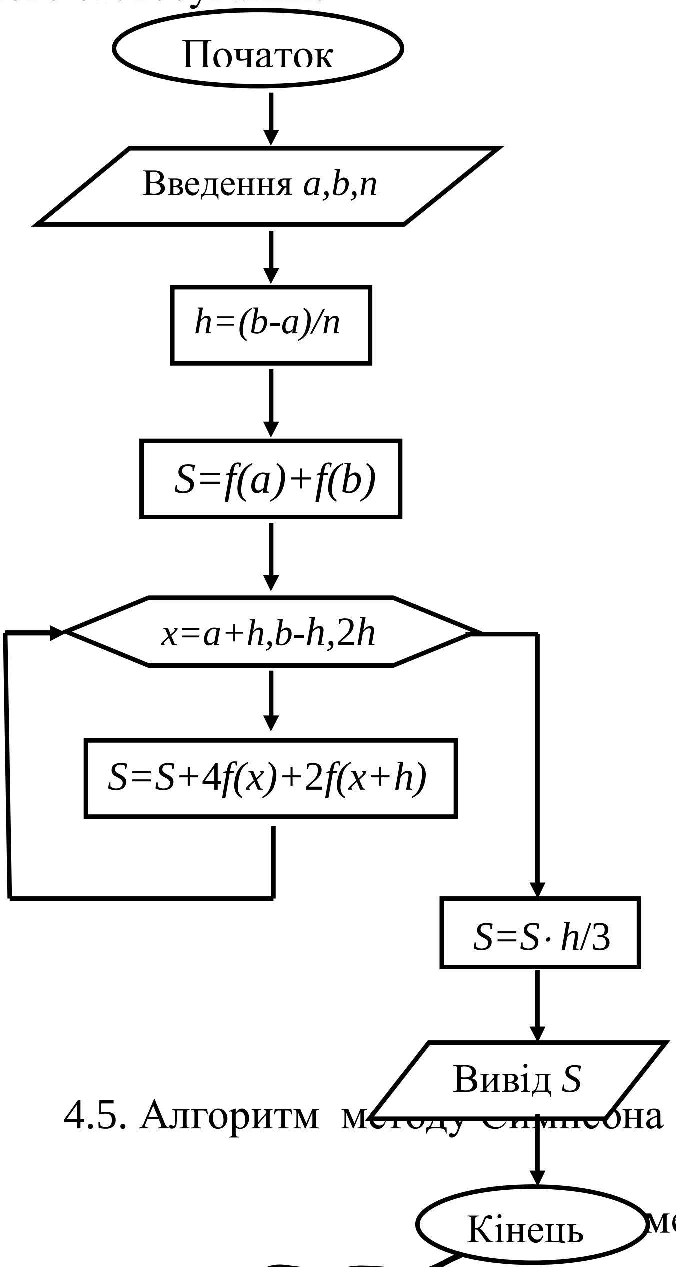
Рис.4.4. Ілюстрація методу Симпсона

Помилка обмеження для цього методу дорівнює [1,9]

$$R \approx \frac{h^4}{180}\int_{x_0}^{x_n} f^{(IV)}(x)dx$$

З формули випливає, що метод Симпсона має четвертий порядок точності, тобто його застосування дозволяє одержати гарні результати, якщо четверта похідна підінтегральної функції не занадто велика.

Для порівняльного аналізу застосовності різних методів обчислення визначеного інтеграла на рис.4.6 показані графіки залежності сумарної помилки Ω (помилка методу + обчислювальна помилка) від кількості розбивок ***n*** при використанні методів трапецій і Симпсона. Для прикладу в обох випадках обчислювався визначений інтеграл $I = \int_0^{\pi} \sin x dx = 1$. З малюнка видно, що для досягнення однієї і тієї ж точності по Симпсону потрібно приблизно вдвічі менше обчислень, ніж методом трапецій. Сумарна помилка в методі Симпсона має яскраво виражений мінімум, що в загальному характерно для його застосування.



4.5. Алгоритм методу Симпсона

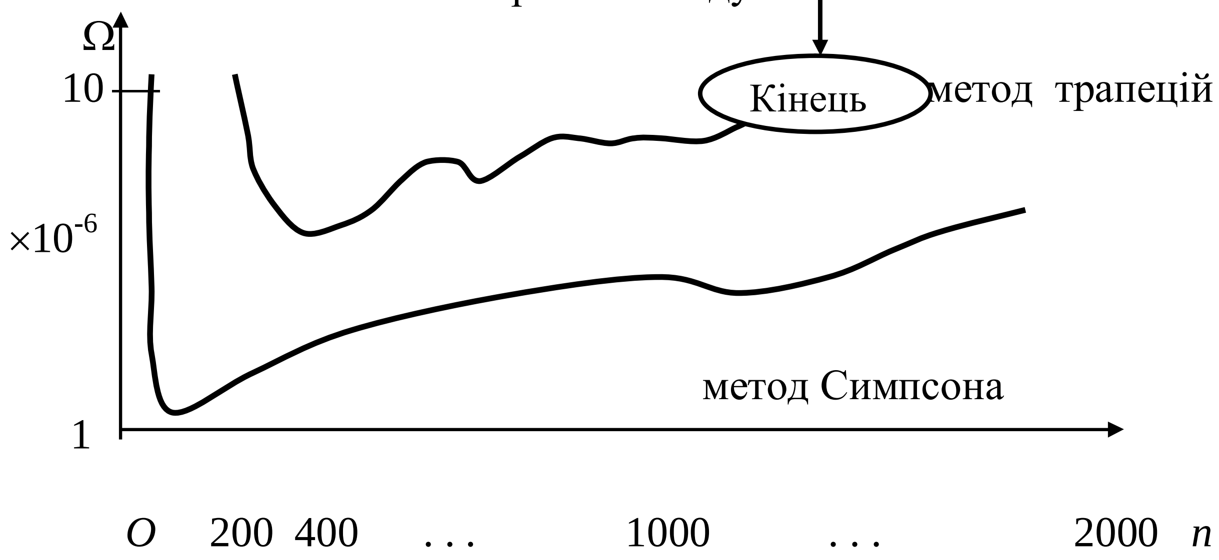


Рис. 4.6. Порівняльний графік сумарної помилки інтегрування

Приведемо приклад застосування методу середніх прямокутників для знаходження наступного інтеграла (кількість розбивок n=10)

$$I = \int_0^1 1/(1 + x^2)dx$$

Обчислення інтеграла будемо проводити в наступній таблиці:

i	x_i	ξ_i	$F(\xi_i)$
0	0	0.05	0.9995
1	0.1	0.15	0.9780
2	0.2	0.25	0.9412
3	0.3	0.35	0.8909
4	0.4	0.45	0.8316
5	0.5	0.55	0.7678
6	0.6	0.65	0.7029
7	0.7	0.75	0.6400
8	0.8	0.85	0.5806
9	0.9	0.95	0.5256
10	1.0		
Σ			7.8581

Тоді за формулою прямокутників значення шуканого визначеного інтеграла

$I \approx$ ((1 – 0)/10) · 7,8581 = 0,78581

Завдання до самостійного розв'язання

4.1. Обчислити інтеграл при n=10 методом, зазначеним викладачем, і оцінити отриману похибку [7]:

1. $\displaystyle\int_{-0,5}^{1,3} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}dx$ 2. $\displaystyle\int_{2}^{3,2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}dx$

3. $\displaystyle\int_{2,2}^{3,4} \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}dx$ 4. $\displaystyle\int_{1,2}^{2} \frac{x-0,5}{\sqrt{x^2-1}}dx$

5. $\displaystyle\int_{0,2}^{2,4} \frac{x^2+1}{\sqrt{x+2}}dx$ 6. $\displaystyle\int_{1}^{2,6} \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx$

7. $\int_{-0,4}^{1,6} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} dx$ 8. $\int_{-0,8}^{1,4} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}} dx$

9. $\int_{0,8}^{2} \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} dx$ 10. $\int_{2,4}^{3,2} \frac{x^2}{\sqrt{x+2}} dx$

11 $\int_{0,7}^{1,5} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}} dx$ 12. $\int_{0,2}^{2,5} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}} dx$

13. $\int_{2,2}^{3,4} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ 14. $\int_{0,4}^{1,6} \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}} dx$

15 $\int_{-0,4}^{1,8} \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} dx$ 16. $\int_{0,6}^{2} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx$

17. $\int_{0,2}^{1,11} \frac{2x+2,5}{\sqrt{x^2+1}} dx$ 18. $\int_{0,6}^{1,8} \frac{x^2}{\sqrt{x+1,7}} dx$

19. $\int_{2,2}^{2,8} \frac{4-x}{\sqrt{x^2+1}} dx$ 20. $\int_{0,8}^{1,5} \frac{x}{\sqrt{x^2+2,4}} dx$

Запитання до розділу 4

1. Які методи чисельного інтегрування використовують при розв'язанні задач на ЕОМ?
2. У чому є сутність задачі чисельного інтегрування?
3. Поясніть суть методу прямокутників чисельного інтегрування.
4. Які особливості методу трапецій?
5. Наведіть процедуру методу Сімпсона.
6. Наведіть характеристику методів чисельного інтегрування.
7. Які похибки мають методи чисельного інтегрування? Порівняйте їх.
8. Для чого використовують формулу Ричардсона?

РОЗДІЛ 5. РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

5.1. Постановка задачі

Звичайними диференціальними рівняннями (ДР) можна описати рух системи взаємодіючих матеріальних точок, задачі хімічної кінетики, електричних ланцюгів, опору матеріалів і т.і. Взагалі говорячи, будь-яка фізична ситуація, де розглядається степінь зміни однієї змінної стосовно іншій змінний, описується ДР. Конкретна прикладна задача може приводити до будь-якого порядку, чи до системи рівнянь будь-якого порядку. Однак звичайне ДР p-го порядку

$$y^{p}(x) = f(x, y, y', y'', y''',....y^{p-1})$$

за допомогою замін і підстановок можна звести до еквівалентної системи p рівнянь першого порядку [1, 3,8-11]

$$y_k^{'}(x) = y_{k+1}(x), \quad 0 < k < p-2$$

$$y_{p-1}^{'}(x) = f(x, y_0, y_1, \ldots, y_{p-1}), \quad y_0(x) = y(x)$$

Таким чином, довільну систему ДР будь-якого порядку можна звести до деякої еквівалентної системи рівнянь першого порядку. Тому надалі будемо розглядати ДР першого порядку. ДР в загальному випадку розділяються на звичайні ДР і ДР в частинних похідних, ми будемо розглядати перші [2,3,12]. У свою чергу, звичайні ДР поділяються на крайові задачі, задачі на власні значення і задачі Коші (з початковими умовами).

Ми будемо вирішувати задачу Коші в наступній постановці

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)\Big| y = y_0, x = x_0 \tag{5.1}$$

Методи розв'язання таких ДР розділяються на точні і чисельні. Точні методи дозволяють виразити розв'язання ДР через елементарні функції, тобто в аналітичній формі.

Чисельні методи – це алгоритми обчислення наближених значень шуканого розв'язання на деякій сітці значень аргументу x. Розв'язання при цьому виходить у вигляді таблиці. Взагалі розв'язанням ДР є кінцеве рівняння, що може бути виражене в аналітичній (у вигляді формули), у табличній чи графічній формах. Розв'язання ДР може бути загальним і частковим. Загальне розв'язання являє собою сімейство непрямих $y=y(x,C)$, рівняння яких відрізняються одним коефіцієнтом C, часткове розв'язання виходить із загального шляхом обліку початкових умов. Графічне зображення приватного розв'язання називають інтегральною кривою. Приклад: необхідно розв'язати рівняння: $dy/dx = y$, його розв'язання (загальне) $y = Ce^x$. Графічно це може бути представлено сімейством кривих:

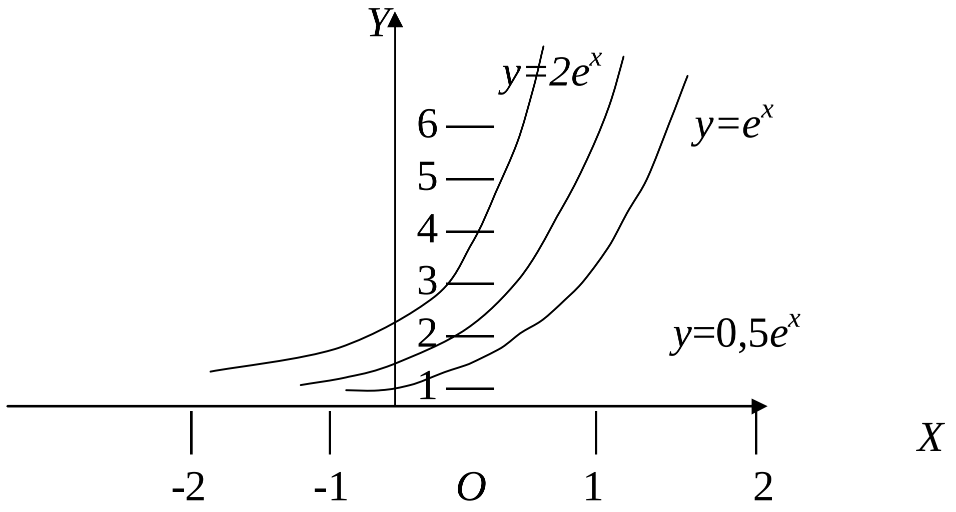


Рис.5.1. Ілюстрація загального і часткового рішень ДР

Якщо тепер врахувати початкові умови, наприклад, $y(0) = 1$, то в такий спосіб ми знайдемо часткове розв'язання $y = e^x$. Це розв'язання знайдене шляхом підстановки початкових умов у загальне розв'язання: $Ce^0 = 1$, і обчислення коефіцієнта $C = 1$.

Методи розв'язання ДР поділяють на <u>однокрокові</u> і <u>багатокрокові</u> [1]. В однокрокових методах використовується інформація про саму інтегральну криву в попередній точці. До таких методів відносяться метод <u>Ейлера</u>, метод <u>Рунге-Кута,</u> розв'язання рівнянь за допомогою рядів <u>Тейлора</u>. Недолік їх у тому, що важко оцінювати помилку, що допускається. У <u>багатокрокових</u> методах наступну точку інтегральної кривої можна одержати, не роблячи повторних обчислень функції, як в однокрокових методах, у них використовуються прийоми прогнозу і корекції. Труднощі реалізації таких методів полягають у необхідності одержання декількох початкових точок, у складності організації обчислювальної процедури, однак їхні переваги - у можливості оцінювання припущеної помилки.

Слід також зазначити, що чисельні методи застосовуються тільки до добре обумовлених задач. ДР називається погано обумовленим, якщо невеликі зміни початкових умов призводять до великої зміни в інтегральній кривій. Приклад погано обумовленого рівняння: $y'(x) = y - x$, на відрізку $0 < x < 100$.

Загальне розв'язання являє собою наступне рівняння: $y(x,C)=1+x+Ce^x$. При початковій умові $y(0)=1$ знайдемо значення інтегральної кривої в точці $x=100$, при цьому $C=0$, і $y(100)=101$. При малій же зміні початкової умови $y(0)=1{,}000001$ постійна $C=10^{-6}$ і $y(100)\approx 2{,}7\times 10^{37}$, тобто розв'язання змінилося дуже сильно. Для розв'язання таких ДР застосовуються спеціальні методи [1-3].

5.2. Застосування ряду Тейлора

Для визначення значення наступної точки інтегральної кривої (у h-околиці точки $\boldsymbol{x}$**)**, можна скористатися розкладанням функції в ряд Тейлора:

$$y(x+h) = y(x) + h\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \ldots$$

Чим більше членів ряду ми візьмемо для обчислення, тим точніше буде знайдена наступна точка інтегральної кривої. З практичної точки зору труднощі застосування цього підходу полягає в необхідності обчислення похідних високих порядків, тому він не одержав поширення, хоча є основою для інших методів.

5.3. Метод Ейлера

Необхідно розв'язати рівняння (5.1) на інтервалі $[x_0,\ b]$. Для цього задамося постійним кроком h і обчислюємо значення y_1, y_2, …, y_n у послідовності точок $x_i=x_0+ih$, $i=1,2,...,n$. У початковий момент відома тільки одна точка, через яку проходить крива, а саме x_0, y_0. Диференціальне рівняння задає нахил кривої в будь-якій точці як функцію від x та y. Тому, починаючи з початкової точки, обчислюємо нахил кривої і просуваємося на деяку малу відстань уздовж одержаної дотичної

$$x_i = x_{i-1} + h,\ \ y_i = y_{i-1} + hf(x_{i-1}, y_{i-1})$$

Повторюючи процедуру, одержуємо послідовність точок які є наближенням до шуканої функції. Якщо відкласти отримані результати на площині у вигляді відрізків прямих, то одержимо ламану Ейлера (рис.5.2), що є графічним розв'язанням вихідного ДР.

Схема методу Ейлера випливає з розкладання функції в ряд Тейлора, при використанні тільки першого його члена, що означає рух не по інтегральній кривій, а по дотичній до неї. Однак такий метод на практиці виявляється досить грубим, похибка на кожному кроці досить велика. При досить малому кроці h«1, похибка методу близька до h^2. Недолік методу Ейлера полягає у великій похибці, якщо ж для її зменшення вибирається менший крок h, то відбувається різке уповільнення обчислень. Крім того, він дуже часто виявляється нестійким - мала помилка збільшується із зростанням x.

Приклад: використовуючи метод Ейлера, чисельно розв'язати диференціальне рівняння $y' = \frac{xy}{2}$ на відрізку [0;0,9] із кроком h=0,1 і початковою умовою $y(0)=1$.

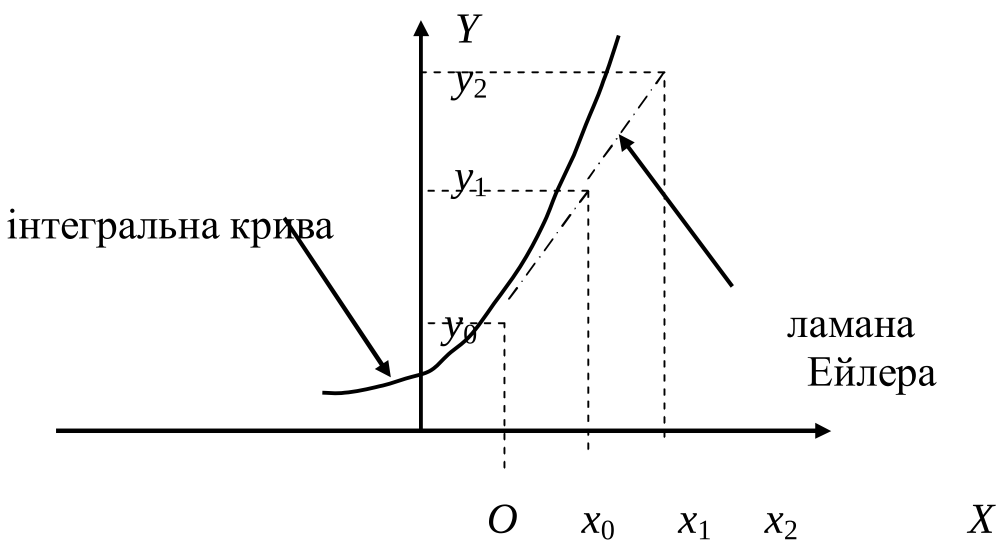
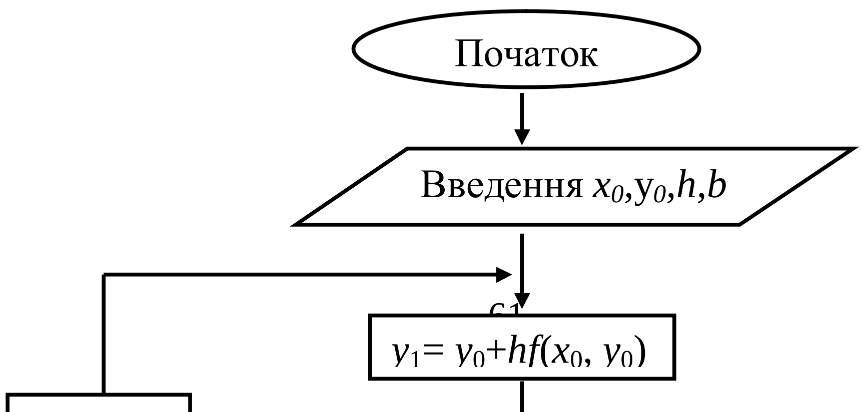


Рис.5.2. Розв'язання ДР методом Ейлера



Так

Рис. 5.3. Алгоритм методу Ейлера

Результати обчислень значень x_i і y_i, приведені в таблиці, є розв'язанням вихідного диференціального рівняння, відклавши їх на площині, одержимо ламану Ейлера.

I	x_i	y_i	$\Delta y_i=hf(x_{i-1},y_{i-1})$
0	0	1	0
1	0,1	1	0,005
2	0,2	1,005	0,0101
3	0,3	1,0151	0,0152
4	0,4	1,0303	0,0207
5	0,5	1,0509	0,0263
6	0,6	1,0772	0,0323
7	0,7	1,1095	0,0388
8	0,8	1,1483	0,0459
9	0,9	1,1942	0,0537

5.3. Метод Рунге-Кутта

В основі одержання обчислювальних схем методу Рунге-Кутта є розкладання функції *y(x)* у ряд Тейлора з наступним перетворенням відрізка ряду до вигляду, що не містить похідних. Обчислювальна схема буде схемою *m*-го порядку, якщо вона отримана з ряду Тейлора, що містить похідні функції *y(x)* до *m*-го порядку включно. Тому метод Ейлера є елементарною схемою методу Рунге-Кутта, однак у зв'язку з більш ранньою появою методу Ейлера за ним збережена колишня назва.

Таким чином, на кожному кроці алгоритму Рунге-Кутта, починаючи з початкової точки x_0, y_0 , обчислюються

$$x_{i+1} = x_i + h, \;\; y_{i+1} = y_i + \lambda, \text{ де } \lambda = 1/6*(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

а коефіцієнти k обчислюються по формулах (приклад схеми 4-го порядку [1-3])

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_1, y_i), \\ k_2 &= hf(x_i + h/2, y_i + k_{1/2}) \\ k_3 &= hf(x_i + h/2, y_i + k_{2/2}) \\ k_4 &= hf(x_i + h, y_i + k_3) \end{aligned}$$

При використанні такого методу четвертого порядку на кожному кроці алгоритму функцію приходиться обчислювати 4 рази, що значно більше, ніж у методі Ейлера. Але таке збільшення числа обчислень з лишком окупається більшою точністю розв’язання. Перевагами методу Рунге-Кутта є простота обчислень (у ньому немає необхідності обчислення похідних), досить висока точність і можливість вести обчислення зі змінним кроком (там, де функція швидко міняється, неважко зменшити крок, і збільшити його в зворотному випадку). Перевагою є також використання інформації тільки про чергову крапку (не використовуються дані про раніше знайдені точки). До недоліків методу необхідно віднести те, що на кожнім кроці приходиться обчислювати функцію *f(x,y)* у декількох точках, а також труднощі при одержанні оцінки помилки обмеження. Похибка викладеного методу приблизно дорівнює h^5 [9]. При виборі кроку h у методі Рунге-Кутта можна як крок використовувати критерій [3]

$$q = \left| \frac{k_2 - k_3}{k_1 - k_2} \right|.$$

Якщо $q<10^{-2}$, то крок обрано правильно, у противному випадку крок потрібно зменшити.

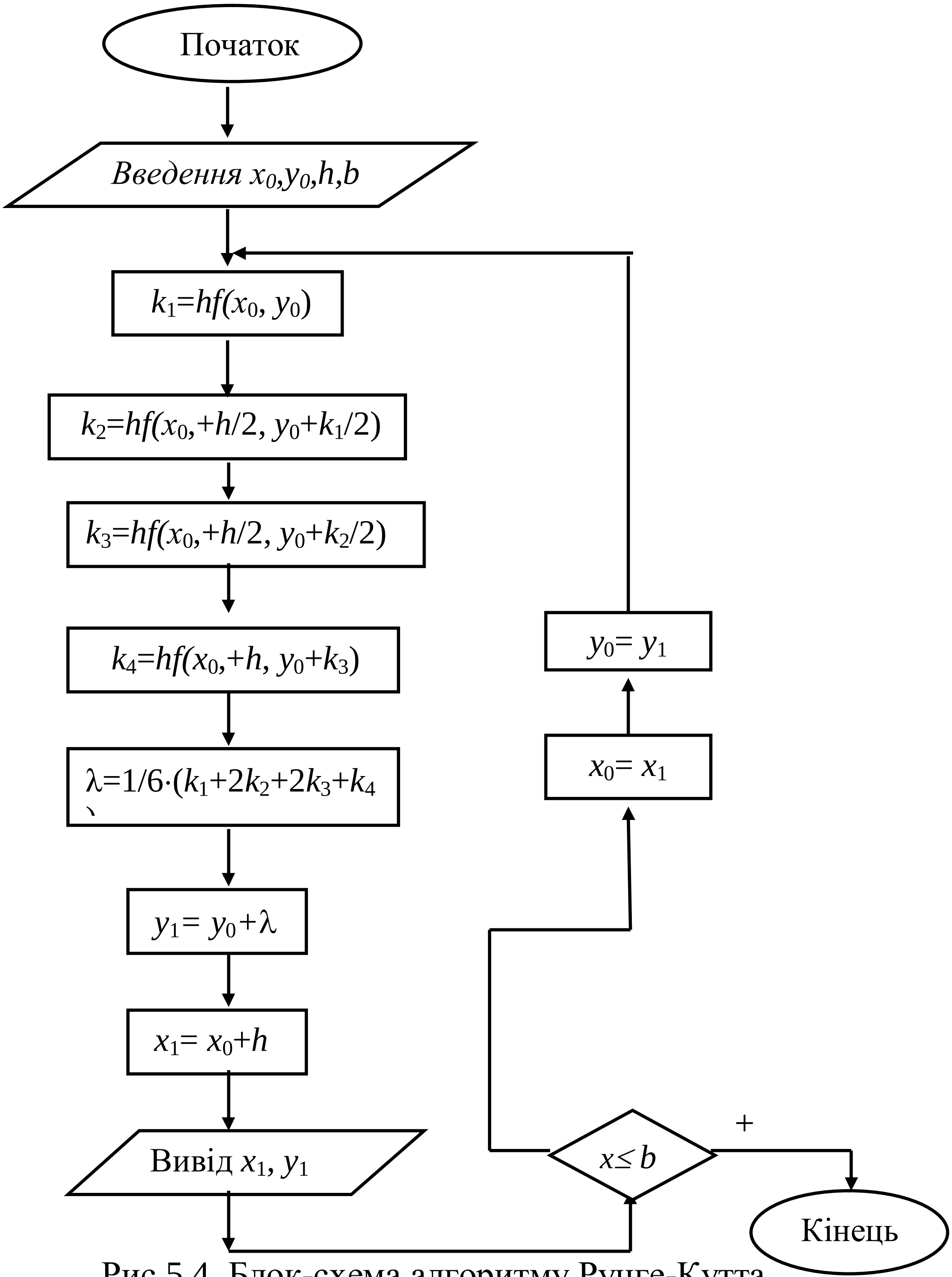


Рис.5.4. Блок-схема алгоритму Рунге-Кутта

Завдання до самостійного розв'язання

5.1. Розв’язати задачу Коші методами Ейлера і Рунге-Кутта на відрізку [0,2;1,2] із кроком h=0,1 при початковій умові y(0,2)=0,25:

1. $y'=0{,}133(x^2+sin2x)+0{,}872y$
2. $y'=0{,}215(x^2+cos1{,}5x)+1{,}283y$
3. $y'=0{,}158(x^2+sin0{,}8x)+1{,}164y$
4. $y'=0{,}173(x^2+cos0{,}7x)+0{,}754y$
5. $y'=0{,}221(x^2+sin1{,}2x)+0{,}452y$
6. $y'=0{,}163(x^2+cos0{,}4x)+0{,}635y$
7. $y'=0{,}218(x^2+sin1{,}6x)+0{,}718y$
8. $y'=0{,}145(x^2+cos0{,}5x)+0{,}842y$
9. $y'=0{,}213(x^2+sin1{,}8x)+0{,}368y$
10. $y'=0{,}127(x^2+cos0{,}6x)+0{,}573y$
11. $y'=0{,}232(x^2+sin1{,}4x)+1{,}453y$
12. $y'=0{,}417(x^2+cos0{,}8x)+0{,}972y$
13. $y'=0{,}324(x^2+sin1{,}5x)+1{,}612y$
14. $y'=0{,}263(x^2+cos1{,}2x)+0{,}453y$
15. $y'=0{,}372(x^2+sin0{,}7x)+0{,}758y$
16. $y'=0{,}343(x^2+cos0{,}4x)+1{,}315y$
17. $y'=0{,}276(x^2+sin1{,}6x)+0{,}988y$
18. $y'=0{,}173(x^2+cos0{,}6x)+1{,}534y$
19. $y'=0{,}258(x^2+sin0{,}4x)+0{,}724y$
20. $y'=0{,}317(x^2+cos1{,}4x)+1.344y$

Запитання до розділу 5

1. Чому виникає необхідність застосування наближених методів розв'язання диференціальних рівнянь?
2. Сформулюйте задачу Коші.
3. Назвіть класифікацію диференціальних рівнянь.
4. Які методи розв'язання диференціальних рівнянь Вам відомі?
5. Що спільного у методах Ейлера та Рунге-Кутта?
6. Чим відрізняються методи Ейлера та Рунге-Кутта?
7. Які похибки методів Ейлера та Рунге-Кутта?
8. Наведіть БСА методу Ейлера.
9. Наведіть БСА методу Рунге-Кутта.
10. У чому ідея методу Ейлера?
11. У чому ідея методу Рунге-Кутта?

РОЗДІЛ 6. АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ. МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Нехай у результаті n експериментів отримано ряд значень, які необхідно зв'язати аналітично:

x_i	x_1	x_2	x_3	. . . . .	x_n
y_i	y_1	y_2	y_3	. . .	y_n

Необхідно побудувати математичну модель у вигляді функціональної залежності $y=f(x)$, яка б забезпечила найменше відхилення від експериментальних даних.

6.1. Метод найменших квадратів

Для побудови кривої, що приблизно відповідає вихідній інформації, необхідно виробити критерій. Назвемо <u>відхиленням</u> експериментальної крапки різницю між експериментальною ординатою $\boldsymbol{y_i}$ і тієї, котра обчислена з теоретично знайденої функціональної залежності $y_i^0=\varphi(x_i)$ (на рис.6.1 відхилення показані суцільними лініями) [1,7-9,11]. Як сумарний критерій, що визначає отримане загальне відхилення, можна прийняти формулу квадратів відхилень:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_i^0)^2$$

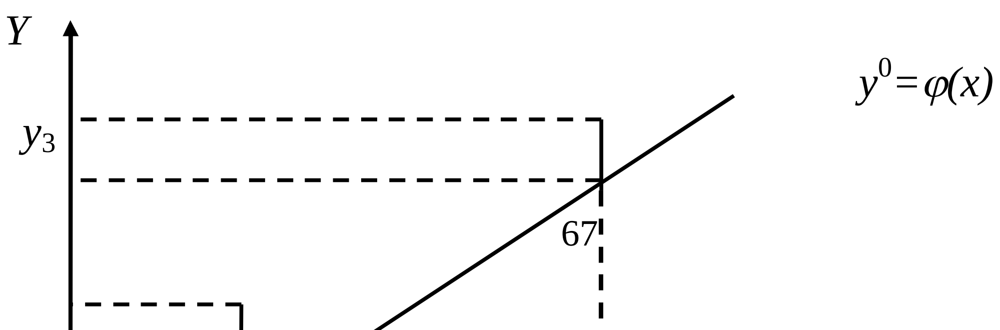
Нехай функціональна залежність між X и Y має вигляд:

$$y^0 = \varphi(x,a,b,c...),$$

де a, b, c**,** ... - невідомі параметри, які необхідно підібрати. Формула, що є результатом підбора значень параметрів і яка зв'язує змінні X і Y, називається <u>емпіричною</u> формулою. Вираз

$$S(a,b,c,...) = \sum_{i=1}^{n}\left[y_i - \varphi(x_i,a,b,c,...)\right]^2 \qquad (6.1)$$

називається квадратичним відхиленням емпіричної формули від експериментальних даних.



y_3^0

y_1
y_2^0
y_2
y_1^0

O x_1 x_2 x_3 X

Рис. 6.1. Ілюстрація відхилень між y_i та $y_i^0=\varphi\ (x_i)$

У методі найменших квадратів параметри *a*, *b*, *c*,… підбираються таким чином, щоб мінімізувати функцію (6.1). Для цього можна дорівняти нулю частинні похідні від функції *S* (6.1) по невідомих параметрах:

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0; \qquad \frac{\partial S}{\partial b} = 0; \qquad \frac{\partial S}{\partial c} = 0; \tag{6.2}$$

У розгорнутому вигляді система (6.2) записується так:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} 2[y_i - \varphi(x_i, a, b, c, ...) * (-(\partial\varphi(x_i, a, b, c, ...)) / \partial a) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} 2[y_i - \varphi(x_i, a, b, c, ...) * (-(\partial\varphi(x_i, a, b, c, ...)) / \partial b) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{6.3}$$

В отриманій системі число рівнянь дорівнює числу невідомих параметрів. Вирішивши систему будь-яким відомим методом, знайдемо значення параметрів *a*, *b*, *c*, … Однак не можна забувати про труднощі при реалізації методу найменших квадратів, що можуть бути викликані наступними причинами:

1. Система (6.3) може бути несумісна.
2. Система може вийти надзвичайно важкою для розв’язання.
3. Система може мати багато рішень, необхідно додатково з'ясовувати, які з них відповідають мінімуму функції (6.1).

6.2. Випадок лінійної емпіричної формули

Припустимо, что емпірична (теоретична) формула має вигляд $y^0=\varphi(x)=ax+b$. Тоді формула сумарного відхилення представляється так

$$S(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-a*x_i-b)^2\to\min$$

Дорівнюючи до нуля частинні похідні від функції S по a і b, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases}\partial S/\partial a=\sum_{i=1}^{n}2(y_i-ax_i-b)(-1)=0\\ \partial S/\partial b=\sum_{i=1}^{n}2(y_i-ax_i-b)(-1)=0\end{cases}\quad\text{або}\quad\begin{cases}a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\\ a\sum_{i=1}^{n}x+bn=\sum_{i=1}^{n}y_i\end{cases}$$

В остаточному вигляді невідомі параметри знаходяться з виразів

$$\begin{cases}a=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i-n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{\left[\sum_{i=1}^{n}x_i\right]^2-n\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\\ b=1/n\left[\sum_{i=1}^{n}y_i-a\sum_{i=1}^{n}x_i\right]\end{cases}$$

6.3. Приклад апроксимації лінійної емпіричної формули

Нехай для n=5 дослідів отримана наступна таблиця

Y	5,5	6,3	7,2	8	8,6
X	2	4	6	8	10

Припустимо, що емпірична формула має лінійний вигляд, і скористаємося наведеними вище формулами, тоді

$\sum_{i=1}^{n}x_i=30$; $\sum_{i=1}^{n}y_i=35{,}6$; $\sum_{i=1}^{n}x_i\,y_i=229{,}4$; $\sum_{i=1}^{n}x_i^2=220$;

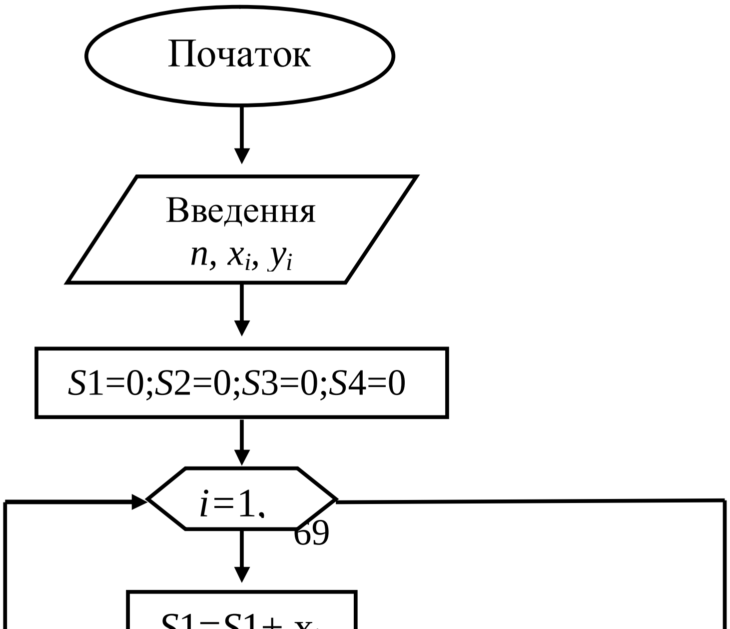


Рис.6.2. Блок-схема алгоритму найменших квадратів у випадку лінійної емпіричної формули

Знаходимо невідомі параметри: a=(30·35,6-5·229,4)/(30^2-5·220)=-79/(-
00)=0,395,
b=1/5·(35,6-0,395·30)=23,75/5=4,75.

Емпірична формула має вигляд: $\varphi(x) = 0{,}395\, x + 4{,}75$.
Прорахувавши значення функції у вихідних точках, одержимо:

x	2	4	6	8	10
y	5,5	6,3	7,2	8	8,6
$\varphi(x)$	5,54	6,33	7,12	7,91	8,7

6.4. Лінеаризація емпіричної формули

Подібно наведеному прикладу, можна знайти формули для обчислення параметрів будь-якої емпіричної формули, однак система (6.3) може виявитися важкою для розв’язання. Один із способів відходу від виникаючих труднощів складається в "лінеаризації" емпіричної формули, тобто приведенні її до лінійного вигляду. Розрахунки по лінійному випадку (по приведеній блок-схемі) настільки прості і розповсюджені, що в деяких алгоритмічних мовах лінійна апроксимація представлена у вигляді оператора підпрограми (а в деяких комп'ютерах реалізована і мікропрограмно).

Приклад лінеаризації:
1. Нехай $y° = bx^a$. Прологарифмуємо цей вираз

$$ln\ y = a\ ln\ x + ln\ b$$

Позначимо $V = ln\ y$, $U = ln\ x$, $\beta = ln\ b$, тоді попередня формула матиме вигляд

$$V = a\ U + \beta$$

Тут V лінійно залежить від U. Заміняючи вихідні дані y_i і x_i на $V_i = ln\ y_i$ і $U_i = ln\ x_i$ і застосовуючи отримані вище формули для лінійного випадку, знайдемо a і $b = e^{\beta}$, тобто невідомі параметри вихідної системи.

Для найбільш розповсюджених формул, що застосовуються для апроксимації, розроблені спеціальні таблиці лінеаризації, що дозволяють відмовитися від громіздких математичних висновків по методу найменших квадратів (знаходження частинних похідних, розв'язання систем і т. і.).

У загальному випадку нехай лінійна емпірична формула має вигляд $y' = a' \cdot x' + b'$. Тоді наведемо деякі перетворення, що зводять нелінійні формули до лінійних:

Формула	x'	y'	a	b
$a + bx$	x	y	a'	b'
$1/(a + bx)$	x	$1/y$	a'	b'
$a + b/x$	$1/x$	y	a'	b'
$x/(a + bx)$	x	x/y	a'	b'
$a \cdot b^x$	x	$lg\ y$	$10a'$	$10b'$
$a \cdot e^{b/x}$	x	$ln\ y$	$e^{a'}$	b'
$a + b\ lg\ x$	$lg\ x$	y	a'	b'
$a + bx^n$	x^n	y	a'	b'
$a/(x+b)$	x	$1/y$	$1/b'$	a'/b'

Користатися цією таблицею можна в такий спосіб: вибирається визначена емпірична формула, таблиця вихідних даних перераховується відповідно до 2-ї і 3-ї колонками (тобто x_i'=…, y_i'=…), потім знаходяться параметри a' і b' лінійної формули і здійснюється зворотний перехід до 4-ї та 5-ї колонок.

6.5. Приклад апроксимації вихідних даних різними емпіричними формулами

Нехай у результаті деякого досліду отримані наступні значення експериментальних даних (n =10)

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	2,25	5,38	6,97	8,05	8,72	9,28	9.63	9,95	10,15	10,32

Застосуємо квадратичну емпіричну формулу $y = ax^2 + bx + c$. Після обчислення параметрів a, b, c одержимо y = -0,118x^2 + 2,030x + 1,536.

Для оцінки точності отриманої апроксимації можна застосовувати середньоквадратичну похибку (чим менше ця величина, тим точніше проведено апроксимацію)

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i^0 - y_i)^2}{n}}$$

Для обраної квадратичної формули δ = 0,294. Якщо для апроксимації в даному прикладі обрана формула $y = ae^{bx}$, то при лінеаризації даної формули одержимо $y = 4{,}207e^{0{,}11x}$ і похибка δ = 1,315. Вибравши формулу типу $y = ax^b$, після лінеаризації та обчислень одержимо $y = 3{,}531x^{0{,}516}$, при цьому похибка δ = 0,681. Звідси випливає, що найкраще вихідні дані апроксимуються квадратичною емпіричною формулою.

Завдання до самостійної роботи

Апроксимувати результати експерименту для n=7:

N		Вихідні масиви даних						
1	x	0	1	2	3	4	5	6
	y	0,2	0,6	1	1,2	1,4	1,6	1,7
2	x	-2	-1	0	1	2	3	4

	y	3,1	2,8	2,5	2	1,7	2,2	2,9
3	*x*	-6	-4	-3	-1	0	1	3
	y	2,5	1,2	0,4	-0,5	-1,3	-1,2	1,1
4	*x*	0	1	2	3	4	5	6
	y	0,5	0,8	1,3	1,7	1,9	2,5	2,2
5	*x*	-3	-2	1	0	1	2	3
	y	1,7	1,2	1	0,5	-0,2	0,5	0,8
6	*x*	-1	0	1	2	3	4	5
	y	3,1	2,8	2,4	2,1	1,9	2,2	2,6
7	*x*	1	2	3	4	5	6	7
	y	1	1,7	3,3	5,1	4,6	3	1,9
8	*x*	-2	-1	0	1	2	3	4
	y	1,8	1,2	0,2	-0,9	-1,9	0,4	2,4
9	*x*	0	1	2	3	4	5	6
	y	1,7	1,9	2,4	2,7	3,1	3,1	2,5
10	*x*	-1	0	1	2	3	4	5
	y	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,5	2,4
11	*x*	-4	-3	-1	0	1	3	4
	y	-1,8	-1,5	-1,1	-1,3	-1,4	-1,6	-1,9
12	*x*	0	1	2	3	4	5	6
	y	3,1	3,3	3,4	3,7	3,2	2,9	1,1
13	*x*	-2	-1	0	1	2	3	4
	y	-0,3	0,5	0,8	1,8	0,8	0,4	0
14	*x*	0	1	2	3	4	5	6
	y	1,8	1,9	2,3	2,5	2,8	3,1	2,5
15	*x*	-2	-1	0	1	2	3	4
	y	0,3	-0,5	-1,5	-0,5	-0,1	0,2	1,2
16	*x*	-3	-2	-1	0	1	2	3
	y	4,8	4,2	3,7	3,6	3,3	3,1	2,8
17	*x*	0	1	2	3	4	5	6
	y	3,5	3,2	2,9	2,1	3	3,2	3,5
18	*x*	-1	0	1	2	3	4	5
	y	-6,1	-5,8	-5,2	-4,8	-4,5	-5	-5,2
19	*x*	-2	-1	0	1	2	3	4
	y	1,1	0,2	-0,4	-1	-1,1	-1	-0,2
20	*x*	0	1	2	3	4	5	6

	y	-1,2	-0,5	-0,2	0,3	0,7	1,1	1,4

Запитання до розділу 5

1. Що таке апроксимація?
2. Виведіть систему рівнянь для визначення коефіцієнтів апроксимуючого поліному у методі найменших квадратів.
3. Наведіть приклад апроксимації лінійної емпіричної формули.
4. Як обчислюється точність одержаної апроксимації?
5. Що називається відхиленням експериментальної точки?

РОЗДІЛ 7. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

7.1. Постановка задачі і класифікація методів

Для дослідження багатьох інженерно-технічних і економічних процесів спочатку складають математичну модель у вигляді математичної задачі, а потім використовують чисельні методи для її розв'язання. Дуже часто це призводить до необхідності вирішувати задачу нелінійного програмування (НЛП), що складається в знаходженні таких значень змінних $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, при яких досягається мінімум цільової функції

$$f(x_1, x_2 \ldots, x_n) \to \min \tag{7.1}$$

і виконуються обмеження

$$\begin{aligned} &g_1(x_1, x_2 \ldots, x_n) \le 0 \\ &g_2(x_1, x_2 \ldots, x_n) \le 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &g_m(x_1, x_2 \ldots, x_n) \le 0 \end{aligned} \tag{7.2}$$

де хоча б одна функція f, g_1, g_2,… - нелінійна (можливі також обмеження у вигляді рівностей). На змінні x можуть бути накладені обмеження незаперечності. Якщо всі ці функції лінійні, то ми маємо справу із задачею лінійного програмування (ЛП), для розв'язання якої розроблено спеціальні методи [12-15]. Функція (7.1) називається цільовою. Вектор x називається припустимим, якщо він задовольняє обмеженням (7.2). Вектор x називається оптимальним розв'язанням задачі (7.1) - (7.2), якщо x є припустимим і $f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ досягає мінімуму. Задача оптимізації може бути поставлена і на пошук максимуму цільової функції

$$F(x_1, x_2 \ldots, x_n) \to \max$$

Але вона легко може бути зведена до задачі (7.1) , тому надалі будемо розглядати лише задачу мінімізації. Термін "оптимальний" має латинське походження і означає "найкращий, найбільш сприятливий". З математичної точки зору оптимізаційна задача - це задача, у якій потрібно знайти оптимум (максимум або мінімум) деякої величини при виконанні яких-небудь умов [6]. Змінні ($x_1,x_2, \ldots, x_n$) можуть бути конструктивними параметрами, установками регулятора, показниками вимірювальних приладів і т.і., тоді як цільова функція може уявляти собою вартість, вагу, річний прибуток тощо, а обмеження - технічні вимоги, умови роботи, пропускну здатність.

Останнім часом оптимізаційні задачі привертають особливу увагу прикладних математиків. Розробляються нові чисельні методи оптимізації, добре пристосовані для реалізації їх за допомогою комп'ютерів. Це викликано, насамперед, потребами життя, практики, постановками задач нових типів. На перший план виходять задачі, пов'язані з ощадливою витратою металу, енергії, збільшенням прибутку і т.і., математичним образом яких і є оптимізаційні задачі. Розробкою методів розв’язання подібних задач займається галузь математики, що зветься математичним програмуванням. Однак дотепер загальних методів розв’язання довільної задачі НЛП не існує. Для різних класів задач, пов'язаних із визначеними видами цільової функції і структурою обмежень, розроблено різні класи методів:

- методи лінійного програмування;
- методи динамічного програмування (коли обмеження включають у себе, як параметр, час);
- методи опуклого програмування (коли цільова функція і функції обмежень опуклі);
- методи стохастичного програмування (коли в задачі є імовірнісний параметр);
- методи геометричного програмування;
- комбінаторні та евристичні методи.

Умовно класифікацію оптимізаційних задач (і пов'язаних з ними методів) можна провести в такий спосіб:

а) у залежності від вигляду функції:

-лінійні і нелінійні;

-опуклі і неопуклі;

б) по використанню похідних у розв’язанні:

- не використовують похідні (метод покоординатного спуска);
- що використовують 1-у похідну (градієнтний метод);
- що використовують 2-у похідну (метод Ньютона);

в) у залежності від наявності обмежень:

- задачі з обмеженнями;
- задачі без обмежень;

г) у залежності від кількості змінних:

- з однією змінної;
- з багатьма змінними;

д) у залежності від кількості екстремумів:
- одноекстремальні;
- багатоекстремальні.

Геометрично цільова функція (7.1) визначає собою поверхню, а обмеження (7.2) - припустима множина розв'язків <u>*n*-мірного Евклідова</u> простору (припустиму область). Розв'язання задачі нелінійного програмування зводиться до знаходження точки з припустимої множини, у якій *f(x)* досягає екстремуму (мінімуму). Розв'язання може знаходитись або усередині області, або на її межі. Наступна теорема дає необхідні і достатні умови існування розв'язання задачі [1,6].

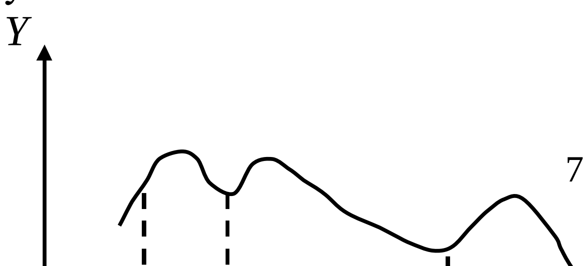
Теорема. Якщо цільова функція безупинна, а припустима множина замкнута, непорожня та обмежена, то розв'язання задачі (7.1) - (7.2) існує.

7.2. Мінімізація функції однієї змінної

Знаходження мінімуму функції однієї змінної є важливою самостійною задачею. Крім того, мінімізація функції однієї змінної складає істотну частину різних процедур мінімізації функції декількох змінних.

Точка x_0 називається точкою локального мінімуму функції $y= f(x)$ на $[a,b]$, якщо $x_0 \in [a,b]$ і існує таке $\delta > 0$, що при усіх $x \in [a,b]$, $|x-x_0| < \delta$, виконується нерівність $f(x_0) \leq f(x)$ (рис.7.1).

Точка x^* називається точкою глобального мінімуму функції $f(x)$ на $[a,b]$, якщо при всіх $x \in [a, b]$ виконується нерівність $f(x^*) \leq f(x)$. Кожен глобальний мінімум є локальним. Зворотне невірно. Завдання мінімізації полягає у відшуканні точки глобального мінімуму x^* функції $f(x)$ на $[a, b]$ і обчисленні $f(x^*)$. Класичний метод розв'язання задачі мінімізації припускає, що функція $f(x)$ безупинна і диференційована. Тоді на $[a, b]$ існує точка глобального мінімуму, що або збігається з одним з кінців відрізка, або є внутрішньою точкою, у якій $f'(x)=0$. Тому для відшукання точки глобального мінімуму потрібно знайти всі корені рівняння $f'(x)=0$, що належать відрізку $[a,b]$, обчислити значення функції в цих точках, а також $f(a)$ і $f(b)$. Та точка, у якій досягається мінімум з усіх обчислених значень, і є шуканою точкою глобального мінімуму функції.



x_0, x_1 - точки локального мінімуму

x^* - точка глобального мінімуму

O a x_0 x_1 x^* b X

Рис. 7.1. Ілюстрація глобального і локального мінімумів.

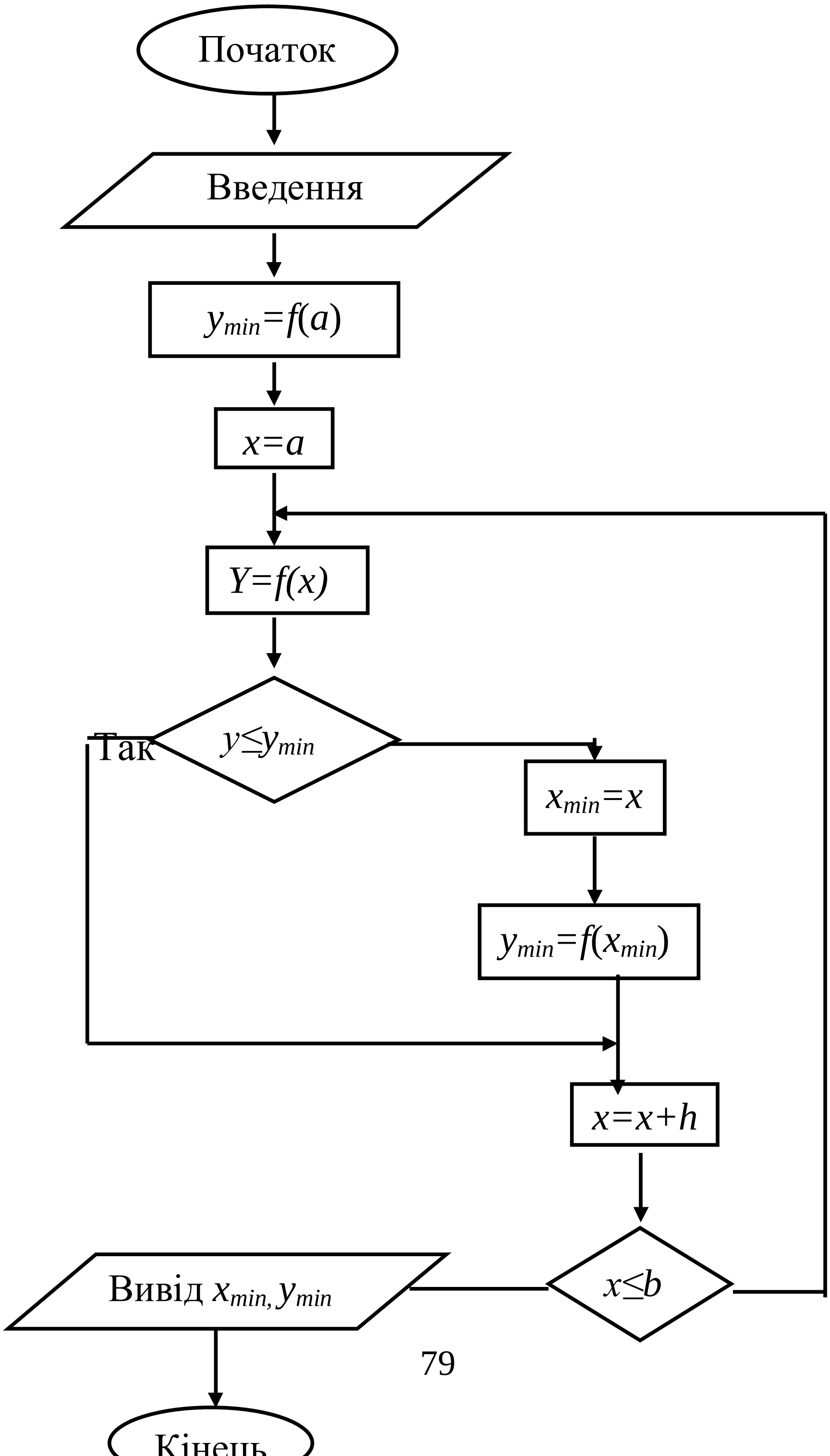
Описаний метод має обмежене застосування, тому що не всі функції, що зустрічаються на практиці є диференційованими. Крім того, розв'язання рівняння $f'(x)=0$ може виявитись нелегкою задачею. На практиці частіше використовують наближені методи.

7.3. Методи рівномірної сітки (повного перебору) та золотого перетину

Суть методу рівномірної сітки полягає в тому, що на відрізку $[a,b]$ будується рівномірна сітка із кроком h і обчислюються значення функції $f(x)$ у вузлах сітки (рис.7.2). За точку глобального мінімуму береться той вузол сітки, у якому значення функції мінімально. Основна проблема цього методу складається в раціональному виборі значення кроку h, тому що він повинен забезпечувати необхідну точність і не приводити до зайвих витрат машинного часу. Будемо рахувати, що функція $y=f(x)$ задовольняє на відрізку $[a,b]$ умові Липшиця, якщо існує таке число L (константа Липшиця), що для будь-яких $x', x'' \in [a,b]$ виконується нерівність $|f(x')- (x'')|\leq L| x'- x''|$.

Таким чином, умова Липшиця накладає обмеження на швидкість або збільшення спадання функції. Можна показати, що якщо вибрати крок $h = (b-a)/n \leq 2\varepsilon/L$, то знайдене за допомогою методу повного перебору наближене значення точки глобального мінімуму буде задовольняти необхідній точності. Як константу Липшиця можна вибрати значення L таке, що $|f'(x)|<= L$, а в якості h - будь-яке значення $h<=2\varepsilon/L$, яке ціле число раз вміщується на відрізку $[a,b]$. Такий вибір гарантує мінімальну кількість обчислень функції при досягненні необхідної точності. Очевидно, точка α є точкою глобального мінімуму, тобто $x^*=\alpha$. Унімодальна функція володіє наступною корисною властивістю: нехай $a<x_1<x_2<b$. Тоді, якщо $f(x_1)<f(x_2)$, то $x^* \in [a,x_2]$, а якщо $f(x_1)>f(x_2)$, то $x^* \in [x_1,b]$.

Завдання методу золотого перетину полягає в тому, щоб одержати послідовність вкладених одне в одне відрізків $[x_i, x_{i-1}]$, що містять точку x^*, у якій функція приймає мінімальне значення. Нехай відрізок $[a,b]$ розбитий на дві частини точкою x.



Так

Рис. 7.2. Блок-схема методу рівномірної сітки

Будемо говорити, що точка ***x*** робить золотий перетин відрізка, якщо відношення довжини усього відрізка до довжини більшої його частини дорівнює відношенню довжини більшої частини до меншої: $\frac{b-a}{x-a}=\frac{x-a}{b-x}$. Зазначене відношення дорівнює $\tau =(\sqrt{5}+1)/2 \approx 1{,}618$, а $1/\tau \approx 0{,}62$. Можна показати, що золотий перетин відрізка $[a,b]$ роблять дві симетрично (щодо центра відрізка) розташовані точки (рис.7.4).

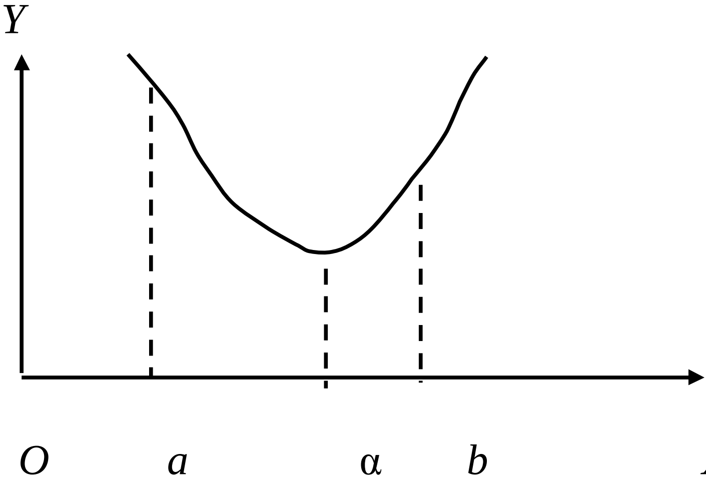
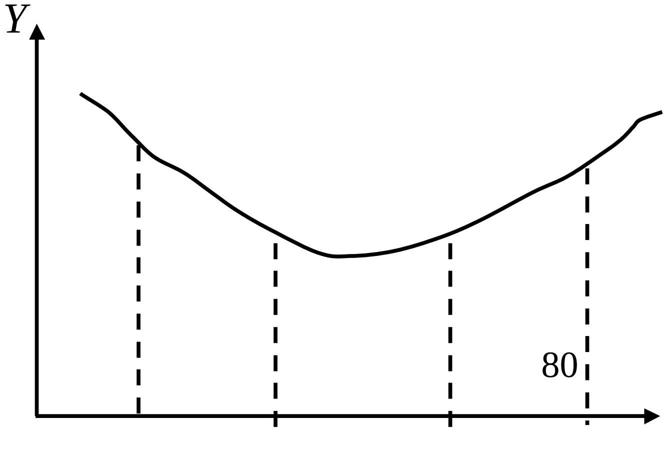


Рис.7.3. Ілюстрація унімодальності функції

Треба відмітити, що при цьому точка x_1 робить золотий перетин відрізка $[x_2,b]$, а точка x_2 - відрізки $[a,x_1]$.



$$x_1 = a + (b-a)/\tau$$
$$x_2 = b - (b-a)/\tau$$

O a x_2 x_1 b X

Рис.7.4. Ілюстрація розташування точок золотого перетину

Опишемо тепер стратегію пошуку в методі золотого перетину [16,17]. Для заданого початкового відрізка $[a,b]$ по приведених формулах обчислюємо x_1 і x_2. Знаходимо значення функції $f(x)$ у цих точках $f(x_1)$ і $f(x_2)$. Із властивості унімодальної функції випливає, що якщо $f(x_1) < f(x_2)$, то точка мінімуму належить відрізку $[x_2,b]$, а якщо $f(x_1) > f(x_2)$, то точка мінімуму належить відрізку $[a,x_1]$. Знову отриманий відрізок вкладений у вихідний і містить шукану точку мінімуму функції. Крім того, він уже містить одну з точок (x_1 - у першому випадку і x_2 - у другому), що робить його золотий перетин. Тоді, побудувавши по формулах другу точку, ми можемо продовжити процес одержання інтервалів, довжина яких спадає та всередині кожного з яких розташовується точка мінімуму x^*. Обчислювальна процедура закінчується, коли досягнута задана точність $|b\text{-}a| \leq \varepsilon$. Метод золотого перетину є найбільш економічним аналогом методу дихотомії стосовно задач на мінімум. Він застосовний навіть до недиференційованих функцій і завжди збігається; збіжність его лінійна. Якщо на відрізку $[a,b]$ функція має кілька локальних мінімумів, то процес зійдеться до одного з них (але не обов'язково до найменшого). Метод застосовується для детермінованих задач: у стохастичних задачах через помилки експерименту можна неправильно визначити співвідношення між значеннями функцій у точках; тоді подальші ітерації підуть по помилковому шляху. У наведеній нижче блок-схемі методу золотого перетину прийняті наступні позначення: XL – ліва точка золотого перетину x_2, XP – права точка x_1, YL – значення функції в точці XL, YP – у точці XP.

Для розв’язання одномірної задачі нелінійного програмування запропоновано також метод Пауелла [2] і метод парабол [1]. У методі Пауелла проводяться зростаючі за величиною кроки доти, поки не буде пройдений мінімум, а потім виконується одноразова квадратична інтерполяція. По методу парабол проводяться обчислення, що використовують першу і другу похідні функції, що мінімізується.

Порівняльний аналіз мінімізації спеціально підібраної функції Розенброка методами послідовного перебору, золотого перетину і методом Пауелла показує, що найбільш переважніше для розв’язання задач цього класу використовувати метод золотого перетину.

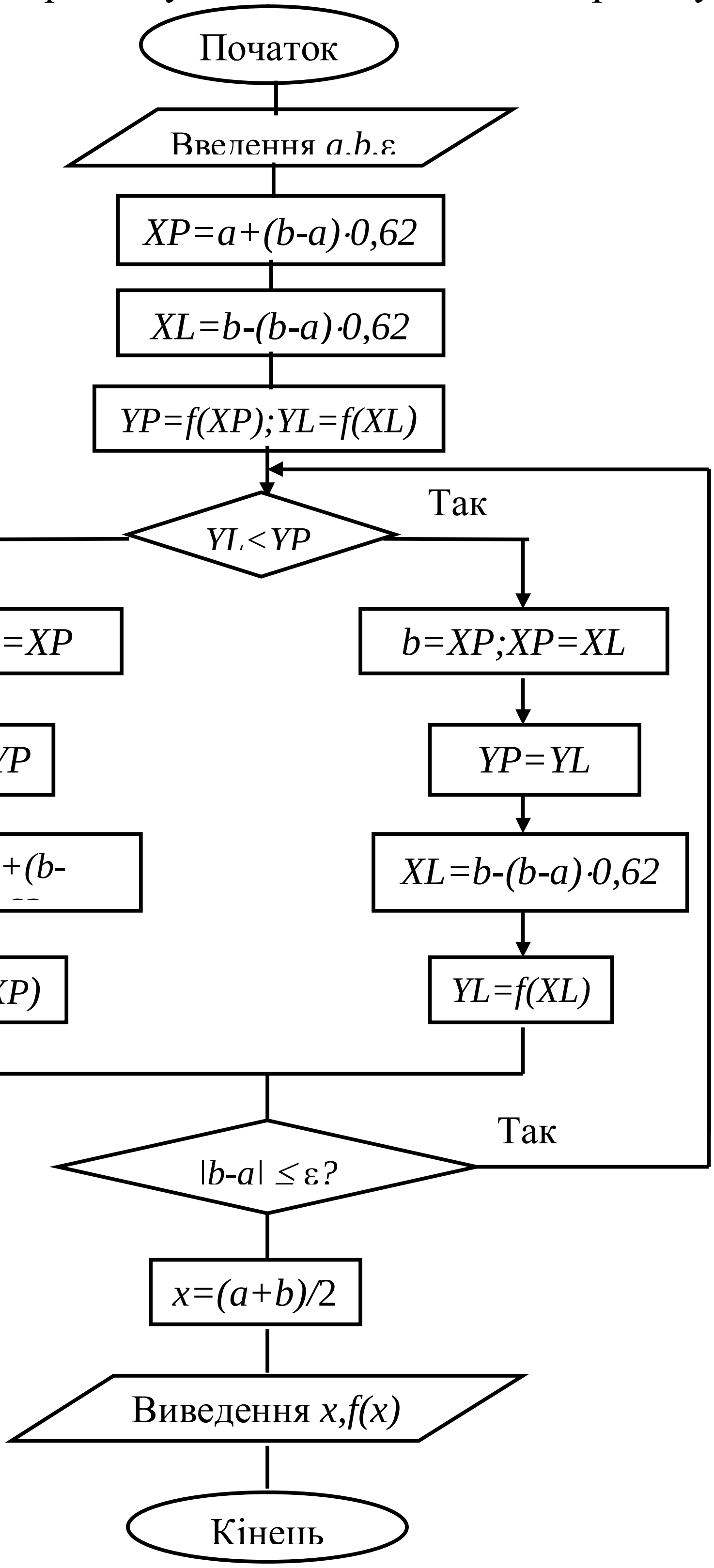


Рис.7.5. Блок-схема методу золотого перетину

Недоліком методу послідовного перебору можна вважати малу швидкість збіжності, а перевагою – те, що він застосовний для будь-якого класу функцій і в принципі не вимагає попереднього виділення інтервалу $[a,b]$ (для нього досить узяти як границі досить великі від'ємні і додатні числа). Перевагою методу золотого перетину вважається висока швидкодія, а недоліком – необхідність виконання умови унімодальності функції.

Завдання до самостійної роботи

Мінімізувати зазначену функцію $y=f(x)$ на заданому відрізку методами послідовного перебору і золотого перетину з заданою точністю ε=0.001:

1.	$y=e^x+x^2$	$x\in[-1;0]$
2.	$y=e^x+1/x$	$x\in[0,5;1]$
3.	$y=e^x-lnx$	$x\in[0,3;1]$
4.	$y=e^x+1/(x+1)$	$x\in[-0,5;0,5]$
5	$y=tgx+1/x$	$x\in[0,5;1]$
6.	$y=tgx+e^x+x$	$x\in[-1;0]$
7.	$y=x^2+sinx$	$x\in[-1;0]$
8.	$y=e^x-sinx$	$x\in[0;1]$
9.	$y=(x+2)/2-x$	$x\in[-1;-0,5]$
10.	$y=x+1/lnx$	$x\in[1,5;2,5]$
11.	$y=e^{-x}+x^2$	$x\in[0;1]$
12.	$y=e^{-x}+1/x$	$x\in[-1;-0,5]$
13.	$y=e^{1/x}+lnx$	$x\in[1;3]$
14.	$y=e^{-x}+1/(1-x)$	$x\in[=0,5;0,5]$
15.	$y=-tgx-1/x$	$x\in[-1;-0,5]$
16.	$y=x\cdot e^x+x^2$	$x\in[-1;0]$
17.	$y=x^4+2x^2+4x$	$x\in[-1;0]$
18.	$y=x+ln^2x$	$x\in[0,3;1]$
19.	$y=x-ln(lnx)$	$x\in[1,3;2,3]$
20.	$y=x+1/arctgx$	$x\in[0,5;1,5]$

Запитання до розділу 7

1. Що називається оптимальним розв'язанням задачі мінімізації?
2. У чому полягає процедура розв'язання задачі мінімізації?
3. Яка умова вибору константи Ліпшиця?
4. Сформулюйте суть методу рівномірної сітки.
5. Для яких функцій застосовується метод золотого перетину?
6. Наведіть відношення для методу золотого перетину.
7. У чому полягає задача нелінійного програмування?
8. У чому полягає задача лінійного програмування?
9. Перерахуйте класи методів розв'язання задач нелінійного програмування.

РОЗДІЛ 8. МІНІМІЗАЦІЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

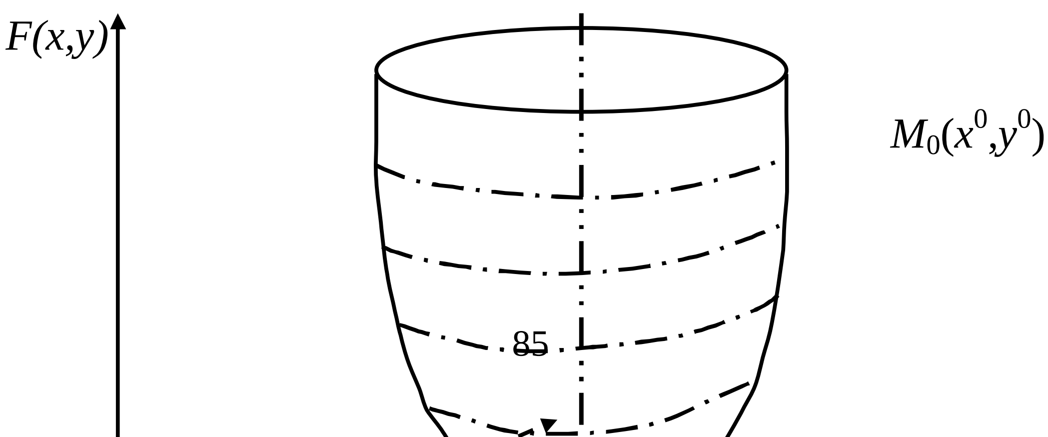
Як правило, чисельні методи відшукання екстремума функції (наприклад, мінімуму) складаються в побудові послідовності векторів $x^{(k)}$, що задовольняють умові $f(x^{(0)})>f(x^{(1)})>\ldots>f(x^{(n)})\ldots$ Методи побудови таких послідовностей називають методами спуску, найбільш розповсюджені з яких розглянуто нижче [9-10,18-20].

8.1. Метод покоординатного спуску

Цей метод є найбільш простим із прямих методів пошуку мінімуму функції без обмежень. Розглянемо ідею методу на прикладі мінімізації функції двох змінних $f(x,y)$, тому що наглядно її можна представити у вигляді рисунку.

Виберемо початкове наближення $M_0(x^0,y^0)$, зафіксуємо y^0 і знайдемо мінімум функції одним змінної $f(x,y^0)$ будь яким відомим методом. Нехай він досягається при $x=x^1$. Уздовж прямої, рівнобіжної осі OX, перемістимося в точку $M_1(x^1,y^0)$ (рис.8.1). Фіксуємо тепер x^1 і знаходимо мінімум функції однієї змінної $f(x^1,y)$. Нехай це буде y^1. Рухаємось уздовж прямої, рівнобіжній осі OY у точку $M_2(x^1,y^1)$. Далі спускаємося по прямій, рівнобіжній осі OX і т.і. Продовжуємо цей процес доти, поки функція продовжує спадати, тобто поки $f(x^{k+1},y^{k+1})<f(x^k,y^k)$. Як тільки функція $f(x,y)$ перестає спадати, спуск припиняють.

Існують багато модифікацій методу покоординатного спуску, зокрема, метод покоординатного спуску з постійним кроком, що розглядається нижче. У цьому випадку не потрібно на кожному кроці алгоритму використовувати який-небудь метод для знаходження мінімуму функції однієї змінної. Спуск здійснюється в напрямку координатних вісей убік спадання функції з постійними кроками h. У загальному випадку потрібно застосовувати різні кроки для різних змінних h_x, h_y, але для спрощення можна обходитись одним кроком h, що трохи зменшує швидкодію методу,



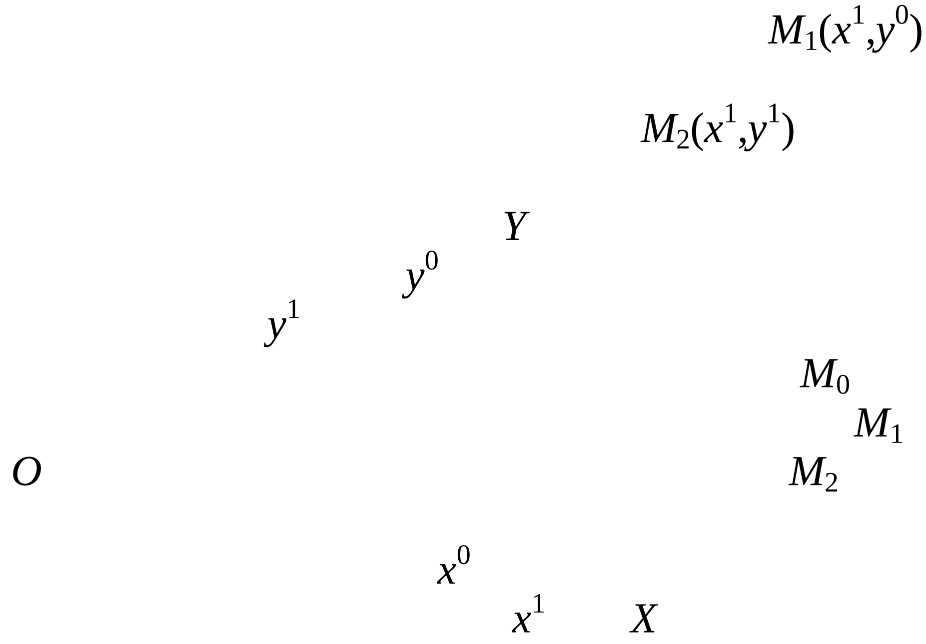


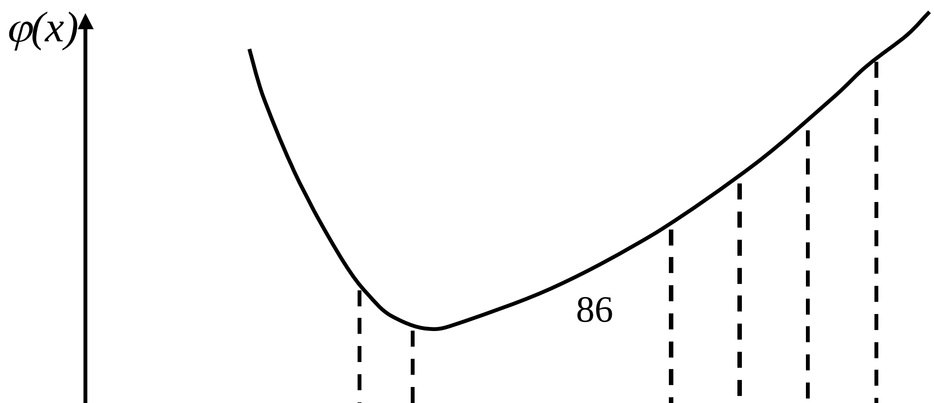
Рис.8.1. Ілюстрація методу покоординатного спуску

при цьому наступні значення змінних обчислюються по формулах

$$x^{k+1}=x^k+h,\ y^{k+1}=y^k+h,$$

Для знаходження наступної точки послідовності, коли фіксована одна змінна (припустимо для визначеності, що фіксовано змінну y і потрібно мінімізувати функцію один змінної $\varphi(x)$, причому спуск починається з точки x^k), можна застосувати наступний алгоритм (рис.8.2) із кроком h робляться два кроки: вліво і вправо від точки x^k, обчислюються значення функцій $\varphi(x^k-h)$, $\varphi(x^k+h)$, після чого порівнюються зі значенням $\varphi(x^k)$; якщо виконується умова $\varphi(x^k-h)<\varphi(x^k)$, то й подальший рух здійснюється вліво від точки x^k по формулах $x^{k+1}=x^k-h$ (цей випадок показано на рис.8.2).

Якщо виконується умова $\varphi(x^k+h)<\varphi(x^k)$, то подальший рух робиться вправо від точки x^k по формулі $x^{k+1}=x^k+h$; рух припиняється в тому випадку, якщо значення функції $\varphi(x^p\pm h)$ стане на якомусь кроці p більше значення $\varphi(x^p)$. Як мінімум функції однієї змінної приймається останнє значення x^p.



0 x^p*-h* x^p . . . . . x^k*-2h* x^k*-h* x^k x^k*+h* *X*

Рис.8.2. Ілюстрація пошуку мінімуму функції однієї змінної в методі покоординатного спуску

Природньо, що подібні ж міркування відносяться і до випадку фіксації змінної *x*. Одержання функції однієї змінної графічно відповідає розрізу об'ємної фігури, зображеної на рис.8.1 площиною *x=const* чи *y=const*, причому ця площина проходить через поточну точку послідовності в алгоритмі покоординатного спуска і перпендикулярна однієї з вісей координат.

В цілому алгоритм покоординатного спуска повинен припинятись, коли функція $f(x,y)$ перестає убувати. Для цього на кожнім кроці алгоритму запам'ятовується поточне значення функції, що порівнюється зі значенням функції, отриманому після одномірних мінімізацій при фіксації відповідних змінних. Приведені міркування легко переносяться на випадок функції багатьох змінних: при цьому на кожному кроці алгоритму фіксуються усі змінні, крім однієї, по якій проводиться мінімізація. Порядок фіксації змінних при цьому не має значення.

Вибір початкової точки M_0 у принципі не має значення, однак чим початкова точка ближче до точки мінімуму, тим менше обчислень потрібно буде проводити (хоча в більшості випадків неможливо заздалегідь вказати околиці точки мінімуму).

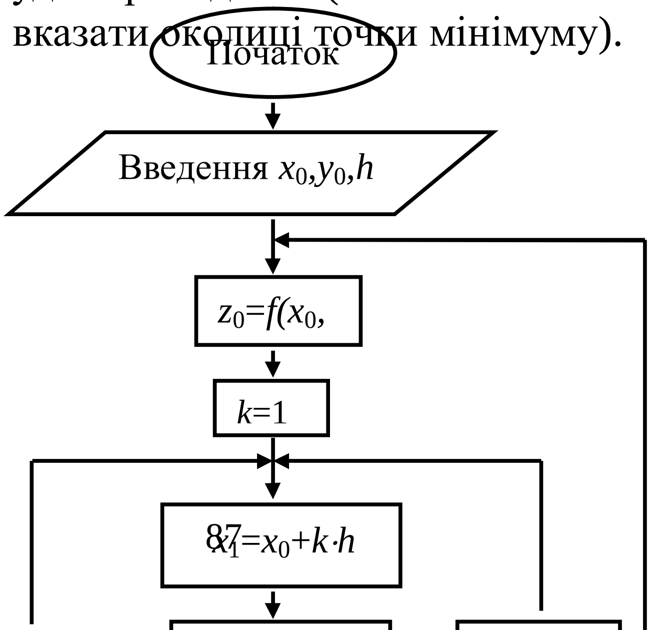


Рис. 8.3. Схема алгоритму методу покоординатного спуску

Як уже відзначалося, точку глобального мінімуму за допомогою методів нелінійного програмування в загальному випадку достатньо важко знайти, тому, для підвищення імовірності її знаходження, можна робити декілька спусків, використовуючи різні початкові точки M_0, вибираючи з отриманих значень локальних мінімумів найменше.

Метод можливо доповнити блоком, у якому після неможливості зменшення функції, можна зменшити крок алгоритму h, що дозволить збільшити точність методу, але збільшить і час рахування. У цьому випадку алгоритм припиняється при досягненні кроку деякого мінімального, заздалегідь заданого значення. Зазвичай довжина кроку приблизно пропорційна числу вдалих кроків, що мали місце раніше в цьому координатному напрямку під час декількох попередніх циклів.

У методі спірального покоординатного спуску [12], крок h змінюється щоразу (по деякому алгоритму) при переході від пошуку мінімуму по одній змінній до пошуку мінімуму по іншій змінній. У тривимірному просторі це нагадує спуск у западину по спіралі. Звичайно цей метод дає деяке скорочення часу пошуку.

Алгоритм покоординатного спуску працює погано, якщо має місце взаємодія між змінними (наприклад, є добуток x_1x_2 у цільовій функції). Таким чином, цей метод не можна рекомендувати, якщо користувач не має справи з цільовою функцією, у яких взаємодії між змінними не істотні.

Через повільну збіжність методу покоординатного спуску при наявності "ярів" у цільовій функції, его можна використовувати в цьому випадку як перше наближення при знаходженні мінімуму.

Перевагою методу варто вважати його універсальність (застосовність до недиференційовних функцій), недоліком – повільна швидкодія в деяких випадках.

8.2. Метод градієнтного спуску

Для простоти викладу обмежимося задачею мінімізації функції двох змінних $z=f(x,y)$, вважаючи її діфференційовною. Перше застосування методу градієнтного спуску для розв’язання цієї задачі було запропоновано ще відомим французьким математиком Коші.

Градієнтом функції в точці називають вектор $(\partial f/\partial x,\partial f/\partial y)$, що вказує напрямок зростання функції. Напрямок найшвидкішого убування функції характеризується антиградієнтом $(-\partial f/\partial x,-\partial f/\partial y)$.

Існують різні версії методу градієнтного спуску, об'єднані загальною ідеєю: кожне наступне наближення до точки мінімуму вибирають у напрямку, обумовленому антиградієнтом, проведеним із точки, що відповідає попередньому наближенню. Однак антиградієнт дає тільки напрямок оптимізації, але не величину кроку, на який можна пересунутися одночасно зі зменшенням функції. Тому запропоновані численні модифікації методу, в основному відрізняються правилами вибору кроку на кожній ітерації і правилами руху уздовж отриманого напрямку.

Один з різновидів методу покоординатного спуску – метод найшвидкішого спуску – складається в наступному (рис.8.4). Спуск починається з нульового наближення – точки з координатами (x^0,y^0), верхній індекс при змінних позначає номер кроку. Обчислимо компоненти антиградієнта $d_1=-\partial f/\partial x(x^0,y^0)$, $d_2=-\partial f/\partial y(x^0,y^0)$. Будемо вважати, що числа d_1, d_2 не дорівнюють нулю одночасно (якщо ці два числа дорівнюють 0, то точка (x^0,y^0) є підозрілою на екстремум, у цьому випадку запам'ятовується значення функції в ній і вибирається інша точка як нульове наближення). Виберемо деякий крок $h_1>0$ і покладемо $x^1=x^0+h_1\cdot d_1$, $y^1=y^0+h_1\cdot d_2$. Будемо вважати, що крок обрано правильно, якщо $f(x^1,y^1)<f(x^0,y^0)$, при невиконанні цієї нерівності крок зменшується. Після одержання нового наближення (x^1,y^1) обчислюється антиградієнт у новій точці, будується нове наближення (x^2,y^2) тощо. Обчислення по алгоритму продовжуються доти, поки значення кроку не стане менше деякого мінімального значення.

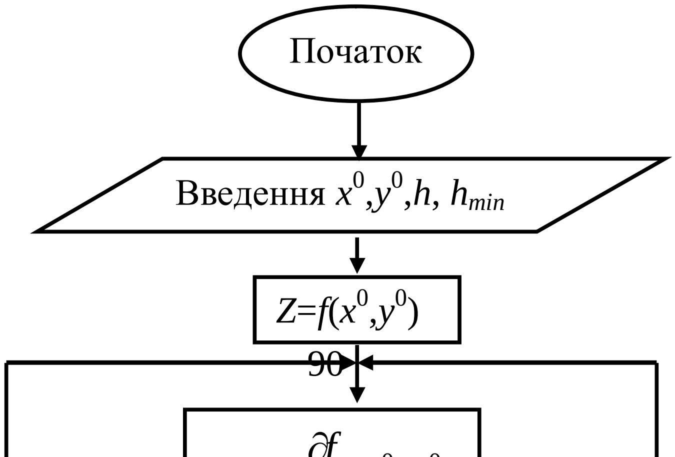


Рис.8.4. Схема алгоритму методу найшвидкішого спуску

За допомогою викладеного алгоритму можна знаходити стаціонарні точки, що у загальному випадку можуть не бути точками мінімуму. Тому для підвищення імовірності знаходження мінімуму рекомендується робити кілька спусків з різних початкових точок.

Недоліками запропонованого алгоритму є його застосування тільки до діференційовних функцій, а також залежність від вибору масштабу змінних, що оптимізуються. Якщо мінімізуєма функція дуже витягнута в просторі (утворює так званий "яр"), то процедура найшвидкішого спуску збігається занадто повільно, щоб бути ефективною, чи може взагалі не зійтися за розумний час. Іноді в цьому випадку допомагає маштабування змінних. Перевагою застосування методу є його висока швидкодія в більшості випадків.

Наведемо приклад застосування градієнтного методу для знаходження мінімуму функції $f(x) = e^{-y} + x^2 + 2y$.

Виберемо початкову точку $M_0(0,0)$ і h=1, обчислимо частинні похідні $d_1=-\partial f/\partial x=-2x$, $d_2=-\partial f/\partial y=e^{-y}-2$. Наступні наближення одержуємо по формулах:

$$x^{k+1}=x^k+h\cdot d_1=x^k+h\cdot(-2x)$$
$$y^{k+1}=y^k+h\cdot d_2=y^k+h\cdot(e^{-y}-2)$$

Для першої точки одержуємо:

$$x^1=0+1\cdot(-2\cdot0)=0$$
$$y^1=0+1\cdot(e^{-0}-2)=-1$$

У результаті першої ітерації ми змістилися в точку $M_1(x^1,y^1)=M_1(0,-1)$, причому відбулося зменшення значення функції: $f(x^0,y^0)=f(0,0)=2,7>f(x^1,y^1)=f(0,-1)=0,7$. Друга ітерація дає наступні результати:

$$x^2=0+h\cdot0=0$$
$$y^2=-1+1\cdot(2,7-2)=-0,3$$

У точці $M_2(0;–0,3)$ значення функції збільшилося: $f(x^2,y^2)=0,75>f(x^1,y^1)=0,7$, тому у відповідності з алгоритмом необхідно зменшити крок $h=h/10=0,1$. Тоді $x^2=0$, $y^2=-0,93$, $f(x^2,y^2)=f(0;-0,93)=0,68<f\,(x^1,y^1)$, тому переходимо у точку $M_2(0;-0,93)$ і т.і.

8.3. Випадковий пошук

Методи спуску при мінімізації функцій неповноцінні при завданні складних функцій мети (при наявності численних "ярів" і "пагорбів"). Якщо локальних екстремумів багато, то спуск з одного нульового наближення може зійтися тільки до одному з локальних мінімумів, не обов'язково абсолютному. Тоді для дослідження і рішення задачі можна застосувати випадковий пошук.

Для його застосування потрібно мати послідовність рівномірно розподілених величин. Їх можна одержати, використовуючи який-небудь пристрій, на виході якого з імовірністю 0,5 можуть з'являтися цифри 0 чи 1; поява тієї або іншої цифри повинна бути випадковою (як пристрій можуть виступати гральні кісті, кидана монета, спеціальний генератор). Якщо тепер записати число як

$$\gamma = 0,\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots,\ \gamma = 0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$$

де як розряди α_i будуть виступати цифри, вироблені генератором, та перевести його з двійкової системи числення в десяткову, то одержимо послідовність випадкових чисел $0 \le \gamma \le 1$. У дійсності всі оператори алгоритмічних мов, що дають послідовність "випадкових" чисел, реалізовані як своєрідні генератори, що дають псевдовипадкові числа, що повторюються через визначену кількість ітерацій. Однак період їх повторень настільки великий, що вони з успіхом використовуються в численних алгоритмах випадкових пошуків. У більшості випадків у комп'ютерах для одержання псевдовипадкових чисел застосовується алгоритм, зв'язаний з виділенням дробової частини добутку

$$\gamma_i = \left\{ A \cdot \gamma_{i-1} \right\}$$

де A – дуже велика константа, а фігурна дужка позначає дробову частину числа. Якість псевдовипадкових чисел дуже залежить від вибору величини A – у двійковій формі число A повинне мати досить "випадковий" вигляд.

Для розв’язання умовної задачі нелінійного програмування припускають, що мінімум належить деякій замкнутій області; лінійним перетворенням координат розміщують її усередині одиничного n-мірного куба. Вибирається N випадкових точок (координатами яких є послідовності псевдовипадкових чисел γ_i), у кожній з них обчислюються значення цільової функції, з усіх вибирається найменше. При високій швидкодії сучасних комп'ютерів такий підхід безумовно себе виправдовує. Чим більше точок обирається для рішення, тим більш імовірне знаходження екстремума.

Величезною перевагою запропонованого підходу є відсутність яких-небудь вимог до цільової функції, недоліком – повільна швидкість збіжності та імовірнисний характер знайденого рішення.

Завдання до самостійної роботи

Знайти оптимум зазначених функцій методами покоординатного спуску і градієнтного спуску, починаючи рух із зазначеної точки:

1. $y=20x_1+16x_2-2x_1^2-x_2^2 \to max$ $x=(2;3)$
2. $y=18x_1+6x_2-x_1^2-x_2^2 \to max$ $x=(2;4)$
3. $y=2x_1^2+4x_2^2 \to max$ $x=(5;2)$
4. $y=x_1^2+x_2^2-8x_1-4x_2 \to min$ $x=(2;7)$
5. $y=x_1^2+2x_1-x_2 \to min$ $x=(2;2)$
6. $y=32x_1+24x_2-2x_1^2-4x_2^2 \to max$ $x=(3;10)$
7. $y=20x_1+18x_2-x_1^2-x_2^2 \to max$ $x=(2;3)$
8. $y=-4(x_1-5)^2-(x_2-11)^2 \to max$ $x=(3;5)$
9. $y=2x_1^2+x_2^2-32x_1-6x_2 \to min$ $x=(2;6)$
10. $y=x_1^2+2x_2^2-6x_2 \to min$ $x=(4;2)$
11. $y=10-2x_1+x_2-x_1^2-x_2^2 \to max$ $x=(0;1)$
12. $y=2x_1^2+2x_2^2-14x_1 \to min$ $x=(-3;6)$
13. $y=x_1^2+3x_2^2-2x_1x_2+2 \to min$ $x=(4;5)$
14. $y=x_1^2-2x_2-26 \to min$ $x=(8;2)$
15. $y=-2x_1^2-x_1^2-14x_1+6 \to max$ $x=(4;6)$
16. $y=2x_1^2+x_2^2-4x_2-4x_1 \to min$ $x=(3;4)$
17. $y=-x_2^2-7x_1-x_1^2 \to max$ $x=(8;1)$
18. $y=3x_1^2-x_2+x_2^2 \to min$ $x=(3;6)$
19. $y=-x_1^2+3x_1-2x_2^2-x_2-4 \to max$ $x=(1;0)$
20. $y=2x_1^2+4x_2^2-2x_1+8 \to min$ $x=(-2;3)$

Запитання до розділу 8

1. У чому полягає ідея методу покоординатного спуску для двох змінних?
2. Які модифікації методу покоординатного спуску Вам відомі?
3. У чому полягає метод спирального покоординатного спуску?
4. Сформулюйте суть методу градієнтного спуску.
5. Яка ідея методу найшвидкішого спуску?
6. Наведіть приклад застосування градієнтного методу для знаходження мінімуму функції.
7. У чому полягає необхідність засосування випадкового пошуку?
8. Що являють собою псевдовипадкові числа?

РОЗДІЛ 9. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ
9.1. Постановка задачі

Термін "лінійне програмування" (ЛП) виник з неточного перекладу англійського словосполучення *"linear programming"* - "планування на основі лінійних співвідношень". Теорія ЛП займається створенням методів, що дозволяють оптимізувати лінійну функцію, на яку накладено лінійні обмеження [14,17]. В основному задачі ЛП ставляться в теорії планування і керування економічними процесами а також - у технічних задачах. З погляду класичної математики подібні задачі являють собою оптимізаційні задачі на умовний екстремум. Канонічна форма задачі ЛП виглядає в такий спосіб:

знайти $Z=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n \rightarrow min$ (цільова функція)

при виконанні обмежень:

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}xn=b_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m$$

на змінні можуть бути також накладені обмеження незаперечності

$$x_1\geq 0,\ x_2\geq 0,\ ...,\ x_n\geq 0$$

Різні постановки задач ЛП можуть приводити до різного математичного запису (в обмеженнях можуть бути як знаки рівностей, так і нерівностей). Перехід від різних формулювань до канонічного запису потрібний для того, щоб користатися стандартними програмами, реалізованими на комп'ютерах (а вони, у свою чергу, орієнтовані на реалізацію відомого симплекс-методу розв'язання задачі ЛП). Однак для використання графічного методу розв'язання краще використовувати стандартну форму запису, у якій обмеження представлені у формі нестрогих нерівностей. Для аналізу задача ЛП уведемо деякі визначення. Сукупність значень (x_1, x_2, …, x_n), що задовольняють обмеженням, називається припустимим (можливим) розв'язанням. Множина усіх припустимих розв'язань називають областю припустимих розв'язань (ОПР). Припустиме розв'язання, для якого цільова функція досягає максимуму (чи мінімуму), називається оптимальним. Використовуючи приведені визначення, задачу ЛП можна сформулювати в такий спосіб:

необхідно із сукупності припустимих розв'язань вибрати те, що відповідає мінімуму цільової функції [3,5,12,14].

Приклад постановки задачі ЛП:

Фабрика випускає морозиво за 2 рецептами. Норма витрати вихідних продуктів на 1 т мороженого, їхні запаси, собівартість і ціна представлені в таблиці:

Продукти	Норма витрати на 1 т (у кг)		Запаси продуктів(кг)
	1 рецепт	2 рецепт	
Молоко	650	569	30000
Молоко сухе	100	50	5700
Олія Вершкова	87	120	13800
Цукор	163	101	13500
Собівартість шт. (грн.)	0,65	0,7	
Продажна ціна (грн.)	1	1,2	

Необхідно знайти такий план випуску продукції, що забезпечить максимальний прибуток при наявних ресурсах. Позначимо x_1 - кількість морозива, що випускається, по 1 рецепту, x_2 - по 2-му рецепту.

Задача формулюється у вигляді:

$$x_1(1\text{-}0.65) + x_2\,(1{,}2\text{-}0{,}7) \rightarrow max$$

$$650x_1 + 569x_2 \leq 3000$$

$$100x_1 + 50x_2 \leq 5700$$

$$87x_1 + 120x_2 \leq 13800$$

$$163x_1 + 101x_2 \leq 13500$$

Ускладнення приклада 1: по 1 рецепту повинне бути випущено не менш 15 тонн, а по 2-му - не менш 45 тонн: $x_1 \geq 15$, $x_2 \geq 45$.

Ускладнення приклада 2: максимальний час роботи фасувального автомата 400 годин, автомат розфасовує 1 т морозива за 4,5 години:

$4{,}5(x_1 + x_2) \leq 400$.

Для переходу від одного виду запису задачі ЛП до іншого необхідно використати наступні прийоми:

1) перехід від задачі максимізації до мінімізації і навпаки:

$$z_1=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n \rightarrow max$$

$$z_2= -z_1=-c_1x_1-c_2x_2-...-c_nx_n \rightarrow min$$

2) перехід від обмежень-нерівностей до рівностей. Для цього в задачу вводиться додаткова змінна x_{n+1}, що є фіктивною й у цільову функцію входить з коефіцієнтом нуль

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n\le b_1 \rightarrow \text{перехід до}$$
$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1$$

3) представлення обмеження-рівності у вигляді нерівності. У цьому випадку рівність представляється у вигляді двох нерівностей, тобто збільшується розмірність задачі

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1 \rightarrow \text{перехід до}$$
$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n\le b_1$$
$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n\ge b_1$$

4) перехід від змінних, обмежених знизу, до невід'ємних змінних:

$$xi \ge bi\rightarrow \text{замінивши } xi = yi + bi\text{, одержимо } yi \ge 0$$

5) накладення на змінні обмеження незаперечності, якщо ця умова не виконується. Для цього необхідну змінну x_j представимо у вигляді різниці двох нових змінних:

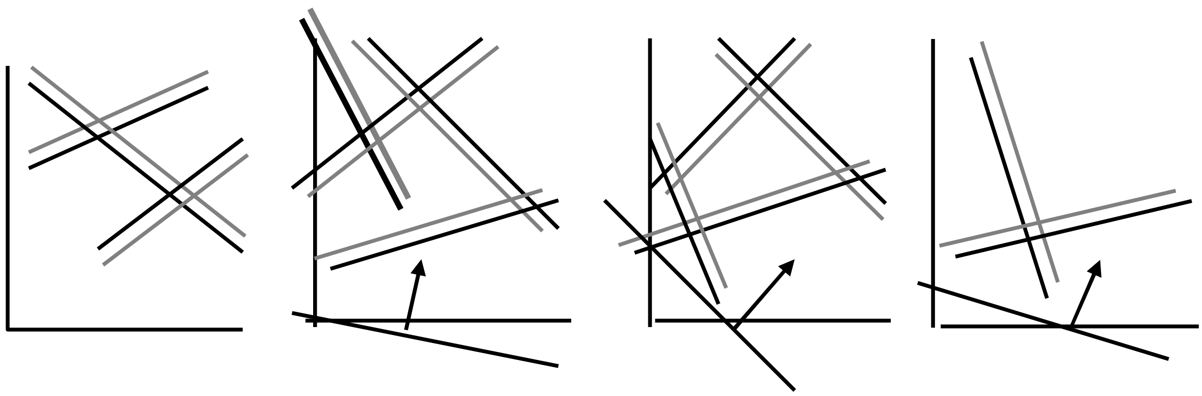
$$x_j = x_j'- x_j'', x_j' \ge 0 , x_j'' \ge 0.$$

За допомогою таких прийомів можна звести задачу ЛП до канонічної чи стандартної форми. Для точного розв'язання задачі ЛП застосовується симплекс-метод, розроблений радянським математиком Л.В.Канторовичем і американським Дж.Данцигом [8,11]. Основна ідея методу складається з пошуку точки перетинання n лінійно незалежних гіперплощин, що задаються обмеженнями-рівностями, і послідовному переході до іншої точки зі зменшенням цільової функції. Такі точки можна представити вершинами деякого багатогранника, що є перетинанням кінцевого числа півпросторів - припустимих розв'язань. Головна перевага симлекс-метода - універсальність і простота реалізації на комп'ютері.

9.2. Геометричний метод розв'язання задачі ЛП

Нехай задача ЛП задана в стандартній формі. Геометрично ОПР утвориться перетинанням m множин, кожне з них визначається нерівністю: $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+...+a_{in}x_n \geq b_i$ і являє собою півпростір, що розташовано по одну сторону від гіперплощини $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+...+a_{in}x_n=b_i$.

Перетинання півпросторів є областю припустимих розв'язків (і частіше опуклим багатогранником, якщо область обмежена і не порожня). Лінії рівня $c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n=const$ утворюють сімейство рівнобіжних гіперплощин. Вектор нормалі до цих площин $c=\{c_1, c_2,\ldots,c_n\}^T$ перпендикулярний цим рівнобіжним площинам і визначає напрямок зростання лінійної форми.



Задача нерозв'язна | Задача має єдиний розв'язок | Задача має множину розв'язків | Задача необмежена

Рис.9.1. Ілюстрація існування розв'язків задачі ЛП

Множина точок, заданих нерівностями, може бути порожнею, обмеженою і необмеженою (відповідно, задача ЛП може не мати розв'язків, мати один розв'язок, мати нескінченну множину розв'язків або бути необмеженою). На рис.9.1 показані ці випадки для задачі з двома змінними; суцільні лінії відповідають обмеженням, сірим кольором показані півплощини, що задовольняють обмеженням; лінії зі стрільцями відповідають нормалі до лінії функції мети.

Варто мати на увазі, що оптимум задачі ЛП досягається тільки в обмеженій точці припустимої множини. На відміну від задач нелінійного програмування в задачі ЛП оптимум завжди є глобальним.

Геометричний метод застосовується для розв'язання задачі ЛП двох змінних, тому що тільки в цьому випадку можна побудувати наочно ОПР на площині (рис.9.2). Метод складається з двох етапів. На першому будується ОПР як перетинання півплощин, кожна з який задана нерівністю – обмеженням. Після другого будується пряма

$c_1x_1+c_2x_2=a$, де a-довільне число. Думкою зрушуємо цю пряму паралельно самої собі вправо – нагору, якщо ми максимізуємо цільову функцію і вліво – униз, якщо мінімізуємо. Рух продовжується доти, поки пряма ще буде належати ОПР. Точне розв'язання одержуємо з розв'язання системи двох рівнянь, що задають відповідні прямі, перетинання яких дає розв'язання на графіку.

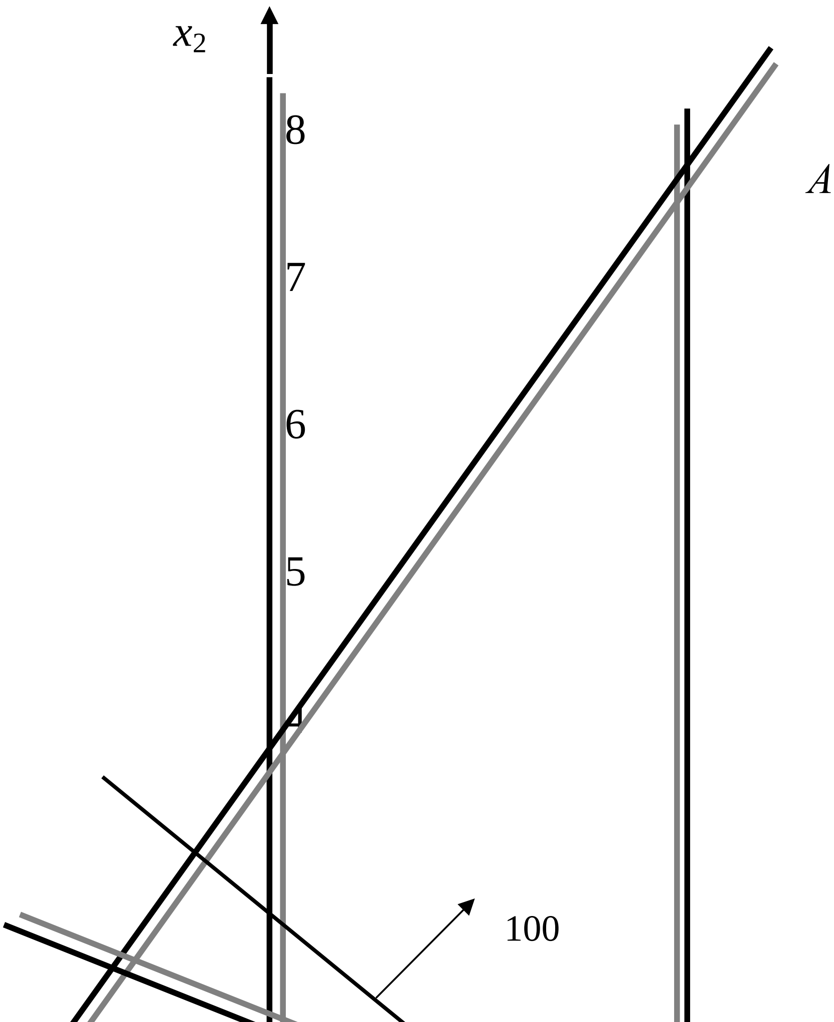
Приклад: вирішити графічно задачу ЛП:

$$f=x_1+x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} -3x_1+2x_2 \le 6 \\ x_1+2x_2 \ge 2 \\ 0 \le x_1 \le 3, \ \ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Для графічного розв'язання задачі побудуємо по двох точках прямі $2x_2$-$3x_1$=6; $x_1+2x_2=2$; $x_1=3$. Після цього штрихуємо ті півплощини, що задовольняють нерівностям (на мал. сірими лініями) і будуємо ОПР як перетин заштрихованих півплощин. Потім малюємо лінію рівня $x_1+x_2=2$ (замість цифри 2 можна було підставити будь-яку).

Так як задача ставиться на максимум цільової функції, думкою зрушуємо пряму, що відповідає цільовій функції, вправо, поки вона ще буде належати області, обмеженої сірими лініями. Очевидно, розв'язання знаходиться в т. A.



3

2

1

-2 -1 0 1 2 3 x_1

Рис.9.2. Графічне розв'язання задачі лінійного програмування:

Для визначення точного розв'язку потрібно вирішити систему двох рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1+2x_1=6 \\ x_1=3 \end{cases}$$

Точне розв'язання: $x_1=3$; $x_2=7{,}5$.

Завдання до самостійного розв'язання

Розв'язати графічним методом наступні задачі лінійного програмування:

1. $f=x_1+x_2\to max$

$$\begin{cases} -3x_1+2x_2\le 6 \\ x_1+2x_2\ge 2 \\ 0\le x_1\le 3 \\ x_2\ge 0 \end{cases}$$

2. $f=x_1-2x_2\to min$

$$\begin{cases} x_1-x_2\le 1 \\ x_1+x_2\ge 2 \\ x_1-2x_2\le 2 \\ x_1\ge 0;\quad x_2\ge 0 \end{cases}$$

3. $f=x_1+2x_2\to min$

$$\begin{cases} x_1\ge 2 \\ x_1+3x_2\le 3 \\ x_1-x_2+1\le 0 \end{cases}$$

4. $f=6x_1+7x_2\to max$

$$\begin{cases} x_1-1\ge 0 \\ x_2-1\ge 0 \\ x_1+x_2-3\ge 0 \\ -6x_1-7x_2+42\ge 0 \end{cases}$$

5. $f=3x_1+2x_2\to max$

$$\begin{cases} x_1+x_2\le 1 \\ 3x_1+4x_2\le 12 \\ x_1\ge 0;\quad x_2\ge 0 \end{cases}$$

6. $f=x_1+2x_2\to max$

$$\begin{cases} x_1-x_2\le 1 \\ x_1-2x_2\le 1 \\ x_1\ge 0;\quad x_2\ge 0 \end{cases}$$

7. $f=4x_1+5x_2\to max$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2\le 6 \\ -x_1+x_2\ge 3 \\ x_1\ge 0;\quad x_2\ge 0 \end{cases}$$

8. $f=x_1+x_2\to min$

$$\begin{cases} 5x_1-2x_2\le 4 \\ -x_1+2x_2\le 4 \\ x_1+x_2\ge 4 \end{cases}$$

9. $f=2x_1+3x_2\to max$

$$\begin{cases} 8x_1+5x_2\le 11 \\ -x_1+3x_2\le 1 \\ 2x_1+7x_2\ge 7 \\ x_1\ge 0;\quad x_2\ge 0 \end{cases}$$

10. $f=x_1+3x_2\to min$

$$\begin{cases} 3x_1-x_2\ge 0 \\ 2x_1-x_2\le 6 \\ x_1+x_2\le 0;\quad x_1\le 2 \\ 3x_1-x_2\ge -4 \end{cases}$$

11. $f=3x_1+x_2\to min$

$$\begin{cases} 0\le x_1\le 2 \\ x_1+x_2-2\ge 0 \\ x_1-x_2+1\le 0 \end{cases}$$

12. $f=x_1+x_2\to max$

$$\begin{cases} 0{,}5\le x_1+x_2\le 1 \\ x_1-2x_2\le 1 \\ 3x_1+2x_2\le 3 \\ x_1\ge 0;\quad x_2\ge 0 \end{cases}$$

13. $f=x_1+x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1+x_2-5 \geq 0 \\ x_1-x_2-5 \geq 0 \\ x_1 \leq 7 \end{cases}$$

14. $f=2x_1+x_2 \to min$

$$\begin{cases} 2x_1-x_2 \geq -2 \\ x_1-x_2 \geq -2 \end{cases}$$
$$x_1 \leq 1; \quad 2x_1-x_2 \geq 3$$

15. $f=x_1+2x_2 \to max$

$$\begin{cases} 5x_1-2x_2 \leq 7 \\ -x_1+2x_2 \leq 5 \\ 2x_1+7x_2 \geq 7 \end{cases}$$

16. $f=x_1+3x_2 \to max$

$$\begin{cases} x_1-x_2 \leq 1 \\ 2x_1+x_2 \leq 2 \\ x_1-x_2 \geq 0 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0$$

17. $f=2x_1+5x_2 \to max$

$$\begin{cases} 4x_1+5x_2 \leq 40 \\ 2x_1+3x_2 \geq 6 \\ -x_1+x_2 \leq 5 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 1$$

18. $f=7x_1+3x_2 \to max$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2 \geq 18 \\ 3x_1-7x_2 \leq 21 \\ -8x_1+5x_2 \leq 40 \end{cases}$$
$$x_1 \leq 15; \quad x_2 \leq 8$$

19. $f=2x_1+x_2 \to max$

$$\begin{cases} 2x_1-x_2 \leq 10 \\ -2x_1+x_2 \leq 10 \\ x_1+2x_2 \geq 6 \\ 7x_1+10x_2 \leq 70 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0$$

20. $f=3x_1+3x_2 \to min$

$$\begin{cases} 5x_1+x_2 \geq 10 \\ x_1+7x_2 \geq 7 \\ x_1-2x_2 \leq 10 \\ -5x_1+3x_2 \leq 30 \end{cases}$$

Запитання до розділу 9

1. Як виглядає стандартна форма задачі лінійного програмування (ЛП)?
2. Наведіть приклад постановки задачі ЛП?
3. Назвіть методи розв'язання задачі ЛП.
4. Наведіть приклади існування розв'язків задачі ЛП для двох змінних.
5. Коли застосовується геометричний метод розвзання задачі ЛП?

Завдання для виконання лабораторних робіт у середовищі SciLab

При проектуванні та моделюванні електронних та програмних систем, спеціаліст вирішує ряд завдань, використовуючи знання математики. У більшості випадків аналітичне рішення поставленої задачі дає прийнятний результат. Проте, разом з аналітичним рішенням, необхідно набувати конкретних значень, тобто чисел, що характеризують поведінку електронної схеми в певних умовах (наприклад: значення напруги, струму, відхилень) або ж стан процесу в який-небудь момент часу (значення частоти коливань і амплітуди сигналів при передачі інформації). Зробити розрахунок на основі будь-яких відомих даних за певними законами можна використовуючи чисельні методи математики. У зв'язку з використанням в проектуванні засобів обчислювальної техніки, які реалізують чисельні методи, необхідно, щоб користувач мав уявлення про методи, які реалізовані в ЕОМ. Лабораторні роботи мають метою опанування студентами методики аналіза і синтеза конкретних методів розв'язання реальних типових задач, а також глибоке засвоєння, поглиблення, закріплення та узагальнення знань і вмінь, отриманих студентами при вивченні теоретичних розділів.

Тематика лабораторних робіт відповідає навчальним задачам предмета. Зараз для курсів, пов'язаних із чисельними методами, характерно велике відставання методичної бази від розвитку сучасних IT технологій. Особливу цінність даному навчальному посібнику надають програми в *SciLab* для вирішення основних завдань чисельного аналізу. Створені в кінці минулого століття потужні комп'ютери дозволили по-новому поглянути на традиційні чисельні методи рішення завдань. Частина старих проблем, пов'язаних із обмеженими можливостями ручних обчислень, такі як число ітерацій, кількість арифметичних дій, об'єм інформації, що вводиться і отримується, стали менш актуальними. На передній план висуваються інші проблеми, а саме, проблема похибок обчислень, впровадження нових швидкодіючих алгоритмів обробки великих обсягів інформації та їх візуалізація.

Зміст лабораторних робіт складається з теоретичної та практичної частин і розрахунково-пояснювальної записки; робота виконується на аркушах формату А4. При виконанні робіт студент повинен: а) вивчити теоретичний матеріал в обсязі, передбаченому програмою; б) письмово виконати теоретичні вправи, загальні для всіх студентів; в) вирішити запропоновані йому індивідуальні завдання, варіант яких відповідає номеру студента за списком у журналі; г) оформити і представити звіт відповідно до графіка виконання лабораторної роботи. Захист лабораторної роботи проводиться перед її керівником. Під час захисту студент повинен уміти відповідати на теоретичні питання, пояснювати розв’язання теоретичних вправ, завдань, вміти розв’язувати аналогічні приклади.

Лабораторна робота № 1. Елементи теорії похибок

Мета роботи - оволодіння студентами навичок обчислення граничних абсолютних і відносних похибок результату обчислень і застосування правил округлення у вузькому і широкому сенсі [2-3,7,19-22].

Завдання до лабораторної роботи №1

Завдання 1.1.

1. Визначити, яка рівність точніше.
2. Округлити сумнівні цифри числа, залишив в його запису тільки вірні цифри: *а*) у вузькому сенсі; *б*) у широкому сенсі. Визначити абсолютну похибку результата.
3. Знайти граничні абсолютні та відносні похибки чисел, якщо вони мають тільки вірні цифри: *а*) у вузькому сенсі; *б*) у широкому сенсі.

Завдання 1.2.

1. Обчислити та визначити похибку результата.
2. Обчислити та визначити похибку результата.
3. Обчислити, використовуючи правило підрахунку цифр.

Варіанти завдань до лабораторної роботи №1

Завдання 1.1.

№ **1.1.1.** 1) $\sqrt{44} = 6{,}63$; $\frac{19}{41} = 0{,}463$.

2) *а*) 22,553 (±0,016);
б) 2,8546; δ=0,3%.

3) а) 0,2387; б) 42,884.

№ **1.1.2.** 1) $\frac{7}{15} = 0{,}467$; $\sqrt{30} = 5{,}48$.

2) *а*) 17,2834; δ=0,3%;
б) 6,4257 (±0,0024).

3) а) 3,751; б) 0,537.

№ **1.1.3.** 1) $\sqrt{10{,}5} = 3{,}24$; $\frac{4}{17} = 0{,}235$.

2) *а*) 34,834; δ=0,1%;
б) 0,5748 (±0,0034).

3) а) 11,445; б) 2,043.

№ **1.1.4.** 1) $\frac{15}{7} = 2{,}14$; $\sqrt{10} = 3{,}16$.

2) *а*) 2,3485 (±0,0042);

б) 0,34484; δ=0,4%.
3) а) 2,3445; б) 0,745.

№ **1.1.5.** 1) $\frac{6}{7}$ = 0,857; $\sqrt{4,8}$ = 2,19.
2) *а*) 5,435 (±0,0028);
б) 10,8441; δ=0,5%.
3) а) 8,345; б) 0,288.

№ **1.1.6.** 1) $\frac{12}{11}$ = 1,091; $\sqrt{6,8}$ = 2,61.
2) *а*) 8,24163; δ=0,2%;
б) 0,12356 (±0,00036).
3) а) 12,45; б) 3,4453.

№ **1.1.7.** 1) $\frac{2}{21}$ = 0,095; $\sqrt{22}$ = 4,69.
2) *а*) 2,4543 (±0,0032);
б) 24,5643; δ=0,1%.
3) а) 0,374; б) 4,348.

№ **1.1.8.** 1) $\frac{23}{15}$ = 1,53; $\sqrt{9,8}$ = 3,13.
2) *а*) 23,574; δ=0,2%;
б) 8,3445 (±0,0022).
3) а) 20,43; б) 0,576.

№ **1.1.9.** 1) $\frac{6}{11}$ = 0,545; $\sqrt{83}$ = 9,11.
2) *а*) 21,68563; δ=0,3%;
б) 3,7834 (±0,0041).
3) а) 41,72; б) 0,678.

№ **1.1.10.** 1) $\frac{17}{19}$ = 0,895; $\sqrt{52}$ = 7,21.
2) *а*) 13,537 (±0,0026);
б) 7,521; δ=0,12%.
3) а) 5,634; б) 0,0748.

№ **1.1.11.** 1) $\frac{21}{29}$ = 0,723; $\sqrt{44}$ = 6,63.
2) *а*) 0,3567; δ=0,042 %;
б) 13,6253 (±0,0021).
3) а) 18,357; б) 2,16.

№ **1.1.12.** 1) $\frac{50}{19}$ = 2,63; $\sqrt{27}$ = 5,19.
2) *а*) 1,784 (±0,0063);
б) 0,85637; δ=0,21%.
3) а) 0,5746; б) 236,58.

№ **1.1.13.** 1) $\frac{13}{17}$ = 0,764; $\sqrt{31}$ = 5,56.
2) *а*) 3,6878 (±0,0013);
б) 15,873; δ=0,42%.
3) а) 14,862; б) 8,73.

№ **1.1.14.** 1) $\frac{7}{22}$ = 0,467; $\sqrt{13}$ = 3,60.
2) *а*) 27,1548; (±0,0016)
б) 0,3945; δ=0,16%.
3) а) 0,3648; б) 21,7.

№ **1.1.15.** 1) $\frac{17}{11}$ = 1,545; $\sqrt{18}$ = 4,243.
2) *а*) 0,8647 (±0,0013);
б) 24,3618; δ=0,22%.
3) а) 2,4516; б) 0,863.

№ **1.1.16.** 1) $\frac{5}{3}$ = 1,667; $\sqrt{38}$ = 6,16.

2) *а*) 3,7542; δ=0,32%
б) 0,98351 (±0,00042).
3) а) 62,74; б) 0,389.

№ **1.1.17.** 1) $\frac{49}{13}$ = 3,77; $\sqrt{14}$ = 3,74.
2) *а*) 83,736; δ=0,085%;
б) 5,6483 (±0,0017).
3) а) 5,6432; б) 0,00858.

№ **1.1.18.** 1) $\frac{13}{7}$ = 1,857; $\sqrt{7}$ = 2,64.
2) *а*) 2,8867; δ=0,43%;
б) 32,7486 (±0,0012).
3) а) 0,0384; б) 63,745.

№ **1.1.19.** 1) $\frac{19}{12}$ = 1,58; $\sqrt{12}$ = 3,46.
2) *а*) 4,88445(±0,00052);
б) 0,096835; δ=0,32%.
3) а) 12,688; б) 4,636.

№ **1.1.20.** 1) $\frac{51}{11}$ = 4,64; $\sqrt{35}$ = 5,91.
2) *а*) 38,4258 (±0,0014);
б) 0,66385; δ=0,34%.
3) а) 6,743; б) 0,543.

№ **1.1.21.** 1) $\frac{18}{7}$ = 2,57; $\sqrt{22}$ = 4,69.
2) *а*) 0,39642 (±0,00022);
б) 46,453; δ=0,15%.
3) а) 15,644; б) 6,125.

№ **1.1.22.** 1) $\frac{19}{9}$ = 2,11; $\sqrt{17}$ = 4,12.
2) *а*) 5,8425; δ=0,23%;
б) 0,66385 (±0,00042).
3) а) 0,3825; б) 24,6.

№ **1.1.23.** 1) $\frac{16}{7}$ = 2,28; $\sqrt{11}$ = 3,32.
2) *а*) 24,3872; δ=0,34%;
б) 0,75244 (±0,00013).
3) а) 16,383; б) 5,734.

№ **1.1.24.** 1) $\frac{20}{13}$ = 1,54; $\sqrt{63}$ = 7,94.
2) *а*) 2,3684 (±0,0017);
б) 45,7832; δ=0,18%.
3) а) 0,573; б) 3,6761.

№ **1.1.25.** 1) $\frac{12}{7}$ = 1,71; $\sqrt{47}$ = 6,86;.
2) *а*) 72,354; δ=0,24%;
б) 0,38725 (±0,00112).
3) а) 18,275; б) 0,00644.

№ **1.1.26.** 1) $\frac{6}{7}$ = 0,857; $\sqrt{41}$ = 6,40.
2) *а*) 0,36127 (±0,00034);
б) 46,7843; δ=0,32%.
3) а) 3,425; *б*) 7,38.

№ **1.1.27.** 1) $\frac{23}{9}$ = 2,56; $\sqrt{87}$ = 9,33.
2) *а*) 23,7564; δ=0,44%;
б) 4,57633 (±0,00042).
3) а) 3,75; *б*) 6,8343.

№ 1.1.28. 1) $\frac{27}{31}=0,872$; $\sqrt{42}=$ 6,48.

2) а) 15,8372 (±0,0026);
б) 0,088748; δ=0,56%.

3) а) 3,643; *б*) 72,385.

№ 1.1.29. 1) $\frac{7}{3}=2,33$; $\sqrt{58}=$ 7,61;.

2) *а*) 3,87683; δ=0,33%;
б) 13,5726 (±0,0072).

3) а) 26,3; *б*) 4,8556.

№ 1.1.30. 1) $\frac{14}{17}=0,823$; $\sqrt{53}=$ 7,28.

2) а) 0,66835 (±0,00115);
б) 23,3748; δ=0,27%.

3) а) 43,813; *б*) 0,645.

Завдання 1.2.

Варіант 1.2.1.

1) $X=\frac{ab}{\sqrt[3]{c}}$

	а	*б*	*в*
a	3,85(±0,01)	4,16(±0,005)	7,27(±0,01)
b	2,0435(±0,0004)	12,163(±0,002)	5,205(±0,002)
c	962,6(±0,1)	55,18(±0,01)	87,32(±0,03)

2) $X=\left[\frac{(a+b)c}{m-n}\right]^2$

	а	*б*	*в*
a	4,3(±0,05)	5,2(±0,04)	2,13(±0,01)
b	17,21(±0,02)	15,32(±0,01)	22,16(±0,03)
c	8,2(±0,05)	7,5(±0,05)	6,3(±0,04)
m	12,417(±0,003)	21,823(±0,002)	16,825(±0,004)
n	8,37(±0,005)	7,56(±0,003)	8,13(±0,002)

3) $S=\frac{h^2}{18}:\frac{a^2+4ab+b^2}{(a+b)^2}$

	а	*б*	*в*
a	1,141	2,234	5,813
b	3,156	4,518	1,315
h	1,14	4,48	2,56

Вариант 1.2.2.

1) $X = \frac{\sqrt{a} \cdot b}{c}$

	а	*б*	*в*
a	228,6(±0,06)	315,6(±0,05)	186,7(±0,04)
b	86,4(±0,02)	72,5(±0,03)	66,6(±0,02)
c	68,7(±0,05)	53,8(±0,04)	72,3(±0,03)

2) $X = \frac{m^3(a+b)}{c-d}$

	а	*б*	*в*
a	13,5(±0,02)	18,5(±0,03)	11,8(±0,02)
b	3,7(±0,02)	5,6(±0,02)	7,4(±0,03)
m	4,22(±0,004)	3,42(±0,003)	5,82(±0,005)
c	34,5(±0,02)	26,3(±0,01)	26,7(±0,03)
d	23,725(±0,005)	14,782(±0,003)	11,234(±0,004)

3) $M = \frac{(a+b)h^3}{4} + \frac{(a+b)h}{12}$

	а	*б*	*в*
a	8,53	6,44	9,05
b	6,271	5,323	3,244
h	12,48	15,44	20,18

Варіант 1.2.3.

1) $X = \frac{\sqrt{ab}}{c}$

	а	*б*	*в*
a	3,845(±0,004)	4,632(±0,003)	7,312(±0,004)
b	16,2(±0,05)	23,3(±0,04)	18,4(±0,03)
c	10,8(±0,1)	11,3(±0,06)	20,2(±0,08)

2) $X = \frac{(a+b)m}{(c-d)^2}$

	а	*б*	*в*
a	2,754(±0,001)	3,236(±0,002)	4,523(±0,003)
b	11,7(±0,04)	15,8(±0,03)	10,8(±0,02)
m	0,56(±0,005)	0,64(±0,004)	0,85(±0,003)
c	10,536(±0,002)	12,415(±0,003)	9,318(±0,002)
d	6,32(±0,008)	7,18(±0,006)	4,17(±0,004)

3) $N = \frac{(a+b)^2}{2h} + \frac{(a^2+b^2)h}{5}$

	а	*б*	*в*
a	0,562	0,834	0,445
b	0,2518	0,3523	0,4834

h	0,68	0,74	0,87

Варіант 1.2.4.

1) $X = \dfrac{a^2 b}{c}$

	а	*б*	*в*
a	3,456(±0,002)	1,245(±0,001)	0,327(±0,005)
b	0,642(±0,0005)	0,121(±0,0002)	3,147(±0,0001)
c	7,12(±0,004)	2,34(±0,003)	1,78(±0,001)

2) $X = \dfrac{(a+b)m}{\sqrt{c-d}}$

	а	*б*	*в*
a	23,16(±0,02)	17,41(±0,01)	32,37(±0,03)
b	8,23(±0,005)	1,27(±0,002)	2,35(±0,001)
c	145,5(±0,08)	342,3(±0,04)	128,7(±0,02)
d	28,6(±0,1)	11,7(±0,1)	27,3(±0,04)
m	0,28(±0,006)	0,71(±0,003)	0,93(±0,001)

3) $V = \dfrac{h}{3} \cdot S\left(1 + \dfrac{a}{A} + \dfrac{a^2}{A^2}\right)$

	а	*б*	*в*
a	8,51	5,71	7,28
A	23,42	32,17	11,71
S	45,8	51,7	21,8
h	3,81	2,42	5,31

Варіант 1.2.5.

1) $X = \dfrac{ab^3}{c}$

	а	*б*	*в*
a	0,643(±0,0005)	0,142(±0,0003)	0,258(±0,0002)
b	2,17(±0,002)	1,71(±0,002)	3,45(±0,001)
c	5,843(±0,001)	3,727(±0,001)	7,221(±0,003)

2) $X = \dfrac{(a-b)c}{\sqrt{m+n}}$

	а	*б*	*в*
a	27,16(±0,006)	15,71(±0,005)	12,31(±0,004)
b	5,03(±0,01)	3,28(±0,02)	1,73(±0,03)
c	3,6(±0,02)	7,2(±0,01)	3,7(±0,02)
m	12,375(±0,004)	13,752(±0,001)	17,428(±0,003)
n	86,2(±0,05)	33,7(±0,03)	41,7(±0,01)

3) $S = \dfrac{h^2}{18} \cdot \dfrac{a^2 + 4ab + b^2}{(a+b)^2}$

	а	*б*	*в*
h	21,1	17,8	32,5
a	22,08	32,47	27,51
b	31,11	11,42	21,78

Варіант 1.2.6.

1) $X = \dfrac{ab}{c^2}$

	а	*б*	*в*
a	0,3575(±0,0002)	0,1756(±0,0001)	0,2731(±0,0003)
b	2,63(±0,01)	3,71(±0,03)	5,12(±0,02)
c	0,854(±0,0005)	0,285(±0,0002)	0,374(±0,0001)

2) $X = \dfrac{a+b}{\sqrt{(c-d)m}}$

	а	*б*	*в*
a	16,342(±0,001)	12,751(±0,001)	31,456(±0,002)
b	2,5(±0,03)	3,7(±0,02)	7,3(±0,01)
c	38,17(±0,002)	23,76(±0,003)	33,28(±0,003)
d	9,14(±0,005)	8,12(±0,004)	6,71(±0,001)
m	3,6(±0,04)	1,7(±0,01)	5,8(±0,02)

3) $V = \dfrac{1}{6}\pi h\left(3a^2 + h^2\right)$

	а	*б*	*в*
a	2,456	7,751	5,441

h	1,76	3,35	6,17

Варіант 1.2.7.

1) $V=\frac{\pi^2}{4}Dd^2$

	а	*б*	*в*
π	3,14	3,14	3,14
D	54(±0,5)	72(±0,3)	31(±0,01)
d	8,235(±0,001)	3,274(±0,002)	7,345(±0,001)

2) $S=\frac{1}{64}\pi\sqrt{D^4-d^4}$

	а	*б*	*в*
D	36,5(±0,1)	41,4(±0,2)	52,6(±0,01)
d	26,35(±0,005)	31,75(±0,003)	48,39(±0,001)
π	3,14	3,14	3,14

3) $a=c^2\left(1+\frac{2\beta}{c}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)$

	а	*б*	*в*
c	2,435	7,834	4,539
β	0,15	0,21	0,34
γ	1,27	3,71	5,93

Варіант 1.2.8.

1) $Y=\frac{m^2n}{c^3}$

	а	*б*	*в*
m	1,6531(±0,0003)	2,348(±0,002)	3,804(±0,003)
n	3,78(±0,002)	4,37(±0,004)	4,05(±0,003)
c	0,158(±0,0005)	0,235(±0,0003)	0,318(±0,0002)

2) $X=\frac{m\sqrt{a-b}}{c+d}$

	а	*б*	*в*
a	9,542(±0,001)	8,357(±0,003)	4,218(±0,001)
b	3,128(±0,002)	2,48(±0,004)	1,57(±0,006)
m	2,8(±0,03)	3,17(±0,01)	2,32(±0,02)
c	0,172(±0,001)	1,315(±0,0004)	2,418(±0,004)
d	5,4(±0,02)	2,4(±0,02)	1,8(±0,01)

3) $V = \frac{1}{15}\pi h\left(2D^2 + Dd + 0{,}75d^2\right)$

	а	*б*	*в*
h	84,2	76	45
D	28,3	17,2	48,3
d	42,08	9,344	32,14

Варіант 1.2.9.

1) $X = \sqrt{\frac{cd}{b}}$

	а	*б*	*в*
c	0,7568(±0,0002)	0,8345(±0,0004)	0,6384(±0,0002)
d	21,7(±0,02)	13,8(±0,03)	32,7(±0,04)
b	2,65(±0,01)	1,84(±0,006)	4,88(±0,03)

2) $y = \frac{\sqrt[3]{a-b}}{m(n-a)}$

	а	*б*	*в*
a	10,82(±0,03)	9,37(±0,004)	11,45(±0,01)
b	2,786(±0,0006)	3,108(±0,0003)	4,431(±0,002)
m	0,28(±0,006)	0,46(±0,002)	0,75(±0,003)
n	14,7(±0,06)	15,2(±0,04)	16,7(±0,05)

3) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где $p = (a+b+c)/2$

	а	*б*	*в*
a	46,3	10,5	2,48
b	29,72	34,18	5,344
c	37,654	27,327	6,0218

Варіант 1.2.10.

1) $f = \frac{Qe^3}{48E}$

	а	*б*	*в*
Q	54,8(±0,02)	38,5(±0,01)	17,3(±0,03)
e	2,45(±0,01)	3,35(±0,02)	5,73(±0,01)
E	0,863(±0,004)	0,734(±0,001)	0,956(±0,004)

2) $Q = \dfrac{(2n-1)^2(x+y)}{x-y}$

	а	*б*	*в*
n	2,0435(±0,0001)	1,1753(±0,0002)	4,5681(±0,0001)
x	4,2(±0,05)	5,8(±0,01)	6,3(±0,02)
y	0,82(±0,01)	0,65(±0,02)	0,42(±0,03)

3) $\gamma = \dfrac{\alpha b - \beta a}{b^2} - \dfrac{\beta(ab - \beta a)}{b^2(b+\beta)}$

	а	*б*	*в*
α	5,27	7,31	3,28
β	0,0562	0,0761	0,0545
a	158,35	234,36	341,17
b	61,21	81,26	52,34

Запитання до захисту лабораторної роботи №1

1. Дайте визначення абсолютної похибки.
2. Дайте визначення відносної похибки та граничної відносної похибки.
3. Що таке сумнівні цифри числа та вірні знаки?
4. Що таке вірні знаки у вузькому сенсі та у широкому сенсі?
5. Що таке правило підрахунку цифр?

Зразок виконання лабораторної роботи №1

Завдання 1.1.

1) Визначити, яка рівність точніше: $\dfrac{14}{17} = 0{,}823$ або $\sqrt{53} = 7{,}28$.
Знаходимо значення данних виразів з більшим числом десяткових знаків:

$a_1 = \dfrac{14}{17} = 0{,}8235294\,...$ $\qquad a_2 = \sqrt{53} = 7{,}2801098...$

Потім обчислюємо граничні абсолютні похибки ($\alpha_{a_1}, \alpha_{a_2}$), округлюючи їх з надлишком:

$\alpha_{a_1} = |0{,}8235294 - 0{,}823| = 0{,}0005294 \approx 0{,}00053$

$\alpha_{a_2} = |7{,}2801098 - 7{,}28| = 0{,}0001098 \approx 0{,}00011$

Граничні відносні похибки (δ_{a_1}, δ_{a_2}) складають:

$$\delta_{a_1} = \frac{\alpha_{a1}}{a_1} = \frac{0{,}0005294}{0{,}823} = 0{,}0006432 \approx 0{,}00064 = 0{,}064\%$$

$$\delta_{a_2} = \frac{\alpha_{a2}}{a_2} = \frac{0{,}0001098}{7{,}28} = 0{,}000015 \approx 0{,}00002 = 0{,}002\%$$

Оскільки $\delta_{a_2} < \delta_{a_1}$, то рівність $\sqrt{53} = 7{,}28$ є більш точною, ніж $\frac{14}{17} = 0{,}823$.

Відповідь: рівність $\sqrt{53} = 7{,}28$ точніше.

2) *а*) Округлити сумнівні цифри числа 0,66835 (± 0,00115), залишивши в його запису тільки вірні цифри у вузькому сенсі.

Нехай $0{,}66835(\pm 0{,}00115) = a$. У числі a =0,66835 ± 0,00115 є вірні і сумнівні цифри, які містяться серед значущих цифр. В даному числі 0 – незначуща цифра та п'ять значущих цифр: 6, 6, 8, 3, 5. Згідно з умовою, похибка α_a= 0,00115 < 0,005 =$\frac{1}{2}\cdot 10^{-2}$; це означає, що у числі 0,66835 вірними у вузькому сенсі є наступні дві підкреслені цифри 0,<u>66</u>835. У записі наближених чисел зберігають тільки вірні цифри. За правилами округлення знайдемо наближене знчення числа, зберігаючи соті долі: a_3=0,67

$\Delta_{окр} = |a - a_1| = |0{,}66835 - 0{,}67| = 0{,}00165$ - похибка округлення,

$\alpha_{a3} = \alpha_a + \Delta_{окр} = 0{,}00115 + 0{,}00165 = 0{,}0028 < 0{,}005 = \frac{1}{2}\cdot 10^{-2}$ -похибка наближеного числа a_3, що є меншою за 0,005. Отже число a_3=0,67 - містить дві вірні в узькому сенсі цифри. Абсолютна похибка цього числа дорівнює 0,0028. б) Округлити сумнівні цифри числа 23,3748 δ=0,27%, залишивши в його запису тільки вірні знаки в широкому сенсі. Визначити абсолютну похибку результату. Нехай a = 23,3748 – наближене число, $\delta_a = 0{,}27\%$ - експериментальна відносна похибка, тоді $\alpha_a = a \cdot \delta_a = 23{,}3748 \cdot 0{,}0027 = 0{,}06312 < 0{,}1 = 1 \cdot 10^{-1}$ - експериментальна абсолютна похибка. В данному числі вірними в широкому сенсі є три підкреслені цифри <u>23,3</u>748. А останні три цифри 7, 4 та 8 є сумнівними. Округлюємо це число, зберігаючи перші три цифри і отримаємо: a_3=23,4. Окрім експириментальної, з'являється похибка округлення. $\Delta_{окр} = |a - a_3| = 0{,}0252$ - похибка округлення.

$\alpha_{a_3} = \alpha_a + \Delta_{окр} = 0{,}06311 + 0{,}0252 = 0{,}08831 < 0{,}1 = 10^{-1}$ - абсолютная похибка числа a_1. Отже, в округленому числі a_3=23,4 всі три цифри вірні в широкому сенсі.

3) Знайти граничні абсолютні та відносні похибки числа 43,813, якщо воно містить тільки вірні цифри: *а*) в узькому сенсі *б*) в широкому сенсі.

а) Оскільки всі 5 цифр числа a = 43,813 вірні в узькому сенсі, то гранична абсолютна похибка складає половину одиниці останнього виписаного розряду. В останньому разряді на місці тисячних стоїть цифра "3", вона третя після коми. Тому гранична абсолютна похибка α_a = 0,0005=0,5$\cdot 10^{-3}$. Гранична відносна похибка $\delta_a = \frac{0{,}5}{a_1 \cdot 10^{n-1}}$, де n - кількість вірних цифр, a_1 – перша вірна зліва цифра, тому $\delta_a = \frac{0{,}0005}{43{,}813} = \frac{1}{2\cdot 10^3 \cdot 4{,}3813 \cdot 10^1} < \frac{1}{2\cdot 4\cdot 10^{5-1}}$ = 0,0000125 =0,00125%.

Відповідь: α=0,0005; δ_a=0,00125%.

б) Оскільки всі 5 цифр числа a = 43,813 вірні в широкому сенсі, то гранична абсолютна похибка складає одиницю останнього розряду. Тому гранична абсолютна похибка α_a = 0,001=1$\cdot 10^{-3}$. Гранична відносна похибка

$\delta_a = \frac{1}{a_1 \cdot 10^{n-1}}$, де n - кількість вірних цифр, a_1 – перша вірна зліва цифра, тому $\delta_a = \frac{0{,}001}{43{,}813} = \frac{1}{10^3 \cdot 4{,}3813 \cdot 10^1} < \frac{1}{4\cdot 10^{5-1}}$ =0,000025 =0,0025%.

Відповідь: α=0,001; δ_a=0,0025%.

Нехай у числа 0,645 вірні всі три цифри у вузьком сенсі, тоді гранична абсолютна похибка складає α_a = 0,0005 = 0,5$\cdot 10^{-3}$. Гранична відносна похибка $\delta_a = \frac{1}{2\cdot 6\cdot 10^{3-1}}$ =0,00083333 =0,083333%.

Відповідь: α=0,0005; δ_a=0,00125% - граничні абсолютні і відносні похибки числа 0,645.

Нехай у числа a=0,645 всі 3 цифри вірні в широкому сенсі, тоді гранична абсолютна похибка α=0,001, а гранична відносна похибка $\delta_a = \frac{1}{6\cdot 10^{3-1}}$ =0,16666=16,667%.

Відповідь: α=0,001; δ_a= 16,667% - граничні абсолютні і відносні похибки числа 0,645.

Завдання 1.2.

1) $x = \dfrac{m^2 n^3}{\sqrt{k}}, де\ \ m = 28{,}3(\pm 0{,}02), n = 7{,}45(\pm 0{,}02), k = 0{,}678(\pm 0{,}003);$

2) $N = \dfrac{(n-1)(m+n)}{(m-n)^2}$, де $n = 3{,}0567(\pm 0{,}0001), m = 5{,}72(\pm 0{,}02);$

3) $V = \pi h^2 \left(R - \dfrac{h}{3} \right)$, де $h = 11{,}8; R = 23{,}67$.

1. Знаходимо:

$m^2 = 800{,}9; n^3 = 413{,}5; \sqrt{k} = 0{,}8234;\ \ x = \dfrac{800{,}9 \cdot 413{,}5}{0{,}8234} = 402200 = 4{,}02 \cdot 10^5$. Далі маємо:

$\delta m = 0{,}02/28{,}3 = 0{,}00071$, $\delta n = 0{,}01/7{,}45 = 0{,}00135,\ \ \delta k = 0{,}003/0{,}678 = 0{,}00443;$

Звідки $\delta x = 2\delta m + 3\delta k + 0{,}5\delta k = 0{,}00769 = 0{,}77\%,\ \ \Delta x = 4{,}02 \cdot 10^5 \cdot 0{,}0077 = 3{,}1 \cdot 10^3$

Результат обчислень виглядає так: $x = 4{,}02 \cdot 10^5 \left(\pm 3{,}1 \cdot 10^3 \right); \delta x = 0{,}77\%.$

2. Маємо:

$n - 1 = 2{,}0567(\pm 0{,}0001); m + n = 3{,}057(\pm 0{,}0004) + 5{,}72(\pm 0{,}02) = 8{,}777(\pm 0{,}0204);$

$m - n = 5{,}72(\pm 0{,}02) - 3{,}057(\pm 0{,}0004) = 2{,}663(\pm 0{,}0204);$

$$N = \frac{2{,}0567 \cdot 8{,}777}{2{,}663^2} 2{,}545 \approx 2{,}55;$$

$$\delta N = \frac{0{,}0001}{2{,}0567} + \frac{0{,}0204}{8{,}777} + 2 \cdot \frac{0{,}0204}{2{,}663} = 0{,}0177 = 1{,}77\%$$

$\Delta N = 2{,}55 \cdot 0{,}0177 = 0{,}046.$

Результат: $N \approx 2{,}55(\pm 0{,}046); \delta N = 1{,}77\%$.

3. Знаходимо:

$$V = 3{,}142 \cdot 11{,}8^2 (23{,}67 - 3{,}933) = 3{,}142 \cdot 11{,}8^2 \cdot 19{,}737 = 437{,}37 \cdot 19{,}737 = 8630 \approx 8{,}63 \cdot 10^3$$

Лабораторна робота № 2. Розв'язання трансцендентних та нелінійних рівнянь

Мета роботи – засвоїти методи розв'язання нелінійних алгебраїчних рівнянь на підставі типових алгоритмів та внутрішніх функцій *SciLab* [1-3,7,20-22].

Завдання до лабораторної роботи №2.

Завдання 2.1. Відокремити корені трансцендентного рівняння $f(x)=0$ графічно або табулюванням на інтервалі $[a, b]$ і знайти один з них методом половинного ділення (бісекції) з відносною похибкою до 0,1%.

Завдання 2.2. Вирішити нелінійне рівняння методом простих ітерацій з відносною похибкою до 0,1%. Порівняти обсяг обчислень, кількість ітерацій при використанні вказаних методів. Самостійно написати скрипт для метода простих ітерацій.

Завдання 2.3. Отримати всі три корені нелінійного рівняння методом Ньютона з завдання 2.2 (*а*).

Варіанти завдань до лабораторної роботи №2

Завдання 2.1.

N	$f(x)$	$[a, b]$
2.1.1.	$(\sin x)^2 - \frac{5}{6}\sin x + \frac{1}{6}$	[0; 1]
2.1.2.	$(\sin x)^2 + \frac{7}{12}\sin x + \frac{1}{12}$	[-1; 0]
2.1.3.	$(\sin x)^2 - \frac{1}{30}\sin x - \frac{1}{30}$	[-0,5; 0,5]
2.1.4.	$(\cos x)^2 + \frac{2}{35}\cos x - \frac{1}{35}$	[0; 2]
2.1.5.	$(\cos x)^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{2}$	[0; 1,5]
2.1.6.	$(\cos x)^2 + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{18}$	[0; 2]
2.1.7.	$(\ln x)^2 - 5\ln x + 6$	[5; 25]
2.1.8.	$(\ln x)^2 - \ln x - 2$	[0,1; 10]
2.1.9.	$(\ln x)^2 - \frac{3}{4}\ln x + \frac{1}{18}$	[0,1; 2]
2.1.10.	$(tgx)^2 + (\sqrt{3} - 1)tgx - \sqrt{3}$	[-1,2; 1]
2.1.11.	$(tgx)^2 - \frac{28}{9}tgx + \frac{1}{3}$	[0; 1,5]
2.1.12.	$(tgx)^2 - \frac{53}{6}tgx - \frac{3}{2}$	[-0,5; 1,5]
2.1.13.	$(\cos x)^2 - \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{25}$	[0; 3]

2.1.14.	$(\sin x)^2+\frac{1}{3}\sin x+\frac{1}{36}$	[-0,5; 0,5]
2.1.15.	$(\lg x)^2-\frac{2}{3}\lg x+\frac{1}{9}$	[0; 3]
2.1.16.	$(\sin x)^2+\frac{5}{6}\sin x+\frac{1}{6}$	[-1; 0]
2.1.17.	$(\sin x)^2-\frac{7}{12}\sin x+\frac{1}{12}$	[0; 1]
2.1.18.	$(\sin x)^2+\frac{1}{30}\sin x-\frac{1}{30}$	[-0,5; 0,5]
2.1.19.	$(\cos x)^2-\frac{2}{35}\cos x-\frac{1}{35}$	[0; 3]
2.1.20.	$(\cos x)^2-\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{16}$	[0; 2]
2.1.21.	$(\cos x)^2-\frac{2}{3}\cos x+\frac{1}{9}$	[0; 2]
2.1.22.	$(\lg x)^2+\frac{5}{3}\lg x-\frac{2}{3}$	[0,001; 3]
2.1.23.	$(\lg x)^2-\lg x-\frac{3}{4}$	[0,1; 35]
2.1.24.	$(\lg x)^2+\frac{3}{5}\lg x-\frac{1}{4}$	[0,01; 3]
2.1.25.	$(tgx)^2-2tgx+1$	[0; 1]
2.1.26.	$(tgx)^2-\frac{7}{4}tgx-\frac{1}{2}$	[-0,5; 1,5]
2.1.27.	$(tgx)^2+\frac{37}{6}tgx+1$	[-1,5; 0]
2.1.28.	$(\sin x)^2-\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{16}$	[0; 1]
2.1.29.	$(\lg x)^2-3\lg x+\frac{9}{4}$	[0,1; 35]
2.1.30.	$(\sin x)^2+\frac{2}{3}\sin x+\frac{1}{9}$	[-1; 0]

Завдання 2.2.

2.2.1. а) $x - sin(x) = 0,25$; б) $x^3 - 3x^2 + 9x - 8 = 0$.

2.2.2. а) $tg(0,58x + 0,1) = x^2$; б) $x^3 - 6x - 8 = 0$.

2.2.3. а) $\sqrt{x} - cos(0,387x) = 0,25$; б) $x^3 - 3x^2 + 6x + 3 = 0$.

2.2.4. а) $tg(0,4x + 0,4) = x^2$; б) $x^3 - 0,1x^2 + 0,4x - 1,5 = 0$.

2.2.5. а) $lgx - \frac{7}{2x+6} = 0$; б) $x^3 - 3x^2 + 9x + 2 = 0$.

2.2.6. а) $tg(0,5x + 0,2) = x^2$ б) $x^3 + x - 5 = 0$.

2.2.7. а) $3x - cos(x) - 1 = 0$; б) $x^3 - 0,2x^2 + 0,5x - 1,2 = 0$.

2.2.8. а) $x + lg|x| = 0,5$; б) $x^3 + 3x + 1 = 0$.

2.2.9. а) $tg(0,5x + 0,1) = x^2$; б) $x^3 + 0,2x^2 + 0,5x - 2 = 0$.

2.2.10. а) $x^2 + 4\sin(x) = 0$; б) $x^3 - 3x^2 + 12x - 9 = 0$.

2.2.11. а) $ctg(1,05x) - x^2 = 0$; б) $x^3 - 0,2x^2 + 0,3x - 1,2 = 0$.

2.2.12. а) $tg(0,4x + 0,3) = x^2$; б) $x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$.

2.2.13. а) $x\, lg|x| - 1,2 = 0$; б) $x^3 - 0,1x^2 + 0,4x - 1,5 = 0$.

2.2.14. а) $1,8x^2 - 4\, sin(10x) = 0$; б) $x^3 + 3x^2 + 6x - 1 = 0$.

2.2.15. а) $ctg(x) - \frac{x}{4} = 0$; б) $x^3 + 0,1x^2 + 0,4x - 1,2 = 0$.

2.2.16. а) $tg(0,3x + 0,4) = x^2$; б) $x^3 + 4x - 6 = 0$.

2.2.17. а) $x^2 - 20\, sin(x) = 0$; б) $x^3 + 0,2x^2 + 0,5x + 0,8 = 0$.

2.2.18. а) $ctg(x) - \frac{x}{3} = 0$; б) $x^3 - 3x^2 + 12x - 12 = 0$.

2.2.19. а) $tg(0,47x + 0,2) = x^2$; б) $x^3 - 0,2x^2 + 0,3x - 1,2 = 0$.

2.2.20. а) $x^2 + 4\, sin(x) = 0$; б) $x^3 - 2x + 4 = 0$.

2.2.21. а) $ctg(x) - \frac{x}{5} = 0$; б) $x^3 - 0,2x^2 + 0,5x - 1,4 = 0$.

2.2.22. а) $2x - lg|x| - 7 = 0$; б) $x^3 - 3x^2 + 6x - 5 = 0$.

2.2.23. а) $tg(0,44x + 0,3) = x^2$ б) $x^3 - 0,1x^2 + 0,4x + 1,2 = 0$.

2.2.24. а) $3x - cos(x) - 1 = 0$; б) $x^3 - 0,2x^2 + 0,5x - 1 = 0$.

2.2.25. а) $ctg(x) - \frac{x}{10} = 0$; б) $x^3 + 3x^2 + 12x + 3 = 0$.

2.2.26. а) $x^2 + 4\, sin(x) = 0$; б) $x^3 - 0,1x^2 + 0,4x + 2 = 0$.

2.2.27. а) $tg(0,36x + 0,4) = x^2$; б) $x^3 - 0,2x^2 + 0,4x - 1,4 = 0$.

2.2.28. а) $x + lg|x| = 0,5$; б) $x^3 + 0,4x^2 + 0,6x - 1,6 = 0$.

2.2.29. а) $ctg(x) - \frac{x}{5} = 0$; б) $x^3 + x - 3 = 0$.

2.2.30. а) $2\, lg|x| - \frac{x}{2} + 1 = 0$; б) $x^3 - 0,2x^2 + 0,5x + 1,4 = 0$.

Запитання до захисту лабораторної роботи №2

1. Поясніть визначення інтервалу виділення кореня.
2. У чому суть методу половинного ділення (методу дихотомії)?
3. Поясніть графічний метод розв’язання рівнянь.

Зразок виконання лабораторної роботи №2

Завдання 2.1.

Розглянемо застосування методу половинного ділення на прикладі розв'язання рівняння $x^3+3x^2-1=0$ на інтервалі відділення [0,1] з точністю ε=0,001. Знаходимо корені рівняння в діапазоні [0;1]. Середина початкового відрізку буде в точці c=0,5; f(0,5)=-0,125, $f(0)\cdot f$(0,125)>0, тому з відрізків [0;0,5] та [0,5;1] обираємо другий, переносимо точку a в точку c шляхом привласнення a=0,5, ділимо новий відрізок [0,5;1] навпіл и т.д. Продовження обчислень приводиться в таблиці:

Відрізок [a,b]	Середина відрізка в точці c	Знак $f(a)\cdot f(c)$ добутку
[0;1]	0,5	+
[0,5;1]	0,75	-
[0,5;0,75]	0,625	-
[0,5;0,625]	0,5625	-
[0,5;0,5625]	0,53125	-
[0,53125;0,53125]	0,546875	-
[0,53125; 0,546875]	0,5390625	-
[0,53125; 0,5390625]	0,5351562	-
[0,53125; 0,5351562]	0,5332031	-
[0,53125; 0,5332031]	0,5322266	
[0,53125; 0,5322266]	0,5317383	
[0,5317383; 0,5322266]	0,5319824	

Довжина отриманого відрізку $|b-a|$ = 0.5322266 - 0,5317383 = 0.0004883<2ε = 0,002, тобто шукана точність досягнута. Розв'язання рівняння x≈0,5319824±0,0005. Розв'язання алгебраїчного рівняння $x^3+3x^2-1=0$ в *SciLab* складається з двох етапів. Необхідно задати поліном $P(x)$ за допомогою функції *poly*, а потім знайти його корені, застосувавши функцію *roots*:

Перший етап:

```
-->V=[-1 0 3 1];
```

```
-->p=poly(V,'x','c')
```
Другий етап:
```
-->X=roots(p)
```
В результаті отримуємо:
```
X  =                              0.5320889
     - 0.6527036
     - 2.8793852
```

Лістинг 2.1.
```
deff('[y]=f1(x)',['y=x^3+3*(x^2)-1'])
function [x0,n]=bisec(a,b,e)
a1=a
b1=b
printf("b: %f, %f\n",f1(b),b)
printf("a: %f, %f\n",f1(a),a)
n=0
while abs(b1-a1)>2*e,
x0=(a1+b1)/2
printf("%f, %f\n",f1(x0),x0)
if (f1(x0)*f1(a1))<=0 then, b1=x0, else, a1=x0, end
n=n+1, end
x0=(a1+b1)/2
endfunction
[x1,n1]=bisec(0,1,0.001)

b: 3.000000, 1.000000
a: -1.000000, 0.000000
-0.125000, 0.500000
1.109375, 0.750000
0.416016, 0.625000
0.127197, 0.562500
-0.003387, 0.531250
0.060772, 0.546875
0.028410, 0.539063
0.012441, 0.535156
0.004509, 0.533203
n1  =
9.
x1  =
```

0.5322266

Завдання 2.2.

Розглянемо застосування ітераційного методу для розв'язання рівняння $x^3+10x-10=0$ з точністю $\varepsilon=0,0001$. Представимо рівняння у вигляді $x = \varphi(x)$, наприклад, у вигляді $x=1-0,1x^3$, де $\varphi(x)=1-0,1x^3$. Знайдемо першу похідну функції $\varphi(x)=1-0,1x^3$. Перша похідна дорівнює $\varphi'(x) = -0,3\cdot x^2$. Значення цієї похідної на відрізку [0;1] не перевищує за абсолютною величиною одиниці. $\varphi'(0) = 0 < 1$ та $|\varphi'(1)| = |-0,3\cdot 1^2| = 0,3 < 1$. Покладемо початкове наближення $x_0=1$. Наступні обчислення виглядають таким чином (з точністю до четвертого десяткового знаку):

$x_1=1-0,1x^3_0=1-0,1\bullet 1^3=0,9$
$x_2=1-0,1x^3_1=1-0,1\bullet 0,9^3=0,9271$
$x_3=1-0,1x^3_2=1-0,1\bullet 0,9271^3=0,9203$
$x_4=1-0,1x^3_3=1-0,1\bullet 0,9203^3=0,9221$
$x_5=1-0,1x^3_4=1-0,1\bullet 0,9221^3=0,9216$
$x_6=1-0,1x^3_5=1-0,1\bullet 0,9216^3=0,9217$
$x_7=1-0,1x^3_6=1-0,1\bullet 0,9217^3=0,9217$

Оскільки $x_7-x_6<\varepsilon$, то набуте значення кореня $x=0,9217$ можна вважати наближеним розв'язком заданого рівняння.

```
-->V=[-10 10 0 1];
-->p=poly(V,'x','c')
-->X=roots(p)
X  =        0.9216990
        - 0.4608495 ± 3.2614639i
```

Лістинг 2.2.

```
deff('[y]=f(x)',['y=x^3+10*x-10'])
deff('[y]=f1(x)',['y=1-((1/10)*x^3)'])
deff('[y]=f2(x)',['y=-(3/10)*x^2'])
function Iter_f(x0,e)
y0=f(x0)
it=0;
while abs(y0)>e,
it=it+1;
printf("Iteration %d,x=%f\n", it,x0);
x0=f1(x0);
y0=f(x0);
```

```
end;
printf("Result: f(%f)=%f\n",x0,y0);
endfunction;
Iter_f(1,0.00001)
```

Реалізація програми:

```
Iteration 1,x=1.000000
Iteration 2,x=0.900000
Iteration 3,x=0.927100
Iteration 4,x=0.920314
Iteration 5,x=0.922051
Iteration 6,x=0.921609
Iteration 7,x=0.921722
Iteration 8,x=0.921693
Iteration 9,x=0.921700
Result: f(0.921699)=-0.000005
```

Відповідь: x = 0.921699.

Завдання 2.3.

Знайти корні нелінійного рівняння методом Ньютона: -$x^2 + tg(0,47x + 0,2) = 0$

Розв’язання**:**

1. Будуємо графік функції в *SciLab*:
2. Знаходимо першу та другу похідні функції.
3. Задаємо функцію і її похідну як початкові дані в програмі.

В редакторі *SciLab* набираємо програму, яка видає на екран графік нашої функції в інтервалі [2; 4] (Рис. 10.1).

```
deff('[y]=f1(x)',['y=(-x^2+tan(0.47*x+0.2))'])
x=2:0.01:4;
xgrid();
plot2d(x,f1(x))
```

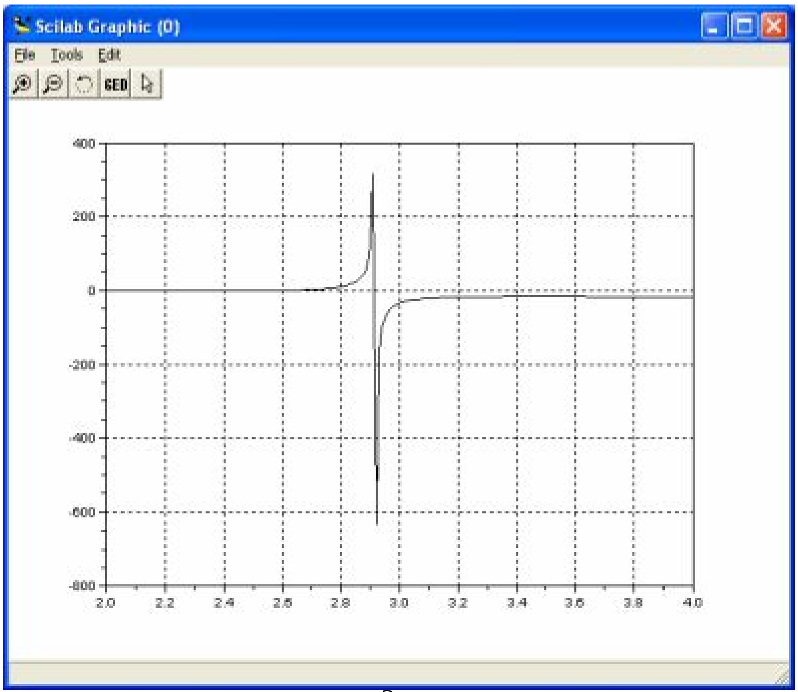


Рис. 10.1. Графік функції $f(x) = -x^2 + tg(0{,}47x + 0{,}2)$ в інтервалі [2; 4].

Програма побудови графіка вихідної функції в інтервалі [0,6; 2,8] (Рис. 10.2).

```
deff('[y]=f1(x)',['y=(-x^2+tan(0.47*x+0.2))'])
x=0.6:0.01:2.8;
xgrid();
plot2d(x,f1(x))
```

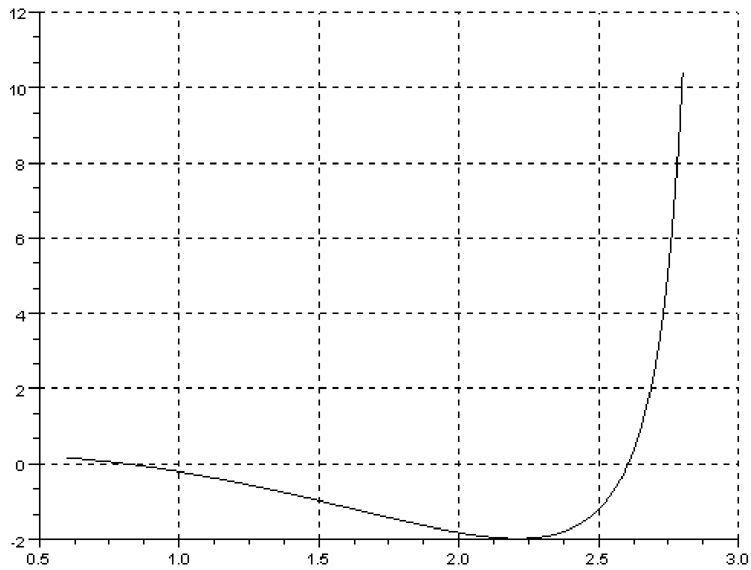


Рис. 10.2. Графік функції $f(x) = -x^2 + tg(0{,}47x + 0{,}2)$ в інтервалі [0,6; 2,8].

$f'(x) = -2x + \frac{0,47}{\cos^2(0,47 \cdot x + 0,2)}$ $f''(x) = -2 - \frac{0,4418 \cdot \sin(0,47 \cdot x + 0,2)}{\cos^3(0,47 \cdot x + 0,2)}$

//Метод Ньютона - алгоритм

```
-->deff('[y]=f1(x)',['y=(-x^2+tan(0.47*x+0.2))'])
-->deff('[y]=f11(x)',['y=-2*x+0.47/((cos(0.47*x+0.2))^2)'])
-->deff('[y]=f111(x)',['y=-2-
0.4418*sin(0.47*x+0.2)/((cos(0.47*x+0.2))^3)'])
-->function [xn,xnp]=newton(a,b,e)
-->printf("b: %f, %f\n",f1(b),b)
-->printf("a: %f, %f\n",f1(a),a)
-->if (sign(f1(a))==sign(f111(a))) then xnp = b, xn = a, printf("xn =
a, %f\n",xn)
-->elseif(sign(f1(b))==sign(f111(b))) xnp = a, xn = b, printf("xn = b,
%f\n",xn)
-->end
-->while abs(xn-xnp)>2*e,
-->printf("xn: %f, %f\n",f1(xn),xn)
-->printf("xnp: %f, %f\n",f1(xnp),xnp)
-->xnp = xn
-->xn=xnp-(f1(xnp)/f11(xnp))
-->printf("%f, %f!!!\n",f1(xn),xn)
-->end
-->printf("%f, %f",xn,xnp)
-->endfunction
```

Результат роботи програми для інтервалу [0,6; 1]:

```
-->[x2,n2]=newton(0.6,1,0.0001)
b: -0.207746, 1.000000
a: 0.163156, 0.600000
xn = b, 1.000000
xn: -0.207746, 1.000000
xnp: 0.163156, 0.600000
-0.020949, 0.831784!!!
xn: -0.020949, 0.831784
```

```
xnp: -0.207746, 1.000000
-0.000358, 0.810451!!!
xn: -0.000358, 0.810451
xnp: -0.020949, 0.831784
-0.000000, 0.810073!!!
xn: -0.000000, 0.810073
xnp: -0.000358, 0.810451
-0.000000, 0.810073!!!
0.810073, 0.810073 n2  =
    0.8100733
x2  =
    0.8100732
```

Другий результат роботи програми для інтервалу [2,5;2,7]:

```
-->[x2,n2]=newton(2.5,2.7,0.0001)
b: 2.499582, 2.700000
a: -1.208085, 2.500000
xn = a, 2.500000
xn: -1.208085, 2.500000
xnp: 2.499582, 2.700000
1.255048, 2.662862!!!
xn: 1.255048, 2.662862
xnp: -1.208085, 2.500000
0.222135, 2.617849!!!
xn: 0.222135, 2.617849
xnp: 1.255048, 2.662862
0.010620, 2.606009!!!
xn: 0.010620, 2.606009
xnp: 0.222135, 2.617849
0.000027, 2.605385!!!
xn: 0.000027, 2.605385
xnp: 0.010620, 2.606009
0.000000, 2.605383!!!
2.605383, 2.605385 n2  =
    2.6053847
x2  =
    2.6053831
```

Відповідь: рішення рівняння при x_1=0,81 $f(x_1)$=0,0000694
при x_2=2,605 $f(x_2)$=,00647
при x_3=2,8 $f(x_3)$-розбігається

Лабораторна робота № 3. Розв'язання систем лінійних рівнянь

Мета роботи - застосовуючи середовище *SciLab* розв'язати системи лінійних алгебраїчних рівнянь матричними та ітераційними методами. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь засобами комп'ютерних технологій у середовищі *SciLab*, використовуючи вбудовану функцію *linsolve*, а також методи простих ітерацій та метод Гауса [1-3,7,19-22].

Завдання до лабораторної роботи №3

Завдання 3.1. Ознайомитись та використати вбудовану функцію *linsolve* для розв'язання системи алгебраїчних лінійних рівнянь. Навчитися завдавати списки в *SciLab*.

Завдання 3.2. Взяти повністю готовий скрипт для методу простих ітерацій, проаналізувати його та підставити в цей реліз умову свого варіанту. Отриманий результат порівняти з попереднім розв'язком, який дістали за допомогою вбудованого оператора *linsolve*.

Завдання 3.3. Для даної системи лінійних рівнянь задати розширену матрицю і скласти програму розв'язання системи прямим методом, відповідно до алгоритму метода Гауса з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$.

Варіанти завдань до лабораторної роботи №3

Завдання 3.1. та 3.2.

3.1.1.
$$\begin{cases} x_1 = 0.23x_1 - 0.04x_2 + 0.21x_3 - 0.18x_4 + 1.24 \\ x_2 = 0.45x_1 - 0.23x_2 + 0.06x_3 - 0.88 \\ x_3 = 0.26x_1 + 0.34x_2 - 0.11x_3 + 0.62 \\ x_4 = 0.05x_1 - 0.26x_2 + 0.34x_3 - 0.12x_4 - 1.17 \end{cases}$$

3.1.2.
$$\begin{cases} x_1 = 0.21x_1 + 0.12x_2 - 0.34x_3 - 0.16x_4 - 0.64 \\ x_2 = 0.34x_1 - 0.08x_2 + 0.17x_3 - 0.18x_4 - 1.42 \\ x_3 = 0.16x_1 + 0.34x_2 + 0.15x_3 - 0.31x_4 - 0.42 \\ x_4 = 0.12x_1 - 0.26x_2 - 0.08x_3 + 0.25x_4 + 0.83 \end{cases}$$

3.1.3.
$$\begin{cases} x_1 = 0.32x_1 - 0.18x_2 + 0.02x_3 + 0.21x_4 + 1.83 \\ x_2 = 0.16x_1 + 0.12x_2 - 0.14x_3 + 0.27x_4 - 0.65 \\ x_3 = 0.16x_1 + 0.27x_2 - 0.02x_3 - 0.24x_4 + 2.23 \\ x_4 = 0.12x_1 + 0.21x_2 - 0.18x_3 + 0.25x_4 - 1.16 \end{cases}$$

3.1.4. $\begin{cases} x_1 = 0.42x_1 - 0.52x_2 + 0.03x_3 + 0.44 \\ x_2 = 0.31x_1 - 0.26x_2 - 0.36x_3 + 1.42 \\ x_3 = 0.12x_1 + 0.08x_2 - 0.14x_3 - 0.24x_4 - 0.83 \\ x_4 = 0.15x_1 - 0.35x_2 - 0.18x_3 - 1.42 \end{cases}$

3.1.5. $\begin{cases} x_1 = 0.18x_1 - 0.34x_2 - 0.12x_3 + 0.15x_4 - 1.33 \\ x_2 = 0.11x_1 + 0.23x_2 - 0.45x_3 + 0.32x_4 + 0.84 \\ x_3 = 0.05x_1 - 0.12x_2 + 0.14x_3 - 0.18x_4 - 1.16 \\ x_4 = 0.12x_1 + 0.08x_2 + 0.06x_3 + 0.57; \end{cases}$

3.1.6. $\begin{cases} x_1 = 0.13x_1 + 0.23x_2 - 0.44x_3 - 0.05x_4 + 2.13 \\ x_2 = 0.24x_1 - 0.31x_3 + 0.15x_4 - 0.18 \\ x_3 = 0.06x_1 + 0.15x_2 - 0.23x_4 + 1.44 \\ x_4 = 0.72x_1 - 0.08x_2 - 0.05x_3 + 2.42 \end{cases}$

3.1.7. $\begin{cases} x_1 = 0.17x_1 + 0.31x_2 - 0.18x_3 + 0.22x_4 - 1.71; \\ x_2 = -0.21x_1 + 0.33x_3 + 0.22x_4 - 0.62; \\ x_3 = 0.32x_1 - 0.18x_2 + 0.05x_3 - 0.19x_4 - 0.89; \\ x_4 = 0.12x_1 + 0.28x_2 - 0.14x_3 + 0.94; \end{cases}$

3.1.8. $\begin{cases} x_1 = 0.13x_1 + 0.27x_2 - 0.22x_3 - 0.18x_4 - 1.21 \\ x_2 = -0.21x_1 - 0.45x_3 + 0.18x_4 + 0.33 \\ x_3 = 0.12x_1 + 0.13x_2 - 0.33x_3 + 0.18x_4 - 0.48 \\ x_4 = 0.33x_1 - 0.05x_2 + 0.06x_3 + 0.28x_4 + 0.17 \end{cases}$

3.1.9. $\begin{cases} x_1 = 0.19x_1 - 0.07x_2 + 0.3/x_3 - 0.21x_4 - 0.81 \\ x_2 = -0.22x_1 + 0.08x_2 + 0.11x_3 + 0.33x_4 - 0.64 \\ x_3 = 0.51x_1 - 0.07x_2 + 0.09x_3 - 0.11x_4 + 1.71 \\ x_4 = 0.33x_1 - 0.41x_2 - 1.21 \end{cases}$

3.1.10. $\begin{cases} x_1 = 0.22x_2 - 0.11x_3 + 0.31x_4 + 2.7 \\ x_2 = 0.38x_1 - 0.12x_3 + 0.22x_4 - 1.5 \\ x_3 = 0.11x_1 + 0.23x_2 - 0.51x_4 + 1.2 \\ x_4 = 0.17x_1 - 0.21x_2 + 0.31x_3 - 0.17 \end{cases}$

3.1.11. $\begin{cases} x_1 = 0.07x_1 - 0.08x_2 + 0.11x_3 - 0.18x_4 - 0.51 \\ x_2 = 0.18x_1 + 0.52x_2 + 0.21x_4 + 1.17 \\ x_3 = 0.16x_1 + 0.31x_2 - 0.21x_4 - 1.02 \\ x_4 = 0.08x_1 - 0.33x_3 + 0.28x_4 - 0.28 \end{cases}$

3.1.12. $\begin{cases} x_1 = 0.05x_1 - 0.06x_2 - 0.23x_3 + 0.14x_4 - 2.17 \\ x_2 = 0.04x_1 - 0.12x_2 + 0.68x_3 + 0.11x_4 + 1.4 \\ x_3 = 0.34x_1 + 0.08x_2 - 0.06x_3 + 0.44x_4 - 2.1 \\ x_4 = 0.11x_1 + 0.12x_2 - 0.03x_4 - 0.8 \end{cases}$

3.1.13. $\begin{cases} x_1 = 0.08x_1 - 0.03x_2 - 0.04x_4 - 1.2 \\ x_2 = 0.51x_2 + 0.27x_3 - 0.08x_4 + 0.81 \\ x_3 = 0.33x_1 - 0.37x_3 + 0.21x_4 - 0.92 \\ x_4 = 0.11x_1 + 0.03x_3 + 0.58x_4 + 0.17 \end{cases}$

3.1.14. $\begin{cases} x_1 = 0.12x_1 - 0.23x_2 + 0.25x_3 - 0.16x_4 + 1.24 \\ x_2 = 0.14x_1 + 0.34x_2 - 0.18x_3 + 0.24x_4 - 0.89 \\ x_3 = 0.33x_1 + 0.03x_2 + 0.46x_3 - 0.32x_4 + 1.15 \\ x_4 = 0.12x_1 - 0.05x_2 + 0.15x_4 - 0.57 \end{cases}$

3.1.15. $\begin{cases} x_1 = 0.23x_1 - 0.14x_2 + 0.06x_3 - 0.16x_4 - 0.64 \\ x_2 = 0.12x_1 + 0.32x_3 - 0.18x_4 - 0.72 \\ x_3 = 0.08x_1 - 0.12x_2 + 0.23x_3 - 0.32x_4 - 0.58 \\ x_4 = 0.25x_1 + 0.22x_2 + 0.14x_3 + 1.56 \end{cases}$

3.1.16. $\begin{cases} x_1 = 0.14x_1 + 0.23x_2 + 0.18x_3 + 0.17x_4 - 1.42 \\ x_2 = 0.12x_1 - 0.14x_2 + 0.08x_3 + 0.09x_4 - 0.83 \\ x_3 = 0.16x_1 + 0.24x_2 - 0.35x_4 + 1.21 \\ x_4 = 0.23x_1 - 0.08x_2 + 0.55x_3 + 0.25x_4 + 0.65 \end{cases}$

3.1.17. $\begin{cases} x_1 = 0.24x_1 + 0.21x_2 + 0.06x_3 - 0.34x_4 + 1.42 \\ x_2 = 0.05x_1 + 0.32x_3 + 0.12x_4 - 0.57 \\ x_3 = 0.35x_1 - 0.27x_2 - 0.05x_4 + 0.68 \\ x_4 = 0.12x_1 - 0.43x_2 + 0.34x_3 - 0.21x_4 + 2.14 \end{cases}$

3.1.18. $\begin{cases} x_1 = 0.17x_1 + 0.27x_2 - 0.13x_3 - 0.11x_4 - 1.42 \\ x_2 = 0.13x_1 - 0.12x_2 + 0.09x_3 - 0.06x_4 + 0.48 \\ x_3 = 0.11x_1 + 0.05x_2 - 0.02x_3 + 0.12x_4 - 2.34 \\ x_4 = 0.13x_1 + 0.18x_2 + 0.24x_3 + 0.43x_4 + 0.72 \end{cases}$

3.1.19. $\begin{cases} x_1 = 0{,}15x_1 + 0{,}05x_2 - 0{,}08x_3 + 0{,}14x_4 - 0{,}48 \\ x_2 = 0{,}32x_1 - 0{,}43x_2 - 0{,}12x_3 + 0{,}11x_4 + 1{,}24 \\ x_3 = 0{,}17x_1 + 0{,}06x_2 - 0{,}08x_3 + 0{,}12x_4 + 1{,}15 \\ x_4 = 0{,}21x_1 - 0{,}16x_2 + 0{,}36x_3 - 0{,}88 \end{cases}$

3.1.20. $\begin{cases} x_1 = 0.28x_2 - 0.17x_3 + 0.06x_4 + 0.21 \\ x_2 = 0.52x_1 + 0.12x_3 + 0.17x_4 - 1.17 \\ x_3 = 0.17x_1 - 0.18x_2 + 0.21x_3 - 0.81 \\ x_4 = 0.11x_1 + 0.22x_2 + 0.03x_3 + 0.05x_4 + 0.72 \end{cases}$

3.1.21. $\begin{cases} x_1 = 0.52x_2 + 0.08x_3 + 0.13x_4 - 0.22 \\ x_2 = 0.07x_1 - 0.38x_2 - 0.05x_3 + 0.41x_4 + 1.8 \\ x_3 = 0.04x_1 + 0.42x_2 + 0.11x_3 - 0.07x_4 - 1.3 \\ x_4 = 0.17x_1 + 0.18x_2 - 0.13x_3 + 0.19x_4 + 0.33 \end{cases}$

3.1.22. $\begin{cases} x_1 = 0.01x_1 + 0.02x_2 - 0.62x_3 + 0.08x_4 - 1.3 \\ x_2 = 0.03x_1 + 0.28x_2 + 0.33x_3 - 0.07x_4 + 1.1 \\ x_3 = 0.09x_1 + 0.13x_2 + 0.42x_3 + 0.28x_4 - 1.7 \\ x_4 = 0.19x_1 - 0.23x_2 + 0.08x_3 + 0.37x_4 + 1.5 \end{cases}$

3.1.23. $\begin{cases} x_1 = 0.17x_2 - 0.33x_3 + 0.18x_4 - 1.2 \\ x_2 = 0.18x_2 + 0.43x_3 - 0.08x_4 - 0.33 \\ x_3 = 0.22x_1 + 0.18x_2 + 0.21x_3 - 0.07x_4 + 0.48 \\ x_4 = 0.08x_1 + 0.07x_2 + 0.71x_3 + 0.04x_4 - 1.2 \end{cases}$

3.1.24. $\begin{cases} x_1 = 0.03x_1 - 0.05x_2 + 0.22x_3 - 0.33x_4 + 0.43 \\ x_2 = 0.22x_1 + 0.55x_2 - 0.88x_3 + 0.07x_4 - 1.8 \\ x_3 = 0.33x_1 + 0.13x_2 - 0.08x_3 - 0.05x_4 - 0.8 \\ x_4 = 0.08x_1 + 0.17x_2 + 0.29x_3 + 0.33x_4 + 1.7 \end{cases}$

3.1.25. $\begin{cases} x_1 = 0.13x_1 + 0.22x_2 - 0.33x_3 + 0.07x_4 + 0.11 \\ x_2 = 0.45x_2 - 0.23x_3 + 0.07x_4 - 0.33 \\ x_3 = 0.11x_1 - 0.08x_3 + 0.78x_4 + 0.85 \\ x_4 = 0.08x_1 + 0.09x_2 + 0.33x_3 + 0.21x_4 - 1.7 \end{cases}$

3.1.26. $\begin{cases} x_1 = 0.32x_1 - 0.16x_2 - 0.08x_3 + 0.15x_4 + 2.42 \\ x_2 = 0.16x_1 - 0.23x_2 + 0.11x_3 - 0.21x_4 + 1.43 \\ x_3 = 0.05x_1 - 0.08x_2 + 0.34x_4 - 0.16 \\ x_4 = 0.12x_1 + 0.14x_2 - 0.18x_3 + 0.06x_4 + 1.62 \end{cases}$

3.1.27. $\begin{cases} x_1 = 0.08x_2 - 0.23x_3 + 0.32x_4 + 1.34 \\ x_2 = 0.16x_1 - 0.23x_2 + 0.18x_3 + 0.16x_4 - 2.33 \\ x_3 = 0.15x_1 + 0.12x_2 + 0.32x_3 - 0.18x_4 + 0.34 \\ x_4 = 0.25x_1 + 0.21x_2 - 0.16x_3 + 0.03x_4 + 0.63 \end{cases}$

3.1.28. $\begin{cases} x_1 = 0.06x_1 + 0.18x_2 + 0.33x_2 + 1.16x_4 + 2.43 \\ x_2 = 0.32x_1 + 0.23x_3 - 0.35x_4 - 1.12 \\ x_3 = 0.16x_1 - 0.08x_2 - 0.12x_4 + 0.43 \\ x_4 = 0.09x_1 + 0.22x_2 - 0.13x_4 + 0.83 \end{cases}$

3.1.29. $\begin{cases} x_1 = 0.34x_2 + 0.23x_3 - 0.06x_4 + 1.42 \\ x_2 = 0.11x_1 - 0.23x_2 - 0.18x_3 + 0.36x_4 - 0.66 \\ x_3 = 0.23x_1 - 0.12x_2 + 0.16x_3 - 0.35x_4 + 1.08 \\ x_4 = 0.12x_1 + 0.12x_2 - 0.47x_3 + 0.18x_4 + 1.72 \end{cases}$

3.1.30. $\begin{cases} x_1 = 0.32x_1 - 0.23x_2 + 0.41x_2 - 0.06x_4 + 0.67 \\ x_2 = 0.18x_1 + 0.12x_2 - 0.33x_3 - 0.88 \\ x_3 = 0.12x_1 + 0.32x_2 - 0.05x_3 + 0.67x_4 - 0.18 \\ x_4 = 0.05x_1 - 0.11x_2 + 0.09x_3 - 0.12x_4 + 1.44 \end{cases}$

Завдання 3.3.

3.3.1. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$

3.3.2. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -8. \end{cases}$

3.3.3. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$

3.3.4. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -5, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -4, \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 12, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5. \end{cases}$

3.3.5. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4, \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 16. \end{cases}$

3.3.6. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 20, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 9, \\ 5x_1 - 7x_2 + 10x_4 = -9, \\ 3x_2 - 5x_3 = 1. \end{cases}$

3.3.7. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ x_1 - 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$

3.3.8. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 6. \end{cases}$

3.3.9. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 10. \end{cases}$

3.3.10. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_4 = -9, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -7, \\ 3x_2 - 2_3 + 4x_4 = 12, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$

3.3.11. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$

3.3.12. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

3.3.13. $\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_4 = -9, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 4x_4 = -7, \\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 = -16, \\ x_1 - 4x_2 + x_4 = 0. \end{cases}$

3.3.14. $\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 4x_4 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 8, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$

3.3.15. $\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 12, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 12, \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 = 4. \end{cases}$

3.3.16. $\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$

3.3.17. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4. \end{cases}$

3.3.18. $\begin{cases} 5x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4. \end{cases}$

3.3.19. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -6. \end{cases}$

3.3.20. $\begin{cases} 2x_1 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

3.3.21. $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -5. \end{cases}$

3.3.22. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 1, \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -5, \\ x_1 - 2x_3 + 3x_4 = -4, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 5. \end{cases}$

3.3.23. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

3.3.24. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = -6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 5x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 28, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

3.3.25. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = -15. \end{cases}$

3.3.26. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = -2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 8, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 7x_4 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 7. \end{cases}$

3.3.27. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 3, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 5. \end{cases}$

3.3.28. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 1. \end{cases}$

3.3.29. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 8, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + x_4 = -3, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 6, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 3x_4 = -3. \end{cases}$

3.3.30. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = -5, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 7x_4 = -3. \end{cases}$

Запитання до захисту лабораторної роботи №3

1. У чому відмінність задачі апроксимації від задачі інтерполяції?
2. Як виглядає звернення до вбудованої функції linsolve? Як завдається таблиця та стовпець?
3. До якого вигляду треба звести систему рівнянь, щоб розв'язати її методом простих ітерацій?
4. Умова збігу ітераційного процеса?
5. Який оператор у *SciLab* підраховує норму матриці або вектора?
6. Яка система називається сумісною?
7. У чому суть метода Гауса?

Зразок виконання лабораторної роботи №3

Завдання 3.1.

Розглянемо розв'язання системи трьох рівнянь з трьома невідомими змінними *x*, *y*, *z*: $\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4. \end{cases}$

Для вирішення систем рівнянь в *SciLab* існує функція *linsolve*. Звернення до якої виглядає наступним чином: *linsolve*(*A*,*B*). Де *A* — таблиця, складена з коефіцієнтів рівнянь системи, кожен рядок є списком коефіцієнтів одного з рівнянь системи, *B* — стовпець, що містить вільні (що стоять після знаку «=») коефіцієнти. Потрібно обов'язково звести систему до вигляду *AX* + *B* = 0.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 - 1 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 4 = 0, \end{cases} \quad \text{де} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Для створення списку в *SciLab* необхідно вказати його ім'я і далі у квадратних дужках, перерахувати елементи списку, розділяючи їх символами «,» або «;», у першому випадку елементи списку розташовуватимуться в рядок, в другому — в стовпець. Введення елементів матриці так само здійснюється в квадратних дужках, при цьому елементи рядка відділяються один від одного пропуском або комою, а рядки розділяються між собою крапкою з комою:

Примітка: при завданні в *SciLab* вектор $\overline{B}$ повинен бути саме стовпцем, тому перерахування змінних потрібно робити через «;», або за допомогою операції «'» транспонування.

A = [1 1 -4;1 2 -3;3 -2 4]; $\overline{b}$ = [-1 -5 -4]';

Лістинг 3.1. Приклад розв'язання системи лінійних рівнянь $Ax=B$.

```
A=[1 1 -4;1 2 -3;3 -2 4];
B=[-1 -5 -4]';
[x]=linsolve(A,B)
```

Завдання 3.2.

Систему лінійних рівнянь $Ax=b$ будь яким способом записуємо у вигляді: $x=Bx+c$.

Метод простої ітерації полягає в наступному: береться деякий вектор $x^0 \in R^n$ і будується послідовність векторів $\{x^k\}$ по формулі

$$x^{k+1} = B \times x^k + c.$$

Приведемо систему до вигляду, придатному для застосування метода простих ітерацій. Методом ітерацій вирішити систему лінійних рівнянь з точністю до 0,001, заздалегідь оцінивши число необхідних для цього кроків. Наприклад, для системи

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 1, & (A) \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5, & (B) \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4. & (C) \end{cases}$$

можна зробити наступні перетворення

Система не відповідає умовам теореми збіжності. Приводимо систему до нормального вигляду. У першому рівнянні (A) коефіцієнт при x_3 по модулю більше суми модулів решти коефіцієнтів, приймемо дане рівняння за третє рівняння нової системи. Перше рівняння отримаємо, підсумовуючи перше (A) і третє (C) рівняння. Друге рівняння отримаємо віднімаючи від рівняння (B), помноженого на 4 рівняння (C) помножене на 3. У лінійній комбінації повинні брати участь всі рівняння початкової системи. Дістанемо перетворену систему рівнянь еквівалентну ісходній і що задовольняє умовам збіжності процесу ітерації.

$4x_1-x_2+0=5,$

$x_1+5x_2+0=17,$

$x_1+x_2-4x_3=1.$

Поділимо рівняння на діагональні коефіцієнти і вирішимо кожне з рівнянь щодо отриманих на діагоналі невідомих з коефіцієнтом 1.

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 5, & (A)+(C) \\ x_1 + 5x_2 = 17, & (B)\cdot 4-(A)\cdot 3 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 1. & (A) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{4}x_2 + \dfrac{5}{4}, \\ x_2 = -\dfrac{1}{5}x_1 + \dfrac{17}{5}, \\ x_3 = \dfrac{1}{4}x_1 + \dfrac{1}{4}x_2 - \dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

Вирішивши цю систему щодо діагональних невідомих, будемо мати систему

x_1=0,25x_2+1,25,
x_2=-0,2x_1+3,4,
x_3=0,25x_1+0,254x_2-0,25.

до якої можна застосувати метод ітерацій. Система приведена до вигляду придатному для застосування методу простій ітерації. Коли коефіціенти при діагональних елементах 4; 5; 4 системи (*) переважають над рештою коефіцієнтів при невідомих.

Достатня умова збіжності методу простих ітерацій полягає в тому, що норма матриці $\|B\|< 1$. В даному випадку $B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$.

$\|B\|$ = max\{0+0,25+0; 0,2+0+0;),25+0,25+0\}=0,5 < 1.

Тоді СЛАУ має єдиний розв'язок $\bar{x}$ і послідовність x^{k+1} збігається до нього із швидкістю геометричної прогресії. Кількість кроків, які дають розв'язок з точністю до 0,001, визначимо за допомогою співвідношення $\left\|X^* - X^k\right\| \le \dfrac{\|B\|^{k+1}}{1-\|B\|}\cdot\|c\| \le 0{,}001.$ Означає, що ітераційний процес сходиться. Тут $\|c\|$ = $max\left\{\dfrac{5}{4};\dfrac{17}{5};\dfrac{1}{4}\right\}$=3,4. $\|c\|$= max\{1,25; 3,4; 0,25\}=3.4. Маємо $\dfrac{0{,}5^{k+1}}{1-0{,}5}\cdot 3{,}4 \le 0{,}001$ $\dfrac{0{,}5^{k+1}}{0{,}5}\cdot 3{,}4 < 0{,}001$; $\Leftrightarrow$ $0{,}5^{k+1} < \dfrac{0{,}001\cdot 0{,}5}{3{,}4}$;

(k+1)×lg0,5<-3+lg0,5-lg3,4; $\Leftrightarrow$ $k+1 > \dfrac{-3-0{,}30103+0{,}5314}{-0{,}30103}$ = 9,2; $\Rightarrow$ k³9.

Потрібно провести 9 ітерацій, щоб напевне дістати відповідь з точністю 0,001.

Обчислення розташовуємо в таблиці:

k	x_1	x_2	x_3
0	1,25	3,4	-0,25
1	2,1	3,15	0,9125
2	2,0375	2,98	1,0625
3	1,995	2,9925	1,004375
4	1,998125	3,001	0,996875
5	2,00025	3,000375	0,9997812
6	2,0000938	2,99995	1,0001562
7	1,9999875	2,9999812	1,0000109
8	1,9999953	3,0000025	0,9999922

Збіжність в тисячних долях має місце на 9-му кроці.
Відповідь: $x_1 \approx 2{,}000$; $x_2 \approx 3{,}000$; $x_3 \approx 1{,}000$.

Лістинг 3.2. Приклад розв’язання системи лінійних рівнянь $Ax=b$.

```
a=[0 0.25 0;-0.2 0 0;0.25 0.25 0];
b=[1.25 3.4 -0.25]';
x0=[1.25 3.4 -0.25]';
e=0.0001
x1=a*x0+b
printf("%f\n",norm(x1-x0,1))
while abs(norm(x1-x0,1))>2*e,
//printf("%f\n",x1)
printf("norm: %f\n",norm(x1-x0,1))
x1=x0
x0=a*x0+b, end
```

Завдання 3.3.

Спочатку проводимо прямий ход методу Гауса, а потім зворотний. Прямий ход методу Гауса - це етап перетворень системи, що зводить розширену матрицю до трикутної форми. Відразу складаємо розширену матрицю B і нам зручніше буде працювати з розширеною матрицею. Продовжуючи аналогічні обчислення, у результаті буде отримано еквівалентну трикутну систему звідки і знайдуть послідовно всі компоненти розв’язання.

Лістинг 3.3. Приклад розв'язання системи лінійних рівнянь $Ax=b$ методом Гауса.

```
d=[1 1 -4 1;1 2 -3 5;3 -2 4 4];      // розширена матриця коефіцієнтів
d(1,:)/d(1,1);                       // першу строку розширеної матриці
                                     // розділено на a11;
d(2,:)=d(2,:)-d(1,:)*d(2,1);  // від другої строки віднімаємо першу
                                     помножену // на a21
d(3,:)=d(3,:)-d(1,:)*d(3,1)   // від третьої строки віднімаємо першу
                                     помножену //на a31;
                                      //перша допоміжна матриця.
d(2,:)/d(2,2);                       //  другу строку матриці розділено на a22;
d(3,:)=d(3,:)-d(2,:)*d(3,2)   // від третьої строки віднімається друга,
                                     // помножена на a32;
//друга допоміжна матриця. Результатом виконаної роботи з'явиться
рівняння, //що містить лише останнє невідоме системи, з якого воно і
знаходиться.
```

Зворотний ход методу Гауса - це знаходження невідомих по черзі, вслід за першим знайденим. Наприклад, розв'яжемо систему лінійних рівнянь методом Гауса з вибором головного елементу.

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4 = 3, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = -6. \end{cases}$$

Запис цього фрагменту у *Scilab* виглядає у наступному

```
A=[ 4 -2 -1 -4; 2 -1 1 -1; 3 0 -1 1; 2 2 -2 4]
B=[-3 -1 3 6]'
[x]=linsolve(A,B)
```

Оберемо найбільший за модулем елемент a_{pq}, який не належить стовпцю вільних членів матриці *A*. Нехай $maxi = a_{11} = 4$. Тоді система та відповідна матриця набуватимуть вигляд:

$$\begin{cases} 1x_1 - \frac{2}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 - x_4 = \frac{3}{4}, \\ 0 \cdot x_1 - 0 \cdot x_2 + \frac{3}{2}x_3 + x_4 = \frac{-1}{2}, \\ 0 \cdot x_1 + \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_3 + 4x_4 = -\frac{21}{4}, \\ 0 \cdot x_1 + 3x_2 + \frac{5}{2}x_3 + 4x_4 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Відповідна матриця має вигляд: $A(1) = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/4 & -1 & 3/4 \\ 0 & 0 & 3/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 3/2 & 1/4 & 4 & -21/4 \\ 0 & 3 & -3/2 & 6 & -15/2 \end{pmatrix}$

Далі побудуємо матрицю $A(1)$ з трьома строками та чотирьма стовпцями. Матриця $A(1)$ дістається перетворенням з A, при якому головний рядок і головний стовпець матриці A виключається.

$\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{4} & 4 & -\frac{21}{4} \\ 3 & \frac{-3}{2} & \langle 6 \rangle & -\frac{15}{2} \end{pmatrix}$. Нехай $max\ i = a_{44} = 6$, тоді

$A(2) = \begin{pmatrix} \frac{-3}{8} & \frac{25}{16} & 0 & \frac{13}{16} \\ \frac{3}{8} & -\frac{1}{16} & 1 & -\frac{21}{16} \\ \frac{3}{2} & \frac{11}{4} & 0 & \frac{23}{4} \end{pmatrix}$.

Після виключення головного рядка і головного стовпця отримуємо матрицю $\begin{pmatrix} -\frac{3}{8} & \left\langle \frac{25}{16} \right\rangle & \frac{13}{16} \\ \frac{3}{2} & \frac{11}{4} & \frac{23}{4} \end{pmatrix}$. У цій матриці вибираємо головний елемент $max\ i$ = a23 = 25/16. Перераховуємо її і отримуємо: $A(3) = \begin{pmatrix} -\frac{6}{25} & 1 & \frac{13}{25} \\ \frac{54}{25} & 0 & \frac{108}{25} \end{pmatrix}$. Виключаємо головний рядок і стовпець $\begin{pmatrix} \frac{54}{25} & \frac{108}{25} \end{pmatrix}$.

Відповідна система має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{54}{25}x_2 = \frac{108}{25} \\ -\frac{6}{25}x_2 + x_3 = \frac{13}{25} \\ \frac{3}{8}x_2 - \frac{1}{16}x_3 + x_4 = -\frac{21}{16} \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_3 - x_4 = \frac{3}{4} \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -2 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

Лістинг 3.4.

```
// Рішення СЛАУ методом Гауса з вибором головного елементу
-->A=[ 4 -2 -1 -4; 2 -1 1 -1; 3 0 -1 1; 2 2 -2 4];
-->B=[3 1 -3 -6]';
-->C=[A B]
C =   4.  - 2.  - 1.  - 4.    3.
        2.  - 1.    1.  - 1.    1.
3.    0.  - 1.    1.  - 3.
2.    2.  - 2.    4.  - 6.
-->max(abs(A))
ans  =     4.

-->C(2,:)=C(2,:)+C(1,:)*(-C(2,1)/C(1,1));
-->C(3,:)=C(3,:)+C(1,:)*(-C(3,1)/C(1,1));
-->C(4,:)=C(4,:)+C(1,:)*(-C(4,1)/C(1,1));
-->C(1,:)=C(1,:)/C(1,1)
C  =  1.  - 0.5  - 0.25  - 1.    0.75
0.    0.     1.5     1.  - 0.5
0.    1.5  - 0.25    4.  - 5.25
0.    3.   - 1.5     6.  - 7.5

-->D=[C(2:4,2:5)]
D  =  0.     1.5     1.  - 0.5
1.5  - 0.25    4.  - 5.25
3.   - 1.5     6.  - 7.5
-->max(abs(D(1:3,1:3)))
ans  =           6.

-->D(1,:)=D(1,:)+D(3,:)*(-D(1,3)/D(3,3));
-->D(2,:)=D(2,:)+D(3,:)*(-D(2,3)/D(3,3));
-->D(3,:)=D(3,:)/D(3,3)
```

```
D  = - 0.5    1.75    0.    0.75
- 0.5    0.75    0.  - 0.25
  0.5  - 0.25    1.  - 1.25
-->E=[D(1:2,1:2) D(1:2,4)]
E  =  - 0.5    1.75    0.75
- 0.5    0.75  - 0.25
-->max(abs(E(1:2,1:2)))
ans  =            1.75
-->E(2,:)=E(2,:)+E(1,:)*(-E(2,2)/E(1,2));
-->E(1,:)=E(1,:)/E(1,2)
E  =    - 0.2857143    1.    0.4285714
  - 0.2857143    0.  - 0.5714286

-->x2=E(2,3)/E(2,1)
x2  =    2.
-->x3=E(1,3)-x2*E(1,1)
x3  =    1.
-->x4=D(3,4)-x3*D(3,2)-x2*D(3,1)
x4  =  - 2.
-->x1=C(1,5)-x2*C(1,2)-x3*C(1,3)-x4*C(1,4)
x1  =    0.
```

Відповідь: x1=0, x2=2, x3=1, x4= -2.

Лабораторна робота № 4. Розв’язання систем нелінійних рівнянь

Мета роботи – навчитись розв’язувати систему нелінійних алгебраїчних рівнянь застосовуючи середовище *SciLab* для методу простих ітерацій та методу Ньютона [7,19-22].

Завдання до лабораторної роботи №4.

Завдання 4.1. Відокремити корені ситеми нелінійних рівняння, віднайти наближені значення цих коренів. За допомогою побудови ізоліній.

Завдання 4.2. Вирішити першу систему нелінійних рівнянь методом простих ітерацій. Знайти один з коренів методом простих ітерацій з відносною похибкою до 0,1%.

Завдання 4.3. Вирішити другу систему нелінійних рівнянь методом Ньютона з відносною похибкою до 0,1%. Порівняти обсяг обчислень, кількість ітерацій при використанні вказаних методів. Самостійно написати скрипт для метода Ньютона.

Варіанти завдань до лабораторної роботи №4.

4.2.01. $\begin{cases} \sin(x+1) - y = 1{,}2; \\ 2x + \cos y = 2. \end{cases}$

4.2.02. $\begin{cases} \cos(x-1) + y = 0{,}5; \\ x - \cos y = 3. \end{cases}$

4.2.03. $\begin{cases} \sin x + 2y = 2; \\ \cos(y-1) + x = 0{,}7. \end{cases}$

4.2.04. $\begin{cases} \cos x + y = 1{,}5; \\ 2x - \sin(y-0{,}5) = 1. \end{cases}$

4.2.05. $\begin{cases} \sin(x+0{,}5) - y = 1; \\ \cos(y-2) + x = 0. \end{cases}$

4.2.06. $\begin{cases} \cos(x+0{,}5) + y = 0{,}8; \\ \sin y - 2x = 1{,}6. \end{cases}$

4.2.07. $\begin{cases} \sin(x-1) = 1{,}3 - y; \\ x - \sin(y+1) = 0{,}8. \end{cases}$

4.2.08. $\begin{cases} 2y - \cos(x+1) = 0; \\ x + \sin y = -0{,}4. \end{cases}$

4.2.09. $\begin{cases} \cos(x+0{,}5) - y = 2; \\ \sin y - 2x = 1. \end{cases}$

4.2.10. $\begin{cases} \sin(x+2) - y = 1{,}5; \\ x + \cos(x-2) = 0{,}5. \end{cases}$

4.2.11. $\begin{cases} \sin(y+1) - x = 1{,}2; \\ 2y + \cos x = 2. \end{cases}$

4.2.12. $\begin{cases} \cos(y-1) + x = 0{,}5; \\ y - \cos x = 3. \end{cases}$

4.2.13. $\begin{cases} \sin y + 2x = 2; \\ \cos(x-y) + y = 0{,}7. \end{cases}$

4.2.14. $\begin{cases} \cos y + x = 1{,}5; \\ 2y - \sin(x-0{,}5) = 1. \end{cases}$

4.2.15. $\begin{cases} \sin(y+0{,}5) - x = 1; \\ \cos(x-2) + y = 0. \end{cases}$

4.3.01. $\begin{cases} tg(xy+0{,}4) = x^2; \\ 0{,}6x^2 + 2y^2 = 1, \quad x > 0, y > 0. \end{cases}$

4.3.02. $\begin{cases} \sin(x+y) - 1{,}6x = 0; \\ x^2 + y^2 = 1, \; x > 0, y > 0. \end{cases}$

4.3.03. $\begin{cases} tg(xy+0{,}1) = x^2; \\ x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$

4.3.04. $\begin{cases} \sin(x+y) - 1{,}2x = 0{,}2; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

4.3.05. $\begin{cases} tg(xy+0{,}3) = x^2; \\ 0{,}9x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$

4.3.06. $\begin{cases} \sin(x+y) - 1{,}3x = 0; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

4.3.07. $\begin{cases} tg(xy) = x^2; \\ 0{,}8x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$

4.3.08. $\begin{cases} \sin(x+y) - 1{,}5x = 0{,}1; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

4.3.09. $\begin{cases} tg(xy) = x^2; \\ 0{,}7x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$

4.3.10. $\begin{cases} \sin(x+y) - 1{,}2x = 0{,}1; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

4.3.11. $\begin{cases} tg(xy+0{,}2) = x^2; \\ 0{,}6x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$

4.3.12. $\begin{cases} \sin(x+y) = 1{,}5x - 0{,}1; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

4.3.13. $\begin{cases} tg(xy+0{,}4) = x^2; \\ 0{,}8x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$

4.3.14. $\begin{cases} \sin(x+y) = 1{,}2x - 0{,}1; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

4.3.15. $\begin{cases} tg(xy+0{,}1) = x^2; \\ 0{,}9x^2 + 2y^2 = 1. \end{cases}$

4.2.16. $\begin{cases}\cos(y+0{,}5)+x=0{,}8;\\ \sin x-2y=1{,}6.\end{cases}$

4.2.17. $\begin{cases}\sin(y-1)+x=1{,}3;\\ y-\sin(x+1)=0{,}8.\end{cases}$

4.2.18. $\begin{cases}2x-\cos(y+1)=0;\\ y+\sin x=-0{,}4.\end{cases}$

4.2.19. $\begin{cases}\cos(y+0{,}5)-x=2;\\ \sin x-2y=1.\end{cases}$

4.2.20. $\begin{cases}\sin(y+2)-x=1{,}5;\\ y+\cos(x-2)=0{,}5.\end{cases}$

4.2.21. $\begin{cases}\sin(x+1)-y=1;\\ 2x+\cos y=2.\end{cases}$

4.2.22. $\begin{cases}\cos(x-1)+y=0{,}8;\\ x-\cos y=2.\end{cases}$

4.2.23. $\begin{cases}\sin x+2y=1{,}6;\\ \cos(y-1)+x=1.\end{cases}$

4.2.24. $\begin{cases}\cos x+y=1{,}2;\\ 2x-\sin(y-0{,}5)=2.\end{cases}$

4.2.25. $\begin{cases}\sin(x+0{,}5)-y=1{,}2;\\ \cos(y-2)+x=0.\end{cases}$

4.2.26. $\begin{cases}\cos(x+0{,}5)+y=1;\\ \sin y-2x=2.\end{cases}$

4.2.27. $\begin{cases}\sin(x-1)+y=1{,}5;\\ x-\sin(y+1)=1.\end{cases}$

4.2.28. $\begin{cases}\sin(y+1)-x=1;\\ 2y+\cos x=2.\end{cases}$

4.2.29. $\begin{cases}\cos(y-1)+x=0{,}8;\\ y-\cos x=2.\end{cases}$

4.2.30. $\begin{cases}\cos(x-1)+y=1;\\ \sin y+2x=1{,}6.\end{cases}$

4.3.16. $\begin{cases}\sin(x+y)-1{,}4x=0;\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$

4.3.17. $\begin{cases}tg(xy+0{,}1)=x^2;\\ 0{,}5x^2+2y^2=1.\end{cases}$

4.3.18. $\begin{cases}\sin(x+y)=1{,}1x-0{,}1;\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$

4.3.19. $\begin{cases}tg(x-y)-xy=0;\\ x^2+2y^2=1.\end{cases}$

4.3.20. $\begin{cases}\sin(x-y)-xy=-1;\\ x^2-y^2=\dfrac{3}{4}.\end{cases}$

4.3.21. $\begin{cases}tg(xy+0{,}2)=x^2;\\ x^2+2y^2=1.\end{cases}$

4.3.22. $\begin{cases}\sin(x+y)-1{,}5x=0;\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$

4.3.23. $\begin{cases}tg(xy)=x^2;\\ 0{,}5x^2+2y^2=1.\end{cases}$

4.3.24. $\begin{cases}\sin(x+y)=1{,}2x-0{,}2;\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$

4.3.25. $\begin{cases}tg(xy+0{,}1)=x^2;\\ 0{,}7x^2+2y^2=1.\end{cases}$

4.3.26. $\begin{cases}\sin(x+y)-1{,}5x=0{,}2;\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$

4.3.27. $\begin{cases}tg(xy)=x^2;\\ 0{,}6x^2+2y^2=1.\end{cases}$

4.3.28. $\begin{cases}\sin(x+y)-1{,}2x=0;\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$

4.3.29. $\begin{cases}tg(xy+0{,}3)=x^2;\\ 0{,}5x^2+2y^2=1.\end{cases}$

4.3.30. $\begin{cases}\sin(x+y)-1{,}1x=0{,}1;\\ x^2+y^2=1.\end{cases}$

Запитання до захисту лабораторної роботи №4

1. Чим відрізняються системи лінійних алгебраїчних рівнянь від систем нелінійних рівнянь?
2. Які є чисельні методи розв’язання систем нелінійних рівнянь?

Зразок виконання лабораторної роботи №4

Завдання 4.1. Відділення коренів проводиться графічно.

Відділяємо наближені значення для x_0,y_0 графічно за допомогою готового скрипта. За допомогою команди *fcontour2d* можна зобразити просторову поверхню у вигляді набору ізоліній на площині (рис.10.3). Це сукупність ліній рівня з однаковим шагом. Утворювані при проектуванні точок поверхні $z=f(x,y)$ на площині аргументів при постійних значеннях $z=h_1$, h_2, … , h_n. Площина $f(x,y)=c$ перетинає поверхню по лінії рівня.

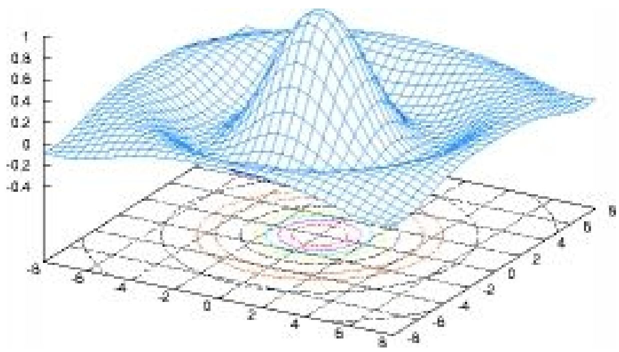


Рис.10.3. Зображення просторової поверхні

Щоб знайти початкове наближення інтегруємо вже готовий скрипт побудуви ліній рівня в *SciLab*. Самостійно потрібно лише доробити цей скрипт під власний варіант та зробити його здійснюваним. Наприклад, для системи $\begin{cases} \sin(2x-y)-1{,}2x=0{,}4; \\ 0{,}8x^2+1{,}5y^2=1,\ x>0,\ y>0; \end{cases}$ маємо

$$\begin{cases} y_1(x,y)=\sin(2x-y)-1{,}2x-0{,}4; \\ y_2(x,y)=0{,}8x^2+1{,}5y^2-1; \end{cases}$$

Лістинг 4.1. Побудова ліній рівня.

```
deff('[y1]=f01(x,y)',['y1=sin(2*x-y)-1.2*x-0.4'])  // використовуємо
оператор //deff  для  визначення функції двох змінних;
deff('[y2]=f02(x,y)',['y2=0.8*x*x+1.5*y*y-1'])
x=-1.1:0.1:1.1;
y=-1.5:0.1:1.03;
0                              // налаштування першого графічного вікна
clf()                          // очиститка вікна;
driver("Rec")                  // графічний драйвер, пристрій для
засилання зображення у вікно;
```

```
xset("window",0)                    // установка стилю ліній, коліру
розміру;
clf()
xgrid()                        // зображення сітки, колір, лінії;
//отображение первого уравнения
fcontour2d(x,y,f01)            // побудова просторової кривої у вигляді
ізоліній
//настройка второго графического окна
xset("window",1)
clf()
xgrid()                        // відображення другого рівняння
fcontour2d(x,y,f02)            // налаштування третього графічного вікна
xset("window",2)
clf()
xgrid()
xset("line style",3)
      fcontour2d(x,y,f01)
      xset("line style",1)
      fcontour2d(x,y,f02)
```

З графіка видно, що система має два рішення (рис.10.4). Перетин двох ліній і даватиме початкове наближення.

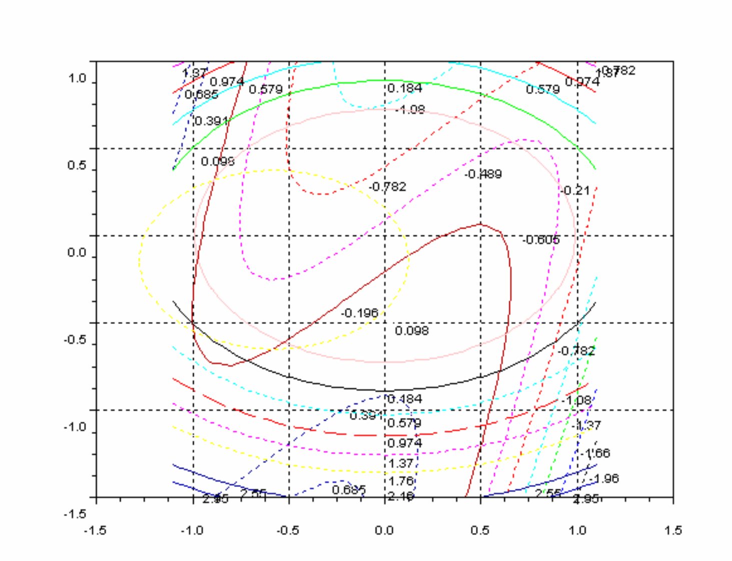


Рис.10.4. Перетин ліній рівня

Потрібні крапки з однаковими значеннями показника рівня якомога ближче до нуля. Одне з рішень, належить області *D*: 0,4<*x*<0,5; -

0,76< y <-0,73, друге рішеня належить області D: 0,40<x<0,45; -0,76<y<-0.75. Тому за початкове наближення можна прийняти x_0=0,4; y_0= -0,75.

Завдання 4.2.

Рівняння поверхонь для першого завдання (4.1) підібрані таким чином, що можна явно, просто та легко виразити x від y та y від x, $\begin{cases} 3x - \cos y = 0{,}9; \\ \sin(x - 0{,}6) - y = 1{,}6. \end{cases}$ Після того, як знайшли початкове наближення системи, яке утримується в області D: 0<x<0,3; -2,2<y<-1,8 треба впевнитися в тому, що метод ітерацій можна застосувати для розв'язку системи. Перетворюємо систему до вигляду $\begin{cases} x = g_1(y); \\ y = g_2(x). \end{cases}$ В нашому випадку $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}\cos y + 0{,}3; \\ y = \sin(x - 0{,}6) - 1{,}6. \end{cases}$

Нехай в деякому заданому прямокутнику D знаходиться єдине рішення системи, тоді вона буде сходитись, якщо: функції g_1 і g_2 диференційовані та неперервні в області D. Процес збігається якщо в області D виконуються співвідношення

$$\left|\frac{\partial g_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial g_2}{\partial x}\right| < 1, \quad \left|\frac{\partial g_1}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial g_2}{\partial y}\right| < 1.$$

В нашому прикладі будемо мати

$$\left|\frac{\partial g_1}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial g_2}{\partial x}\right| = 0 + \left|\cos(x - 0{,}6)\right| \le |cos(0{,}3\text{-}0{,}6)| = cos(0{,}3) = 0{,}2955 < 1$$

$$\left|\frac{\partial g_1}{\partial y}\right| + \left|\frac{\partial g_2}{\partial y}\right| = \left|-\frac{1}{3}\sin y\right| + 0 \le \left|-\frac{1}{3}\sin(-1{,}8)\right| < 1.$$

Таким чином, умови збіжності виконуються. Для уточнення рішень використовуємо формули $\begin{cases} x_{n+1} = g_1(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = g_2(x_n, y_n) \end{cases}$, де значення x_0 та y_0 належать області D: 0<x<0,3; -2,2<y<-1,8. Тоді корені будуть $\xi = \lim\limits_{n->\infty} x_n$ та $\eta = \lim\limits_{n->\infty} y_n$

В нашому випадку обчислення проводимо за формулами $\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{1}{3}\cos y_n + 0{,}3; \\ y_{n+1} = \sin(x_n - 0{,}6) - 1{,}6. \end{cases}$

За початкові наближення приймаємо x_0=0,15; y_0 = -2.

n	x_n	y_n
0	0,15	-2
1	0,1616	-2,035
2	0,1508	-2,0245
3	0,1539	-2,0342
4	0,1510	-2,0313
5	0,1519	-2,0341
6	0,1510	-2,0333
7	0,1513	-2,0341
8	0,1510	-2,0340

Відповідь: $x \approx 0{,}151$; $y \approx -2{,}034$.

Завдання 4.3. Знайти корені системи рівнянь за методом Ньютона:

$$\begin{cases} \sin(2x - y) - 1{,}2x = 0{,}4; \\ 0{,}8x^2 + 1{,}5y^2 = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Перетворимо систему до вигляду:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0 \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases} \qquad (4.1)$$

Нехай (ξ, η) - шуканий розв'язок; Δx, Δy – поправки; x_0, y_0 – нульове наближення, тоді

$$\xi = x_0 + \Delta x$$
$$\eta = y_0 + \Delta y\,.$$

Значення x_0, y_0 відділяємо графічно. Підставляємо ці рішення ξ, η в (4.1)

$$\begin{cases} f_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = 0 \\ f_2(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = 0 \end{cases} \qquad (4.2)$$

Розкладемо функції в системі (4.2) в ряд Тейлора с точністю до членів першого порядка по степенях $\Delta x, \Delta y$:

$$\begin{cases} f_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f_1(x_0, y_0) \approx \dfrac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f_1(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y \\ f_2(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f_2(x_0, y_0) \approx \dfrac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f_2(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y \end{cases} \qquad (4.3)$$

Отримали лінеаризовану систему рівнянь. З (4.3) із урахуванням (4.2) отримаємо систему для визначення поправок Δx, Δy:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y = -f_1(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y = -f_2(x_0,y_0) \end{cases} \qquad (4.4)$$

З (4.4) за формулами Крамера отримаємо $\Delta x, \Delta y$.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial y} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial y} & f_1(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial y} & f_2(x_0,y_0) \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{y_1} = \begin{vmatrix} f_1(x_0,y_0) & \dfrac{\partial f_1(x_0,y_0)}{\partial x} \\ f_2(x_0,y_0) & \dfrac{\partial f_2(x_0,y_0)}{\partial x} \end{vmatrix}, \qquad \Delta x = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta_1},\ \Delta y = \frac{\Delta_{y_1}}{\Delta_1}.$$

Перше наближення можна знайти за формулами: $\begin{matrix} x_1 = x_0 + \Delta x \\ y_1 = y_0 + \Delta y \end{matrix}$.

Для пошуку наступних наближень використовують співвідношення

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + \dfrac{\Delta_{x_n}}{\Delta_n}, \\ y_{n+1} = y_0 + \dfrac{\Delta_{y_n}}{\Delta_n}, \end{cases} \quad \text{де} \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_n,y_n)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1(x_n,y_n)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2(x_n,y_n)}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2(x_n,y_n)}{\partial y} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(x_n,y_n)}{\partial y} & f_1(x_n,y_n) \\ \dfrac{\partial f_2(x_n,y_n)}{\partial y} & \partial f_2(x_n,y_n) \end{vmatrix}, \ \Delta_{y_n} = \begin{vmatrix} \partial f_1(x_n,y_n) & \dfrac{\partial f_1(x_n,y_n)}{\partial x} \\ \partial f_2(x_n,y_n) & \dfrac{\partial f_2(x_n,y_n)}{\partial x} \end{vmatrix}$$

Відділення коріння проводимо графічно (Рис.4.2.) за допомогою ліній рівня. Система має два рішення. Уточнимо одне з них, що належить області *D*: 0,4<*x*<0,5; -0,76<*y*<-0.73. Іншій корінь буде дорівнювати *x*=-0,4390573; *y*=-0,750903. За початкове наближення приймаємо x_0=0,4; y_0=-0,75. Отримаємо $\begin{cases} f_1(x,y) = \sin(2x-y) - 1{,}2x - 0{,}4; \\ f_2(x,y) = 0{,}8x^2 + 1{,}5y^2. \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} = 2\cos(2x-y) - 1{,}2; \\ \dfrac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} = 1{,}6x; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} = -\cos(2x-y); \\ \dfrac{\partial f_2(x,y)}{\partial y} = 3y. \end{cases}$$

Всі обчислення заносимо до таблиці 1.

Уточнення виділених коренів

n	x_n	$0{,}8\cdot x_n^2$	$2\cdot x_n-y_n$	$sin(2\cdot x_n-y_n)$	$f_1(x_n,y_n)$	$f_{1x}'(x_n,y_n)$	$f_{1y}'(x_n,y_n)$	Δ_n	Δ_{xn}	Δ_x
	y_n	$1{,}5\cdot y_n^2$		$cos(2\cdot x_n-y_n)$	$f_2(x_n,y_n)$	$f_{2x}'(x_n,y_n)$	$f_{1y}'(x_n,y_n)$		Δ_{yn}	Δ_y
0	0.4	0.128	1.55	0.999	0.119	-1.158	-0.020	2.619	0.270	0.103
	-0.75	0.843		0.0207	-0.028	0.64	-2.25		0.043	0.016
1	0.503	0.202	1.739	0.985	-0.017	-1.535	0.167	3.242	-0.037	-0.011
	-0.733	0.806		-0.167	0.008	0.804	-2.199		-0.0007	-0.0002
2	0.491	0.193	1.716	0.989	-0.0002	-1.489	0.144	3.164	-0.0005	-0.0001
	-0.733	0.806		-0.144	0.0001	0.786	-2.200		-0	-0
3	0.491	0.193	1.715	0.989	0	-1.489	0.144	3.163	0	0
	-0.733	0.806		-0.144	0	0.785	-2.200		0	0
4	0.491									
	-0.733									

Відповідь: $x \approx 0{,}491238$; $y \approx -0{,}7334613$.

Лабораторна робота № 5. Методи апроксимації функцій

Мета роботи – засвоїти методи апроксимації та інтерполяції функції. Виконати чисельну апроксимацію та інтерполяцію функції, яка задана таблицею початкових даних за допомогою метода найменших квадратів і метода Ньютона. Порівняти результати [1,7,13-15, 20-22].

Завдання до лабораторної роботи №5.

Завдання 5.1. Методом найменших квадратів (МНК) виконати апроксимацію функції. За експериментальними даними підібрати таку аналітичну функцію, яка проходить настільки близько до експериментальних крапок, наскільки це можливо. Для функції, що задана таблицею, за МНК знайти апроксимуючу функцію вигляду $p_n(x)= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x^1 + a_0$ для n=0,1,2, … . Розрахувати відповідні значення відхилу, *err*.

За допомогою демонстраційного скрипта отримати апроксимуючі поліноми різних порядків, вибрати той, який дає найменший відхил.

В якості результата видати порядок якнайкращого полінома, його коеффіциенти - a_i, і відповідний відхил. А також графіки інтерполюючого полінома і початкової функції.

Варіанти завдань до лабораторної роботи №5

x	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*	*x*	*y*
5.1.1		**5.1.2**		**5.1.3**		**5.1.4**		**5.1.5**	
-1	-2.25	0	4.568	-1	3.614	-0.5	0.72	-2.1	14.19
-0.7	-0.77	0.375	3.365	-0.74	1.19	-0.25	1.271	-1.8	11.44
-0.43	0.21	0.563	2.810	-0.48	-0.13	0	1.2	-1.5	9.158
-0.14	0.44	0.75	2.624	-0.21	-0.58	0.25	0.736	-1.2	7.242
-0.14	0.64	1.125	0.674	0.05	-0.54	0.5	0.24	-0.9	6.364
0.43	0.03	1.313	0.557	0.31	-0.28	0.75	-0.175	-0.6	4.818
0.71	-0.22	1.5	0.384	0.58	0.111	1	-0.36	-0.3	6.108
1	-0.84	1.690	-0.56	0.84	0.453	1.25	-0.328	0	3.953
1.29	-1.2	1.875	-1.44	1.1	0.671	1.5	0	0.3	4.687
1.57	-1.03	2.063	-1.69	1.36	0.662	1.75	0.353	0.6	4.760
1.86	-0.37	2.25	-1.91	1.63	0.45	2	0.72	0.9	5.851
2.14	0.61	2.438	-2.82	1.89	0.15	2.25	0.696	1.2	7.101
2.43	2.67	2.625	-3.62	2.15	-0.18	2.5	0	1.5	9.179
2.71	5.04	2.813	-3.94	2.41	-0.54	2.75	-1.792	1.8	11.42
3	8.90	3	-4.37	2.95	-0.19	3	-5.16	2.1	14.09
5.1.6		**5.1.7**		**5.1.8**		**5.1.9**		**5.1.10**	
0	-0.9	-0.70	-4.15	0	1.019	2.5	6.109	-3.6	-2.39
0.2	-0.648	-0.41	1.244	0.3	1.489	2.75	2.615	-3.08	-0.40
0.4	-0.243	-0.12	3.182	0.6	2.208	3	-0.157	-2.56	-0.57
0.6	-0.1	0.17	2.68	0.9	3.055	3.25	-2.010	-2.04	-1.26

			9						
0.8	0.023	0.46	0.95 0	1.2	3.865	3.5	-2.697	-1.52	-0.93
1	0.026	0.75	-2.74	1.5	4.216	3.75	-3.615	-1	-0.35
1.2	0.096	1.04	-5.84	1.8	5.118	4	-3.478	-0.48	1.107
1.4	-0.220	1.33	-7.25	2.1	5.766	4.25	-2.250	0.04	1.300
1.6	-0.323	1.62	-6.10	2.4	6.672	4.5	0.193	0.56	1.703
1.8	-0.647	1.91	-2.14	2.7	7.196	4.75	2.086	1.08	-0.29
2	-0.763	2.20	6.10 3	3	7.855	5	5.882	1.6	-1.41
5.1.1 1		**5.1.1 2**		**5.1.1 3**		**5.1.1 4**		**5.1.1 5**	
0	2.25	-1	0.19 2	-0.7	1.04	-3	0.262	-0.7	3.82
0.17	1.106	-0.75	-0.05	-0.5	1.08	-2.55	-1.032	-0.37	-1.49
0.33	0.395	-0.5	-0.21	-0.3	0.68	-2.1	-1.747	-0.05	-2.42
0.5	-0.033	-0.25	-0.43	-0.1	0.38	-1.65	-1.981	0.275	-1.29
0.67	-0.20	0	-0.41	0.1	0.07	-1.2	-0.564	0.6	0.82
0.83	-0.114	0.25	-0.49	0.3	-0.03	-0.75	0.774	0.925	1.96
1	0.029	0.5	-0.36	0.5	-0.38	-0.3	2.400	1.25	2.40
1.17	0.101	0.75	-0.43	0.7	-0.22	0.15	2.131	1.575	1.87
1.33	0.3	1	-0.14	0.9	-0.36	0.6	2.2	1.9	2.20
1.5	-0.002	1.25	-0.13	1.1	-0.33	1.05	-0.393	2.25	-1.37
1.67	-0.368	1.5	0.14 2	1.3	-0.28	1.5	-1.815	2.55	-2.39
1.83	-1.119	1.75	0.28 8	1.5	-0.17	1.95	-0.788	2.875	-1.46
2	-2.226	2	0.87 6	1.7	0.27	2.4	8.030	3.2	3.604
5.1.1 6		**5.1.1 7**		**5.1.1 8**		**5.1.1 9**		**5.1.2 0**	
-3.2	-0.173	-0.7	4.16 6	2	1.108	6	7.079	-0.7	-12.9
-2.66	-0.574	-0.31	-2.28	2.4	1.832	6.4	-1.509	-0.41	3.619
-2.12	-1.811	0.08	-3.17	2.8	2.413	6.8	-7.654	-0.2	9.586

-1.58	-1.849	0.47	-0.51	3.2	3.656	7.2	-12.21	0.17	7.949
-1.04	0.123	0.86	2.748	3.6	5.126	7.6	-13.94	0.46	1.543
-0.5	1.462	1.25	2.665	4	5.552	8	-15.12	0.75	-8.05
0.04	2.399	1.64	1.353	4.4	6.024	8.4	-13.72	1.04	-16.1
0.58	1.300	2.03	-0.29	4.8	7.202	8.8	-10.70	1.33	-20.5
1.12	1.703	2.42	-1.61	5.2	8.590	9.2	-4.696	1.62	-17.7
5.1.21		**5.1.22**		**5.1.23**		**5.1.24**		**5.1.25**	
0	-2.815	-2	-4.59	-0.5	0.061	5.5	1.542	-1	-5.26
0.25	-2.18	-1.67	-4.22	-0.42	4.185	5.75	0.652	-0.71	-1.99
0.5	-0.225	-1.33	-3.16	-0.33	7.271	6	-0.008	-0.42	0.224
0.75	1.722	-1	-2.46	-0.25	9.683	6.25	-0.620	-0.12	1.146
1	3.492	-0.67	-1.56	-0.17	11.32	6.5	-0.751	0.167	1.552
1.25	3.31	-0.33	-0.87	-0.08	11.47	6.75	-1.183	0.458	-0.15
1.5	2.945	0	-0.16	0	11.32	7	-1.229	0.75	-1.23
1.75	1.449	0.33	0.44	0.08	10.49	7.25	-1.139	1.042	-2.29
2	0.334	0.67	1.715	0.17	9.66	7.5	-0.770	1.333	-2.4
2.25	-1.906	1	2.106	0.25	7.34	7.75	-0.586	1.625	-2.32
2.5	-3.430	1.33	2.845	0.33	5.132	8	-0.066	2.917	-1.22
2.75	-2.983	1.67	3.83	0.42	2.619	8.25	0.633	2.208	2.257
3	0.087	2	4.634	0.5	0.069	8.5	1.542	2.5	7.806
5.1.26		**5.1.27**		**5.1.28**		**5.1.29**		**5.1.30**	
-1	-5.317	-0.4	0.918	-1.3	-1.76	0	5.241	-0.8	3.503
-0.56	-0.581	-0.05	1.258	-0.85	0.955	0.288	4.892	-0.47	-0.55
-0.13	1.137	0.3	0.685	-0.4	3.614	0.575	3.521	-0.15	-1.68

0.313	0.478	0.65	-1.31	0.05	4.707	0.863	1.121	0.175	-1.26
0.75	-0.790	1	-1.71	0.5	3.721	1.15	-1.357	0.5	0.421
1.188	-2.502	1.35	-3.45	0.95	0.40	1.438	-3.5	0.825	1.301
1.625	-2.482	1.7	-2.47	1.4	-3.10	1.725	-3.528	1.15	2.551
2.063	0.554	2.05	0.084	1.85	-2.49	2.013	0.257	1.475	2.937
2.5	7.904	2.4	6.031	2.3	9.87	2.3	10.515	1.8	2.097

Запитання до захисту лабораторної роботи №5.

1. У чому відмінність задачі апроксимації? У чому полягає завдання апроксимації?
2. Чому дорівнює порядок полінома? Скільки поліном має параметрів (містить коефіцієнтів)?
3. Які вимоги пред'являються до поліномів апроксимацій?
4. Дати визначення кінцевих різниць, їх властивостей. Що таке розділенні різниці?

Зразок виконання лабораторної роботи №5.

Команда *datafit* здійснює параметричне наближення експериментальних даних, використовується для "підгонки" даних до початкової функції, *datafit* оптимально описує експериментальні дані поліномами не нижче за другий степінь.

Завдання 5.1.

Лістинг 5.1. Скрипт для розв’язання завдання 5.1., будує поліном за методом найменших квадратів.

```
clc;
x=[-0.7 -0.5 -0.3 -0.1 0.1 0.3 0.5 0.7 0.9 1.1 1.3 1.5 1.7]';
y=[1.04 1.08 1.68 0.38 0.07 -0.03 -0.38 -0.22 -0.36 -0.33 -0.28 -0.17
0.27]';
z=[x,y];                          // Формування матриці початкових даних
k=5
pn=ones(k,1);     // вектор початкових значень //коефіцієнтів, розмірність
//вектору повинна співпадати з кількістю //шуканих коефіцієнтів
function [y1]=FF(x1,p1),
y1=0
for j=1:k,
y1=y1+p1(j)*x1^(j-1),
end,
endfunction
```

```
deff('[e]=G(p,z)','e=sum((y-FF(x,p))^2)')
[p,err]=datafit(G,z,pn)              // Функція, що обчислює різницю між
        // експериментальними і теоретичними значеннями,
plot2d(x,y,style=[4])  // Побудова графіку експериментальних даних
        x=-1:0.01:2;
        plot2d(x,FF(x,p))              // Побудова графіку підібраної функції
```

При збільшенні порядку полінома буде зменшуватися відхил, *err*. Потрібно підібрати відхил таким чином, щоб відхил був найменший

$$\delta = \sum_{i=0}^{n} (y_i - p_n(x_i))^2 \ .$$

Потрібно прогнати відповідний скрипт стільки разів скільки знадобиться, щоб знайти найменший відхил та відповідний порядок полінома. До тієї ж системи точок побудувати графік самої функції та її наближення.

Лабораторна робота № 6. Інтегрування функцій

Мета роботи – Навчитись виконувати чисельне інтегрування застосовуючи середовище *SciLab*. Обчислити визначений інтеграл третього порядку на підставі типових алгоритмів та вбудованих функцій *SciLab* та порівняти результати [7,20-22].

Завдання до лабораторної роботи №6

Завдання 6.1. Ознайомитися та використати вбудовані функції *Scilab* для інтегрування заданої функції.

Завдання 6.2. Пластинка D задана обмежуючими її кривими μ - поверхнева щільність. Знайти масу пластинки.

Завдання 6.3. Аналітично обчислити потрійний інтеграл по області, обмеженій заданими поверхнями або визначений по заданим умовам (використати циліндричні або сферічні коородинати). Задати межі інтегрування. За допомогою вбудованих алгоритмів пакета *SciLab* знайти чисельний розв’язок визначеного інтеграла. Скласти програму розв’язання потрійного інтеграла за методом Монте-Карло, задати кількість точок розбиття ділянки інтегрування *n*, обчислити інтеграл, порівняти отримані результати.

Варіанти завдань.

Завдання 6.1.

6.1.01. $\int\limits_0^2 \sqrt{\ln(x+1)}$ **6.2.01.** $D:\quad x^2+\dfrac{y^2}{4}\le 1,\quad \mu=y^2$

6.1.02. $\int\limits_0^1 \sqrt{x(1-x)}$ **6.2.02.** $D:\quad 1\le \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\le 2,\quad y\le \dfrac{2}{3}x,\quad y\ge 0,\quad \mu=\dfrac{y}{x}.$

6.1.03. $\int_0^1 \sqrt{x}\cdot\cos x$ **6.2.03.** $D:\quad \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}\le 1,\quad \mu=x^2y;\quad y\ge 0.$

6.1.04. $\int_1^2 \dfrac{\sin x}{x}$ **6.2.04.** $D:\quad \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}\le 1,\quad y\ge 0,\quad \mu=\dfrac{7}{18}x^2y.$

6.1.05. $\int_1^2 \dfrac{\cos x}{x}$ **6.2.05.** $D:\quad 1\le \dfrac{x^2}{4}+y^2\le 4,\quad y\le \dfrac{x}{2},\quad \mu=\dfrac{8y}{x^3};\quad y\ge 0.$

6.1.06. $\int_2^3 \dfrac{1}{\ln x}$ **6.2.06.** $D:\quad \dfrac{x^2}{9}+y^2\le 1,\quad x\ge 0,\quad \mu=7xy^6.$

6.1.07. $\int_0^1 \sqrt{1+x^4}$ **6.2.07.** $D:\quad \dfrac{x^2}{4}+y^2\le 1,\quad \mu=4y^4.$

6.1.08. $\int_0^1 \sin x^2$ **6.2.08.** $D:\quad 1\le \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\le 4,\quad y\ge \dfrac{3}{2}x,\quad x\ge 0,\quad \mu=\dfrac{x}{y}.$

6.1.09. $\int_0^1 \cos x^2$ **6.2.09.** $D:\quad 1\le \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}\le 4,\quad y\le \dfrac{x}{2},\quad x\ge 0,\quad \mu=\dfrac{x}{y}.$

6.1.10. $\int_0^2 \sqrt{1+x^3}$ **6.2.10.** $D:\quad \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}\le 1,\quad y\ge 0,\quad x\ge 0,\quad \mu=x^3y.$

6.1.11. $\int_1^2 \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ **6.2.11.**

$D:\quad \dfrac{x^2}{4}+y^2\le 1,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad \mu=6x^3y^3.$

6.1.12. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2+\sin x}$ **6.2.12.**

$D:\quad 1\le \dfrac{x^2}{4}+y^2\le 25,\quad x\ge 0,\quad y\ge \dfrac{x}{2},\quad \mu=\dfrac{x}{y^3}.$

6.1.13. $\int\limits_0^1 \cos e^x$ **6.2.13.** $D:\quad \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\le 1,\qquad \mu=x^2y^2.$

6.1.14. $\int\limits_0^1 \sin e^x$ **6.2.14.** $D:\quad \dfrac{x^2}{16}+y^2\le 1,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad \mu=5xy^7.$

6.1.15. $\int\limits_1^2 \sqrt{1+\ln x}$ **6.2.15.**

$D:\quad \dfrac{x^2}{4}+y^2\le 1,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0,\quad \mu=30x^3y^7.$

6.1.16. $\int\limits_1^e \sqrt{1+2\ln x}$ **6.2.16.**

$D:\quad 1 \le \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 3,\quad y \ge 0,\quad y \le \frac{2}{3}x,\quad \mu = \frac{y}{x}.$

6.1.17. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}$ **6.2.17.** $D:\quad x^2 + \frac{y^2}{25} \le 1,\quad y \ge 0,\quad \mu = 7x^4 y.$

6.1.18. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}$ **6.2.18.** $D:\quad x^2 + \frac{y^2}{9} \le 1,\quad y \ge 0,\quad \mu = 35x^4 y^3.$

6.1.19. $\int\limits_1^2 \sqrt{\ln x}$ **6.2.19.** $D:\quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1,\quad \mu = x^2.$

6.1.20. $\int\limits_0^1 e^{-x^2}$ **6.2.20.** $D:\quad 1 \le x^2 + \frac{y^2}{16} \le 9,\quad y \le 4x,\quad y \ge 0,\quad \mu = \frac{y}{x^3}.$

6.1.21. $\int\limits_2^3 \frac{x}{\ln x}$ **6.2.21.** $D:\quad \frac{x^2}{9} + y^2 \le 1,\quad x \ge 0,\quad \mu = 11xy^8.$

6.1.22. $\int\limits_1^2 e^{\frac{1}{x}}$ **6.2.22.** $D:\quad 1 \le \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \le 5,\quad x \ge 0,\quad y \ge 2x,\quad \mu = \frac{x}{y}.$

6.1.23. $\int\limits_0^1 e^{x^2}$ **6.2.23.** $D:\quad 1 \le \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \le 5,\quad y \ge \frac{2}{3}x,\quad x \ge 0,\quad \mu = \frac{x}{y}.$

6.1.24. $\int\limits_2^3 \frac{\sqrt{x}}{\cos x}$ **6.2.24.** $D:\quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1,\quad x \ge 0,\quad y \ge 0,\quad \mu = x^5 y.$

6.1.25. $\int\limits_0^1 \sqrt{x}\sin x$ **6.2.25.** $D:\quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} \le 1,\quad \mu = x^4.$

6.1.26. $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^5}$ **6.2.26.**

$D:\quad x^2 + \frac{y^2}{4} \le 1,\quad y \ge 0,\quad x \ge 0,\quad \mu = 15x^{15} y^3.$

6.1.27. $\int\limits_0^1 \sqrt{x+x^3}$ **6.2.27.**

$D:\quad 1 \le \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 36,\quad x \ge 0,\quad y \ge \frac{3}{2}x,\quad \mu = \frac{9x}{y^3}.$

6.1.28. $\int_0^{0,5} \frac{\sin 2x}{x}$ **6.2.28.** $D: \quad \frac{x^2}{100} + y^2 \le 1, \quad y \ge 0, \quad x \ge 0, \quad \mu = 6xy^3.$

6.1.29. $\int_0^{2} \frac{1}{4+x^5}$ **6.2.29.** $D: \quad \frac{x^2}{16} + y^2 \le 1, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad \mu = 105x^3y^9.$

6.1.30. $\int_1^{2} \frac{1}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$ **6.2.30.** $D: \quad 1 \le \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \le 2, \quad y \le \frac{4}{3}x, \quad y \ge 0, \quad \mu = \frac{27y}{x^5}.$

6.1.31. $\int_1^{2} \frac{1}{\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$ **6.2.31.)** $D: \quad 1 \le \frac{x^2}{16} + y^2 \le 3, \quad y \ge \frac{x}{4}, \quad x \ge 0, \quad \mu = \frac{x}{y^5}.$

Запитання до захисту лабораторної роботи №6

1. У чому сутність чисельних методів інтегрування?
2. Як називаються формули наближеного інтегрування?
3. Як зв’язані точність інтегрування та крок інтегрування?

Зразок виконання лабораторної роботи №6.

Завдання 6.1. Розглянемо розв’язання задачі чисельного інтегрування різними методами. В *Scilab* чисельне інтегрування за методом трапецій реалізовано за допомогою функції inttrap([x,]y). Ця функція обчислює площу фігури під графіком функції *y(x),* яка задана набором точок *(x,y)*. Параметр x є необов’язковим. Для функції *inttrap(y)* елементи вектора x приймають значення номерів елементів ветора *y*. Наприклад, треба обчилити визначений інтеграл $\int_5^{13} \sqrt{2x-1}\, dx$

Лістинг 6.1. Точний розв’язок задачі

```
-->a=5;b=13;
-->I=1/3*(2*b-1)^(3/2)-1/3*(2*a-1)^(3/2)
I = 32.666667
```

Обчислення визначеного інтеграла методом трапецій з різними кроками наведено нижче.

Листинг 6.2. Наближений розв’язок задачі з використанням функції *inttrap*

```
-->x=a:b;y=sqrt(2*x-1);
-->inttrap(x,y)
ans =
32.655571
```

```
-->h=0.5; x=a:h:b; y=sqrt(2*x-1);
-->inttrap(x,y)
ans =
32.66389
-->h=0.1; x=a:h:b; y=sqrt(2*x-1);
-->inttrap(x,y)
ans =
32.666556
```

Методи трапецій є частковими випадками квадратурних формул Ньютона–Котеса, які мають загальний вигляд $\int_a^b ydy = (b-a)\cdot\sum_{i=0}^{n} H_i y_i$ де H_i - деякі константи, що мають назву сталих Ньютона–Котеса. Якщо прийняти n = 1, то отримаємо метод трапецій, а при n = 2 - метод Симпсона. Ці методи називають квадратурними методами малих порядків. Для n > 2 отримують квадратурні формули Ньютона–Котеса вищих порядків. Обчислювальний алгоритм квадратурних формул реализовано у *Scilab* функцією integrate(fun, x, a, b, [,er1 [,er2]]), де fun - функція, що задає підінтегральний вираз у символьному вигляді в; x – змінна інтегрування; a, b – межи інтегрування, дійсні числа; er1 и er2 - параметри, що відображають абсолютну та відносну точність обчислень.

Лістинг 6.3. Використання функції integrate

```
-->integrate('(2*x-1)^0.5','x',5,13)
ans = 32.666667
```

Лістинг 6.4. Використання функції intg

```
-->deff('y=G(x)','y=sqrt(2*x-1)'); intg(5,13,G)
ans = 32.666667
```

Найбільш універсальною командою інтегрування в *Scilab* є: *[I,err]=intg(a,b,name[,er1[,er2]]),* де *name*–ім’я функції, яка задає підінтегральний вираз (може бути заданий у вигляді набору дискретних точок або за допомогою зовнішньої функції); *a* і *b* – межа інтегрування; *er*1 и *er*2 - абсолютна і відносна точності обчислень (необов’язкові параметри).

Розв’язок наведено нижче.

Лістинг 6.5. Використання функції intg

```
-->deff('y=G(x)','y=sqrt(2*x-1)'); intg(5,13,G)
ans = 32.666667
```

Завдання 6.2. Відповіді до другого завдання.

1. 2π, **2**. $ln2 \approx 0{,}6931472$, **3**. 90, **4**. 35, **5**. $ln2$, **6**. 2, **7**. π, **8**. $3ln2$, **9**. $12ln2$, **10**. 6, **11**. 1, **12**. $2ln5$, **13**. 9π, **14**. 1, **15**. 1, **16**. $2ln2$, **17**. 10, **18**. 36, **19**. 6π, **20**. $8ln3$, **21**. 2, **22**. $4ln2$, **23**. $9ln2$, **24**. 12, **25**. 20π, **26**. 1, **27**. $2ln6$, **28**. 5, **29**. 32, **30**. 1.

Лабораторна робота № 7. Розв'язання звичайних диференційних рівнянь

Мета роботи – знайти розв'язок задачі Коші для звичайного диференціального рівняння на підставі типових алгоритмів і внутрішніх функцій *SciLab*, порівняти результати [12-13, 20-22].

Завдання до лабораторної роботи №7

Завдання 7.1.

1. Знайти аналітичний розв'язок задачі Коші для звичайного диференціального рівняння першого порядку

$$\begin{cases} y'(x) = f\left(x, y(x)\right) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad x \in [x_0; x_1]$$

2. Вирішити задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку методом Ейлера і порівняти з точним рішенням.

3. Вирішити задачу Коші для диференціального рівняння першого порядку з кроком *h*=0,1 методом Эйлера-Коши і порівняти з точним рішенням.

4. За допомогою вбудованної функції [*y*]=*ode*([r*k*],*y*0,t0,t,*f*) пакета *SciLab* знайти наближений розв'язок задачі Коші з кроком h=0,1 за методом Рунге-Кутта четвертого порядку.

5. Побудувати таблиці значень наближених розв'язків і точного розв'язку. На єдиному кресленні побудувати графіки наближеного розв'язку і точного.

Завдання 7.2. Використовуючи метод кінцевих різниць, скласти рішення крайової задачі для звичайного диференціального рівняння з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$, крок *h*=0,1.

Варіанти завдань до лабораторної роботи №7

Завдання 7.1.

7.1.01. $\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y}{x} + x^2 \\ y(1) = 0 \end{cases}, \quad x \in [1;2]$; **7.1.02.** $\begin{cases} y'(x) = y \cdot ctgx + 2x \cdot \sin x \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}, x \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2} + 1\right]$;

7.1.03. $\begin{cases} y'(x) = -y \cdot \cos x + \dfrac{\sin 2x}{2} \\ y(0) = 0 \end{cases}, \quad x \in [0;1]$; **7.1.04.**

$$\begin{cases} y'(x) = -y \cdot tgx + \cos^2 x \\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2} \end{cases}, \quad x \in \left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{4} + 1\right];$$

7.1.05. $\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y}{x+2} + x^2 + 2x \\ y(-1) = \dfrac{3}{2} \end{cases}$, $x \in [-1;0]$; **7.1.06.** $\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y}{x+1} + e^x (x+1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$, $x \in [0;1]$;

7.1.07. $\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y}{x} + x \cdot \sin x \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$, $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}+1\right]$; **7.1.08.** $\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{y}{x} + \sin^2 x \\ y(\pi) = \dfrac{1}{\pi} \end{cases}$, $x \in [\pi; \pi+1]$;

7.1.09. $\begin{cases} y'(x) = y \cdot \cos x + \sin 2x \\ y(0) = -1 \end{cases}$, $x \in [0;1]$; **7.1.10.** $\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{2x}{1+x^2} \cdot y + \dfrac{2x^2}{1+x^2} \\ y(0) = \dfrac{2}{3} \end{cases}$, $x \in [0;1]$;

7.1.11. $\begin{cases} y'(x) = -xy - x^3 \\ y(0) = 3 \end{cases}$, $x \in [0;1]$; **7.1.12.** $\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{y}{x} + (x+1)\dfrac{e^x}{x} \\ y(1) = e \end{cases}$, $x \in [1;2]$;

7.1.13. $\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y}{x} - 2\dfrac{\ln x}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$, $x \in [1;2]$; **7.1.14.** $\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y}{x} - \dfrac{12}{x^3} \\ y(1) = 4 \end{cases}$, $x \in [1;2]$;

7.1.15. $\begin{cases} y'(x) = \dfrac{-2y}{x} + x^3 \\ y(1) = -\dfrac{5}{6} \end{cases}$, $x \in [1;2]$; **7.1.16.** $\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{y}{x} + 3x \\ y(1) = 1 \end{cases}$, $x \in [1;2]$;

7.1.17. $\begin{cases} y'(x) = \dfrac{2xy}{1+x^2} + 1 + x^2 \\ y(1) = 3 \end{cases}$, $x \in [1;2]$; **7.1.18.** $\begin{cases} y'(x) = \dfrac{2x-1}{x^2} \cdot y + 1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$, $x \in [1;2]$;

7.1.19. $\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{3y}{x} + \dfrac{2}{x^3} \\ y(1) = 1 \end{cases}$, $x \in [1;2]$; **7.1.20.** $\begin{cases} y'(x) = -2xy - 2x^3 \\ y(1) = e^{-1} \end{cases}$, $x \in [1;2]$;

7.1.21. $\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y}{x} - \dfrac{2}{x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$, $x \in [1;2]$; **7.1.22.** $\begin{cases} y'(x) = \dfrac{2x-5}{x^2} \cdot y + 5 \\ y(2) = 4 \end{cases}$, $x \in [2;3]$;

7.1.23. $\begin{cases} y'(x) = \dfrac{2}{x+1} y + e^x (x+1)^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$, $x \in [0;1]$; **7.1.24.** $\begin{cases} y'(x) = 2xy + xe^{-x^2} \cdot \sin x \\ y(0) = 1 \end{cases}$, $x \in [0;1]$;

7.1.25. $\begin{cases} y'(x) = \dfrac{2}{x+1} y + (x+1)^3 \\ y(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$, $x \in [0;1]$; **7.1.26.** $\begin{cases} y'(x) = y \cdot \cos x + \sin 2x \\ y(0) = 3 \end{cases}$, $x \in [0;1]$;

7.1.27. $\begin{cases} y'(x) = 4xy - 4x^3 \\ y(0) = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$, $x \in [0;1]$; **7.1.28.** $\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y}{x} + \dfrac{\ln x}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$, $x \in [1;2]$;

7.1.29. $\begin{cases} y'(x) = 3x^2 y + \dfrac{x^2(1+x^3)}{3}, & x \in [0;1]; \\ y(0) = 0 \end{cases}$ **7.1.30.** $\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{y}{2x} + x^2, & x \in [1;2]; \\ y(1) = 1 \end{cases}$

Завдання 7.2.

7.2.01. $y'' + \dfrac{y'}{x} + 2y = x,\quad \begin{cases} y(0{,}7) = 0{,}5, \\ 2y(1) + 3y'(1) = 1{,}2. \end{cases}$

7.2.02. $y'' - xy' + 2y = x + 1,\quad \begin{cases} y(0{,}9) - 0{,}5y'(0{,}9) = 2, \\ y(1{,}2) = 1. \end{cases}$

7.2.03. $y'' + xy' + y = x + 1,\quad \begin{cases} y(0{,}5) + 2y'(0{,}5) = 1, \\ y'(0{,}8) = 1{,}2. \end{cases}$

7.2.04. $y'' + 2y' - \dfrac{y}{x} = 3,\quad \begin{cases} y(0{,}2) = 2, \\ 0{,}5y(0{,}5) - y(0{,}5) = 1. \end{cases}$

7.2.05 $y'' + 2y' - xy = x^2,\quad \begin{cases} y'(0{,}6) = 0{,}7, \\ y(0{,}9) - 0{,}5y'(0{,}9) = 1. \end{cases}$

7.2.06 $y'' - y' + \dfrac{2y}{x} = x + 0{,}4,\quad \begin{cases} y(1{,}1) - 0{,}5y'(1{,}1) = 2, \\ y'(1{,}4) = 4. \end{cases}$

7.2.07. $y'' - 3y' + \dfrac{y}{x} = 1,\quad \begin{cases} y(0{,}4) = 2, \\ y(0{,}7) + 2y'(0{,}7) = 0{,}7. \end{cases}$

7.2.08 $y'' + 3y' - \dfrac{y}{x} = x + 1,\quad \begin{cases} y'(1{,}2) = 1, \\ 2y(1{,}5) - y'(1{,}5) = 0{,}5. \end{cases}$

7.2.09 $y'' - \dfrac{y'}{2} + 3y = 2x^2,\quad \begin{cases} y(1) + 2y'(1) = 0{,}6, \\ y(1{,}3) = 1. \end{cases}$

7.2.10 $y'' + 1{,}5y' - xy = 0{,}5,\quad \begin{cases} 2y(1{,}3) - y'(1{,}3) = 1, \\ y(1{,}6) = 3. \end{cases}$

7.2.11 $y'' + 2xy' - y = 0{,}4,\quad \begin{cases} 2y(0{,}3) + y'(0{,}3) = 1, \\ y'(0{,}6) = 2. \end{cases}$

7.2.12. $y'' - 0{,}5xy' + y = 2,\quad \begin{cases} y(0{,}4) = 1{,}2, \\ y(0{,}7) + 2y'(0{,}7) = 1{,}4. \end{cases}$

7.2.13 $y'' + \dfrac{2y'}{x} - 3y = 2,\quad \begin{cases} y'(0{,}8) = 1{,}5, \\ 2y(1{,}1) + y'(1{,}1) = 3. \end{cases}$

7.2.14. $y'' + 2x^2 y' + y = x,\quad \begin{cases} 2y(0{,}5) - y'(0{,}5) = 1, \\ y(0{,}8) = 3. \end{cases}$

7.2.15. $y'' - 3xy' + 2y = 1{,}5,\quad \begin{cases} y'(0{,}7) = 1{,}3, \\ 0{,}5y(1) + y'(1) = 2. \end{cases}$

7.2.16. $y'' + 2xy' - 2y = 0{,}6,\quad \begin{cases} y'(2) = 1, \\ y(0{,}8) = 3. \end{cases}$

7.2.17. $y'' + \dfrac{y'}{x} - 0{,}4y = 2x,\quad \begin{cases} y(0{,}6) - 0{,}3y'(0{,}6) = 0{,}6, \\ y'(0{,}9) = 1{,}7. \end{cases}$

7.2.18. $y'' - \dfrac{y'}{2x} + 0{,}8y = x,\quad \begin{cases} y(1{,}7) + 1{,}2y'(1{,}7) = 2, \\ y'(2) = 1. \end{cases}$

7.2.19. $\begin{array}{l} y'' + \dfrac{y'}{3} + xy = 2, \\ \begin{cases} y(0{,}8) = 1{,}6, \\ 3y(1{,}1) - 0{,}5y'(1{,}1) = 1. \end{cases} \end{array}$

7.2.20. $\begin{array}{l} y'' + 0{,}8y' - xy = 1{,}4, \\ \begin{cases} y(1{,}8) = 0{,}5, \\ 2y(2{,}1) + y'(2{,}1) = 1{,}7. \end{cases} \end{array}$

7.2.21. $\begin{array}{l} y'' + 2y' - \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x}, \\ \begin{cases} 0{,}5y(0{,}9) + y'(0{,}9) = 1, \\ y(1{,}2) = 0{,}8. \end{cases} \end{array}$

7.2.22. $\begin{array}{l} y'' - \dfrac{y'}{4} + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{x}{2}, \\ \begin{cases} 1{,}5y(1{,}3) - y'(1{,}3) = 0{,}6, \\ 2y(1{,}6) = 0{,}3. \end{cases} \end{array}$

7.2.23. $\begin{array}{l} y'' - 0{,}5y' + 0{,}5xy = 2x, \\ \begin{cases} y'(1) = 0{,}5, \\ 2y(1{,}3) - y'(1{,}3) = 2. \end{cases} \end{array}$

7.2.24. $\begin{array}{l} y'' + 2y' - 1{,}5xy = \dfrac{2}{x}, \\ \begin{cases} y'(0{,}8) = 1, \\ y(1{,}1) + 2y'(1{,}1) = 1. \end{cases} \end{array}$

7.2.25. $\begin{array}{l} y'' + 2xy' - 1{,}5 = x, \\ \begin{cases} 1{,}4y(1{,}1) + 0{,}5y'(1{,}1) = 2, \\ y'(1{,}4) = 2{,}5. \end{cases} \end{array}$

7.2.26. $\begin{array}{l} y'' - \dfrac{xy'}{2} + 0{,}5y = 2x, \\ \begin{cases} 0{,}4y(0{,}2) - y'(0{,}2) = 1{,}5, \\ y'(0{,}5) = 0{,}4. \end{cases} \end{array}$

7.2.27. $\begin{array}{l} y'' + 0{,}6xy' - 2y = 1, \\ \begin{cases} y(1{,}5) = 0{,}6, \\ 2y(1{,}8) - 0{,}8y'(1{,}8) = 3. \end{cases} \end{array}$

7.2.28. $\begin{array}{l} y'' + \dfrac{y'}{2x} - y = \dfrac{2}{x}, \\ \begin{cases} y(0{,}6) = 1{,}3, \\ 0{,}5y(0{,}9) - 1{,}2y'(0{,}9) = 1. \end{cases} \end{array}$

7.2.29. $\begin{array}{l} y'' - 0{,}5x^2y' + 2y = x^2, \\ \begin{cases} y(1{,}6) + 0{,}7y'(1{,}6) = 2, \\ y(1{,}9) = 0{,}8. \end{cases} \end{array}$

7.2.30. $\begin{array}{l} y'' - xy' + 2xy = 0{,}8, \\ \begin{cases} y(1{,}2) - 0{,}5y'(1{,}2) = 1, \\ y'(1{,}5) = 2. \end{cases} \end{array}$

Запитання до захисту лабораторної роботи №7

1. У чому сутність методу Ейлера?
2. У чому полягає ідея удосконаленого методу Ейлера-Коші?
3. Як оцінюється похибка різних чисельних методів розв'язання диференціальних рівнянь?
4. Які недоліки методу Ейлера? (мала точність, систематичне накопичування похибки).
5. Як збільшити точність методу Ейлера? Що при цьому погіршується?

Зразок виконання лабораторної роботи №7

Завдання 7.1.

1. Розв'яжемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку: $y'(x) = -\frac{y}{x} + (x+1)\cdot\frac{e^x}{x}$.

Його загальним розв'язком буде $y(x) = \left(e^x \cdot x + C\right)\frac{1}{x}$.

Частинний розв'язк, який відповідає початковій умові буде $y(x) = e^x$.

2. Диференціальні рівняння мають нескінченну безліч рішень, які відрізняються один від одного константами. Для однозначного визначення рішення вимагається задати додаткові початкові або граничні умови. Кількість таких умов повинна співпадати з порядком диференціального рівняння. Залежно від виду додаткових умов в диференціальних рівняннях розрізняють: задачу Коші - усі додаткові умови задані в одній точці інтервалу; крайова задача - додаткові умови вказані на межах. Ідея методу Ейлера полягає в заміні точного розв'язку ламаною лінією за формулою

$y_{i+1} = y_i + y_i' \cdot \Delta x_{i+1}$ або $y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) \cdot h$; (*)

Формула (*) випливає з $y_i'(x) = f(x,y)$ при заміні похідної її різницевим представленням. Перше значення функції у точці $x_1 = x_0 + h$ розраховується за допомогою заздалегідь заданих початкових умов, а усі наступні за попередніми в відповідності до (*). Для оцінки похибки формула (*) порівнюється з розкладанням у ряд Тейлора. Похибка методу пропорційна h^2. Збільшення точності досягається при зменшенні кроку інтегрування, що збільшує обєм обчислень.

Лістинг 7.1. Розв'язання задачі 7.1. методом Ейлера.

```
--> i=1; n=11; h=0.1;
--> xa(1)=t0;
--> ya(1)=y0;
--> for i=2:1:n,
--> xa(i)=xa(i-1)+h;
--> ya(i)=(ya(i-1))+h*(startf(xa(i-1),ya(i-1)))
-->,end
--> plot2d(xa,ya,style=-1)
```

3. Спочатку обчислюють "грубе" значення $y_{k+1}^{(0)} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$, котре потім уточнюють за формулою $y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}h\left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\right]$.

Похибка методу на кожному кроці має порядок тобто пропорційна h^3.

4. На кожному кроці обчислення виконуються по формулі $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}\right)$,

де: $k_1 = hf(x_1, y_i)$, $k_2^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right)$,

$k_3^{(i)} = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right)$, $k_4^{(i)} = hf\left(x_i + h, y_i + k_1^{(i)}\right)$,.

Похибка методу на кожному кроці має порядок h^5. Використовуючи вбудовану функцію [*y*]=*ode*([r*k*],*y*0,t0,t, *f*), знаходимо наближений розв'язок задачі Коші з кроком h=0,1 за методом Рунге-Кутта четвертого порядку точності.

5. *clf*() - очищає вікно відображення графіку, очищає властивості поточного вікна графіки і встановлює їх в значення за умовчанням. Якщо [*y*]=*ode*(*y*0, t0, t, *f*);, то column не відображуватимуться на екрані, але якщо *y*=*ode*(*y*0, t0, t, *f*), то функція таблично виводитиметься на екран. Для того, щоб вирішити звичайне диференціальне рівняння виду, $\frac{dy}{dt} = f(t, y)$, $y(x_0)=y_0$, необхідно викликати функцію *y*=*ode*(*y*0, t0, t, *f*).

Лістинг 7.2. Точний розв'язок задачі 7.1. вбудованою функцією та побудова графіка.

```
--> deff('[y1]=startf(t,y)',['y1=(-y/t+(t+1)*(exp(t)/t))']);
--> y0=exp(1); t0=1; t=1:0.1:2; TT=2;
--> y=ode(y0,t0,t,startf)
--> plot2d(t,y,style=color("red"))
```

Завдання 7.2.

Лінійне диференціальне рівняння другого порядку має вигляд: $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$, де $p(x)$,$q(x)$ та $f(x)$ — деякі неперервні на [*a* ,*b*] функції. Крайова задача для лінійного диференціального рівняння полягає в знаходженні його розв'язку $y=y(x)$, що задовольняє двоточковим лінійним крайовим умовам $\begin{cases}\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A \\ \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B\end{cases}$, де α_0, α_1, β_0, β_1, A, B — сталі та $|\alpha_0| + |\alpha_1| \neq 0$, $|\beta_0|+|\beta_1| \neq 0$.

При рішенні цієї задачі методом кінцевих різниць відрізок $[a,\ b]$ розбивають на n равних частин з кроком $h = \dfrac{b-a}{n}$. Точки розбиття мають абсциси $x_k = x_1 + (k-1)\cdot h$, $k = 1,2,\ldots,\ n+1$, с. Значення в точках ділення x_k шуканої функції і її похідних позначимо відповідно через $y_k = y(x_k)$, $y_k' = y'\ (x_k)$, $y_k'' = y''(x_k)$. Замінюючи похідні правими односторонніми кінечно-різницевими відношеннями для внутрішніх точок x_k відрізка $[a,b]$, наближено будемо мати $y_k' = \dfrac{y_{k+1} - y_k}{h}$, $y_k'' = \dfrac{y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k}{h^2}$. Використовучи всі ці формули дифференційне рівняння при $x = x_k$ наближено можна замінити системою лінійних рівнянь $\dfrac{y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k}{h^2} + p(x_k)\dfrac{y_{k+1} - y_k}{h} + q(x_k)y_k = f(x_k)$, $k = 1,2,\ldots,\ n-1$. Для кінцевих точок $x_1 = a$ та $x_{n+1} = b$ покладемо $y_1' = \dfrac{y_2 - y_1}{h}$ та $y_{n+1}' = \dfrac{y_{n+1} - y_n}{h}$.

Тоді крайові умови дадуть ще два рівняння
$$\begin{array}{l} \alpha_1 y_1 + \alpha_2 \dfrac{y_2 - y_1}{h} = A \\ \beta_1 y_{n+1} + \beta_2 \dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = B \end{array}.$$

Таким чином дістанемо систему n+1 лінійних рівнянь з $n+1$ невідомими $y_1,\ y_2,\ \ldots\ ,\ y_n,\ y_{n+1}$, які представляють собою значення шуканой функції $y = y(x)$,

$$\begin{cases} \dfrac{y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k}{h^2} + p(x_k)\dfrac{y_{k+1} - y_k}{h} + q(x_k)y_k = f(x_k), \\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 \dfrac{y_2 - y_1}{h} = A, \\ \beta_1 y_{n+1} + \beta_2 \dfrac{y_{n+1} - y_n}{h} = B. \end{cases}$$

Позначимо $p(x_k) = p_k$, $q(x_k) = q_k$, $f(x_k) = f_k$. Виконавши алгебраїчні перетворення над рівняннями, можна привести систему до наступного виду:
$$\begin{cases} (h^2 q^2 - hp_k + 1)y_k + (hp_k - 2)y_{k+2} = h^2 f_k, \\ (\alpha_1 h - \alpha_2)y_1 + \alpha_2 y_2 = hA, \\ -\beta_2 y_n + (\beta_1 h + \beta_2)y_{n+1} = hB. \end{cases}$$

Вирішивши систему, отримаємо таблицю значень шуканої функції $y(x)$.

Зразок виконання завдання 7.2. Використовуючи метод кінцевих різниць, скласти рішення крайової задачі для звичайного диференціального рівняння з точністю $\varepsilon = 10^{-3}$, крок h=0,1

$$y'' + xy' - 0{,}5\frac{y}{x} = 1. \quad \begin{cases} y(2) + 2y'(2) = 1, \\ y(2{,}3) = 2{,}15. \end{cases}$$

Розбивши відрізок [2;2,3] на частини з кроком h=0,1, дістанемо 4 узлові точки з абсцисами: x_0=2; x_1=2,1; x_2=2,2; x_3=2,3. Дві точки x_0=2 та x_3=2,3 є кінцевими, а дві інші точки x_1=2,1 и x_2=2,2 – внутрішніми. Це рівняння у внутрішніх точках замінимо звичайно різницевим рівнянням $\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + x_i\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - 0{,}5 \cdot \frac{y_i}{x_i} = 1$ (i =1,2). З крайових умов складемо кінечно-різницеві рівняння в кінцевих точках:

$$\begin{cases} y_0 + 2 \cdot \dfrac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{2h} = 1 \ (для\, i = 0) \\ y_3 = 2{,}15 \quad (для\, i = 3) \end{cases}$$

Це завдання зводиться до рішення системи рівнянь

$$\begin{cases} y_0 + \dfrac{-y_2 + 4y_1 - 3y_0}{0{,}1} = 1, \\ \dfrac{y_2 - 2y_1 + y_0}{0{,}01} + 2{,}1 \cdot \dfrac{y_2 - y_0}{0{,}2} - 0{,}5 \cdot \dfrac{y_1}{2{,}1} = 1, \\ \dfrac{y_3 - 2y_2 + y_1}{0{,}01} + 2{,}2 \cdot \dfrac{y_3 - y_1}{0{,}2} - 0{,}5 \cdot \dfrac{y_2}{2{,}2} = 1, \\ y_3 = 2{,}15. \end{cases} \quad \begin{cases} y_0 - \dfrac{(y_1 - y_0)}{0{,}4} = 2 \\ \dfrac{y_2 - 2y_1 + y_0}{0{,}01} - 1\dfrac{(y_2 - y_0)}{0{,}2} + 2y_1 = 1 + 1 \\ \dfrac{y_3 - 2y_2 + y_1}{0{,}01} - 1{,}1\dfrac{(y_3 - y_1)}{0{,}2} + 2y_2 = 1{,}1 + 1 \\ y_3 = 1 \end{cases}$$

Виконавши перетворення, маємо $\begin{cases} -2{,}9y_0 + 4y_1 - y_2 = 0{,}1, \\ 375{,}9y_0 - 841y_1 + 464{,}1y_2 = 4{,}2 \quad , \\ 391{,}6y_1 - 881y_2 + 488{,}4y_3 = 4{,}4 \quad , \\ y_3 = 2{,}15. \end{cases}$

Підставивши значення y_3 в третє рівняння, отримаємо для визначення інших невідомих систему $\begin{cases} -2{,}9y_0 + 4y_1 - y_2 = 0{,}1, \\ 375{,}9y_0 - 841y_1 + 464{,}1y_2 = 4{,}2 \quad , \\ 391{,}6y_1 - 881y_2 = -1045{,}66. \end{cases}$

Для розв’язання цієї системи можна використати пакет *SciLab*.
Лістинг 7.3. Розв’язок задачі 7.2. за допомогою вбудованої функції l*i*nsolve.

```
a=[-2.9 4 -1;375.9 -841 464.1;0 391.6 -881]
b=[0.1 4.2 -1045.66]'
```

[*x*]=linsolve(*a*,b)

Розв'яжемо цю систему інакше, також за допомогою пакета *SciLab*. Для цього приводимо рівняння системи до вигляду

$$y_{i+1}(\frac{1}{h^2}-\frac{x_i}{2h})+y_i(\frac{-1}{2x_i}-\frac{2}{h^2})+y_{i-1}(\frac{1}{h^2}-\frac{x_i}{2h})=1,$$

$$y_0(1-\frac{3}{h})+y_1\frac{4}{h}-y_2\frac{1}{h}=1,$$

$$y_3=2{,}15.$$

Лістинг 7.4. Розв'язання задачі 7.2.

```
clc;
x=[2.0,2.1,2.2,2.3];
n=length(x);                        // визначаємо кількість вузлових точок
h=(x(n)-x(1))/(n-1);                // визначаємо крок
A=zeros(n,n);                       // вектор коефіцієнтів
B=zeros(1:n)';                      // вектор правих частин
for i=2:n-1,
A(i,i+1)=1/(h^2)+x(i)/(2*h);
A(i,i)=-1/(2*x(i))-2/(h^2);
A(i,i-1)=1/(h^2)-x(i)/(2*h);
B(i)=1;
end;                 // обчислюємо коефіцієнти для крайніх точок
A(1,1)=1-3/h;
A(1,2)=4/h;
A(1,3)=-1/h;
B(1)=1;
B(2)=1;
B(3)=1;
A(n,4)=1;
B(4)=2.15;
B=-B;
A
B
[x]=linsolve(A,B)
```

Відповідь: для x_0=2,0 маємо y_0= 2.2350252;

для x_1=2,1 маємо y_1= 2.1849144
для x_2=2,2 маємо y_2= 2.1580845
для x_3=2,3 маємо y_3= 2.15.

Лабораторна робота № 8. Оптимізація функцій

Мета роботи – набуття практичних навичок знаходження естремумів функцій однієї та багатьох змінних [18-22].

Для знаходження мінімуму функції однієї змінної в *SciLab* використовують функцію [f,xopt]=optim(costf,x0), де x0-вектор-стовпчик початкових наближень, constf визначає функцію, мініму якої шукаємо. Функція повертає мінімум функції (f) та точку, що відповідає цьому значенню (xopt).

Варіанти завдань до лабораторної роботи №8.1.

Необхідно розв’язати задачу безумовної оптимізації функції в середовищі *Scilab*.

8.1. $2*x^3+12*x^2+13*x+15$.
8.2. $2*x^3-3*x^2+4*x+9$.
8.3. $x^3-4*x^2-4*x-5$.
8.4. $2*x^4+3*x^3+8*x^2+6*x+5$.
8.5. $2*x^4-3*x^3+2*x^2-15*x+14$.
8.6. $15*x^4-4*x^3-6*x^2-4*x-1$.
8.7. $2*x^4-x^3+3*x^2-x+1$.
8.8. $x^4+3*x^3-44*x^2+15*x+25$.
8.9. $6*x^4+25*x^3+12*x^2-25*x+6$.
8.10. $x^4-2*x^3-11*x^2+12*x+36$.
8.11. $100*x^3+45*x^2-12*x+2.5$.
8.12. $10*x^3+20*x^2-0.1*x-0.2$.
8.13. $x^3+4.05*x^2-0.03*x+0.02$.
8.14. $x^3+79.9*x^2-1988*x-200$.
8.15. $x^3-4.6*x^2-52*x-20$.
8.16. $x^3-0.5*x^2-0.5*x$.
8.17. $200*x^3+78*x^2-41.2*x+0.42$.
8.18. $2*x^3-0.6*x^2+0.06*x-0.002$.
8.19. $0.5*x^3-2.3*x^2-26*x-10$.
8.20. $-0.1*x^3+0.405*x^2+0.003*x-0.002$.

Зразок виконання лабораторної роботи 8.1.

Знайти мінімум функції $f(x)=x^4+x^3-13x^2-6x+26$

Необхідно побудувати графік функції для локалізації мінімума

Лістинг 8.1. Побудова графіка функції

```
x=-5:0.1:1;
y=x.^4+3*x.^3-13*x.^2-6*x+26;
plot(x,y);
xtitle('График функции f(x)=x^4+3*x^3-13*x^2-6*x+26','X','Y');
xgrid();
```

У результаті аналізу графіка мінімум функції локалізовано в околиці xmin≈4.

Нижче наведено фрагмент коду для знаходження мінімуму з використанням функції *optim*

Лістинг 8.2. Визначення мінімуму функції

```
//Функція fi, в якій буде формуватись функція f та її похідна g.
function [f,g,ind]=fi(x,ind)
f=x^4+3*x^3-13*x^2-6*x+26           //Функція f, мінімум якої
шукаємо.
g=4*x^3+9*x^2-26*x-6                //Функция g - похідна від
функції f.
endfunction
y0=-2;                         // Початкове наближення точки
мінімуму.
//Для пошуку точки мінімуму (xmin) і значення функції (fmin)
[fmin,xmin]=optim(fi,y0);          //виклик функції optim.
//Результати пошуку мінімуму виглядають у наступний спосіб:
-->fmin
fmin =
  - 95.089413
-->xmin
xmin =
–         3.8407084
```

Варіанти завдань до лабораторної роботи №8.2.

Мінімізувати функцію $f(x,y)=ax+by+e^{cx^2+dy^2}$ методом градієнтного спуска (або іншим методом) з точністю до ε=10^{-4}. Коефіцієнти обрати з нижченаведеної таблиці.

Варіант	*a*	*b*	*c*	*d*
1	1	-1.4	0.01	0.11
2	2	-1.3	0.04	0.12
3	3	-1.2	0.02	0.13
4	4	-1.1	0.16	0.14
5	5	-1.0	0.25	0.15
6	6	-0.9	0.36	0.16
7	7	-0.8	0.49	0.17
8	8	-0.7	0.64	0.18
9	9	-0.6	0.80	0.19
10	10	-0.5	0.94	0.20
11	11	-0.4	1.00	0.21
12	12	-0.3	1.21	0.22
13	13	-0.2	1.44	0.23
14	14	-0.1	1.69	0.24
15	15	0.0	1.96	0.25
16	16	0.1	1.99	0.26
17	17	0.2	2.56	0.27
18	18	0.3	2.89	0.28
19	19	0.4	3.24	0.29
20	20	0.5	3.81	0.30
21	21	0.6	4.00	0.31
22	22	0.7	5.02	0.32
23	23	0.8	4.84	0.33
24	24	0.9	5.29	0.34
25	25	1.0	5.76	0.35
26	26	1.1	7.25	0.36
27	27	1.2	6.76	0.37
28	28	1.3	5.98	0.38
29	29	1.4	7.29	0.39
30	30	1.5	8.41	0.40

Зразок виконання лабораторної роботи 8.2.

Для знаходження мінімуму функції багатьох змінних використовується функція *Scilab* costf. Цю функцію необхідно налаштувати таким чином, щоб вхідними даними в неї були значення масива (вектора) невідомих x і параметра ind. Для пошуку функції багатьох змінних, структура функції costf повинна бути наступною

```
function [f,g,ind]=costf(x,ind)
//f - функція від вектора невідомих x, мінімум якої шукаємо
f=gg(x);
// g - градієнт функції f (вектор часткової похідної),
g=numdiff(gg,x);
endfunction
```

В якості приклада розглянемо пошук мінімуму функції Розенброка

$$f(x, y) = 100(y - x^2)^2 + (1 - x^2)^2$$

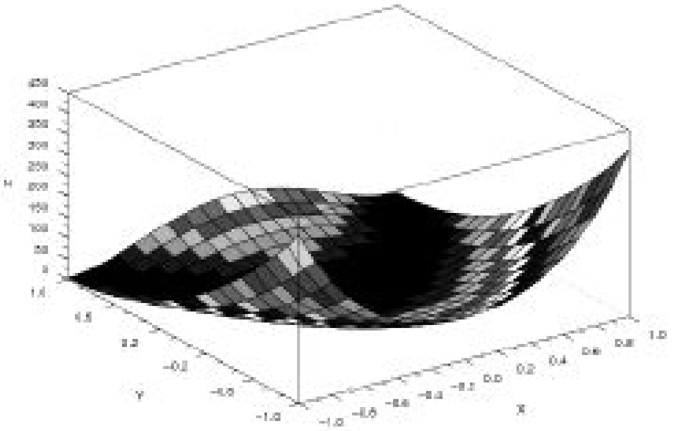


Рис. 10.5. Вигляд функції Розенброка

Функція Розенброка має мінімум у точці (1,1), що дорівнює 0. Завдяки своїй особливості, функция Розеброка є тестовою для алгоритмів мінімізації. Мінімум цієї функції за допомогою функції optim

Лістинг 8.2. Пошук мінімуму функції Розенброка

```
//Початкове наближення x0
x0=[-2;2]
//Функція Розенброка
function y=gg(x)
// x – це масив із двома невідомими
y=100*(x(2)-x(1)^2)^2+(1-x(1))^2;
endfunction
//Формування функції cst, яка повертає функцію Розенброка та її градієнт.
function [f,g,ind]=cst(x,ind)
```

```
f=gg(x);
g=numdiff(gg,x);
endfunction
//Визов функції optim
[f,xopt]=optim(cst,x0)
```

Нижче представлено результат пошуку мінімума функції Розенброка за допомогою функції optim.

```
x0 =
-2.
2.
xopt =
0.9999955
0.9999910
f =
2.010D-11
```

Запитання до захисту лабораторної роботи №8

1. Якою є математична постановка задачі оптимізації?
2. Що уявляє собою геометрична інтерпретація задач оптимізації?
3. У чому відмінність застосування геометричної інтерпретації для розв'язування одно - і двовимірних задач оптимізації?
4. Назвіть основні етапи розв'язування задач оптимізації.
5. Які функції використовуються у пакеті Scilab для розв’язання задач оптимізації?
6. Які методи розв’язання задач оптимізації Ви знаєте?
7. Що таке цільова функція і параметри методу?
8. Які особливості алгоритмів оптимізації багатомірних функцій?
9. Що таке градієнт та антиградієнт?

Лабораторна робота № 9. Лінійне програмування

Мета роботи – набути навички розв’язання задачі лінійного програмування. Виконати завдання згідно варіанта.

Варіанти завдань до лабораторної роботи №9.

Розв’язати задачу лінійного програмування графічно, знайти мінімальне та максимальне значення цільової функції [14-16, 19-22].

Задача 1

$$L(X) = 4x_1 - 3x_2 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \le 20, \\ x_1 + 2x_2 \ge 10, \\ -7x_1 + 10x_2 \le 80, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 2

$$L(X) = 2x_1 + 5x_2 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 6, \\ x_1 + 2x_2 \ge 5, \\ 4x_1 + x_2 \ge 8, \\ -x_1 + 2x_2 \ge 6, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 3

$$L(X) = x_1 + 2x_2 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \ge 10, \\ x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + 4x_2 \ge 3, \\ -x_1 + 4x_2 \le 2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 4

$$L(X) = -2x_1 + 5x_2 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 + 2x_2 = 8, \\ x_1 + x_2 \ge 5, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 5

$$L(X) = x_1 + 6x_2 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10, \\ 3x_1 - 3x_2 \ge 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6, \\ 3x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 6

$$L(X) = -3x_1 - 2x_2 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 3, \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ x_1 + x_2 \ge 6, \\ -2x_1 + 6x_2 \le 20, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 7

$$L(X)=x_1+6x_2 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} -2x_1+12x_2 \ge 8, \\ 4x_1+2x_2 \le 10, \\ 3x_1-4x_2 \ge 2, \\ 4x_1+5x_2 \ge 8, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 8

$$L(X)=4x_1+2x_2 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \ge 7, \\ 2x_1+x_2 \ge 8, \\ -x_1+2x_2 \le 6, \\ -2x_1+8x_2 \ge 4, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 9

$$L(X)=3x_1+4x_2 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2 \ge 8, \\ 4x_1+4x_2 \ge 18, \\ -x_1+x_2 \le 1, \\ x_2=2, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задача 10

$$L(X)=4x_1+3x_2 \to \max\ (\min)$$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2 \le 10, \\ x_1+2x_2 \ge 2, \\ -x_1+3x_2 \le 3, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Зразок виконання лабораторної роботи 9.

Для розв’язання задач лінійного програмування в *Scilab* призначена функція *linpro* наступної структури:

[*x*,*kl*,*f*]=*linpro*(*c*,*A*,*b*[,*ci*,*cs*][,*k*][,*x*0])

де, *c* - масив (вектор-стовпчик) коефіцієнтів при невідомих функції мети, довжина вектора n співпадає з кількістю невідомих *x*;

A - матриця при невідомих з лівої частини системи обмежень, кількість рядків матриці дорівнює числу обмежень *m*, а кількість стовпців співпадає з кількістю невідомих *n*;

b - масив (вектор-стовбець), містить вільні члени системи обмежень, має довжину вектора *m*.

ci - масив (вектор-стовбець) розмірності *n* містить нижню границю змінних x_j; за її відсутності вказують [ ].

cs - масив (вектор-стовбець) довжини *n*, містить верхню границю змінних x_j; за її відсутності вказують [ ].

k - цілочисельна змінна, використовується, якщо в систему обмежень, крім нерівностей, входять рівності.

*x*0 - вектор-стовбець початкових наближень довжиною *n*.

Функція *linpro* повертає масив невідомих *x*, мінімальне значення функції *f* і масив множників Лагранжа *kl*. Роглянемо використання функції *linpro* на прикладі розв’язання наступної задачі лінійного

програмування:
Знайти такі значення змінних x_1, x_2, x_3, x_4, при яких функція мети $Z = -x_2 - 2x_3 + x_4$ досягає свого мінімального значення та задовольняються обмеження:

$$
\begin{aligned}
&3x_1 - x_2 \le 2\\
&x_2 - 2x_3 \le -1\\
&4x_3 - x_4 \le 3\\
&5x_1 + x_4 \ge 6\\
&x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0,
\end{aligned}
$$

Після множення четвертого рівняння на -1 отримуємо дані для розв’язання задачі у *Scilab*

Лістинг 9.1. Розв’язання задачі

```
c=[0;-1;-2;1];
A=[3 -1 0 0;0 1 -2 0; 0 0 4 -1; -5 0 0 -1];
b=[2;-1;3;-6];
ci=[0;0;0;0];
[x,kl,f]=linpro(p,A,b,ai,[])
```

Лістинг 9.2. Результати розрахунку

```
 f=
2.
kl=
0.
0.
0.
0.
0.0909091
1.0909091
0.5454545
0.4545455
x=
1.
1.
1.
1.
```

Запитання до захисту лабораторної роботи № 9

1. Які функції *Scilab* застосовуються для розв’язання задач лінійного програмування?

2. Яка загальна математична модель задачі лінійного програмування?

3. Що уявляють собою функції обмеження задачі лінійного програмування?

4. Що уявляє собою функція мети задачі лінійного програмування?

5. Яка особливість використання функції *linpro* у задачах лінійного програмування?

6. Як привести задачу лінійного програмування до вигляду, що застосовується у пакеті *Scilab*?

7. Наведіть приклад використання апарату лінійного програмування для розв’язання прикладної задачі зі своєї галузі навчання.

Варіанти завдань для виконання розрахунково-графічної роботи

Номер варіанта контрольної роботи дорівнює сумі двох останніх цифр залікової книжки студента (номеру за списком). Контрольна робота складається з 6 завдань по різних темах курсу. Розв'язання за кожним завданням з використанням запропонованого методу приводиться у вигляді послідовності кроків алгоритму, розрахованих за допомогою комп'ютера або вручну. У більшості завдань таку послідовність зручно виконувати у вигляді таблиць.

Завдання 1. За допомогою методу половинного поділу знайти корінь рівняння

$$a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

в інтервалі $[a,b]$ з точністю α. Значення коефіцієнтів, інтервалів і точності обчислень приведені в таблиці:

N	A_0	a_1	a_2	A_3	a_4	$[a,b]$	α
0	5	-7	-1	2	0	1,2	0,000
1	-5	-10	0	1	0	3,4	0,000
2	-3	-5	0	1	0	2,3	0,000
3	2	-6	0	1	0	0,1	0,000
4	-15	0	3	1	0	1,2	0,000
5	5	-7	-1	2	0	0,1	0,000
6	-100	1	1	1	0	4,5	0,000
7	1	-4	-3	1	0	3,4	0,000
8	2	-1	-3	1	0	0,1	0,000
9	-30	2	0	1	0	2,3	0,000
10	-3	12	-12	0	1	2,3	0,000
11	-11	2	0	1	0	1,2	0,000
12	-1	0	3	1	0	0,1	0,000
13	-5	0	8	-3	1	0,1	0,000
14	-7	-13	3	1	0	-1,0	0,000
15	-9	0	8	-3	1	-1,0	0,000
16	-1	0	3	1	0	0,1	0,000
17	-1	-1	0	1	0	1,2	0,000
18	-9	3	0	1	0	1,2	0,000

Завдання 2. Використовуючи метод Гаусса чи Жордана-Гаусса, вирішити систему лінійних рівнянь:

0 . $$\left\{\begin{array}{l} 1{,}1\boldsymbol{x}_1+11{,}3\boldsymbol{x}_2-1{,}7\boldsymbol{x}_3+1{,}8\boldsymbol{x}_4=10 \\ 1{,}3\boldsymbol{x}_1-11{,}7\boldsymbol{x}_2+1{,}8\boldsymbol{x}_3+1{,}4\boldsymbol{x}_4=1{,}3 \\ 1{,}1\boldsymbol{x}_1-10{,}5\boldsymbol{x}_2-1{,}7\boldsymbol{x}_3-1{,}5\boldsymbol{x}_4=1{,}1 \\ 1{,}5\boldsymbol{x}_1-0{,}5\boldsymbol{x}_2+1{,}8\boldsymbol{x}_3-1{,}1\boldsymbol{x}_4=10 \end{array}\right.$$

1. $$\left\{\begin{array}{l} 4{,}4\boldsymbol{x}_1-2{,}5\boldsymbol{x}_2+19{,}2\boldsymbol{x}_3-10{,}8\boldsymbol{x}_4=4{,}3 \\ 5{,}5\boldsymbol{x}_1-9{,}3\boldsymbol{x}_2-14{,}2\boldsymbol{x}_3+13{,}2\boldsymbol{x}_4=6{,}8 \\ 7{,}1\boldsymbol{x}_1-11{,}5\boldsymbol{x}_2+5{,}3\boldsymbol{x}_3-6{,}7\boldsymbol{x}_4=-1{,}8 \\ 14{,}2\boldsymbol{x}_1+23{,}4\boldsymbol{x}_2-8{,}8\boldsymbol{x}_3+5{,}3\boldsymbol{x}_4=7{,}2 \end{array}\right.$$

2 . $$\left\{\begin{array}{l} 5{,}7\boldsymbol{x}_1-7{,}8\boldsymbol{x}_2-5{,}6\boldsymbol{x}_3-8{,}3\boldsymbol{x}_4=2{,}7 \\ 6{,}6\boldsymbol{x}_1+13{,}1\boldsymbol{x}_2-6{,}3\boldsymbol{x}_3+4{,}3\boldsymbol{x}_4=-5{,}5 \\ 14{,}7\boldsymbol{x}_1-2{,}8\boldsymbol{x}_2+5{,}6\boldsymbol{x}3-12{,}1\boldsymbol{x}_4=8{,}6 \\ 8{,}5\boldsymbol{x}_1+12{,}7\boldsymbol{x}_2-23{,}7\boldsymbol{x}_3+5{,}7\boldsymbol{x}_4=14{,}7 \end{array}\right.$$

3 . $$\left\{\begin{array}{l} 15{,}7\boldsymbol{x}_1+6{,}6\boldsymbol{x}_2-5{,}7\boldsymbol{x}_3+11{,}5\boldsymbol{x}_4=-2{,}4 \\ 8{,}8\boldsymbol{x}_1-6{,}7\boldsymbol{x}_2+5{,}5\boldsymbol{x}_3-4{,}5\boldsymbol{x}_4=5{,}6 \\ 6{,}3\boldsymbol{x}_1-5{,}7\boldsymbol{x}_2-23{,}4\boldsymbol{x}_3+6{,}6\boldsymbol{x}_4=7{,}7 \\ 14{,}3\boldsymbol{x}_1+8{,}7\boldsymbol{x}_2-15{,}7\boldsymbol{x}_3-5{,}8\boldsymbol{x}_4=23{,}4 \end{array}\right.$$

4 . $$\left\{\begin{array}{l} 14{,}4\boldsymbol{x}_1-5{,}3\boldsymbol{x}_2+14{,}3\boldsymbol{x}_3-12{,}7\boldsymbol{x}_4=-14{,}4 \\ 23{,}4\boldsymbol{x}_1-14{,}2\boldsymbol{x}_2-5{,}4\boldsymbol{x}_3+2{,}1\boldsymbol{x}_4=6{,}6 \\ 6{,}3\boldsymbol{x}_1-13{,}2\boldsymbol{x}_2-6{,}5\boldsymbol{x}_3+14{,}3\boldsymbol{x}_4=9{,}4 \\ 5{,}6\boldsymbol{x}_1+8{,}8\boldsymbol{x}_2-6{,}7\boldsymbol{x}_3-23{,}8\boldsymbol{x}_4=7{,}3 \end{array}\right.$$

5 . $$\left\{\begin{array}{l} 1{,}7\boldsymbol{x}_1-1{,}8\boldsymbol{x}_2+1{,}9\boldsymbol{x}_3-57{,}4\boldsymbol{x}_4=10 \\ 1{,}1\boldsymbol{x}_1-4{,}3\boldsymbol{x}_2+1{,}5\boldsymbol{x}_3-1{,}7\boldsymbol{x}_4=19 \\ 1{,}2\boldsymbol{x}_1+1{,}4\boldsymbol{x}_2+1{,}6\boldsymbol{x}_3+1{,}8\boldsymbol{x}_4=20 \\ 7{,}1\boldsymbol{x}_1-1{,}3\boldsymbol{x}_2-4{,}1\boldsymbol{x}_3+5{,}2\boldsymbol{x}_4=10 \end{array}\right.$$

6 . $$\left\{\begin{array}{l} 8{,}2\boldsymbol{x}_1-3{,}2\boldsymbol{x}_2+14{,}2\boldsymbol{x}_3+14{,}8\boldsymbol{x}_4=-8{,}4 \\ 5{,}6\boldsymbol{x}_1-12\boldsymbol{x}_2+15\boldsymbol{x}_3-6{,}4\boldsymbol{x}_4=4{,}5 \\ 5{,}7\boldsymbol{x}_1+3{,}6\boldsymbol{x}_2-12{,}4\boldsymbol{x}_3-2{,}3\boldsymbol{x}_4=3{,}3 \\ 6{,}8\boldsymbol{x}_1+13{,}2\boldsymbol{x}_2-6{,}3\boldsymbol{x}_3-8{,}7\boldsymbol{x}_4=14{,}3 \end{array}\right.$$

7 . $$\left\{\begin{array}{l} 3{,}8\boldsymbol{x}_1+14{,}2\boldsymbol{x}_2+6{,}3\boldsymbol{x}_3-15{,}5\boldsymbol{x}_4=2{,}8 \\ 8{,}3\boldsymbol{x}_1-6{,}6\boldsymbol{x}_2+5{,}8\boldsymbol{x}_3+12{,}2\boldsymbol{x}_4=-4{,}7 \\ 6{,}4\boldsymbol{x}_1-8{,}5\boldsymbol{x}_2-4{,}3\boldsymbol{x}_3+8{,}8\boldsymbol{x}_4=7{,}7 \end{array}\right.$$

$$17{,}1x_1-8{,}3x_2+14{,}4x_3-7{,}2x_4=13{,}5$$

8 . $$\begin{cases} 4{,}3x_1-12{,}1x_2+23{,}2x_3-14{,}1x_4=15{,}5 \\ 2{,}4x_1-4{,}4x_2+3{,}5x_3+5{,}5x_4=2{,}5 \\ 5{,}4x_1+8{,}3x_2-7{,}4x_3-12{,}7x_4=8{,}6 \\ 6{,}3x_1-7{,}6x_2+1{,}34x_3+3{,}7x_4=12{,}1 \end{cases}$$

9 . $$\begin{cases} 1{,}7x_1+10x_2-1{,}3x_3+2{,}1x_4=3{,}1 \\ 3{,}1x_1+1{,}7x_2-2{,}1x_3+5{,}4x_4=2{,}1 \\ 3{,}3x_1-7{,}7x_2+4{,}4x_3-5{,}1x_4=1{,}9 \\ 10x_1-20{,}1x_2+20{,}4x_3+1{,}7x_4=1{,}8 \end{cases}$$

10 . $$\begin{cases} 6{,}1x_1+6{,}2x_2-6{,}3x_3+6{,}4x_4=6{,}5 \\ 1{,}1x_1-1{,}5x_2+2{,}2x_3-3{,}8x_4=4{,}2 \\ 5{,}1x_1-5{,}0x_2+4{,}9x_3-4{,}8x_4=4{,}7 \\ 1{,}8x_1+1{,}9x_2+2{,}0x_3-2{,}1x_4=2{,}2 \end{cases}$$

11 . $$\begin{cases} 2{,}2x_1-3{,}1x_2+4{,}2x_3-5{,}1x_4=6{,}01 \\ 1{,}3x_1+2{,}2x_2-1{,}4x_3+1{,}5x_4=10 \\ 6{,}2x_1-7{,}4x_2+8{,}5x_3-9{,}6x_4=1{,}1 \\ 1{,}2x_1+1{,}3x_2+1{,}4x_3+4{,}5x_4=1{,}6 \end{cases}$$

12 . $$\begin{cases} 35{,}1x_1+1{,}7x_2+37{,}5x_3-2{,}8x_4=7{,}5 \\ 45{,}2x_1+21{,}1x_2-1{,}1x_3-1{,}2x_4=11{,}1 \\ -21{,}1x_1+31{,}7x_2+1{,}2x_3-1{,}5x_4=2{,}1 \\ 31{,}7x_1+18{,}1x_2-31{,}7x_3+2{,}2x_4=0{,}5 \end{cases}$$

13 . $$\begin{cases} 7{,}5x_1+1{,}8x_2-2{,}1x_3-7{,}7x_4=1{,}1 \\ -10x_1+1{,}3x_2-20x_3-1{,}4x_4=1{,}5 \\ 2{,}8x_1-1{,}7x_2+3{,}9x_3+4{,}8x_4=1{,}2 \\ 10x_1+31{,}4x_2-2{,}1x_3-10x_4=-1{,}1 \end{cases}$$

14 . $$\begin{cases} 7{,}3x_1-8{,}1x_2+12{,}7x_3-6{,}7x_4=8{,}8 \\ 11{,}5x_1+6{,}2x_2-8{,}3x_3+9{,}2x_4=21{,}5 \\ 8{,}2x_1-5{,}4x_2+4{,}3x_3-2{,}5x_4=6{,}2 \\ 2{,}4x_1+11{,}5x_2-3{,}3x_3+14{,}2x_4=-6{,}2 \end{cases}$$

15 . $$\begin{cases} 6{,}4x_1+7{,}2x_2-8{,}3x_3+42x_4=2{,}23 \\ 5{,}8x_1-8{,}3x_2+14{,}3x_3-6{,}2x_4=17{,}1 \\ 8{,}6x_1+7{,}7x_2-18{,}3x_3+8{,}8x_4=-5{,}4 \end{cases}$$

$13{,}2x_1 - 5{,}2x_2 - 6{,}5x_3 + 12{,}2x_4 = 6{,}5$

16 . $\begin{cases} 7{,}3x_1+12{,}4x_2-3{,}8x_3-14{,}3x_4=5{,}8 \\ 10{,}7x_1-7{,}7x_2+12{,}5x_3+6{,}6x_4=-6{,}6 \\ 15{,}6x_1+6{,}6x_2+14{,}4x_3-8{,}7x_4=12{,}4 \\ 7{,}5x_1+12{,}2x_2-8{,}3x_3+3{,}7x_4=9{,}2 \end{cases}$

17 . $\begin{cases} 8{,}1x_1+1{,}2x_2-9{,}1x_3+1{,}7x_4=10 \\ 1{,}1x_1-1{,}7x_2+7{,}2x_3-3{,}4x_4=1{,}7 \\ 1{,}7x_1-1{,}8x_2+10x_3+2{,}3x_4=2{,}1 \\ 1{,}3x_1+1{,}7x_2-9{,}9x_3+3{,}5x_4=27{,}1 \end{cases}$

18 . $\begin{cases} 1{,}7x_1+9{,}9x_2-20x_3-1{,}7x_4=1{,}7 \\ 20x_1+0{,}5x_2-30{,}1x_3-1{,}1x_4=2{,}1 \\ 10x_1-20x_2+30{,}2x_3+0{,}5x_4=1{,}8 \\ 3{,}3x_1-0{,}7x_2+3{,}3x_3+20x_4=-1{,}7 \end{cases}$

Завдання 3. Обчислити інтеграл по формулі трапецій, число розбивок $\boldsymbol{n}$=10:

0. $\int\limits_{0,8}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$

1. $\int\limits_{1,2}^{2,7} \frac{dx}{\sqrt{x^2+3{,}2}}$

2. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1{,}3}}$

3. $\int\limits_{0,2}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$

4. $\int\limits_{0,8}^{1,4} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3}}$

5. $\int\limits_{0,4}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{2+0{,}5x^2}}$

6. $\int\limits_{1,4}^{2,1} \frac{dx}{\sqrt{3x^2-1}}$

7. $\int\limits_{1,2}^{2,4} \frac{dx}{\sqrt{x^2+0{,}5}}$

8. $\int\limits_{0,4}^{1,2} \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$

9. $\int\limits_{0,6}^{1,5} \frac{dx}{\sqrt{2x^2+1}}$

10. $\int\limits_{2}^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$

11. $\int\limits_{0,5}^{1,3} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}}$

12. $\int\limits_{1,2}^{2,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 0,6}}$

13. $\int\limits_{1,4}^{2,2} \frac{dx}{\sqrt{3x^2 + 1}}$

14. $\int\limits_{0,8}^{1,8} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4}}$

15. $\int\limits_{1,6}^{2,2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2,5}}$

16. $\int\limits_{0,6}^{1,6} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 0,8}}$

17. $\int\limits_{1,2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1,2}}$

18. $\int\limits_{1,4}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 0,7}}$

Завдання 4. Використовуючи метод Эйлера, вирішити на зазначеному проміжку диференціальне рівняння з наступними початковими умовами:

0. $y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{5}}$ $y_0(1,8)=2,6$ $\boldsymbol{x}\in[1,8;2,8]$

1. $y' = x + \cos\frac{y}{3}$ $y_0(1,6)=4,6$ $\boldsymbol{x}\in[1,6;2,6]$

2. $y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{10}}$ $y_0(0,6)=0,8$ $\boldsymbol{x}\in[0,6;1,6]$

3. $y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{7}}$ $y_0(0,5)=0,6$ $\boldsymbol{x}\in[0,5;1,5]$

4. $y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{2}}$ $y_0(0,8)=1,4$ $\boldsymbol{x}\in[0,8;1,8]$

5. $y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{3}}$ $y_0(1,2)=2,1$ $\boldsymbol{x}\in[1,2;2,2]$

6. $y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{11}}$ $y_0(2,1)=2,5$ $\boldsymbol{x}\in[2,1;3,1]$

7. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{5}}$ $y_0(1,8)=2,6$ $\boldsymbol{x}\in[1,8;2,8]$

8. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{10}}$ $y_0(0,6)=0,8$ $\boldsymbol{x}\in[0,6;1,6]$

9. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{7}}$ $y_0(0,5)=0,6$ $\boldsymbol{x}\in[0,5;1,5]$

10. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{2,8}}$ $y_0(1,4)=2,2$ $\boldsymbol{x}\in[1,4;2,4]$

11. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{2}}$ $y_0(0,8)=1,3$ $\boldsymbol{x}\in[0,8;1,8]$

12. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{3}}$ $y_0(1,1)=1,5$ $\boldsymbol{x}\in[1,1;2,1]$

13. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{11}}$ $y_0(0,6)=1,2$ $\boldsymbol{x}\in[0,6;1,6]$

14. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{15}}$ $y_0(0,2)=1,1$ $\boldsymbol{x}\in[0,2;1,2]$

15. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{1,3}}$ $y_0(0,1)=0,8$ $\boldsymbol{x}\in[0,1;1,1]$

16. $y' = x + \sin\frac{y}{0,3}$ $y_0(0,5)=0,6$ $\boldsymbol{x}\in[0,5;1,5]$

17. $y' = x + \sin\frac{y}{\sqrt{0,7}}$ $y_0(1,2)=1,4$ $\boldsymbol{x}\in[1,2;2,2]$

18. $y' = x + \cos\frac{y}{\sqrt{3}}$ $y_0(0,4)=0,8$ $\boldsymbol{x}\in[0,4;1,4]$

Завдання 5. Апроксимувати задані результати експерименту, використовуючи метод найменших квадратів. Число точок у всіх варіантах завдання $\boldsymbol{n}$=10. Для варіантів 0-7 використовувати як емпіричну формулу статечну залежність $y=\alpha \boldsymbol{x}^{\beta}$, для варіантів 8-9 експонентну залежність $y=\alpha e^{\beta x}$, для варіантів 10-18 поліном другого ступеня $y=ax^2+bx+c$.

N		Масиви вихідних даних									
0	***x***	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	3,6	5,2	6,0	6,6	7,1	7,45	7,65	7,8	8,0	8,2
1	***x***	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	3,1	5,0	6,1	6,9	7,3	7,7	7,9	8,1	8,3	8,5
2	***x***	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

	y	3,6	5,2	6,1	6,9	7,3	7,7	7,9	8,1	8,3	8,5
3	***x***	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	4,0	5,7	6,6	7,4	7,9	8,2	8,5	8,75	8,9	9,0
4	***x***	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	3,1	5,1	6,1	6,8	7,3	7,7	7,9	8,2	8,4	8,5
5	***x***	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	2,7	4,1	5,1	5,7	6,2	6,5	6,8	7,1	7,2	7,4
6	***x***	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	2,3	4,5	5,5	6,2	6,7	7,0	7,35	7,55	7,75	7,9
7	***x***	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	y	3,2	4,7	5,6	6,4	7,0	7,5	8,1	8,5	8,8	9,1
8	***x***	-1,5	-1,0	-0,5	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
	y	0,35	0,5	0,7	1,0	1,41	2,0	2,83	4,0	5,66	8,0
9	***x***	-2,5	-2,0	-1,5	-1,0	-0,5	0	0,5	1,0	1,5	2,0
	y	0,06	0,11	0,19	0,33	0,57	1,0	1,73	3,0	5,2	9,0
10	***x***	-4,5	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0
	y	20,2	16,0	12,2	9,0	6,25	4,0	2,25	1,0	0,25	0
11	***x***	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5
	y	3,0	2,08	1,33	0,75	0,33	0,08	0	0,08	0,33	0,7
12	***x***	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
	y	0,75	0,33	0,08	0	0,08	0,33	0,75	1,33	2,08	3
13	***x***	-4,5	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0
	y	34,4	53,4	43,4	34,4	26,4	19,4	13,4	8,4	4,4	1,4
14	***x***	-4,5	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0
	y	55,2	43	32,2	23	15,2	9	4,25	1	-0,7	-1
15	***x***	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
	y	0,25	3	7,25	13	20,2	29	39,2	51	62,2	79

16	***x***	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5
	y	19	14,7	11	7,75	5	2,75	1	-0,2	-1	-1,2
17	***x***	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5
	y	-1	-0,2	1	2,75	5	7,75	11	14,7	19	23
18	***x***	-5,5	-5	-4,5	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1
	y	34,7	29	23,7	19	14,7	11	7,75	5	2,7	1

Завдання 6. Вирішити задачу лінійного програмування графічним методом:

0. $\begin{cases} 5x_1-2x_2\le 7\\ -x_1+2x_2\le 5\\ x_1+x_2\ge 6 \end{cases}$

$f=x_1+2x_2 \to min$

1. $\begin{cases} x_1+2x_2\le 25\\ 3x_1-5x_2\le 8\\ 5x_1+3x_2\ge 26 \end{cases}$

$f=2x_1+x_2\to min$

2. $\begin{cases} 8x_1-5x_2\le 16\\ -x_1+3x_2\le 2\\ 2x_1+7x_2\ge 9 \end{cases}$

$f=2x_1+3x_2 \to min$

3. $\begin{cases} 7x_1+5x_2\le 40\\ -5x_1+4x_2\le 6\\ x_1+2x_2\ge 8 \end{cases}$

$f=x_1+x_2\to min$

4. $\begin{cases} 2x_1+x_2\le 14\\ -3x_1+2x_2\le 9\\ 3x_1+4x_2\ge 27 \end{cases}$

$f=x_1+2x_2 \to min$

5. $\begin{cases} 5x_1-2x_2\le 4\\ -x_1+2x_2\le 4\\ x_1+x_2\ge 4 \end{cases}$

$f=x_1+2x_2\to min$

6. $\begin{cases} x_1+2x_2\le 14\\ 3x_1-5x_2\le 5\\ 5x_1+3x_2\ge 21 \end{cases}$

$f=2x_1+x_2 \to min$

7. $\begin{cases} 8x_1-5x_2\le 11\\ -x_1+3x_2\le 1\\ 2x_1+7x_2\ge 11 \end{cases}$

$f=2x_1+3x_2\to min$

8. $\begin{cases} 7x_1+5x_2\le 28\\ -5x_1+4x_2\le 7\\ x_1+2x_2\ge 5 \end{cases}$

$f=x_1+x_2 \to min$

9. $\begin{cases} 2x_1+x_2\le 11\\ -3x_1+2x_2\le 10\\ 3x_1+4x_2\ge 20 \end{cases}$

$f=x_1+2x_2\to min$

10. $\begin{cases} 5x_1-2x_2\le 7 \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1+2x_2\le 15 \end{cases}$

$-x_1+2x_2\le 5$
$x_1+x_2\ge 6$
$f=2x_1+x_2 \to min$

12. $\begin{cases} 8x_1-5x_2\le 16 \\ -x_1+3x_2\le 2 \\ 2x_1+7x_2\ge 9 \end{cases}$
$f=x_1+x_2 \to min$

14. $\begin{cases} 2x_1+x_2\le 14 \\ -3x_1+2x_2\le 9 \\ 3x_1+4x_2\ge 27 \end{cases}$
$f=2x_1+3x_2 \to min$

16. $\begin{cases} x_1+2x_2\le 14 \\ 3x_1-5x_2\le 5 \\ 5x_1+3x_2\ge 21 \end{cases}$
$f=2x_1+3x_2 \to min$

18. $\begin{cases} 7x_1+5x_2\le 28 \\ -5x_1+4x_2\le 7 \\ x_1+2x_2\ge 5 \end{cases}$
$f=x_1+2x_2 \to min$

$3x_1-5x_2\le 8$
$5x_1+3x_2\ge 26$
$f=2x_1+3x_2 \to min$

13. $\begin{cases} 7x_1+5x_2\le 40 \\ -5x_1+4x_2\le 6 \\ x_1+2x_2\ge 8 \end{cases}$
$f=x_1+2x_2 \to min$

15. $\begin{cases} 5x_1-2x_2\le 4 \\ -x_1+2x_2\le 4 \\ x_1+x_2\ge 4 \end{cases}$
$f=2x_1+x_2 \to min$

17. $\begin{cases} 8x_1-5x_2\le 11 \\ -x_1+3x_2\le 1 \\ 2x_1+7x_2\ge 11 \end{cases}$
$f=x_1+x_2 \to min$

Література

1. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.:Наука,1978. – 512 с.
2. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. – М.: Наука, 1970. – 664 с..
3. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М.: Наука, 1972.
4. Маликов В.Т., Кветный Р.Н. Вычислительные методы и применение ЭВМ: Учеб. пособие. — К.: Вища шк. 1989.—213с.
5. Мак-Кракен Д., Дорн У. Численные методы и программирование на Фортране. – М.: Мир, 1977. – 584 с.
6. Бахвалов Н. С. Численные методы : учебное пособие / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков; МГУ им. М. В. Ломоносова. - 3-е изд., доп. и перераб. - М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. - 636 с.
7. Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по вычислительной математике. М.: Высшая школа. 1990. - 208 с.
8. Ивашкин Ю.А. Вычислительная техника в инженерных расчетах. – М.: Агропромиздат, 1989. – 336 с.
9. Заварыкин В.М., Житомирский В.Г., Лапчик М.П. Численные методы. – М.: Просвещение, 1991. – 176 с.
10. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. Пер. С англ.. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
11. Дьяконов В.П. Справочник по алгоритмам и программам на языке Бейсик для персональных ЭВМ. –М.: Наука, 1989. – 240 с.
12. Гутер Р.С., Резниковский П.Т. Программирование и вычислительная математика. – М.: Наука, 1971. – 262 с.
13. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов. – М: Наука, 1985. – 432 с.
14. Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование. – М.: Мир, 1967. – 508 с.
15. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. – 536 с.
16. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Задачи и методы линейного программирования. – М.: Либроком, 2010. – 184 с.
17. Методические рекомендации к проведению лабораторных работ по математическому программированию / Сост. Ю.А. Комаров, Ю.Д. Попов, В.И. Рымарук, Киев: КГУ,1987. – 97 с.

18. М.І. Шпинковська, О.А. Шпинковський. Методичні вказівки до лабораторних робіт з дисципліни “Чисельні методи” для студентів, що навчаються за напрямом 6.050102 "Комп’ютерна інженерія". Одеса: ОНПУ. - 2010. – 47 с.
19. О.А. Шпинковський, М.І. Шпинковська, С.В. Котлік. Чисельні методи. Навч. посібник. Одеса: Оптімум. – 2003. – 122 с., іл.
20. Каханер Д. Численные методы и программное обеспечение / Д. Каханер, К. Моулер, С. Нэш; пер. с англ. Х.Д. Икрамова. — М.: Мир, 2001. — 575 с.
21. Алексеев Е. Р. Scilab: Решение инженерных и математических задач / Е.Р. Алексеев, О.В. Чеснокова, Е.А. Рудченко. - М. : ALT Linux ; БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. - 269 с. : ил.
22. Тропин И.С., Михайлова О.И., Михайлов А.В. Численные и технические расчеты в среде Scilab. Учебное пособие. — Москва: 2008. —
65 с.

Навчальний посібник

Усов Анатолій Васильович
Шпинковський Олександр Анатолійович
Шпинковська Марія Іванівна

Чисельні методи та їх реалізація у середовищі SCILAB

Підписано до друку
Формат 60x84/16 Ум. друк. арк. 11,6
Папір офсетний. Наклад 100 прим.

ФОП «Сухачов»
65023 м. Одеса, вул. Садова, 14
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єкт видавничої справи ДК 4362 від 13.07.2012 р.
Тел.: (098)457-75-00, (044) 384-26-08, (050) 552-20-13
E-mail: osvita.odessa@gmail.com, www.rambook.ru

Видавництво «Освіта України»
04136, м. Київ, вул. Маршала Гречка, 13, оф. 808
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єктів видавничої справи ДК №1957 від 23.04.2009 р.
Тел.: (044) 384-26-08, (097) 479-78-36, (050) 552-20-13
E-mail: osvita2005@gmail.com, www.rambook.ru

Надаємо всі види видавничих та поліграфічних послуг.