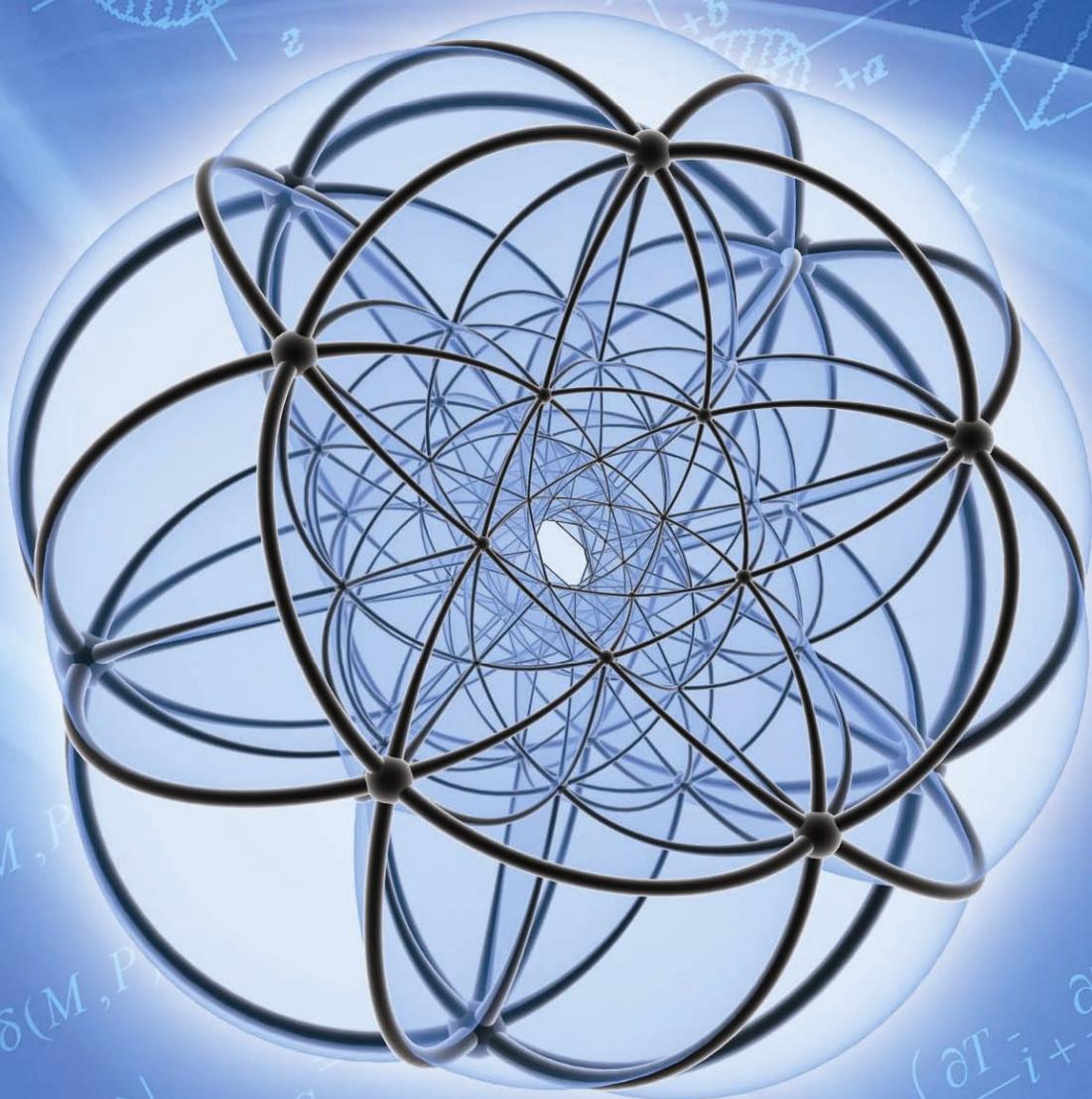


Усов А.В.
Шпинковский А.А.
Шпинковская М.И.

Уравнения математической физики в моделировании технических систем



Одесский национальный политехнический университет

УСОВ АНАТОЛИЙ ВАСИЛЬЕВИЧ

ШПИНКОВСКИЙ АЛЕКСАНДР АНАТОЛЬЕВИЧ

ШПИНКОВСКАЯ МАРИЯ ИВАНОВНА

**УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ В МОДЕЛИРОВАНИИ
ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

Учебное пособие

Киев

Освіта України

2014

УДК 517.958:536.001.57(075.8)
ББК 22.161.68я73
У76

Рекомендовано к печати Ученым советом
Одесского национального политехнического университета
(протокол № 9 от «24» июня 2014 г.)

Рецензенты:

Дашенко А.Ф., доктор технических наук, профессор, директор института машиностроения Одесского национального политехнического университета,
г. Одесса

Глушков А.В., доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей и прикладной математики Одесского государственного экологического университета,
г. Одесса

Кондратенко Ю.П., доктор технических наук, профессор кафедры интеллектуальных информационных систем Черноморского государственного университета им. Петра Могилы,
г. Николаев

У76 Усов А.В., Шпинковский А.А., Шпинковская М.И. Уравнения математической физики в моделировании технических систем: Уч. пособ. для студентов высших учеб. заведений. – Киев: Освіта України. 2014. – 190 с.

В учебном пособии рассмотрены вопросы применения дифференциальных уравнений математической физики для моделирования технических систем, и методы их точного и приближенного решения. Предложены примеры решения и варианты типовых задач для расчетной работы и проведения практических занятий. Для студентов, обучающихся по направлениям: «Прикладная механика», «Инженерная механика», другим направлениям подготовки бакалавров, магистров Одесского политехнического университета и других высших учебных заведений.

УДК 517.958:536.001.57(075.8)
ББК 22.161.68я73

ISBN 978-617-7111-68-8

© А.В. Усов
© А.А. Шпинковский
© М.И. Шпинковская
© Освіта України, 2014

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Дифференциальные уравнения математической физики для моделирования технических систем	7
Глава 2. Уравнения параболического типа и их применение к моделированию теплофизических процессов в технических системах	11
2.1. Некоторые вопросы теории теплопроводности	11
2.2. Дифференциальное уравнение теплопроводности	14
2.3. Математическая постановка краевых задач уравнения теплопроводности	18
2.4. Аналитические методы решения задач теплопроводности	27
2.4.1. Метод Фурье	27
2.4.2. Метод интегральных преобразований	34
2.4.3. Метод функций Грина	46
2.5. Численные методы решения краевых задач теплопроводности	53
2.5.1. Метод конечных разностей	53
2.5.2. Метод конечных элементов	60
2.6. Применение теории подобия к описанию тепловых процессов	66
Глава 3. Уравнения гиперболического типа и их роль в моделировании динамических процессов	74
3.1. Особенности применения гиперболических уравнений к описанию технических систем	74
3.2. Уравнение малых поперечных колебаний струны	74
3.3. Уравнения продольных колебаний стержней и струн	78
3.4. Энергия колебаний струны	79
3.5. Вывод уравнения электрических колебаний в проводниках	81
3.6. Поперечные колебания мембраны	82
3.7. Уравнения гидродинамики и акустики	85
3.8. Граничные и начальные условия	90

3.9. Применение метода характеристик к изучению малых колебаний струны	95
3.9.1. Неограниченная струна	95
3.9.2. Задача Коши	98
3.9.3. Ограниченная струна	101
3.10. Моделирование волновых процессов	104
3.10.1. Уравнения продольных колебаний и характеристики распространения импульсов в бесконечном стержне	106
3.10.2. Волновые процессы в полубесконечном и составном бесконечном стержне	109
Глава 4. Уравнения эллиптического типа в приложениях к моделированию стационарных процессов	115
4.1. Уравнения Лапласа и Пуассона	115
4.2. Некоторые частные решения Лапласа. Гармонические функции и их приложения к решению уравнений Лапласа	118
4.3. Единственность и устойчивость краевых задач Дирихле и Неймана	132
4.4. Решение краевых задач методом разделения переменных	140
4.5. Метод функции Грина	146
Глава 5. Расчетная работа по курсу математической физики	153
5.1. Методические указания по решению типовых заданий расчетной работы	153
5.2. Варианты заданий для выполнения расчетной работы	159
Глава 6. Методические указания к проведению практических занятий по теме «Аналитические методы решения уравнений математической физики»	164
6.1. Метод характеристик	164
6.2. Метод Фурье	168
6.3. Метод интегральных преобразований	176
Список литературы	188

Введение

Курс математической физики является разделом, в котором используются практически все понятия высшей математики. Именно во время изучения этой дисциплины студенты знакомятся с методами математического моделирования различных физических процессов в виде дифференциальных уравнений с частными производными, которые описывают разнообразные природные явления.

Главной целью этого пособия является формирование классических знаний, необходимых для математического моделирования и дальнейшего исследования построенных моделей с помощью различных методов и подходов, как точных, так и приближенных.

Материал изложен так, чтобы наилучшим образом помочь студенту овладеть математическими методами и уверенно их использовать в будущем.

В первой главе приведены необходимые сведения об основных уравнениях в частных производных, их классификация и методы решения.

Во второй главе моделируются теплофизические процессы в технических системах с помощью уравнения теплопроводности Фурье, которое принадлежит к классу параболических. Начальные и граничные условия определяют единственность решения рассматриваемых задач. Для решения тепловых задач используются как аналитические, так и численные методы. Приведены примеры построения математических моделей тепловых процессов, сопровождающих механическую обработку деталей машин.

В третьей главе объектами моделирования являются динамические процессы в технических системах, описываемые дифференциальными уравнениями гиперболического типа.

В четвертой главе, рассматриваются уравнения эллиптического типа в приложении к моделированию стационарных процессов, единственность и устойчивость краевых задач Дирихле и Неймана, методы их решений,

технологические процессы и системы, моделирование которых сводится к указанным задачам.

В пятой и шестой главах приведены методические указания для решения примеров и варианты заданий для расчетной работы, а также материал для проведения практических занятий по методам решения уравнений математической физики.

Дополнительные сведения для более глубокого изучения того или иного раздела можно получить из источников, приведенных в списке литературы. Учебное пособие может быть полезным как для студентов, так и для преподавателей, аспирантов и научных работников, которые в своей практической деятельности сталкиваются с необходимостью решения уравнений в частных производных.

Глава 1.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Большинство физических законов природы можно сформулировать на языке уравнений с частными производными. В качестве примеров можно привести уравнение Максвелла теории электромагнитных полей, законы теплообмена Ньютона, уравнения Навье — Стокса, уравнения движения Шредингера в квантовой механике. Во всех этих уравнениях физические явления описываются на языке пространственных и временных производных. Производные появляются в уравнениях потому, что они описывают важнейшие величины (скорость, ускорение, сила, поток и т. д.). Таким образом, возникают уравнения с частными производными, содержащие неизвестную функцию, которую необходимо определить.

В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), в которых неизвестная функция зависит только от одной переменной, в дифференциальных уравнениях с частными производными (ДУЧП) неизвестная функция зависит от нескольких переменных. Например, температура $U(x, t)$ зависит от координаты и времени.

Для упрощения записи будем использовать следующие обозначения:

$$U_t = \frac{\partial U}{\partial t}, \quad U_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad U_{xx} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \dots$$

В качестве примеров ДУЧП рассмотрим следующие наиболее известные уравнения математической физики:

$$U_t = U_{xx} \text{ — одномерное уравнение теплопроводности;}$$

$$U_t = U_{xx} + U_{yy} \text{ — двухмерное уравнение теплопроводности;}$$

$$U_{tt} = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} \text{ — трехмерное волновое уравнение;}$$

$$U_{tt} = U_{xx} + \alpha U_t + \beta U \text{ — телеграфное уравнение;}$$

$$U_t = \alpha \Delta U + \beta fU \text{ — уравнение Шредингера.}$$

Уравнения с частными производными можно классифицировать по многим признакам. Классификация уравнений важна потому, что для каждого класса существуют своя общая теория и методы решения уравнений.

Для классификации ДУЧП используются следующие основные признаки:

1. Порядок уравнения — наивысший порядок производных, входящих в уравнение. Например, $U_t = U_{xx}$ — уравнение второго порядка; $U_{tt} = U \cdot U_{xxx} + \cos x$ — уравнение третьего порядка.

2. Число переменных — число независимых переменных. Например, $U_t = U_{xx}$ — уравнение с двумя переменными x и t ; $U_{tt} = U_{zz} + \frac{1}{2}U_z + \frac{1}{z^2}U_{\theta\theta}$ — уравнение с тремя переменными z, θ и t .

3. Линейность. Уравнения с частными производными бывают линейные и нелинейные. В линейных уравнениях зависимая переменная и все ее частные производные входят линейным образом, т.е. они не умножаются друг на друга, не возводятся в степень т. д. Более точно линейным уравнением второго порядка с двумя независимыми переменными называется уравнение вида

$$AU_{xx} + BU_{xy} + CU_{yy} + DU_x + EU_y + FU = G, \quad (1.1)$$

где A, B, C, D, E, F, G — константы или заданные функции независимых переменных.

4. Однородность. Уравнение (1.1) называется однородным, если правая часть $G(x, y)$ тождественно равна нулю для всех x и y . Если $G(x, y)$ не равна тождественно нулю, то уравнение называется неоднородным.

5. Виды коэффициентов. Если коэффициенты A, B, D, E, F уравнения (1.1) постоянны, то уравнение называется уравнением с постоянными коэффициентами.

6. Тип линейных уравнений. Все линейные уравнения с частными производными второго порядка вида (1.1) относятся к одному из трех типов:

параболический тип, определяющийся условием $B^2 - 4AC = 0$ (уравнение теплопроводности);

гиперболический тип, определяющийся условием $B^2 - 4AC > 0$ (волновое уравнение);

эллиптический тип, определяющийся условием $B^2 - 4AC < 0$ (уравнение, описывающее стационарные процессы).

Для решения ДУЧП существует много методов, пригодных для практического использования. Наиболее важными являются те, в которых уравнения с частными производными сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям. К таким методам относятся следующие:

1. Метод разделения переменных. Уравнение в частных производных с независимыми переменными сводится к n обыкновенным дифференциальным уравнениям.

2. Метод интегральных преобразований. Уравнение в частных производных с n независимыми переменными сводится к уравнению с частными производными с $n-1$ независимыми переменными; следовательно, уравнение с частными производными с двумя независимыми переменными можно свести к обыкновенному дифференциальному уравнению.

3. Метод преобразования координат. Исходное уравнение с частными производными сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению или к другому более простому ДУЧП (канонического вида) с помощью соответствующего преобразования координат (например, поворота координатных осей и т.п.).

4. Численные методы. Исходное уравнение с частными производными сводится к системе разностных уравнений, которая решается методом итераций на ЭВМ. Кроме разностных методов решения УЧП существуют и другие численные методы, в том числе и основанные на аппроксимации решения полиномиальными поверхностными (аппроксимация сплайнами).

5. Метод функций Грина. Начальные и граничные условия заменяются системой простейших источников, и задача решается для каждого простейшего источника. Полное решение исходной задачи получается в результате суммирования решений для элементарных источников.

6. Метод интегральных уравнений. Уравнение с частными производными сводится к интегральному уравнению, методы решения которого более развиты.

7. Вариационные методы. Вместо уравнения с частными производными решается задача минимизации. Оказывается, что функция, доставляющая минимум некоторому выражению (типа полной энергии системы), является в то же время решением исходного уравнения с частными производными.

8. Метод разложения по собственным функциям. Решение уравнения с частными производными ищется в виде ряда по собственным функциям. Эти собственные функции находятся как решения так называемой задачи на собственные значения, соответствующей исходной задаче для уравнения с частными производными.

Вопросы к первой главе

1. Приведите примеры физических законов, которые можно сформулировать на языке уравнений с частными производными
2. Что представляют собой дифференциальные уравнения с частными производными?
3. По каким основным признакам классифицируют дифференциальные уравнения с частными производными?
4. Какие типы линейных уравнений с частными производными второго порядка Вы знаете?
5. Назовите методы решения дифференциальных уравнений с частными производными.

Глава 2.

УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

2.1. Некоторые вопросы теории теплопроводности.

Для моделирования процесса теплопроводности необходимо составить уравнение, описывающее передачу теплоты от одной части тела к другой или от одного тела к другому, сформулировать граничные условия, описывающие теплообмен на границах контактируемых тел, и определить начальные условия, описывающие состояние системы в начальный момент времени.

Процесс теплопередачи происходит в пространстве и времени. Поэтому аналитическое исследование теплопроводности сводится к изучению пространственно-временного измерения основной физической величины – температуры, т.е. к нахождению зависимости $T = f(x, y, z, t)$, определяющей мгновенное значение температуры во всех точках изучаемой ТС. Совокупность этих значений температуры и называется температурным полем.

Поле, соответствующее неустановившемуся тепловому режиму теплопроводности, называется нестационарным температурным полем. Если тепловой режим является установившимся, то температура в каждой точке тела с течением времени остается неизменной. Такое температурное поле называется стационарным и температура является функцией только координат: $T = T'(x, y, z)$.

В теле, имеющем температуру $T(x, y, z, t)$, можно выделить поверхность, во всех точках которой в некоторый момент времени температура одинакова – изотермическая поверхность уровня. Для изотермических поверхностей, описываемых уравнением $T(x, y, z, t) = C$, характерно то, что теплота не распространяется вдоль поверхности, а направляется от одной поверхности к другой.

Рассмотрим две бесконечно близкие изотермические поверхности с температурами T и $T + \Delta T$ ($\Delta T > 0$)^и и какую-либо точку M , лежащую на одной из них (рис. 2.1).

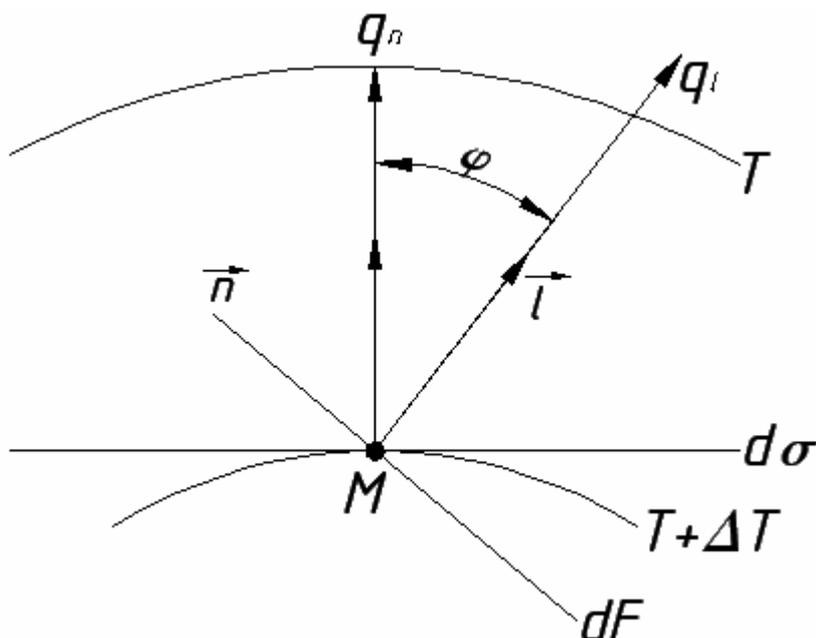


Рис. 2.1. Расчетная схема к выводу управления теплопроводности.

Перемещаясь из точки M вдоль любых направлений, можно обнаружить, что интенсивность изменения температур по различным направлениям неодинакова. Скорость изменения температуры T в точке M в направлении l характеризуется

$$\frac{\partial T}{\partial l} \quad l = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma),$$

которая вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial T}{\partial l} = \frac{\partial T}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial T}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial T}{\partial z} \cos \gamma. \quad (2.1)$$

Наибольшая разность температуры на единицу длины вектора перемещения наблюдается в направлении нормали \vec{n} к изотермической поверхности. Таким образом, в любой точке M изотермической поверхности максимальная скорость изменения температуры происходит по направлению нормали \vec{n} , т.е.

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \vec{n} \overrightarrow{grad} T = \left(\frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \vec{k} \right) \vec{n} = \overrightarrow{\nabla T} \vec{n}. \quad (2.2)$$

Температурный градиент показывает, насколько интенсивно меняется температура внутри тела. В этом смысле температурный градиент является основным физическим параметром, определяющим условие возникновения теплового процесса, т.е. при $\overrightarrow{grad} T \neq 0$ внутри тела возникает тепловой поток. Тепловой поток имеет вполне определенное направление, а именно: от точек тела с более высокой к точкам с более низкой температурой. Иначе, тепловой поток можно рассматривать как вектор, направленный в сторону уменьшения температур, а поле тепловых потоков – векторным.

Под вектором теплового потока в точке M температурного поля будем понимать вектор, направление которого совпадает с направлением переноса теплоты Q , а абсолютная величина выражает тепловой поток или интенсивность переноса теплоты, измеряемую количеством теплоты, проходящей в единицу времени t через единицу площади поверхности $d\sigma$, перпендикулярной к направлению потока в рассматриваемой точке, т.е.

$$q = \frac{dQ}{d\sigma dt}.$$

Векторы плотности теплового потока \vec{q} и $\overrightarrow{grad} T$ направлены по нормали к изотермической поверхности, но в противоположные стороны. С увеличением температур, т.е. возрастанием температурного градиента, увеличивается и плотность теплового потока. опыты показали, что между плотностью теплового потока и перепадом температур имеется пропорциональная зависимость. Это и явилось основой гипотезы Фурье о наличии простейшей количественной зависимости между абсолютными значениями векторов плотности теплового потока и температурного градиента, т.е.

$$\vec{q} = -\lambda \overrightarrow{grad} T. \quad (2.3)$$

Выражение является законом Фурье в векторном виде. Оно описывает механизм теплопроводности и используется при выводе уравнения теплопроводности, лежащего в основе построения математических моделей теплофизических процессов в технических системах.

Коэффициент пропорциональности λ называется теплопроводностью и является константой, характеризующей теплопроводящие свойства материала данного тела, размерность которого $Bm/m^2 \cdot град$.

2.2. Дифференциальное уравнение теплопроводности

В основу вывода дифференциального уравнения теплопроводности положен закон сохранения энергии, сочетаемый с законом Фурье.

Выделим в теле некоторую часть объема V , ограниченную замкнутой поверхностью S , через которую происходит тепловое взаимодействие выделенной части с окружающей ее средой – остальной частью тела. Имеет место следующее утверждение: количество теплоты Q , полученное выделенным объемом за время dt вследствие теплопроводности, а также от внутренних источников теплоты, равно изменению внутренней энергии вещества, содержащегося в выделенном объеме:

$$Q = Q_1 + Q_2, \quad (2.4)$$

где Q – изменение внутренней энергии вещества, содержащегося в выделенном объеме V за время dt ; Q_1 – количество теплоты, введенное в выделенный объем путем теплопроводности за время dt ; Q_2 – количество теплоты, которое выделилось в объеме V за время dt вследствие внутренних источников теплоты.

Для вычисления Q_1 воспользуемся законом Фурье в скалярной форме:

$$dQ_1 = \lambda \frac{\partial T}{\partial n} d\sigma dt = \lambda \overrightarrow{ngradT} d\sigma dt = -qnd\sigma dt, \quad (2.5)$$

где $\overrightarrow{q} = -\lambda \overrightarrow{gradT}$ – вектор плотности теплового потока.

Количество теплоты, протекающее за время dt через площадь поверхности S , выразится интегралом

$$Q_1 = -dt \int_S \vec{q} n d\sigma = -dt \int_S q_n d\sigma. \quad (2.6)$$

Поверхностный интеграл (2.6) можно преобразовать в объемный по формуле Остроградского-Гаусса:

$$\int_S q_n d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{q} dV.$$

Таким образом

$$Q_1 = -dt \iiint_V \operatorname{div} \vec{q} dV. \quad (2.7)$$

Выделение или поглощение теплоты внутри объема V удобно характеризовать с помощью плотности $F(M, t)$ (мощности) тепловых источников:

$$dQ_2 = F(M, t) dV dt.$$

За промежуток времени dt в теле объемом dV выделится количество теплоты

$$Q_2 = dt \iiint_V F(M, t) dV.$$

Здесь $F(M, t) > 0$, если $F(M, t) < 0$, то теплота не выделяется, а поглощается.

Общее количество теплоты, полученное выделенным объемом,

$$Q = dt \iiint_V F(M, t) dV - dt \iiint_V \operatorname{div} \vec{q} dV. \quad (2.8)$$

С другой стороны, это количество теплоты равно изменению внутренней энергии вещества, содержащегося в объеме V , $Q = CdT$, где C – теплоемкость тела V ; dT – изменение его температуры.

В точке $M(x, y, z) \in V$ за промежуток времени dt температура $T(x, y, z, t)$

изменится на $T(x, y, z, t + dt) - T(x, y, z, t) = \frac{\partial T}{\partial t} dt$.

Элементу объема dV массой ρdV для такого изменения температуры требуется количество теплоты, равное $\rho C \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) dV dt$, а всему объему V

$$CdT = dt \iiint_V c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dV, \quad (2.9)$$

где C – удельная теплоемкость, Дж/кг·град; ρ – плотность вещества, кг/м³; C_σ , Дж/м³·град. Таким образом,

$$\begin{aligned} -Q_2 - Q_1 + Q &= \iiint_V \left[F(M, t) + \operatorname{div} \vec{q} + c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \right] dV = \\ &= \iiint_V \left[c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} - F(M, t) \right] dV = 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Равенство (2.10) должно выполняться для любой части тела объемом V . Это возможно только тогда, когда в каждой точке внутри тела

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} - F(M, t) = 0. \quad (2.11)$$

Так как $q = -\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad} T}$, то последнее равенство можно записать так:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} (\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad} T}) + F(M, t). \quad (2.12)$$

Это уравнение называется дифференциальным уравнением теплопроводности или уравнением Фурье.

Для изотропного гомогенного тела параметры c, ρ, λ постоянные: $\operatorname{div}(\operatorname{grad} T) = \Delta T$, где Δ – оператор Лапласа. Окончательно после деления на $c\rho$ получим:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T(M, t) + \frac{1}{c\rho} F(M, t). \quad (2.13)$$

Здесь: $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ – коэффициент пропорциональности (теплопроводность). В отличие от λ , которая характеризует теплопроводящую способность тела, a характеризует теплоинерционные свойства тела и является мерой скорости выравнивания температурного поля в рассматриваемой среде.

В декартовых координатах уравнение (2.13) имеет такой вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{1}{c\rho} F(M, t), \quad (2.14)$$

В цилиндрических координатах (r, φ, z) , связанных с декартовыми координатами соотношениями $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $z = z$;

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < \infty,$$

уравнение записывается так:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{c\rho} F(r, z, \varphi, t). \quad (2.15)$$

Уравнение теплопроводности (2.13) относится к дифференциальным уравнениям параболического типа.

Если температура рассматриваемого тела в любой его точке не изменяется во времени, т.е. $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, то уравнение (2.13) принимает вид

$$\Delta T(M) + \frac{1}{\lambda} F(M) = 0. \quad (2.16)$$

Это уравнение называется уравнением Пуассона.

Если внутри тела отсутствуют тепловые источники и температурное поле стационарно, то имеем уравнение

$$\Delta T(M) = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0,$$

которое называется уравнением Лапласа и принадлежит к дифференциальным уравнениям эллиптического типа.

2.3. Математическая постановка краевых задач уравнения теплопроводности

Дифференциальное уравнение теплопроводности (2.13) является математической моделью целого класса явлений теплопроводности и само по себе не отражает развитие процесса теплопереноса в рассматриваемом теле. Математически это объясняется не единственностью решения дифференциальных уравнений в частных производных, к которым относится и уравнение теплопроводности. Чтобы получить из множества решений одно частное решение, соответствующее определенной конкретной задаче, необходимо иметь дополнительные данные, не содержащиеся в исходном дифференциальном уравнении теплопроводности.

Для однозначного решения тепловой задачи необходимо учитывать следующее:

1. Геометрию твердого тела, в котором протекает процесс теплообмена. Например, если рассматривать тела (рис. 2.1), то их геометрию можно математически описать соответствующими неравенствами: $0 \leq x \leq a$, $0 \leq x \leq \infty$.

2. Физические условия, характеризующие физические свойства (теплопроводность), а также закон распределения внутренних источников теплоты.

3. Граничные условия, характеризующие особенности теплового взаимодействия граничной поверхности тела с окружающей средой.

4. Временные (начальные) условия, характеризующие состояние тела в исходный момент времени или иначе определяющие распределение температуры в любой точке тела в некоторый момент времени, который для исследуемого процесса теплообмена принимается за начальный.

Перечисленные условия в совокупности определяют одно (конкретное) явление теплопроводности и в этом смысле могут быть названы условиями единственности. Для тела определенной геометрической формы с определенными физическими свойствами условия однозначности сводятся к заданию начального и граничного условий. Эти условия в совокупности

называются краевыми. Дифференциальное уравнение теплопроводности вместе с краевыми условиями составляют краевую задачу уравнения теплопроводности (тепловую задачу). Для установившегося теплового процесса необходимость в задании начальных условий отпадает, и в этом случае краевая задача будет состоять из уравнения теплопроводности и граничных условий.

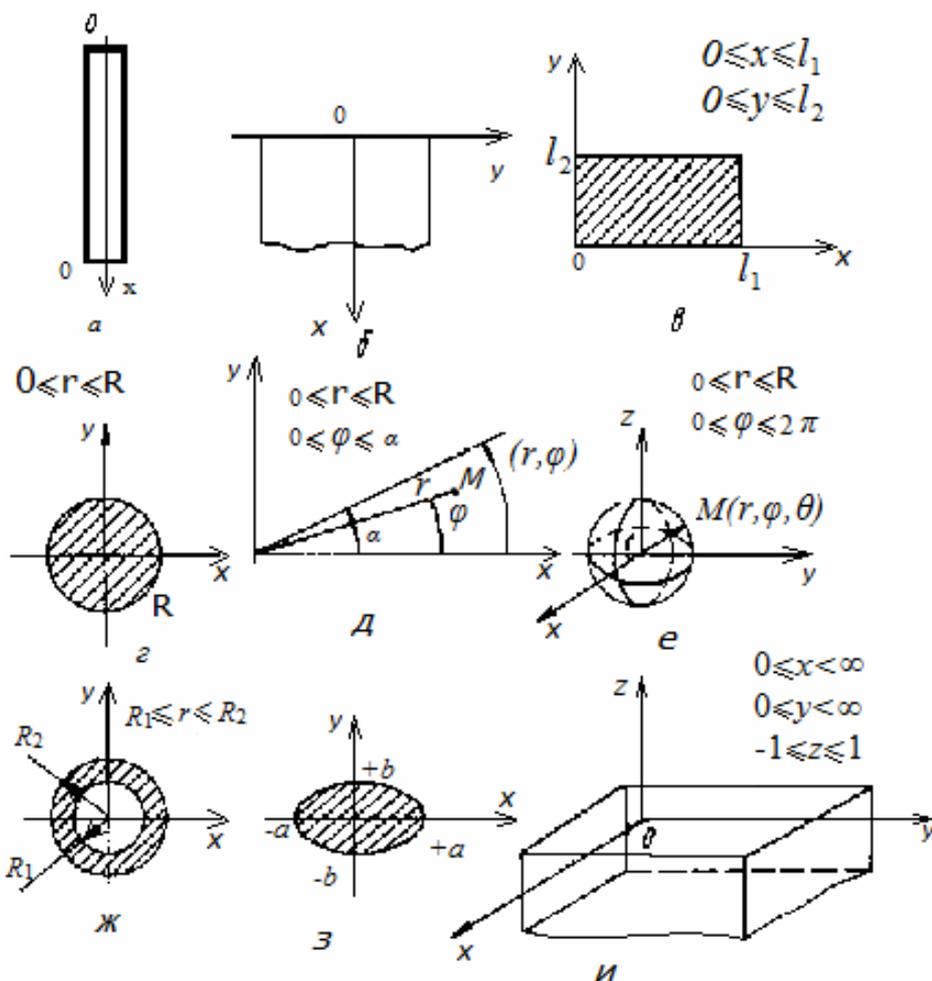


Рис. 2.2. Краевые геометрические условия при постановке краевых задач

Перейдем к формулировке начального и граничного условий, которым должна удовлетворять функция $T(x, y, z, r) = \theta(M, \tau)$, описывающая распределение температуры в некотором теле.

Пусть V - конечная область трехмерного пространства, где происходит процесс теплопроводности и S - граница области, которую будем считать кусочно-гладкой поверхностью. Областью задания начального условия

является V , соответствующая геометрической форме и размеру тела, а S - область задания граничных условий, G - область и ее граница S (рис 2.3).

Начальное условие уравнения теплопроводности состоит в задании температуры во всех точках области V в момент $t=0$, от которого и ведется отсчет времени:

$$T(M, t)_{t=0} = f_0(M); M \in V \quad (2.17)$$

где $f_0(M)$ - заданная функция, непрерывная в точках V .

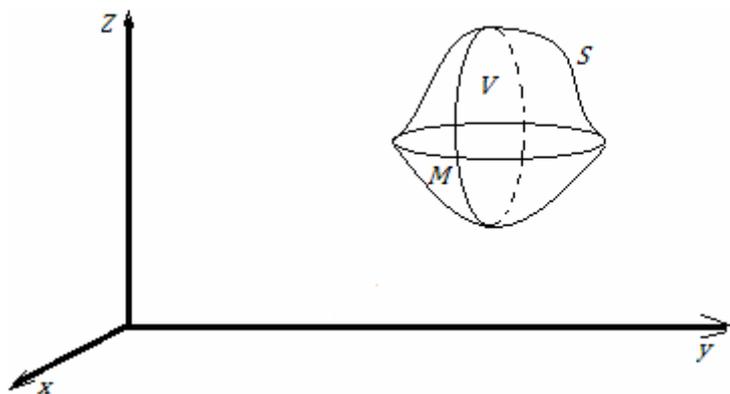


Рис. 2.3. Расчетная схема для формулирования начального и граничного условий

В случае равномерного распределения температуры в теле начальное условие упрощается: $T(M, t) = \theta_0 = const, M \in V$.

Условие (2.17) означает, что следует найти такое решение $\Theta(M, t)$ тепловой задачи, которое по мере приближения времени к начальному значению стремилось бы во всех точках области к заданной величине $f(M)$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(M, t) = f_0(M) \quad (2.18)$$

Понимание начального условия (2.1) в предельном смысле (2.18) объясняется исключительно теми классами конкретных функций, которыми описывается решение краевых задач уравнения теплопроводности. Эти функции во многих случаях не имеют смысла при $t=0$, однако допускают предельный переход при $t \rightarrow 0$. Например, функция

$$T(x,t) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi at} \int_0^{\infty} f_0(\xi) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] d\xi \quad (2.19)$$

является решением уравнения теплопроводности $\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ с начальным условием $T(x,0) = f(x)$. Из самого представления выражения (2.19) видно, что его правая часть не определена при $t = 0$, однако, можно показать, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \sqrt{\pi at} \int_0^{\infty} f_0(\xi) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4at}\right] d\xi = f_0(x).$$

Если начальное распределение температуры $f_0(M)$ разрывно в некоторых точках области V (или поверхности S), то решение $T(M,t)$ тепловой задачи будут обладать таким свойством, что эти разрывы должны исчезнуть с момента времени $t \geq t_\xi > 0$ (t_ξ - очень короткое время) и тогда полученное решение должно стремиться к заданной начальной температуре во всех точках тела, где начальное распределение непрерывно.

Граничные условия - условия теплового взаимодействия тела с окружающей средой - могут быть заданы в различной форме в зависимости от характера процесса. В тех случаях, когда на границе тела не происходит никаких процессов с поглощением или выделением теплоты и отсутствует теплообмен излучением, граничные условия на поверхности соприкосновения двух сред в самом общем виде заключаются в равенстве температур и тепловых потоков:

$$T_T = T_C; \lambda_T \frac{\partial T_T(M,t)}{\partial n} = \lambda_C \frac{\partial T_C(M,t)}{\partial n},$$

где T_T, T_C - температура соответственно тела и среды: λ_T, λ_C - теплопроводность соответственно тела и среды n - нормаль к граничной поверхности тела и среды.

Однако в практических задачах такая форма граничных условий чрезвычайно неудобна, так как для расчета температур твердого тела необходимо решать сопряженную задачу, т.е. отыскивать температурное поле в

окружающей среде. Поэтому в ряде практических важных задач желательно перейти к более простым граничным условиям.

В математической теории теплопроводности в большинстве случаев используются основные условия, представляющие собой идеализацию действительных физических процессов. Например, граничное условие I рода состоит в задании поверхностного распределения температуры для любого момента времени:

$$T(M, t) = f(M, t); M \in S; t > 0, \quad (2.20)$$

где M - точка, находящаяся на поверхности S ; $f(M, t)$ - заданная непрерывная функция координат $M(x, y, z)$ и времени t в точках области S .

В частном случае, если температура на поверхности одинакова и с течением времени не меняется, граничные условия имеют вид $T(M, t) = \theta_n$. Это может быть осуществлено при искусственном поддержании постоянной температуры или при особых условиях теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой.

Граничные условия II рода состоят в задании плотности теплового потока для каждой точки поверхности тела как функции координат и времени:

$$-\lambda \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} = \Phi(M, t); M \in S; t > 0, \quad (2.21)$$

где $\Phi(M, t)$ - заданная непрерывная функция координат $M(x, y, z)$ и времени t ; в области S ; n - нормаль к поверхности S в точке M .

Здесь следует различать процессы охлаждения и нагревания. Для процесса охлаждения $\frac{\partial T}{\partial n} < 0$; тепловой поток при этом считается положительным, так что условие (2.21) относится к процессу охлаждения. Для процесса нагревания $\frac{\partial T}{\partial n} > 0$; тепловой поток отрицательный и необходимо записать, если считать, что $\Phi(M, t) \geq 0$,

$$\lambda \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} = \Phi(M, t); \quad M \in S; t > 0 \quad (2.22)$$

В простейшем случае плотность теплового потока через поверхность может быть постоянной по поверхности и по времени

$$\left. \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} \right|_{M \in S} = \frac{q_0}{\lambda} = const$$

(например, при нагревании металлических изделий в высокотемпературных печах, при механической обработке).

Если в выражении (2.21) $\Phi(M, t) = 0$, то это означает, что поверхность тела S теплоизолирована. По определению, теплоизолированной поверхностью называется поверхность, через которую не проходит поток теплоты. В этом случае уравнение (2.21) имеет следующий вид:

$$\left. \frac{\partial T(M, t)}{\partial n} \right|_{M \in S} = 0; t > 0 \quad (2.23)$$

При граничных условиях III рода задаются температура окружающей среды и закон T_c конвективного теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой. Для описания процесса теплообмена используется закон Ньютона - Рихмана. Согласно этому закону, количество теплоты, отдаваемой единицей площади поверхности S с температурой T_π в единицу времени в окружающую среду с температурой T_c в процессе охлаждения $T_\pi > T_c$, пропорционально разности температур поверхности тела T_π и окружающей среды T_c .

$$q = \gamma [T_\pi - T_c] = \gamma \left[T(M, t) \Big|_{M \in S} - T_c \right], \quad (2.24)$$

где γ - коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом теплоотдачи, характеризует интенсивность теплообмена между поверхностью тела и окружающей средой. Численно он равен количеству теплоты, отдаваемому (или воспринимаемому) единицей площади поверхностью тела и окружающей средой в один градус. В отличие от теплопроводности λ

коэффициент не является физической константой, характерной для того или иного вещества. В общем случае он отражает совместное действие конвекции и излучения и зависит от многих факторов: геометрии и размеров тела, физических свойств среды, омывающей тело, направления и скорости смывания, теплоемкости, плотности, температуры поверхностей нагрева и др. Для упрощения задачи в расчетных схемах в качестве первого приближения принимают $\gamma = const$.

Граничные условия сопряжения применяются в случае контакта двух твердых тел. Если между граничными поверхностями тел имеется идеальный тепловой контакт, то их температуры по поверхности контакта должны быть одинаковыми. Кроме того, тепловой поток, выходящий из одного тела через контактную поверхность, должен быть равен тепловому потоку, входящему в другое тело.

Таким образом, если T_1 и T_2 - температура тел, находящихся в условиях плотного теплового контакта, то для точки контактной поверхности граничные условия сопряжения имеют вид

$$T_1(M, t) = T_2(M, t); \quad (2.25)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1(M, t)}{\partial n} \Big|_{S_K} = \lambda_2 \frac{\partial T_2(M, t)}{\partial n} \Big|_{S_K}, \quad (2.26)$$

где n - общая нормаль к контактной поверхности S_K в точке M .

В случае неидеального теплового контакта между двумя телами (контактные поверхности разделены тонкой прослойкой) обычно вводится понятие контактного сопротивления R (или контактной проводимости $\frac{1}{R}$). Равенство тепловых потоков имеет место, но появляется пропорциональная им разность между двумя поверхностными температурами. Соответствующие граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{\partial T_1(M_1, t)}{\partial n} \Big|_{S_k} &= 1/R [T_2(M, t)] \Big|_{S_k} - T_1(M, t) \Big|_{S_k} \Big]; \\ \lambda_1 \frac{\partial T_1(M_1, t)}{\partial n} \Big|_{S_k} &= \lambda_2 \frac{\partial T_2(M, t)}{\partial n} \Big|_{S_k}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Граничные условия сопряжения могут быть использованы при нахождении приближенного решения уравнения теплопроводности в неоднородной среде.

Перечисленные выше граничные условия в большинстве практических случаев задаются в каждой точке поверхности S - граничной поверхности рассматриваемого тела. Однако возможны случаи (например, обработка с охлаждающей средой), когда то, или иное граничное условие имеет место не на всей поверхности S , а на каком-либо кусочно-гладком ее участке. В этом случае имеют место так называемые разнородные условия. Например, в полуплоскости $y \geq 0, -\infty < x < \infty$ задаются произвольные величины: на одной части граничной поверхности ($x > 0$) - нестационарная температура, на другой ($x < 0$) - тепловой поток. Если $T(x, y, z)$ - температурное поле в этой полуплоскости, то на поверхности ($y = 0$) имеем разнородные граничные условия вида

$$\begin{aligned} T(x, y, z) \Big|_{y=0} &= \phi_1(x, t); x > 0; t > 0; \\ -\lambda \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \Big|_{y=0} &= \phi_2(x, t); x < 0; t > 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Как отмечалось, дифференциальное уравнение теплопроводности (2.1) связывает временное и пространственное распределение температуры внутри тела в любой момент времени $t > 0$. Для однозначного определения температуры внутри тела необходимо задать ее в начальный момент времени (начальные условия), геометрическую форму и размеры тела и закон взаимодействия между поверхностью тела и окружающей средой (граничные условия). Основные краевые задачи для уравнения теплопроводности формулируются следующим образом.

Требуется найти в области V дважды непрерывно дифференцируемое по пространственным координатам, непрерывно дифференцируемое по времени t

и непрерывное вплоть до границы решение $T(M, t)$ уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T(M, t) + f(M, t); M \in V; t > 0,$$

где Δ - оператор Лапласа по координатам точки. Это решение в области V при $t = 0$ непрерывно и должно удовлетворять начальному условию

$$T(M, t) \Big|_{t=0} = \phi_0(M); M \in V, \quad (2.29)$$

а на границе — какому-либо одному из перечисленных граничных условий (2.20) — (2.28). Предполагается также выполнение условий согласования: в случае граничных условий I рода (2.20):

$$\phi_0(M) \Big|_{M \in S} = f(M, t) \Big|_{t=0}; M \in S; \quad (2.30)$$

в случае граничных условий II рода (2.10):

$$\lambda \frac{\partial \phi_0(M)}{\partial n} \Big|_{M \in S} = \Phi(M, t) \Big|_{t=0}; M \in S; \quad (2.31)$$

в случае граничных условий III рода:

$$\frac{\partial \phi_0(M)}{\partial n} \Big|_{M \in S} = -h[\phi_0(M) - \phi(M, t)] \Big|_{t=0}. \quad (2.32)$$

Таким образом, для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \Delta T(M, t) + f(M, t); M \in V; t > 0, \left[f = \frac{F}{c\rho} \right] \quad (2.33)$$

имеем согласно заданию граничных условий: первую краевую задачу (2.20), (2.29); вторую краевую задачу (2.21), (2.29); третью краевую задачу (2.32).

Для уравнения стационарной теплопроводности

$$\Delta^2 T(M) + f(M) = 0; M \in S; \left[f = \frac{F}{\lambda} \right] \quad (2.34)$$

имеют место следующие краевые задачи.

Первая краевая задача: требуется найти решение $T(M)$ уравнения (2.34), удовлетворяющее в G условию

$$T(M) = \phi(M); M \in S \quad (2.35)$$

Это и есть, так называемая задача, Дирихле.

Вторая краевая задача, или задача Неймана: требуется найти решение $T(M)$ уравнения (2.34) в каждой точке на поверхности, которое имеет предельное значение нормальной производной и удовлетворяет условию

$$-\lambda \frac{\partial T(M)}{\partial n} = \phi(M); M \in S \quad (2.36)$$

Третья краевая задача: необходимо найти решение $T(M)$ уравнения (2.34), непрерывное в Δ , предельное значение нормальной производной которого удовлетворяет условию

$$-\lambda \frac{\partial T(M)}{\partial n} = \gamma [T(M) - \phi(M)]; M \in S \quad (2.37)$$

В формулах (2.35) - (2.37) $\phi(M)$ заданная на S непрерывная функция.

Краевые условия $\phi(M); f(M, t); \Phi(M, t)$ обычно определяются из опыта и поэтому не могут быть найдены абсолютно точно. Всегда неизбежна некоторая погрешность в определении начальных или граничных условий. Эта погрешность будет сказываться и на решении задачи, а так как краевая задача описывает реальный физический процесс, то решение этой задачи должно характеризоваться функциями, непрерывно зависящими от краевых функций задачи.

2.4. Аналитические методы решения задач теплопроводности

2.4.1. Метод Фурье

Наиболее эффективным из аналитических методов теории теплопроводности является метод Фурье. Его идея заключается в следующем: решение краевой задачи для уравнения в частных производных сводится к

решению вспомогательных краевых задач специального типа для дифференциальных уравнений, методика решений которых разработана достаточно хорошо. Затем для исходного уравнения в частных производных строятся частные решения в виде произведения найденных решений вспомогательных краевых задач, и берется их линейная комбинация с постоянными коэффициентами в виде бесконечного ряда, который дает общее решение краевой задачи. Для применимости метода существенным является:

- 1) линейность уравнения в частных производных;
- 2) линейность краевых условий в исходной задаче.

Типичными задачами теплопроводности, для решения которых на практике применяется метод Фурье, являются краевые задачи в ограниченных областях, хотя этот метод может быть применен и в неограниченных и в полуограниченных областях.

В основу метода положено представление искомого решения тепловой задачи в виде ряда Фурье по некоторой системе ортогональных функций, найденных при решении вспомогательной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, так называемой задачи Штурма-Лиувилля.

Рассмотрим применение метода Фурье при решении одномерной тепловой задачи для бесконечного стержня, боковая поверхность которого теплоизолирована. Температура $T(x, t)$ точек этого стержня при отсутствии тепловых источников удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (2.38)$$

Так как стержень очень длинный, то на процессы, протекающие в его средней части, главное влияние оказывает начальное распределение температуры, а влияние температурных условий на концах стержня в течение довольно длительного времени почти не будет сказываться. Краевые условия при этом отпадают. На искомую функцию $T(x, t)$ накладывается только начальное условие

$$T(x, t) \Big|_{t=0} = f(x), \quad (2.39)$$

где функция $f(x)$ определена на всей числовой оси. Задача решения уравнения (2.38) с начальными условиями (2.39) называется задачей с начальным условием, или задачей Коши.

Для упрощения исходной задачи введем вместо времени новую переменную $t^1 = a^2 t$. Тогда

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t - \frac{\partial t^1}{\partial t}},$$

и исходное уравнение (2.38) примет вид

$$\frac{dT}{dt^1} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (2.40)$$

Чтобы решить задачу (2.39) — (2.40), применим метод разделения переменных и суперпозиции частных решений Фурье. Для этого представим искомое решение в виде произведения функций, зависящих только от одной из независимых переменных $T(x, t^1) = X(x)U(t^1)$. Подставляя это произведение вместо $T(x, t^1)$ в уравнение (2.39), получаем

$$X(x)U'(t) = X''(x)U(t^1) \quad \text{или} \quad \frac{U'(t^1)}{U(t^1)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (2.41)$$

Обе части последнего уравнения должны быть постоянными, поскольку его левая часть не зависит от x , а правая - от t^1 , т.е. ни левая, ни правая части не могут зависеть ни от x , ни от t^1 . В этом рассуждении — ключ к методу Фурье. Обозначив постоянную, которой должны быть равны и левая и правая части равенства (2.41) через C имеем уравнение:

$$\frac{U'(t^1)}{U(t^1)} = C; \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = C \quad (2.42)$$

Первое из них имеет общее решение $U(t^1) = Ce^{Ct^1}$. Поскольку ни в одном сечении стержня (т.е. ни при каком фиксированном X) температура $T(x, t^1) = X(x)U(t^1)$ не может неограниченно возрастать по абсолютной величине

при $t^1 \rightarrow \infty (t \rightarrow \infty)$, должно быть отрицательно. Положим $C_1 = -\lambda^2$, тогда $U(t^1) = Ce^{-\lambda^2 t^1}$. Второе из уравнений (2.42) принимает вид $X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$ и имеет общее решение $X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$.

Таким образом, получаем частное решение уравнения (2.39).

$$T(x, t^1) = (AC \cos \lambda x + BC \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 t^1}$$

или
$$T(x, t^1) = (\alpha \cos \lambda x + \beta \sin \lambda x) e^{-\lambda^2 t^1} \quad (2.43)$$

Здесь $\alpha = AC, \beta = BC, \lambda$ - произвольные постоянные. Функция (2.43) является при любом фиксированном λ - решением уравнения (2.39). Это означает, что α и β могут быть произвольными функциями от $\lambda: \alpha = \alpha(\lambda); \beta = \beta(\lambda)$, так что окончательно имеем семейство частных решений уравнения (2.39)

$T_\lambda(x, t^1) = [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] e^{-\lambda^2 t^1}$, зависящего от параметра λ , который может принимать все значения $[-\infty; +\infty]$. Поэтому функция

$$T(x, t^1) = \int_{-\infty}^{+\infty} T_\lambda(x, t^1) d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] e^{-\lambda^2 t^1} d\lambda, \quad (2.44)$$

также является решением уравнения (2.39). Остается только подобрать неизвестные функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ так, чтобы решение (2.44) удовлетворяло начальному условию (2.39), т.е. чтобы

$$T(x, t^1) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] e^{-\lambda^2 t^1} d\lambda = f(x)$$

Последнее равенство означает, что функцию $f(x)$ надо разложить в интеграл Фурье. Это разложение возможно, если $f(x)$ абсолютно интегрируема по всей оси OX , т.е. интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится. Это условие означает конечность тепловой энергии стержня. Поэтому разлагая функцию $f(x)$ в интеграл Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda(x - \xi) d\xi$$

и учитывая, что $\cos \lambda(x - \xi) = \cos \lambda x \cos \lambda \xi + \sin \lambda x \sin \lambda \xi$, получаем

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi \right) \cos \lambda x + \right. \\ \left. + \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi \right) \sin \lambda x \right\} d\lambda \right\} d\lambda, \quad (2.45)$$

Сравнивая это разложение и формулу (2.45), заключаем, что неизвестные функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ должны определяться по формулам

$$\alpha(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi; \\ \beta(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi.$$

Подставляя выражения для $\alpha(\lambda)$ и $\beta(\lambda)$ в решение (2.44), получаем функцию

$$\theta(x, t^1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \{ \cos \lambda x \cos \lambda \xi + \sin \lambda x \sin \lambda \xi \} e^{-\lambda^2 t^1} d\xi = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2 t^1} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda(x - \xi) d\xi, \quad (2.46)$$

удовлетворяющую одновременно и уравнению (2.39), и начальному условию (2.40). Для того чтобы решение (2.46) можно было физически истолковать, преобразуем его, меняя порядок интегрирования:

$$T(x, t^1) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \lambda(x - \xi) e^{-\lambda^2 t^1} d\lambda \right\} d\xi.$$

Производя замену переменной $\lambda = \sigma \sqrt{t}$, и вводя обозначения $\frac{x - \xi}{\sqrt{t}} = \varpi$, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos \lambda(x - \xi) e^{-\lambda^2 t^1} d\lambda = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2} \cos \sigma \varpi d\sigma = \frac{1}{\sqrt{t}} I(\varpi).$$

Интеграл $I(\varpi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma^2} \cos \sigma \varpi d\sigma$ называется интегралом Пуассона. Его

значение определяется выражением $I(\varpi) = \sqrt{\pi} e^{-\frac{\varpi^2}{4}}$ или, учитывая обозначение

$$T(x, t^1) = \frac{1}{2a} \sqrt{t} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{\frac{(x-\xi)}{4t^1}} d\xi .$$

Возвращаясь к исходной задаче (2.37) — (2.38), получаем

$$T(x, t) = \frac{1}{2a} \sqrt{\pi t} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right] d\xi .$$

Рассмотрим физический смысл полученного решения. Функция

$$\Phi_{\xi}(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right],$$

являющаяся решением исходного уравнения (2.37), называется фундаментальным решением уравнения теплопроводности. Она имеет важный физический смысл; связанный с понятием физического импульса. Физическим тепловым импульсом называется такое начальное распределение температуры, при котором в стержень введено некоторое количество теплоты на отрезке от $(x_0 - \xi)$ до $(x_0 + \xi)$ так, что температура этого отрезка в момент времени $t = 0$ поднимается до значения u_0 , количество теплоты Q_0 пропорционально заштрихованной на рис. 2.4 площади $2\xi u_0$.

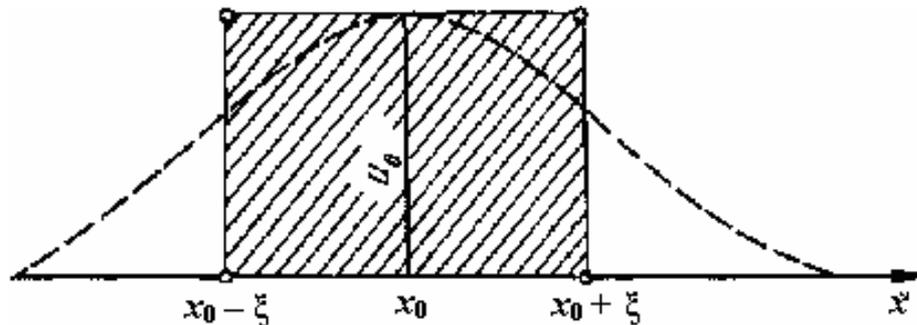


Рис. 2.4. Физическая интерпретация решения задачи теплопроводности

Устремляя $\xi \rightarrow 0$ перейдем от физического теплового импульса к точечному. Тогда

$$T(x, t) = \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\right) \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}\right].$$

Распространение теплоты в стержне после точечного импульса осуществляется по кривым Гаусса. Максимальная температура будет в той

точке стержня, где приложен импульс ($x = x_0$). При фиксированном моменте $t > 0$ максимальная температура обратно пропорциональна коэффициенту температуропроводности $a = \sqrt{\frac{\lambda^2}{c\rho}}$. Качественно это очевидно из физических соображений: в каждый момент времени, максимальная температура по стержню будет тем меньше, чем больше коэффициент теплопроводности λ и чем меньше удельная теплоемкость C и плотность ρ материала стержня (рис.2.4). В каждой фиксированной точке $x \neq x_0$ функция $T(x, t)$ времени t сначала возрастает от $t = 0$ до некоторого максимального значения $T(x)$, а затем монотонно убывает, стремясь к нулю при $t \rightarrow \infty$ (рис.2.5). Максимально достигаемая температура в точке $x = x_0$ стержня обратно пропорциональна расстоянию от точки приложения импульса, а время, необходимое для достижения максимальной температуры, прямо пропорционально квадрату указанного расстояния рис.2.6.

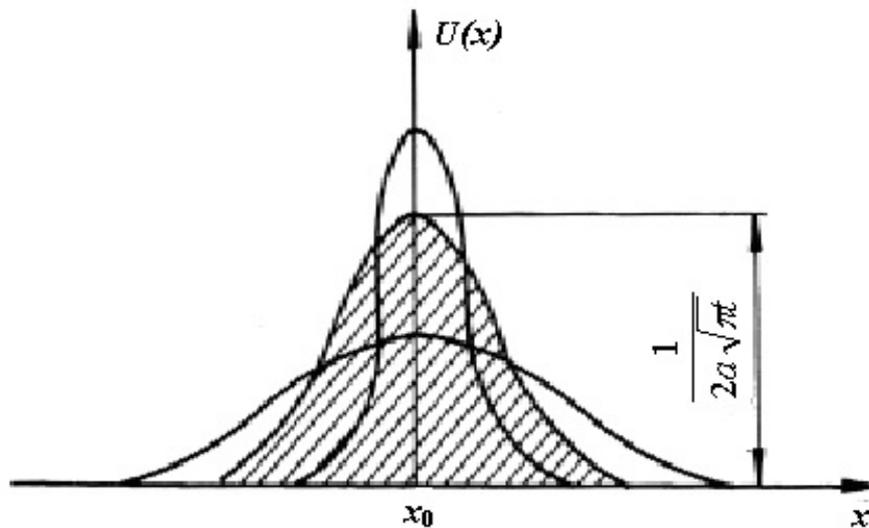


Рис. 2.5. Распространение теплоты в стержне после воздействия теплового импульса

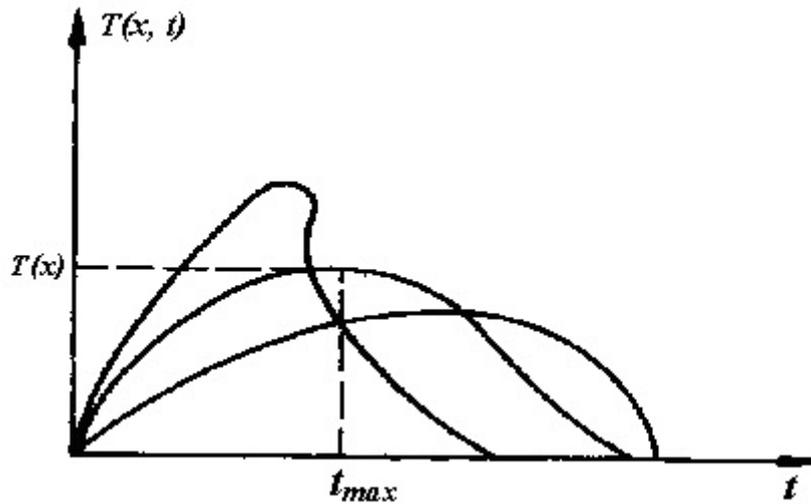


Рис. 2.6 Зависимость температуры от времени в фиксированной точке

Метод Фурье формально неприменим для неоднородного уравнения теплопроводности и неоднородности граничных условий. Применение этого метода станет возможным, если преобразовать задачу путем приведения граничных условий к однородным.

2.4.2. Метод интегральных преобразований.

К числу преимуществ метода интегральных преобразований следует отнести возможность непосредственного применения метода как к однородным, так и к неоднородным краевым задачам, единообразие методики и значительное упрощение в связи с более простой техникой вычисления, свойственной именно интегральным методам. При наличии прямых и обратных для данного вида преобразований техника решения упрощается до применения стандартных рецептов, ведущих к решению задачи коротким путем и в более простом виде, чем в методе разделения переменных.

Метод интегральных преобразований применим только к линейным дифференциальным уравнениям с линейными граничными условиями.

Пусть требуется определить функцию $T(x, y, z, t)$, удовлетворяющую в области $\Omega = (a < x < b)$, $y, z \in G$; $t > 0$ дифференциальному уравнению теплопроводности (нестационарной или стационарной) с заданными начальным

и граничным условиями. Решение задачи заметно упрощается, если вместо непосредственного определения функции искать предварительно ее интегральное преобразование, определяемое формулой

$$T(\xi, y, z, t) = \int_a^b T(x, y, z, t)k(x, \xi)dx, \quad (2.47)$$

где $c < \xi < d$; $k(x, \xi)$ – надлежаще выбранная функция, определенная в области $(a < x < b, c < \xi < d)$, называемая ядром интегрального преобразования (2.47).

В результате интегрального преобразования получается некоторая новая функция $T(\xi, y, z, t)$, уже не зависящая от x , называемая интегральной трансформантой, изображением или образом функции $T(x, y, z, t)$. Исходная функция $T(x, y, z, t)$ называется оригиналом трансформанты $T(\xi, y, z, t)$, переменная x называется переменной преобразования. Пределы a и b (соответственно c и d) могут быть как конечными, так и бесконечными. В первом случае преобразование (2.47) называется интегральным преобразованием с конечными пределами, во втором применение преобразования эквивалентно некоторому преобразованию по нескольким переменным

$$T(\xi, y, v, \eta) = \iiint_a^b R(x, \xi, z, v, t, \eta)T(x, y, z, t)dx dz dt,$$

называемому кратным интегральным преобразованием. Преобразование, когда некоторая функция $T(\xi, y, z, t)$, снова преобразуется в функцию $T(x, y, z, t)$, называется обратным интегральным преобразованием (2.47). Соответствующая формула, дающая переход от изображений к оригиналам, называется формулой обращения:

$$T(x, y, z, t) = \int_c^d R(x, \xi)T(\xi, y, z, t)d\xi.$$

Основная идея применения интегрального преобразования (2.47) к задачам для дифференциальных уравнений в частных производных состоит в

выборе ядра $R(x, \xi)$ таким образом, чтобы дифференциальные операции по переменной преобразования в исходной задаче изменить алгебраическими операциями в преобразованной задаче. При этом выбор ядра $R(x, \xi)$ интегрального преобразования осуществляется в соответствии с дифференциальным уравнением и граничными условиями задачи, т.е. с учетом геометрической формы тела и законом его теплового взаимодействия с окружающей средой.

Интегральные преобразования, применяемые для решения задач теплопроводности, можно разделить на два класса: интегральные преобразования по времени t и интегральные преобразования по пространственным переменным. Это обусловлено тем, что уравнение теплопроводности является уравнением первого порядка относительно переменной t , тогда как относительно пространственных координат – это уравнение второго порядка. Причем время меняется в пределах от нуля до бесконечности ($0 \leq t < \infty$), что дает возможность применить по переменной t интегральное преобразование одного вида от геометрии рассматриваемого тела и вида граничных условий. Этот класс преобразований составляет операционное исчисление. Трансформанта температуры по t определяется по формуле:

$$\bar{T}(M, p) = \int_0^{\infty} e^{-Pt} T(M, \tau) dt, \quad p = \sigma + iw \quad (2.48)$$

или

$$\bar{T}(M, p) = p \int_0^{\infty} e^{-Pt} T(M, t) dt. \quad (2.49)$$

Преобразование (2.48) называется преобразованием Лапласа. Преобразование Лапласа – Карсона (2.49) отличается от первого лишь множителем p перед интегралом. Для того, чтобы изображение $T(m, p)$ существовало, интегралы (2.48) – (2.49) должны сходиться. Это накладывает определенные ограничения на функцию температуры $T(M, t)$, свойства которой в большинстве

рассматриваемых на практике случаев удовлетворяют условиям существования указанных интегралов.

Если задача решена в изображениях, то нахождение интеграла по трансформанте (обратное преобразование) в общем случае выполняется по формуле обращения:

$$T(M, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{P-j\infty}^{P+j\infty} e^{-P\tau} \bar{T}(M, p) dp. \quad (2.50)$$

Интегрирование происходит в комплексной плоскости $p = \sigma + iw$ вдоль прямой $\sigma = const$, параллельной мнимой оси. Действительные числа σ выбираются так, чтобы все особые точки подынтегрального выражения в (2.50) лежали в левой полуплоскости комплексной плоскости p .

Нахождение оригинала функции по ее изображению может быть получено в элементарных функциях, если трансформанта представлена в виде ряда по отрицательным степеням p :

$$\bar{T}(M, p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k(M)}{p^{k+1}}.$$

Тогда оригинал $T(M, t)$ также представляется в виде ряда

$$\bar{T}(M, p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k(M) t^k}{k!}.$$

Если изображение представляет собой дробную функцию

$$T(M, p) = \frac{T_1(M)\Phi(p)}{\psi(p)} = T_1(M) \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots},$$

то по теореме разложения имеем

$$T(M, t) = \sum_{n=1}^k \frac{\Phi(p)}{\psi(p)} T_1(M) e^{-P_n \tau},$$

где P_n – простые корни функции $\psi(p)$, при этом знаменатель имеет счетное множество простых корней. Если степень полинома $\Phi(p)$ меньше степени полинома и среди корней $\psi(p)$ имеются кратные в точках $\psi(p)$, то

$$T(M, t) = \sum_{m=1} \frac{T_1(M)}{(k-1)!} \lim_{P \rightarrow P_m} \left\{ \frac{d^{k-1}}{dp^{k-1}} \left[\frac{\Phi(p)(p-p_m)^k}{\psi(p)} e^{Pt} \right] \right\},$$

где сумма берется по всем корням $T(m, p)$. В самом общем случае оригинал $T(M, t)$ может быть найден по формуле

$$T(M, t) = \sum_m \operatorname{res} \left\{ e^{P\tau}, \bar{T}(M, p) \right\} \Big|_{P=P_m},$$

где суммирование производится по всем особым точкам P_m – функции $\bar{T}(M, p)$. В тех случаях, когда нельзя получить аналитическое выражение для оригинала, пользуются приближенными формулами обращения преобразований Лапласа, среди которых можно выделить соотношение

$$T(t) \approx \frac{(-1)^n (n+k)^{n+k+1}}{\Gamma(n+k+1)(t-t_0)^{n+1}} \left\{ T(p) e^{-Pt} \right\}^n \Big|_{P=\frac{n+k}{t-t_0}},$$

где $n \in N$; $k \in R$; $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

Пример. Найти распределение температур $T(M, t)$ в полуограниченном теле по глубине $x (0 \leq x < \infty)$, $M(x)$, если на границе его поддерживается заданная температура $q(t)$, а начальная температура тела равна нулю, т.е. найти решение уравнения удовлетворяющее условиям $x \geq 0, t \geq 0$.

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a^2 \left[\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \right],$$

Пусть $T(x, 0) = 0, T(0, t) = q(t)$. Искомая функция $T(x, t)$ и ее производные являются оригиналами (по переменной t). Введем обозначения

$$\bar{T}(x, p) = L[T(x, t)]; \quad \bar{T}(x, p) = \int_0^{\infty} T(x, t) e^{-Pt} dt.$$

Тогда по правилу дифференцирования оригиналов получаем с учетом начальных условий

$$L \left[\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \right] = p \bar{T}(x, p); \quad L \left[\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \right] = \frac{\partial^2 \bar{T}(x, p)}{\partial x^2};$$

$$\bar{T}(0, p) = Q(p) = L[q(t)].$$

Приходим к краевой задаче относительно трансформанты искомой функции:

$$p\bar{T}(x, p) = a^2 \left[\frac{\partial^2 \bar{T}(x, p)}{\partial x^2} \right]; \quad (2.51)$$

$$\bar{T}(0, p) = Q(p). \quad (2.52)$$

Считая в уравнении (2.51) p параметром, находим решение обыкновенного дифференциального уравнения по переменной x . Так как характеристическое

уравнение $a^2 k^2 - p = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{p}{a}}$, то $T(x, p) = c_1 e^{\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\right)x} + c_2 e^{-\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\right)x}$

является общим решением уравнения (2.51). Функция $T(x, p)$ должна быть ограничена при $x \rightarrow \infty$, поэтому $c_1 = 0$. Из условия (2.52) находим постоянную

$$c_1 : T(0, p) = Q(p) = c_2.$$

Следовательно, решением уравнения (2.51), удовлетворяющим условию (2.52),

будет функция $T(x, p)Q(p)e^{-\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\right)x}$. Представим полученное решение в виде

$$T(x, p) = pQ(p) = \frac{1}{p} e^{-\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\right)x}.$$

Тогда, применяя интеграл Дюамеля

$$\frac{1}{p} e^{-\left(\sqrt{\frac{p}{a}}\right)x} = L \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right] \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right),$$

получаем для решения $T(x, t)$ выражение

$$T(x, t) = q(t) \operatorname{erfc}(\infty) + \int_0^1 \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right) \right]_t^1 q(t - \tau) d\tau.$$

Здесь

$$\operatorname{erfc}(\infty) = 1 - \frac{2}{\sqrt{n}} \int_0^\infty e^{-u^2} du = 0$$

$$\left[\operatorname{erf} \left(\frac{x}{2a\sqrt{\tau}} \right) \right]_t^1 = -\frac{2}{\sqrt{n}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{\tau}}} (e^{-u^2} du) = \frac{-\left(\frac{2}{\sqrt{n}}\right) \left(\frac{x}{2a}\right) (-1)}{2} \sqrt{t^3} e^{\frac{-x}{4a^2\tau}}.$$

Таким образом, искомое решение имеет вид

$$T(x, \tau) = \frac{1}{2} a \sqrt{n} \int_0^t \frac{q(t-\tau)}{\varepsilon^{\frac{3}{2}}} e^{4a^2\tau} d\tau.$$

Интегральные преобразования по пространственным переменным выбираются в зависимости от геометрической формы тела и граничных условий исходной задачи. При этом из дифференциального уравнения теплопроводности исключаются вторые частные производные по пространственным переменным путем замены линейным выражением относительно изображения искомой функции и граничными функциями задачи.

Последовательное применение интегральных преобразований по всем пространственным переменным преобразует исходное дифференциальное уравнение в частных производных в обыкновенное линейное дифференциальное уравнение относительно переменной.

Наиболее употребительными в теории теплопроводности являются интегральные преобразования, приведенные в табл. 2.1. Особенностью интегральных преобразований, кроме преобразований Фурье, является наличие бесконечного верхнего предела. Поэтому их можно применять только к краевым задачам теплопроводности для тел полуограниченной протяженностью. При этом выбор соответствующего интегрального преобразования при решении краевой задачи определяется видом граничного условия при $x = 0$. Преобразование Хенкеля применяется для тел, обладающих симметрией; преобразование Меллина используется при решении стационарных краевых задач теплопроводности в секториальных областях; преобразование Меллера - Фока дает возможность решать тепловые задачи, связанные с интегрированием уравнения Лапласа и Пуассона для области, ограниченной двумя пересекающимися сферами, и областей, ограниченных одним или двумя софокусными гиперболоидами вращения; преобразование Канторовича - Лебедева и его различные модификации можно использовать для областей, ограниченных поверхностью двугранного угла или конуса.

Практическое применение названных интегральных преобразований существенно облегчается наличием таблиц прямых и обратных преобразований различных функций, часто встречающихся в конкретных задачах. Рассмотрим технику применения интегральных преобразований к решению задачи теплопроводности для полубесконечного стержня:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}; 0 < x < \infty; 0 \leq \tau < \infty \end{array} \right. \quad (2.53)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T(x, t) \Big|_{(t)=0} = \psi(t); \frac{\partial^k T}{\partial x^k} \Big|_{x \rightarrow 0} = 0; k = 0, 1 \end{array} \right. \quad (2.54)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T(x, t) \Big|_{x=0} = \Phi(x) \end{array} \right. \quad (2.55)$$

Здесь для исключения x следует воспользоваться одним из преобразований, определенных на полубесконечном интервале. Таких преобразований несколько (табл. 2.1). Однако, учитывая отмеченное выше характерное свойство преобразований Фурье, внимание следует сосредоточить на и преобразованиях Фурье. Из двух названных преобразований следует воспользоваться преобразованием. Это диктуется формулой преобразования производных (табл. 2.1), содержащей (помимо трансформанты) граничное значение производной. Умножая выражение (2.53) на $k(\alpha, x) = \sin \alpha x$ и интегрируя по x на интервале $(0, \infty)$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} T(\alpha, t) = a^2 \left[-\alpha^2 T(\alpha, t) + \alpha T(x, t) \Big|_{x=0} \right].$$

Учитывая здесь граничное условие (2.54) и применяя преобразование к (2.55), получаем краевую задачу

$$\frac{\partial}{\partial t} T(\alpha, \tau) + a^2 \alpha^2 T(\alpha, \tau) = a^2 \alpha \psi(\tau); \quad (2.56)$$

$$T(\alpha, \tau) = \Phi(\alpha); \quad (2.57)$$

$$[T(\alpha, \tau) \Phi(\alpha)] = \int_{-\infty}^{\infty} [T(x, \tau), \Phi(x)] \sin \alpha x dx \quad (2.58)$$

Общее решение дифференциального уравнения (2.56) запишем в виде

$$T(\alpha, \tau) = a^2 \alpha \int_0^{\tau} e^{-a^2 \alpha^2 (\tau - \tau')} \psi(\tau') d\tau', \quad (2.59)$$

где $C(\alpha)$ произвольная функция параметра преобразования; частное решение неоднородного уравнения (2.56)

$$T(\alpha, \tau) = a^2 \alpha \int_0^{\tau} e^{-a^2 \alpha^2 (\tau - \tau')} \psi(\tau') d\tau' \quad (2.60)$$

Подставляя (2.59) в (2.57), находим $C(\alpha) = \Phi(\alpha)$. Решение исходной краевой задачи получаем, применяя к выражению (2.59) обратное преобразование Фурье:

$$T(x, \tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \Phi(\alpha) e^{-a^2 \alpha^2 \tau} \sin \alpha x dx + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} T(x, \tau) e^{-a^2 \alpha^2 \tau} \sin \alpha x dx \quad (2.61)$$

Полученное решение выразим через заданные функции $\Phi(x)$ $\psi(x)$. Для этого подставим в формулу (2.61) интегральные представления (2.57) и (2.60) функции $\Phi(\alpha)$ и $T(\alpha, \tau)$. Изменив в полученном выражении порядки интегрирования, и воспользовавшись формулой

$$\sin \alpha x \sin \alpha \xi = \frac{1}{2} [\cos \alpha (x - \xi) - \cos \alpha (x + \xi)],$$

а также значениями интегралов

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta y^2} \cos by dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} e^{-\frac{b^2}{4\beta}}; \quad \int_0^{\infty} ye^{-\beta y^2} \sin by dy = \frac{b}{4\beta} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} e^{-\frac{b^2}{4\beta}},$$

получим окончательно

$$T(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \psi(\xi) \exp \left[\frac{-(x - \xi)^2}{4a^2 t} \right] - \exp \left[\frac{-(x + \xi)^2}{4a^2 t} \right] d\xi \right\} +$$

$$+ x \int_0^t \psi(t') \exp \left[-\frac{x^2}{4a^2 (t - t')} \right] \frac{dt'}{\sqrt{(t - t')^3}}.$$

Если начальная температура стержня равна нулю, а на конце поддерживается постоянная температура $\phi(x) = 0$; $\psi(t) = T_0 = const$, то решение имеет вид

$$T(x,t) = \frac{xT}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2(t-t')}\right] \frac{dt'}{\sqrt{(t-t')^3}}; \text{ или после замены } \xi = \frac{x^2}{4a^2(t-t')}$$

$$T(x,t) = \frac{2T_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-\xi} d\xi = T_0 \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right), \quad (2.62)$$

где $\operatorname{erfc}(z)$ - функция, дополнительная к интегралу вероятности и определяемая

соотношением $\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_z^{\infty} e^{-u^2} du$. График этой функции показан на рис. 2.7.

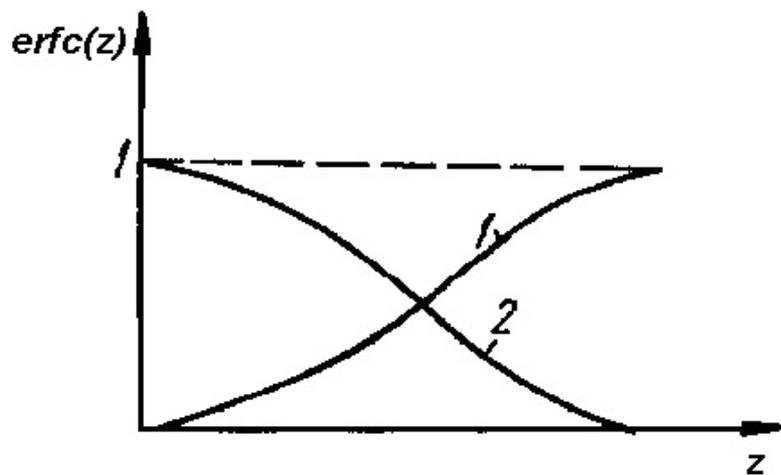


Рис. 2.7. Графики функций $\operatorname{erfc}(z)$

Полученное решение (2.62) описывает распределение температуры в полубесконечном стержне в момент времени t . С ростом времени температура в стержне выравнивается.

Таблица 2.1. Основные интегральные преобразования

Наименование	Промежуток интегрирования (а, в)	Ядро преобразования $k(\alpha, x)$	Формула обращения $L^{-1}[F(\alpha)]$	Преобразование операций $L[f(x)]$
Фурье: <i>exp</i>	$(-\infty, \infty)$	$e^{i\alpha x}$	$f(x) = \frac{1}{2} \pi \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) e^{i\alpha x} dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(x) e^{i\alpha x} dx = F(\alpha); \quad f^{(k)}(x) _{x \rightarrow \pm\infty} = 0; \quad k \in N$
<i>exp</i> конечное	$(-\pi, \pi)$	e^{inx}	$f(x) = \frac{1}{2} \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n) e^{inx}$	$\int_{-\pi}^{\pi} f^{(m)}(x) e^{inx} dx = (-in)^m F(n) +$ $+ (-1)^n \sum_{k=0}^{m-1} (-in)^{m-1-k} \left[f^{(k)} \left(\frac{\pi}{-f^{(k)}(-\pi)} \right) \right]$
<i>cos</i>	$(0, \infty)$	$\cos \alpha x$	$f(x) = \frac{1}{2} \pi \int_0^{\infty} F(\alpha) \cos \alpha x dx$	$\int_0^{\infty} f''(x) \cos \alpha x dx = -d^2(F(\alpha) - f(x)) _{x=0}$ $f^{(k)}(x) _{x \rightarrow 0} = 0$
<i>cos</i> конечное	$(0, \pi)$	$\cos nx$	$f(x) = \frac{f(0)}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cos nx$	$\int_0^{\pi} f''(x) \cos nx dx = -n^2 F(n) + (-1)^n f'(\pi) - f'(0)$
<i>sin</i>	$(0, \infty)$	$\sin \alpha x$	$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F(\alpha) \sin \alpha x dx$	$\int_0^{\pi} f''(x) \sin \alpha x dx = -dF(\alpha) + \alpha f(x) _{x=0};$ $f^{(k)}(x) _{x \rightarrow \infty} = 0$

Лапласа – Карсона	$(0, \infty)$	e^{-Pt}	$f(x) = \frac{1}{2} \pi i \int_{C-i\infty}^{C+i\infty} e^{-Pt} \frac{F(p)}{P} dp$	$\int_0^{\infty} P e^{-Pt} f^{(k)}(t) dt = F(p) - \sum_{n=1}^{k-1} P^{k-1-n} f(t) _{t=0}$
<i>sin</i> конечное	$(0, \pi)$	$\sin nx$	$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin nx$	$\int_0^{\pi} f''(x) \sin nx dx = -n^2 F(n) + n [(-1)^{n+1} f(\pi) + f(0)]$
Лапласа	$(0, \infty)$	$e^{-\lambda x}$	$f(x) = \frac{1}{2} \pi i \int_{y_0-j\infty}^{y_0+j\infty} F(\alpha) e^{\alpha x} d\alpha$	$f^{(m)}(x) e^{-\alpha x} dx = \alpha^m F(\alpha) - \sum_{k=0}^{m-1} \alpha^{m-k-1} f(x) _{x=0};$ $ f(x) < M e^{S_0}$
Ханкеля	$(0, \infty)$	$x T, (\alpha, x)$	$f(x) = \int_0^{\infty} \alpha F(\alpha) I_{\nu}(\alpha x) d\alpha$	$\int_0^{\infty} \left[f''(x) + \frac{1}{x} f'(x) - \frac{\nu^2}{x^2} f(x) \right] x I_{\nu}(\alpha x) dx =$ $= \alpha^2 F(\alpha); \quad \nu > -1$
Меллина	$(0, \infty)$	$x^{\alpha-1}$	$f(x) = \frac{1}{2} \pi i \int_{y_0-j\infty}^{y_0+j\infty} F(\alpha) x^{-\alpha} d\alpha$	$\int_0^{\infty} [x^2 f''(x) + x f'(x)] x^{\alpha-1} dx = \alpha^2 f(\alpha); \quad \gamma_1 < \gamma < \gamma_2$
Канторо- вича – Лебедева	$(0, \infty)$	$K_{i\tau}$	$T(x\nu\varphi) = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\infty} \bar{T}(\tau, \varphi) \tau shx$ $x \pi \tau K_{i\tau}(\gamma x) d\tau$	$\int_0^{\infty} T(x\gamma\varphi) \frac{K_{i\tau}(\gamma x)}{x} dx = \frac{d^2 \bar{T}}{d\varphi^2} - \tau^2 \bar{T}$
Меллера – Фока	$(1, \infty)$	$P \frac{1}{2} + i\tau(x)$	$f(x) = \int_1^{\infty} \bar{f}(\tau) \pi h \pi \tau P \frac{1}{2} + i\tau(x) d\tau$	$\int_1^{\infty} f(x) P \frac{1}{2} + i\tau(x) dx = \left(\tau^2 + \frac{1}{4} \right) \bar{f}(\tau)$

2.4.3. Метод функций Грина.

Этот метод, как и все предыдущие, применим к линейным уравнениям теплопроводности с линейными краевыми условиями, но существенно отличается от метода разделения и метода интегральных преобразований. Метод функций Грина универсален: его можно применять для решения краевых задач при достаточно общей постановке в одно-, дву-, и трехмерном случаях, в ограниченных, полуограниченных и неограниченных областях, при начальном и граничных условиях неоднородных уравнений, причем как для нестационарной, так и для стационарной теплопроводности. Идея метода функций Грина достаточно проста: в начале находится специальное решение краевой задачи теплопроводности того же типа (так называемая функция Грина $G(M, P, (t-t'))$) но более простым путем, и через него дается интегральное представление решения исходной задачи.

При изложении метода функций Грина будем пользоваться решением, соответствующим мгновенному точечному источнику теплоты мощности $Q = c\rho$ в неограниченной области (x, y, z) . Такое решение в теории теплопроводности называется фундаментальным. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\nabla^2 T(x, y, z, t), |x|, |y|, |z| < \infty, t > 0$$

имеет вид:

$$G(x, y, z, x', y', z', t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi at})^3} \exp\left[-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4at}\right]$$

Оно дает распределение температуры в точке (x, y, z) неограниченной области в момент времени t , вызванное мгновенным точечным источником теплоты мощностью $Q = c\rho$, действующим в точке (x, y, z) в момент времени $t = 0$.

Из формулы (2.63) видно, что функция обладает свойством симметрии, $G(x, y, z, x', y', z', t) = G(x', y', z', x, y, z, t)$ что является выражением принципа

взаимности: действие в точке $M(x, y, z)$ источника теплоты, находящегося в точке $P(x', y', z')$ равно действию в точке $P(x', y', z')$. Однако относительно переменной такая симметрия не наблюдается, что является следствием необратимости тепловых процессов во времени.

Математически мгновенный точечный источник теплоты, действующий в момент времени $t=0$, записывается с помощью импульсной дельта-функции Дирака. Рассмотрим распределение мгновенных точечных источников постоянной мощности Q вдоль линии $(x = x', y = y')$, параллельной оси z . Температуру, вызванную действием всех этих источников определяем, интегрируя по переменной z выражение

$$G(x, y, z, x', y', z', t) = \frac{Q}{c\rho(\sqrt{\pi at})^3} \times \exp\left[-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4at}\right].$$

После интегрирования получаем

$$G(x, y, x', t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, z, x', y', z', t) dz = \frac{Q}{c\rho(\sqrt{\pi at})^3} \exp\left[-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{4at}\right]$$

где Q - количество теплоты, выделяемое на единице длины этой прямой.

Для мгновенного искомого источника мощностью Q , действующего в момент времени $t=0$ расположенного в плоскости, параллельной плоскости $x=0$ и проходящей через точку, распределение линейных источников мощностью Q дает следующее фундаментальное решение:

$$G(x, x', t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, x', y', t) dy = \frac{Q}{c\rho(\sqrt{\pi at})^3} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4at}\right], \quad (2.63)$$

где Q - количество теплоты, выделяемое на единице площади этой плоскости.

Покажем, что решение краевой задачи нестационарной теплопроводности при достаточно общей ее постановке, в конечном счете, может быть сведено к решению более простой задачи, а именно к нахождению соответствующей функции Грина. Пусть $T(M, t)$ - температура некоторого тела, занимающего область G , которая должна быть найдена в результате решения краевой задачи теплопроводности вида

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T(M, t) + f(M, t); M \in G_0; (t > 0); \quad (2.64)$$

$$T(M, t) = \Phi_0(M); M \in G_0; \quad (2.65)$$

$$\frac{\beta_1 \partial T(M, t)}{\partial \bar{n}} - \beta_2 T(M, t) = -\phi(M, t); M \in S; t \geq 0, \quad (2.66)$$

где \bar{n} - внешняя нормаль к S ; $\beta_1^2 \beta_2^2 > 0$; $f(M, t) \in G$. Рассмотрим распределение температуры в данной области G_0 , вызванное действием мгновенного точечного источника теплоты мощностью $Q = c\rho$ помещенного в точку $P(x', y', z')$ области G_0 в момент времени $(t-t')$. Выражение для температуры, описываемой функцией Грина $G(M, P, (t-t'))$ в точке M области G_0 для времени $(t-t')$ имеет следующий вид:

$$G(M, P, (t-t')) = \frac{1}{[2\sqrt{\pi a(t-t')}]^3} \times \\ \times \exp\left[-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4a(t-t')}\right] + q(M, P(t-t')) \quad (2.67)$$

Первое слагаемое правой части этого равенства характеризует собой действие мгновенного точечного источника теплоты мощностью $Q = c\rho$ в точке $P(x', y', z')$ в момент времени $(t-t')$, но для бесконечной области. Для удовлетворения соответствующих граничных условий на границе S области G_0 добавим функцию $q(M, P, (t-t'))$. Будем считать, что q как функция точки M и времени t есть решение однородного уравнения теплопроводности в области $G_0, t > t'$ дважды непрерывно дифференцируема по координатам точки, непрерывно дифференцируема по времени и непрерывна в замкнутой области G_0 , и, кроме того, при $(t' = 0)$ обращается в нуль в точках области G_0 . Таким образом, функция $G(M, P, (t-t'))$ определяется равенством (2.67) и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a \Delta G; M \in G_0.$$

Так как t входит в форме $(t - t')$, то отсюда непосредственно следует

$$\frac{\partial G}{\partial t} = a\Delta G(M, P, (t - t')); M \in G_0; t > t'.$$

Предположим, что функция $G(M, P, (t - t'))$ обладает свойством симметрии относительно точек M, P т.е. $G(M, P, (t - t')) = G(P, M, (t - t'))$, что означает эквивалентность свойств этой функции по координатам точек M и P .

Рассмотрим равенство

$$\frac{\partial}{\partial t'} [T(M, t)G(M, P, (t - t'))] = \frac{\partial T}{\partial t'} G + T \left(\frac{\partial G}{\partial t'} \right) = a(G\Delta T - T\Delta G) + Gf \quad (2.68)$$

Проинтегрируем его по области G_0 (по координатам точки M):

$$\iiint_{G_0} \frac{\partial}{\partial t'} [T, G] dv_M = \iiint_{G_0} (G\Delta T - T\Delta G) dv_M + \iiint_{G_0} Gf dv_M \quad (2.69)$$

Используя далее формулу Грина для оператора Лапласа, получаем

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2},$$

где Δ - оператор Лапласа:

$$\iiint_{G_0} \frac{\partial}{\partial t'} [T, G] dv_M = -a \iiint_S \left[T \left(\frac{\partial G}{\partial n_M} \right) - G \left(\frac{\partial T}{\partial n_M} \right) \right] d\sigma_M + \iiint_{G_0} Gf dv_M$$

Это соотношение справедливо при всех $t' < t$ и, следовательно, его можно проинтегрировать по t' :

$$\begin{aligned} & a \int_0^t \iiint_{G_0} \left[G \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right) - T \left(\frac{\partial G}{\partial n} \right) \right] \partial t' d\delta + \int_0^t \iiint_{G_0} f(P, t) G(M, P, (t - t')) \partial t' dv + \\ & + \int \iiint_{G_0} \Phi_0(P) G(M, P, t) dv = T(M, t). \end{aligned} \quad (2.70)$$

Полученная основная интегральная формула для функции $T(M, t)$ дает представление произвольных решений уравнений теплопроводности (2.64) с начальным условием (4,65). Из формулы (2.70) следует, что всякое решение уравнения теплопроводности, дважды непрерывно дифференцируемое по пространственным координатам и непрерывно дифференцируемое по времени

t , будет аналитической функцией пространственных координат, а по времени иметь производную первого порядка. Формула (2.70) не дает решения краевой задачи (2.64), (2.65), так как для вычисления правой части нужно знать значение подынтегральной функции на поверхности S . Потребуем теперь, чтобы функция $G(M, P, (t-t'))$ на поверхности S удовлетворяла граничным условиям типа (2.66)

$$\frac{\beta_1 \partial G(M, P, (t-t'))}{\partial \vec{n}} - \beta_2 G(M, P, (t-t')) \Big|_{M \in S} = 0; t > t'.$$

Отсюда и из уравнения (2.70) получаем явные формулы для решения согласно виду граничных условий. Приведем основную формулу решения краевой задачи (2.64), (2.65) со смешанными граничными условиями:

$$T(M, t) = \int \int_{G_0} \Phi_0(P) G(M, P, t) dv + \int_0^t \int \int_S [T(M, P, t, t') dt' d\sigma] + \\ + \int_0^t \int \int_S f(P, t') G(M, P, (t-t')) dt' dv,$$

где $T(M, P, t, t') = \phi(P, t)$ и для $\frac{\partial G}{\partial H}$ на всей части граничной поверхности S

имеют место граничные условия

$$I \text{ рода} \quad T(M, t) = \phi(m, t); M \in S; T \geq 0; G(M, P, (t-t')) = 0; t > t';$$

$$T(M, P, t, t') = \pm \frac{1}{2} \phi(M, t) G(M, P, (t-t')),$$

$$II \text{ рода} \quad \frac{\partial T(M, t)}{\partial H} = \left(\frac{1}{\lambda} \right) \phi(M, t); M \in S; t > 0$$

$$\frac{\partial G(M, P, (t-t'))}{\partial h} + \left(\frac{1}{\lambda} \right) G(M, P, (t-t')) = 0$$

$$III \text{ рода} \quad \frac{\partial T(M, t)}{\partial H} + \left(\frac{\alpha}{\lambda} \right) T(M, t) = \left(\frac{1}{\lambda} \right) \phi(M, t); M \in S; t' \geq 0; t \geq 0;$$

$$\frac{\partial G(M, P, (t-t'))}{\partial H} + \left(\frac{1}{\lambda} \right) G(M, P, (t-t')) = 0.$$

Здесь $G(M, P, (t-t'))$ - функция Грина соответствующей краевой задачи. Таким образом, для каждой из краевых задач установлена интегральная формула решения и выяснено, каким условиям должна удовлетворять функция $T(M, P, (t-t'))$. Пусть $q(M, P, (t-t'))$ как функция точки M и времени t , есть

решение однородного уравнения теплопроводности (2.64). Тогда, если функция $G(M, P, (t-t'))$ в виде (2.67) при $t \rightarrow t'$ вне точки обращается в нуль, а на боковой поверхности S области G_0 удовлетворяет нулевым краевым условиям какой-либо из краевых задач для уравнения теплопроводности, то она называется функцией Грина соответствующей краевой задачи в области G_0 . Из предыдущих рассуждений становится ясным и физический смысл функции Грина $G(M, P, (t-t'))$. В каждой из краевых задач она представляет собой температуру в точке в момент, возникающую вследствие действия мгновенного точечного источника теплоты мощностью, действующего в точке M в момент времени t (до этого момента времени температура тела равнялась нулю) при условии, что на границе рассматриваемого тела во все последующие моменты времени выполняются однородные условия, соответствующие нулевым значениям граничных функций краевой задачи.

Отсюда вполне оправдано второе наименование функции — функции влияния мгновенного точечного теплового источника. Исходя из физического смысла функции Грина, имеем для $G(M, P, (t-t'))$ краевую задачу, соответствующую заданной (2.64)–(2.66):

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} &= a \nabla^2 G(M, P, (t-t')); M \in S; t > t' \\ G \Big|_{t=t'} &= \delta(M, P); M \in G_0 \\ \left(\beta \frac{\partial G}{\partial n} - \beta_2 G \right) \Big|_{M \in S} &= 0; t > \tau, \end{aligned}$$

где $\delta(M, P)$ - дельта-функция. В декартовых координатах эта функция имеет вид $\delta(M, P) = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')$. Метод функций Грина широко применяется также и для решения краевых задач стационарной теплопроводности; в этом случае метод представляет собой часть хорошо разрабатываемой теории, известной как теория потенциала.

Пример. По поверхности полубесконечного тела в положительном направлении оси движется бесконечно длинный полосовой источник теплоты шириной $2h$. Плотность теплового потока равномерно распределена по всей

поверхности источника. Полагаем поверхность $x=0$ теплоизолированной. Математическая формулировка задачи следующая:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} V \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) \right);$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = q(x, t); (-h < z < h); T(x, z, 0) = 0$$

Решаем задачу методом функции Грина. Действие элементарного источника описывается функцией Грина

$$T(x, y, z, x', y', z', t) = \left(\frac{2Q}{c\rho(4\pi at)^{\frac{3}{2}}} G(x-x', y-y', z-z', t) \right), \quad (2.71)$$

где Q - количество теплоты, выделившееся в точке с координатами x', y', z', c - удельная теплоемкость; ρ - плотность;

$$G((x-x'), (y-y'), (z-z')t) = \exp \left[-\frac{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}{4at} \right] - \text{функция Грина.}$$

Так как источник движется в положительном направлении оси z , то координата z' изменяется на величину vt . Поэтому интегрируя выражение (2.71) по y' от $-\infty$ до ∞ и по времени от 0 до ∞ , получаем

$$T(x, y, z, t) = \int_0^{2h} dz' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \int_0^t \left[\frac{2Q}{c\rho(4\pi at)^{\frac{3}{2}}} \right] \times \exp \left[-\frac{(x^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 + Vt)^2}{4at} \right] dt .$$

Такое решение описывает температурное поле полосового источника в процессе насыщения. Преобразуем данное выражение к более простому виду. Для этого введем новые переменные $z = z - z'$:

$$dz_1 = -dz', \frac{z_1 + Vt}{2\sqrt{at}} = u; du = \frac{dz_1}{2\sqrt{at}}; \quad u_1 = \frac{z + vt}{2\sqrt{at}}; u_2 = \frac{(z + 2h + vt)}{2\sqrt{at}}$$

проинтегрируем по переменной Y , принимая $x=0$, что соответствует значению температуры $T(0, y, t)$ на поверхности полубесконечного тела. Получаем

$$T = \frac{q}{2\pi\lambda} \int_0^t \frac{\sqrt{\pi a}}{t} \left[\Phi(u) - \Phi(u_1) \right] dt ,$$

где $\Phi(u)$ - функция Лапласа. Аргументы u_1 и u_2 всегда положительны. При больших значениях аргумента можно полагать, что $\Phi(u) = 1$. Поэтому температурное поле в процессе насыщения может быть подсчитано по формуле:

$$T = \frac{q}{2\pi\lambda} \int_0^t \frac{\sqrt{\pi a}}{t} [1 - \Phi(u_1)] dt$$

2.5. Численные методы решения краевых задач теплопроводности

При рассмотрении краевых задач теплопроводности с весьма общими краевыми условиями использование точных методов решения связано с большими трудностями, которые становятся непреодолимыми при решении нелинейных задач. В этих случаях приходится обращаться к тем или иным численным методам. Применение численных методов зачастую позволяет отказаться от упрощенной трактовки математической модели процесса. В настоящее время для приближенного решения уравнений теплопроводности используются метод конечных разностей и метод конечных элементов.

2.5.1. Метод конечных разностей.

Метод конечных разностей основан на замене производных их приближенными значениями, выраженными через разности значений функций в отдельных дискретных точках узлов сетки. Дифференциальное уравнение в результате таких преобразований заменяется эквивалентным соотношением в конечных разностях, решение которого сводится к выполнению несложных алгебраических операций. Окончательный результат решения задается выражением, по которому значение температуры в данной точке является функцией времени, в сложных узловых точках. Повторяемость одинаковых операций при расчете полей температуры создает большое удобство для применения вычислительных машин.

Приближенную замену первой и второй производных через разностные отношения можно провести следующим образом. Пусть дана функция $y = f(x)$ рис.2.8. Если через λ_i обозначить угол, образованный с положительным направлением оси абсцисс и касательной к кривой, проведенной в точке $M(x_i, y_i)$, то производная функция $x = x_i$, определяется по формуле $y_i \operatorname{tg} \lambda_i$. Возьмем на кривой две соседние точки $A(x_{i-1}; y_{i-1})$ и $P(x_{i+1}; y_{i+1})$ так, чтобы разности $x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i = h$ были достаточно малы, и приближенно заменим λ_i на β_i или γ_i . Тогда

$$y_i \approx \operatorname{tg} \beta_i = \frac{QP}{MQ} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \quad (2.72)$$

или

$$y_i = \operatorname{tg} \gamma_i = \frac{BM}{AB} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \quad (2.73)$$

Если же угловой коэффициент касательной MT приближенно заменить угловым коэффициентом секущей AP , то

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \quad (2.74)$$

Правые части формул (2.72) (2.74) называются соответственно разностным отношением вперед, разностным отношением назад и симметричным разностным отношением. Приближенное значение второй производной y_i функции при $y = f(x)$ может быть получено, если заменить кривую на участке AP ломанной линией AMP , имеющей в точке M два наклона, т.е.

$$y'' = \frac{1}{h} \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right] = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} \quad (2.75)$$

Рассмотрим, например, одномерное уравнение теплопроводности для изолированного тонкого стержня длиной L . Так как $T(x, y)$ зависит от двух переменных x и t , то используем сетку прямоугольного типа (рис.2.9).

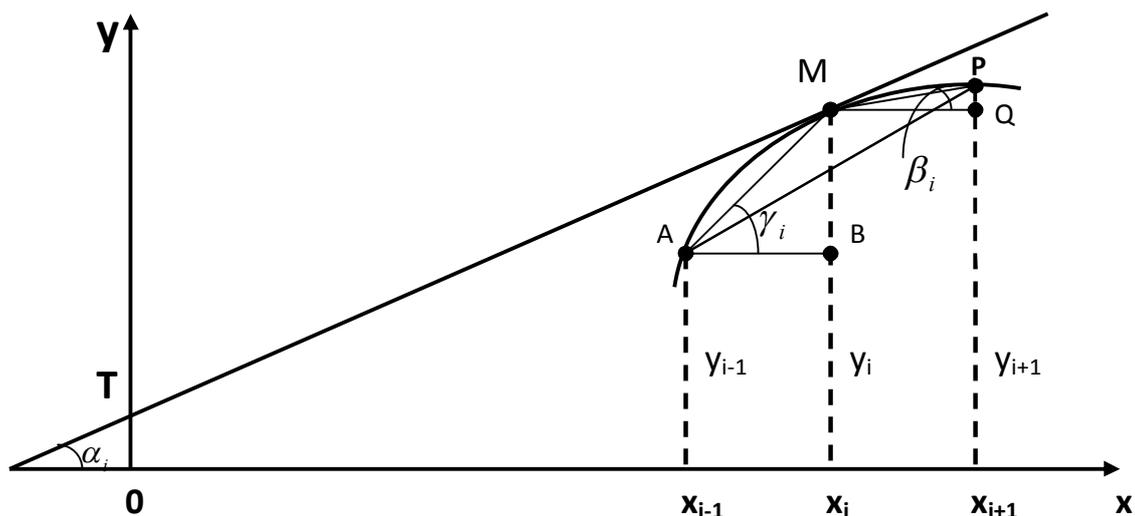


Рис. 2.8. Схема определения производной функции и замены ее разностными отношениями

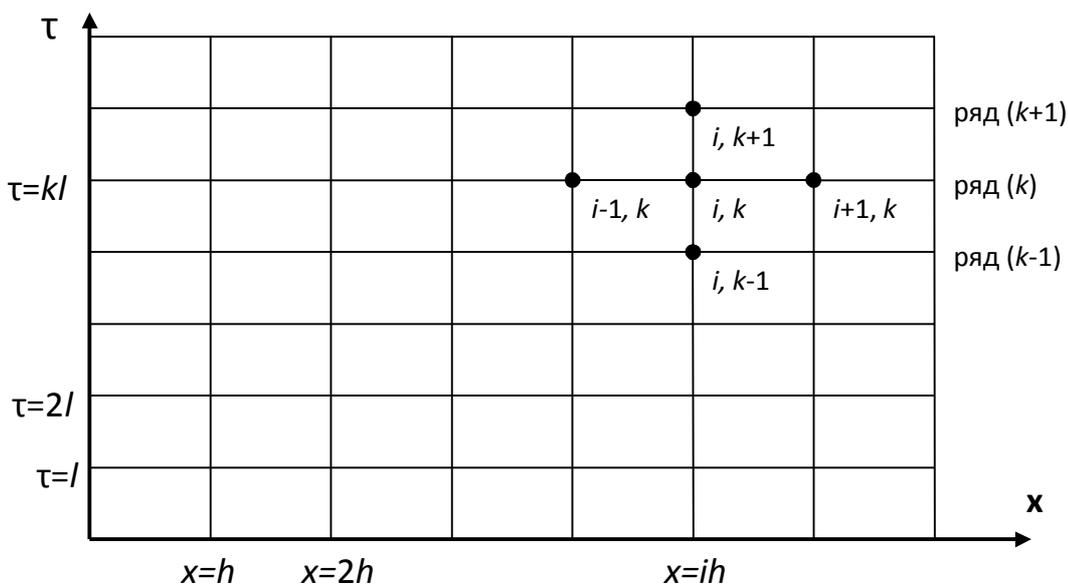


Рис. 2.9. Схема расчета по сетке прямоугольного типа

На оси абсцисс откладываем отрезок длиной L и делим его на n равных частей. Полученный шаг на оси абсцисс обозначим через $h = \frac{L}{n}$. Точки деления (узлы) на оси имеют абсциссы $x = 0, x = h, \dots, x = L$. По оси ординат отложим значения времени через равные промежутки l . Проведем через полученные узлы на осях координат прямые, параллельные координатным осям, которые образуют прямоугольную сетку. Значения T в узлах, лежащих на осях координат на

прямой, параллельной и ординат и расположенной от нее на расстоянии L , находятся из начального и граничных условий.

Задача приближенного численного интегрирования уравнения (2.75) по методу сеток состоит в нахождении приближенного значения функции в каждом узле сетки. Обозначим $T_i(k)$ истинное значение температуры в точке стержня $x = ih$ в момент $t = kl$. Выразим частные производные $\left(\frac{\partial T}{\partial t}, \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)$ в точке (ih, kl) через разностные отношения по формулам (2.72)–(2.74), т.е. положим

$$\frac{\partial T_{i,k}}{\partial t} = \frac{T_{i,k-1} - T_{i,k}}{p} + \xi_1; \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i-1,k} - 2T_{i,k} + T_{i+1,k}}{h^2} + \xi_2,$$

где ξ_1, ξ_2 остаточные члены, стремящиеся к нулю при стремлении к нулю l и h . Тогда в узле (ih, kl) дифференциальное уравнение (2.76) заменяется соотношением

$$\frac{T_{i,k-1} - T_{i,k}}{l} + \xi = a \left(\frac{T_{i-1,k} - 2T_{i,k} + T_{i+1,k}}{h^2} + \xi_2 \right)$$

или

$$T_{i+1,k} = \frac{1-2la}{h^2} T_{i,k} + \frac{la}{h^2} (T_{i-1,k} + T_{i+1,k}) + lk, \quad (2.77)$$

где $k = a\xi_2 - \xi_1$. Отбрасывая в выражении (2.77) остаточный член lk , получим разностное уравнение

$$T_{i+1,k} = \frac{1+2la}{h^2} T_{i,k} + \frac{la}{h^2} (T_{i-1,k} + T_{i+1,k}), \quad (2.78)$$

в котором $T_{i,k}$ обозначено приближенное значение величины в том же узле (ih, kl) . Формула (2.78) позволяет вычислить значения в узлах горизонтального ряда $(k+l)$ по значениям T , находящимся только в одном предшествующем ряду (k) .

Поэтому с помощью формулы (2.78) можно найти значение в узлах первого горизонтального ряда при $t=1$ по известным из краевых условий значениям температуры в узлах самой оси OX . Получив таким образом

значения в первом ряду, по той же формуле значения в узлах второго горизонтального ряда, т.е. при $t=1$. Этот процесс построения можно продолжать как угодно, так как значения температуры в узлах прямых $x=0$ и $x=L$ будут известны из граничных условий. Формулу (2.78) перепишем в более удобном виде:

$$T_A = \frac{1-2la}{h^2} T_0 + \frac{la}{h^2} (T_1 + T_2) \quad (2.79)$$

Выбирая соотношение между шагами h и l различным образом, из уравнения (2.79) можно получить ряд частных соотношений. Например,

$$\begin{aligned} T_A &= \frac{T_1 + T_2 + T_3}{3} \quad l = \frac{h^2}{3a}, \\ T_A &= \frac{T_1 + 4T_2 + T_3}{6} \quad l = \frac{h^2}{6a}, \\ T_A &= \frac{T_1 + 10T_2 + T_3}{12} \quad l = \frac{h^2}{12a}, \end{aligned}$$

Вообще при $l = \frac{h^2}{pa}$

$$T_A = \frac{T_1 + (P-2)T_2 + T_3}{P} \quad (2.80)$$

Особенно простой вид формула (2.80) получает при $P=2$

$$T_A = \frac{T_1 + T_3}{2} \quad (2.81)$$

Эта формула особенно широко используется при графическом решении нестационарных задач теплопроводности.

При $P=1$ имеет место расходящаяся вычислительная схема. При решении нестационарных уравнений теплопроводности вопросы соотношения между h и l , а также ошибка округления в численном решении играет первостепенную роль. Ими определяется сходимость и устойчивость получаемых решений. Поэтому формулой (2.79) можно пользоваться только при $P \geq 2$. Самый большой шаг l дает формула (2.81), т.е. при $P=2$. Формула (2.80) тем точнее, чем больше p .

Рассмотренная сетка для численного интегрирования уравнения (2.80) удобна, когда задача решается при граничных условиях I рода: в этом случае граничные прямые и принадлежат самой сетке. Если уравнение решается при граничных условиях III рода, практика вычислений $x=0$ и $x=1$ теоретические исследования показывают, что для повышения точности определения потенциала на границах следует вводить дополнительные узловые точки, лежащие вне изучаемой области. Например, решая уравнение (2.76) при граничных условиях

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{\alpha}{\lambda} [T(0,t) - T_0]; \quad \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=1} = \frac{\alpha}{\lambda} [T(L,t) - T_0], \quad (2.82)$$

сетку надо строить так, чтобы правая граничная прямая лежала посередине между двумя прямыми $x=x_n$ и $x=x_{n+1}$, а левая — посередине между прямыми $x=x_0$ и $x=x_1$ (рис.2.10), $x=\frac{h}{2}$ т.е. в рассмотрение вводятся $T_{n+1,k}$ значения функций для точек, лежащих вне изучаемой области. Производную $\frac{\partial T}{\partial x}$, входящую во второе условие (2.82), т.е. в точке $B(L,k,l)$, заменяем симметричным разностным отношением

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = \frac{T_{n+1,k} - T_{n-k}}{h} + \xi',$$

а значения температуры на самой поверхности, т.е. $T(L,k,l)$, берем как среднее арифметическое значение температур и $T(L,k,l) = \frac{T_{n+1,k} + T_{n,k}}{2}$. Тогда условие

(2.82) запишется как $\frac{T_{n+1,k} - T_{n,k}}{h} + \xi' = \frac{\alpha}{\lambda}$

Или, переходя к приближенным значениям T , получаем после преобразований

$$T_{n+1,k} = \frac{\left(1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha}{\lambda}\right) T_{n,k} + h \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) T_c}{l + \frac{h}{2} \frac{\alpha}{\lambda}}.$$

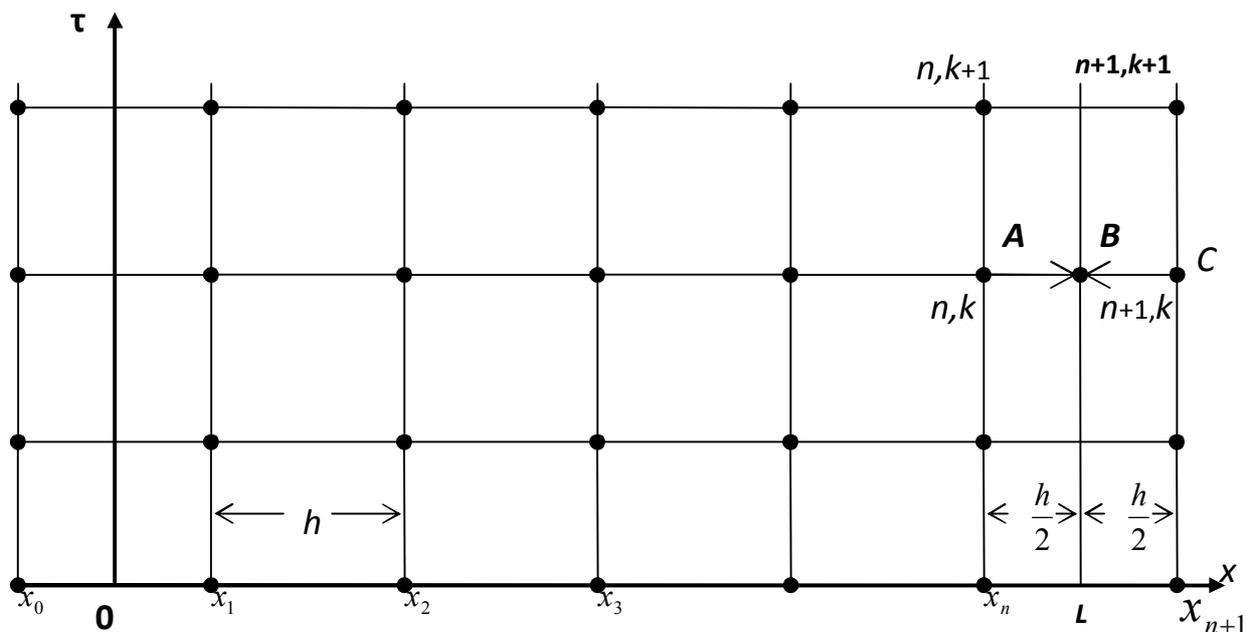


Рис. 2.10. Расчетная схема для задачи нестационарной теплопроводности (граничные условия III рода)

По формуле находятся приближенные значения функции в узлах вспомогательной прямой $x = L + \frac{h}{2}$. Значения температуры на самой граничной

прямой определяются по формуле $T(L, k, l) = \frac{T_{n+1,k} + T_{n,k}}{h}$, что после

преобразований дает $T_{n+1,k} = \frac{\left(1 - \frac{h\alpha}{2\lambda}\right)T_{n,k} + h\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)T_0}{l + \frac{h\alpha}{2\lambda}}$, где $S = \frac{\lambda}{\alpha}$. Значение

температуры в узлах вспомогательной прямой $x = -\frac{h}{2}$ находится по формуле

$$T_{0,k} = \frac{1 - \frac{h\alpha}{2\lambda} + \frac{h\alpha}{2\lambda}T_0}{1 + \frac{h\alpha}{\lambda}}. \text{ На левой поверхности } T(0, k, l) = \frac{T_{1,k} \frac{h\alpha}{2\lambda} T_0}{1 + \frac{h\alpha}{2\lambda}} = \frac{2ST_{1,k} + hT_0}{2S + h}.$$

2.5.2. Метод конечных элементов.

Основная идея метода конечных элементов (МКЭ) состоит в том, что любую непрерывную величину (температура, давление, перемещение) можно аппроксимировать дискретной моделью, которая строится на множестве

кусочно-непрерывных функций, определенных на конечном числе подобластей. Кусочно-непрерывные функции определяются с помощью значений непрерывной величины в конечном числе точек рассматриваемой области.

В общем случае, непрерывная величина заранее неизвестна и нужно определить значения этой величины в некоторых внутренних точках области. При построении дискретной модели непрерывной величины поступают следующим образом:

1. В рассматриваемой области фиксируется конечное число точек. Эти точки называются узловыми или просто узлами.

2. Значение непрерывной величины в каждой узловой точке считается переменным и должно быть определено.

3. Область определения непрерывной величины разбивается на конечное число подобластей, называемых элементами. Эти элементы имеют общие узловые точки и в совокупности аппроксимируют форму области.

4. Непрерывная величина аппроксимируется на каждом элементе полиномом, который определяется с помощью узловых значений этой величины. Для каждого элемента определяются свои полиномы, которые подбираются таким образом, чтобы сохранилась непрерывность величины вдоль границ элемента.

Рассмотрим основную идею на одномерном примере заданного распределения температуры в стрержне, показанном на рис. 2.11. Рассматривается непрерывная величина $T(x)$, область определения – отрезок OL вдоль оси OX . Фиксированы и пронумерованы пять точек на оси x . Не обязательно располагать их на равном расстоянии друг от друга. Очевидно, можно ввести в рассмотрение и более пяти точек, но этих пяти вполне достаточно для иллюстрации идеи МКЭ. Значения $T(x_j)$ в данном случае известны в каждой узловой точке. Эти фиксированные значения обозначены узловыми точками.

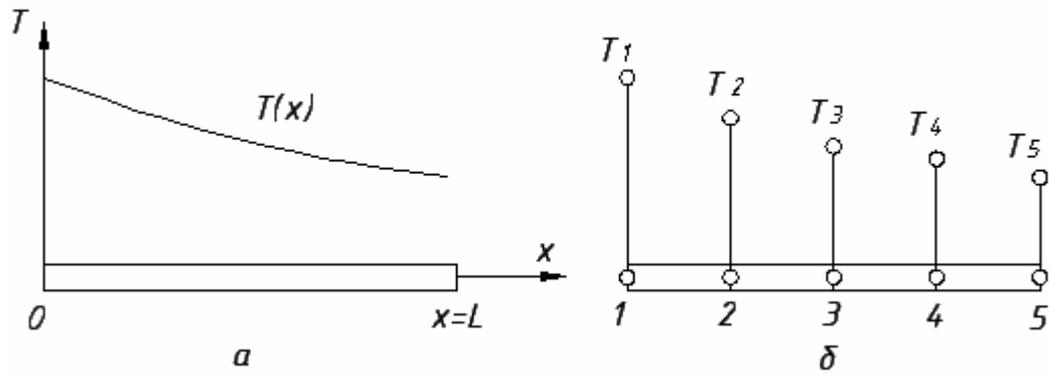


Рис. 2.11. Распределение температуры в одномерном стержне – *a* и выбор узловых точек по предлагаемым значениям температуры – *б*.

Разбиение области на элементы может быть проведено двумя различными способами. Можно, например, ограничить каждый элемент двумя соседними точками (рис. 2.12, а), образовав четыре элемента, или разбить область на два элемента, каждый из которых содержит три узла (рис. 2.12, б).

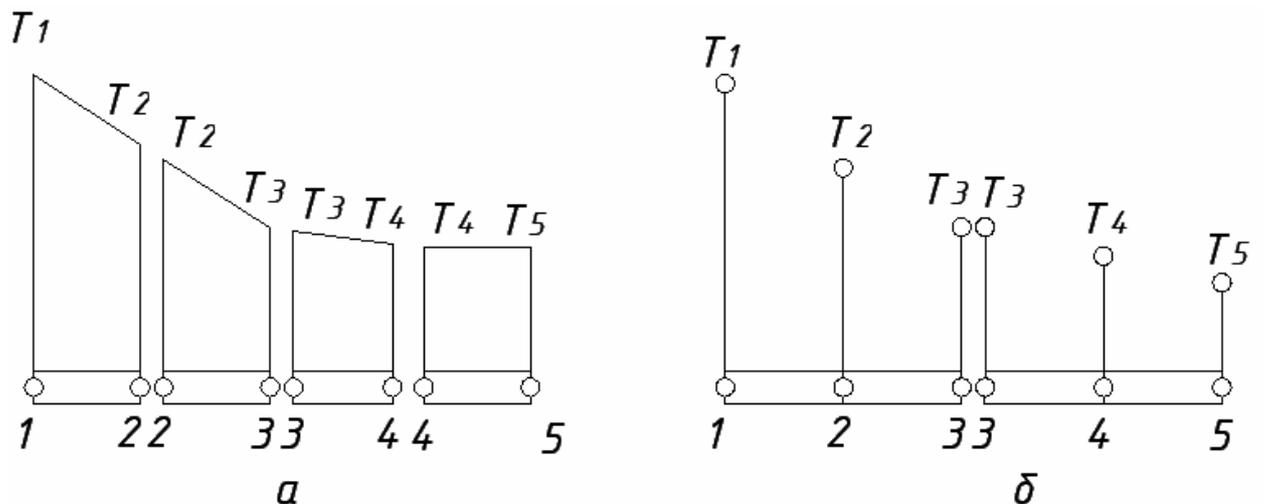


Рис. 2.12. Разбиение области на элементы.

Соответствующий элементу полином определяется по значениям $T(x)$ в узловых точках элемента. В общем случае распределение температуры неизвестно, и необходимо определить значение этой величины в некоторых точках. Методика построения дискретной модели остается такой же, как описано, но с добавлением одного дополнительного шага. Снова определяются множества узлов и значения температуры в этих узлах T_1, T_2, T_3, \dots , которые теперь являются переменными, так как они заранее неизвестны. Область

разбивается на элементы, на каждом из которых определяется соответствующая функция элемента. При решении тепловой задачи минимизируется функционал, связанный с соответствующим дифференциальным уравнением. Процесс минимизации сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений относительно узловых значений $T(x)$.

Лучше всего процесс минимизации иллюстрируется на примере следующей тепловой задачи для стержня с теплоизолированной боковой поверхностью (рис. 2.13). К закрепленному концу стержня подводится тепловой поток заданной интенсивности q . На свободном конце стержня происходит конвективный обмен тепла. Коэффициент теплообмена α , температура которого $T_0, ^\circ\text{C}$.

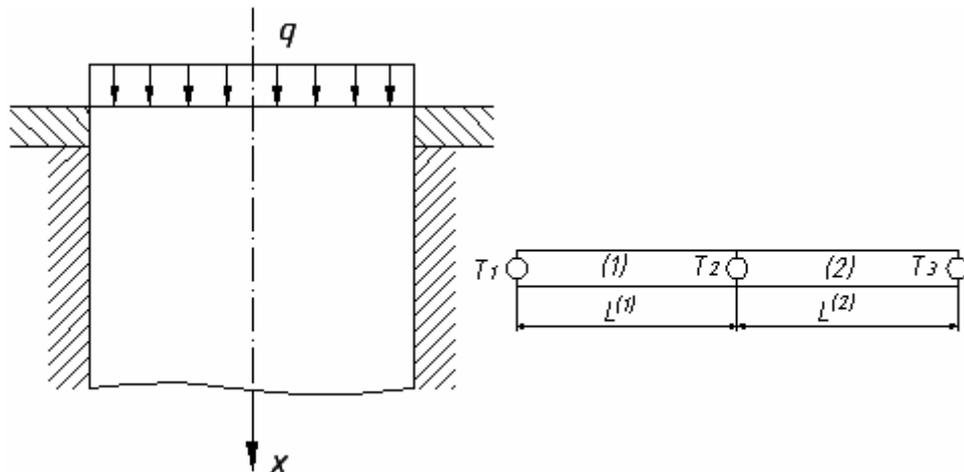


Рис. 2.13. Двухэлементная модель, используемая в задаче о переносе тепла в стержне.

Стержень теплоизолирован, так как потеря тепла через боковую поверхность не происходит. Запишем дифференциальное уравнение теплопроводности внутри стержня

$$\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad (2.83)$$

с граничными условиями

$$\lambda \frac{dT}{dx} + q = 0 \text{ при } x = 0; \quad (2.84)$$

$$\lambda \frac{dT}{dx} + \lambda(T - T_0) = 0 \text{ при } x = L. \quad (2.85)$$

В приведенных формулах λ – коэффициент теплопроводности материала стержня. Тепловой поток q положителен, так как тепло отводится от стержня.

Уравнение с приведенными граничными условиями имеет единственное решение. Оно является исходным пунктом при численном решении методом конечных разностей. Другой метод решения задач передачи тепла основан на вариационном принципе. В вариационном исчислении устанавливается, что для минимизации функционала

$$K = \iiint_{(V)} \frac{\lambda}{z} \left(\frac{dT}{dS} \right) du + \iint_{(S)} \left[qT + \frac{\alpha}{2}(T - T_0) \right]^2 dS, \quad (2.86)$$

необходимо, чтобы удовлетворялось дифференциальное уравнение

$$\lambda \frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad (2.87)$$

с граничными условиями

$$\lambda \frac{dT}{dx} + q + \lambda(T - T_0). \quad (2.88)$$

Уравнения (2.86) и (2.87) эквивалентны исходным уравнениям (2.83) – (2.85), поэтому любое распределение температуры, при котором функционал K , определяемый формулой (2.86), становится минимальным, также удовлетворяет дифференциальным уравнениям и, таким образом, является решением исходной задачи.

Уравнение (2.86) служит исходным пунктом для определения температуры в каждом узле. Минимизируем функционал (2.86), используя множество функций элементов, каждая из которых определена на отдельном элементе и выражена через узловые значения. Узловые значения N_i – неизвестные величины в данной формулировке. Так как они определяют значение функционала K , минимизация X должна быть проведена по этим величинам. Реализация МКЭ начинается с определения подобластей и узловых

точек. Стержень может быть разбит на два линейных элемента (рис. 2.11) с узловыми значениями T_1, T_2, T_3 . Температура внутри элементов находится из формул

$$T^{(1)} = N_1^{(1)}T_1 + N_2^{(1)}T_2; T^{(2)} = N_2^{(2)}T_2 + N_3^{(2)}T_3. \quad (2.89)$$

Соответствующие функции формы определены соотношениями

$$N^{(i)} = \frac{x_i - x}{L^{(i)}}; \quad N^{(j)} = \frac{x - x_i}{L^{(j)}}.$$

Функционал представляет собой сумму интегралов

$$x = \iiint_{(V)} \frac{\lambda}{2} \left[\frac{dT(x)}{dx} \right]^2 dv + \iint_{(S)} qT(x)dS + \iint_{(S_2)} \frac{\lambda}{2} [T(x) - T_0]^2 dS, \quad (2.90)$$

где S_1, S_2 – площади поверхностей, на которых q и h . Значение функционала X получается подстановкой температуры $T(x)$ и вычислением интегралов. Поверхность интеграла легко вычисляется, так как подынтегральным выражениям соответствуют условные значения. Начнем с интеграла, включающего тепловой поток,

$$\iint_{(S_1)} qT(x)dS = qT_1 \iint_{(S_1)} dS = qT_1 A_1,$$

где A_1 – площадь поперечного сечения стержня, соответствующая первому узлу. Функция, описывающая изменение температуры, принимает постоянное значение T_1 в точках сечения, соответствующих первому узлу. Рассмотрим поверхностный интеграл, включающий коэффициент теплообмена,

$$K = \frac{c^{(1)}}{2} (T_1^2 - 2T_1T_2 + T_2^2) + \frac{c^{(2)}}{2} (T_2^2 - 2T_2T_3 + T_3^2) + qA_1T + \frac{\alpha}{2} A_3 (T_3^2 - 2T_3T_C + T_C^2),$$

где A_3 – площадь поперечного сечения; T_3 – температура в третьем узле.

Объемный интеграл (2.90) содержит производную температуры.

Дифференцируя выражение (2.89), получаем

$$\frac{dT^{(1)}}{dx} = \frac{1}{L^{(1)}} (-T_1 + T_3); \quad \frac{dT^{(2)}}{dx} = \frac{1}{L^{(2)}} (-T_2 + T_3).$$

Объемный интеграл должен быть разбит на два интеграла, потому что выражение для $\frac{dT}{dx}$ не сохраняет непрерывности по объему тела в целом.

Разделение, подстановка и интегрирование дают

$$\iiint_{(v)} \frac{\lambda}{2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 dv = \frac{\lambda^{(1)} A^{(1)}}{2L^{(1)}} (-T_1 + T_3)^2 + \frac{\lambda^2 A^2}{2L^{(2)}} (-T_{(x)} + T_C)^2.$$

При вычислении интеграла предполагалось, что площадь поперечного сечения каждого элемента постоянна, так что $dV = A^{(i)} dx$. Значение функционала через узловые значения температуры вычислим по формуле

$$K = \frac{c^{(1)}}{2} (T_1^2 - 2T_1T_2 + T_2^2) + \frac{c^{(2)}}{2} (T_2^2 - 2T_2T_3 + T_3^2) + qA_1T + \frac{\alpha}{2} A_3 (T_3^2 - 2T_3T_C + T_C^2),$$

где $c^{(1)} = \frac{A^{(1)}\lambda^{(1)}}{L^{(1)}}; \quad c^{(2)} = \frac{A^{(2)}\lambda^{(2)}}{L^{(2)}}.$

Правильными значениями T_1, T_2, T_3 являются те, при которых величина K

минимальная, поэтому $\frac{dx}{dT_1} = c^{(1)}T_1 - c^{(1)}T_2 + qA_1 = 0;$

$$\frac{dx}{dT_2} = c^{(1)}T_1 + [c^{(1)} + c^{(2)}]T_2 - c^{(2)}T_3 = 0; \tag{2.91}$$

$$\frac{dx}{dT_3} = -c^{(2)}T_2 + [c^{(2)} + \alpha A_3]T_3 + A_3T_C = 0.$$

Уравнения (2.91) могут быть преобразованы к виду

$$\begin{bmatrix} c^{(1)} & c^{(1)} & 0 \\ c^{(1)} & [c^{(1)} + c^{(2)}] & -c^{(2)} \\ 0 & -c^{(2)} & [c^{(2)} + \lambda A_3] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -qA_1 \\ 0 \\ \alpha A_3 T_C \end{bmatrix}$$

или к более общей матричной форме

$$[k][T] = [F] \tag{2.92}$$

Матрица коэффициента $[k]$ – глобальная матрица теплопроводности.

Последний шаг – задание конкретных значений для физических характеристик материала и получении числовых значений температуры T_1, T_2, T_3 . Пусть:

$$\lambda = 75 \text{ Вт}/(\text{см} \cdot ^\circ\text{C}); \quad A = \pi \cdot 20 \text{ см}^2; \quad \gamma = \frac{1}{2} \text{ Вт}/(\text{см} \cdot ^\circ\text{C}); \quad L = 75 \text{ см}; \quad \alpha A = 10\pi.$$

Минус перед q поставлен потому, что теплота подводится к телу $T_0 = 40^\circ\text{C}$.

Вычисляем коэффициенты

$$c^{(1)} = \frac{2\alpha\pi \cdot 75}{75} = 20\pi = c^{(2)}; \quad \alpha A_3 = 10\pi;$$

$$-qA_1 = -(-150\pi) = 150\pi; \quad \alpha A_3 T_C = 10\pi \cdot 40 = 400\pi.$$

Окончательная система имеет вид

$$\begin{bmatrix} 20 & -20 & 0 \\ -20 & 40 & -20 \\ 0 & -20 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \pi \begin{bmatrix} 150 \\ 0 \\ 400 \end{bmatrix}.$$

Этим уравнениям удовлетворяют следующие узловые значения температуры:

$$T_1 = 70^\circ\text{C}; \quad T_2 = 62,5^\circ\text{C}; \quad T_3 = 55^\circ\text{C}.$$

2.6. Применение теории подобия к описанию тепловых процессов

Дифференциальные уравнения, описывающие процесс, отражают представления о физической сущности процесса. Например, дифференциальное уравнение теплопроводности является частным случаем закона сохранения энергии элементарного объема тела, равному количеству теплоты, которым он обменивается с остальной массой тела.

Теория подобия дает общий метод непосредственного преобразования выражений, содержащих дифференциальные операторы, к простейшим алгебраическим выражениям. Суть этого метода состоит в том, что реальный процесс заменяется простейшей условной схемой, в которой дифференциальные операторы сохраняют постоянное значение в пространстве во времени. Покажем на примере теплоотдачи нагретой пластины в окружающую среду переход от произвольных к простейшим алгебраическим

выражениям. Если теплообмен происходит по закону Ньютона, то в соответствии с граничными условиями III рода имеем

$$\alpha(T_n - T_c) = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_n, \quad (2.93)$$

где T_n и T_c — соответственно температуры поверхности и среды, α — коэффициент теплообмена; λ — коэффициент теплопроводности материала пластины. Предположим теперь, что $\frac{\partial T}{\partial x} = \text{const}$. В данном случае это требование не является заменой реального процесса условной схемой, так как оно действительно удовлетворяется при стационарном распределении температуры.

В этих условиях $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\delta T}{l}$, где δT — перепад температуры по толщине пластины

1. Если ввести еще понятие о температурном напоре $\nabla^2 T$ определив его уравнением $\nabla^2 T = T_n - T_c$, то уравнение (2.93) примет вид

$$\frac{\partial T}{\nabla^2 T} = \frac{\alpha}{\lambda} l. \quad (2.94)$$

Итак, в соответствии со свойствами процесса, которые определены основным уравнением (2.93), соотношение между температурным перепадом и температурным напором определяется непосредственно выражением $\left(\frac{\alpha}{\lambda} \right) l$. В

общем случае при переменном градиенте температуры $\frac{\partial T}{\partial x} = \text{var}$, когда распределение температуры имеет вид, отличный от линейного, этот результат теряет силу, так как теперь уже нельзя представить производную $\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)$ в виде

$\frac{\delta T}{l}$. Однако, если предположить, что $\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_n = -\zeta \left(\frac{\delta T}{l} \right)$, то множитель будет

зависеть только от конфигурации кривой распределения температуры, поэтому уравнение (2.94) можно переписать в виде

$$\frac{\delta T}{\nabla^2 T} = \left(\frac{1}{\xi} \right) \left(\frac{\alpha}{\lambda} \right) l. \quad (2.95)$$

Таким образом, для определения отношения $\frac{\delta T}{\nabla^2 T}$ в общем случае требуется знать ξ . Поскольку выражение (2.94) есть однозначная функция величины $\left(\frac{\alpha}{\lambda}l\right)$, то уравнение (2.95) можно представить в виде

$$\frac{\delta T}{\nabla^2 T} = F\left(\frac{\alpha}{\lambda}l\right),$$

т. е. физическая природа процесса вполне определяется комбинацией нескольких параметров.

Такие переменные в теории подобия принято называть критериями подобия и обозначать первыми двумя буквами фамилии ученого, особенно много сделавшего для развития данной области знаний. Для выражения $\left(\frac{\alpha}{\lambda}l\right)$ принято название критерия Био $\left(\frac{\alpha}{\lambda}l\right)l = Bi$.

Вследствие перехода от первоначальных переменных к новой переменной не только уменьшается число аргументов, но и совершается изменение в самой постановке всего анализа. Действительно, если основными взять величины α, l, λ то для каждой совокупности заданных значений этих параметров получим некоторый частный случай. В противоположность этому заданному значению вовсе не отвечает какой-либо частный случай, так как это значение может быть реализовано бесчисленным множеством различных комбинаций α, l, λ .

Таким образом, фиксируя значение определим не одно конкретное явление, а бесчисленное множество явлений. Физический смысл уравнения $\frac{\delta T}{\nabla^2 T} = F(Bi) = F(Bi)$ заключается в том, что заданным значениям отвечают подобные между собой температуры распределения, для которых отношение $\frac{\delta T}{\nabla^2 T}$ имеет одно и то же значение. Для определения моментов времени, при которых имеют место подобные распределения, обратимся к уравнению теплопроводности, которым устанавливается связь между теплом перестройки

температуры во времени и распределением температуры в пространстве. Для одномерной задачи имеем $\frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.

Если и в этом случае воспользоваться переходом к условной схеме с постоянными значениями производных, то $\frac{\partial T}{\partial t}$ можно заменить на $\frac{\delta T}{t}$, а $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ на

$$\frac{\delta T}{\delta T_c} = \frac{at}{l^2}. \text{ Следовательно, для рассматриваемой схемы можно записать } \frac{\delta T}{\delta T_c} = \frac{at}{l^2}.$$

Если в какой-то момент распределения подобны, то это подобие может сохраняться, только при условии, что соотношение между пространственными и временными изменениями всегда остается постоянным. Отсюда следует, что выражение $\frac{at}{l^2}$ для всех систем должно иметь одинаковое значение.

При заданном начальном распределении температуры любое последующее распределение зависит от длительности процесса t коэффициента теплопроводности и размера системы l . Но существенное значение имеет не каждая из этих величин в отдельности, а вполне определенная их комбинация $\frac{at}{l^2}$. Очевидно, это выражение представляет обобщенную переменную, которую принято называть критерием или числом Фурье $\frac{at}{l^2} = F_0$. Отсюда ясно, что число Фурье имеет смысл обобщенного времени.

Различают критерии подобия и числа подобия. Критерии подобия — это такие комплексы, которые целиком состоят из параметров, заданных по условию. Характерным примером является критерий $Bi \left(Bi = \left(\frac{\alpha}{\lambda} \right) l \right)$. Комплекс $\frac{at}{l^2}$ является не критерием, а обобщенной переменной, или числом Фурье.

Однако, если по условию задачи дано некоторое характерное время, например, период колебания температуры окружающей среды t_0 , то аналогичный комплекс $\frac{at_0}{l^2}$ будет называться критерием Фурье $F_0 = \frac{at_0}{l^2}$.

Для построения задачи, определяющей температурные условия не только на поверхности пластины, но и в любой точке внутри пластины, введем отношение $\frac{x}{l}$. Тогда, обозначив через T текущую температуру, а через T_0 — некоторую заданную по условию температуру, будем иметь

$$\frac{T}{T_0} = \Phi\left(Bi, F_0, \frac{x}{l}\right).$$

При этом отношение $\frac{x}{l}$ представляет собой параметрическую переменную, позволяющую определить температуру T на глубине x в зависимости от начальной температуры T_0 .

Таким образом, в теории подобия различают следующие безразмерные величины: критерии подобия, состоящие из постоянных безразмерных параметров задачи; безразмерные переменные, являющиеся отношением переменной величины к постоянному параметру или к их комбинации.

Если параметр, соответствующий данной переменной, не задан, то строится комплекс, состоящий из переменной и ряда разнородных параметров, например $\frac{at}{l^2}$, где $\frac{l^2}{a}$ является комплексом разнородных параметров, имеющих размерность времени.

В качестве примера можно привести решение задачи о нагреве пластины в среде при наличии постоянного источника теплоты мощностью W Вт/(м² с). Решение этой задачи в безразмерных комплексах можно записать как

$$\frac{T - T_0}{T_c - T_0} = f\left[Bi, \frac{x}{l}, F_0, P_0\right],$$

где T_c — температура среды; T_0 — начальная температура тела; $P_0 = \frac{Wl^2}{(\lambda(T_c - T_0))}$

Если по условию задачи l и λ заданы, то комплекс является параметром и будет критерием подобия (критерий Померанцева), а величина $\frac{T - T_0}{T_c - T_0}$ является относительной переменной. Однако, если рассматривается стационарная задача

$F_0 \rightarrow \infty$, то начальная температура T_0 не входит в решение задачи, а температура среды T может служить в качестве начала отсчета температуры тела $(T - T_c)$. Тогда критерий Померанцева теряет свой физический смысл, в этом случае относительной переменной будет являться величина $\frac{(T - T_c)}{\lambda W l^2} = f\left(Bi, \frac{x}{l}\right)$.

Комплекс разнородных параметров $\frac{W l^2}{\lambda}$ имеет размерность температуры и служит в качестве заданного температурного параметра.

Рассмотрим различие между критерием Bi и числом Нуссельта Nu . Критерий, играющий роль в теории температурного поля твердого тела, представляет собой отношение термического сопротивления стенки $\frac{1}{\lambda}$ к термическому сопротивлению передачи тепла на поверхности $\frac{1}{\alpha}$, причем оба сопротивления непосредственно по условию задачи. Поэтому $Bi = \alpha \frac{1}{\lambda}$ при этих условиях является параметром, т.е. критерием подобия.

В противоположность этому при исследовании процессов теплообмена между твердым телом и окружающей средой коэффициент теплообмена является величиной неизвестной и подлежащей определению. Поэтому вводится новый комплекс, содержащий α . Этот комплекс получается из рассмотрения процесса теплообмена на основе предложения, что у поверхности твердого тела образуется жидкая пленка, через которую тепло передается только теплопроводностью. В таком случае можно написать уравнение

$$\alpha(T_n - T_0) = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (2.96)$$

формально совершенно тождественное уравнению (2.93). По существу оба уравнения, конечно, различаются тем, что в последнее входит коэффициент теплопроводности λ жидкости (а не твердого тела) и производная $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)$ определяется в приближении к поверхности стороны жидкости.

Обработка уравнения (2.96) методами теории подобия приводит к знакомому выражению $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)$. Но в этом случае является величиной неизвестной, следовательно, комплекс относится к категории относительных переменных. Поэтому и вводится новое обозначение и новое наименование числа Нуссельта $Nu = \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)$, которое всегда выступает в уравнениях теплообмена в качестве функции.

Таким образом, решение задачи может быть представлено в форме безразмерных величин, которыми искомые относительные переменные определяются как функции независимых относительных переменных и критериев подобия, играющих роль постоянных параметров: $y_T = f(x_i, n_i, P_i)$, где y_T — искомая переменная; x_i — независимые переменные; n_i — критерий комплексного типа; P_i — параметрические критерии.

В заключение необходимо отметить, что любая комбинация критериев подобия есть также критерий подобия. Произведение относительной переменной и любой комбинации критериев подобия есть также относительная переменная.

Вопросы ко второй главе

1. Какое поле является нестационарным температурным?
2. Назовите отличие стационарного и нестационарного температурных полей.
3. Что является основой вывода дифференциального уравнения теплопроводности?
4. Что является математической моделью целого класса явлений теплопроводности?
5. Какие факторы и условия необходимо учитывать при решении задачи теплопроводности?
6. Назовите геометрические условия при постановке краевых задач
7. Каковы особенности задания начальных условий при решении задачи теплопроводности?
8. Какова цель задания граничных условий при решении задачи теплопроводности?
9. В чем особенность граничных условий II рода?
10. Каковы граничные условия III рода?
11. В чем особенность разнородных граничных условий?
12. Каково отличие краевых задач Дирихле и Неймана?
13. Какие аналитические методы решения задач теплопроводности Вы знаете?
14. Что представляет собой физическая интерпретация решения задачи теплопроводности?
15. Как происходит распространение теплоты в стержне после воздействия теплового импульса?
16. К каким дифференциальным уравнениям применим метод интегральных преобразований?
17. Каковы особенности применения метода функций Грина?
18. Назовите численные методы решения краевых задач теплопроводности
19. В чем целесообразность применения теории подобия к описанию тепловых процессов?

Глава 3

УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА И ИХ РОЛЬ В МОДЕЛИРОВАНИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

3.1. Особенности применения гиперболических уравнений к описанию технических систем

Ряд важных узлов и деталей современных технических устройств работает в резко нестационарных режимах вследствие быстрого изменения во времени возмущающих усилий. При этом в конструкциях возникают динамические напряжения, которые должны учитываться при оценке несущей способности конструкций, а также при выборе оптимальных условий функционирования тех или иных упругих элементов.

Анализ переходных явлений в электро и радиотехнических системах также приводит к изучению закономерностей, описываемых уравнениями гиперболического типа. Особенно в большой мере данный тип уравнений используется при рассмотрении таких явлений, как колебания, вибрация, волновые процессы. Характерной особенностью упомянутых процессов является конечная скорость их распространения. Благодаря этому эти явления могут быть описаны дифференциальным уравнением гиперболического типа.

3.2. Уравнение малых поперечных колебаний струны.

Каждую точку струны длины l можно охарактеризовать значением ее абсциссы x . Описание процесса колебания струны может быть проведено при помощи задания положения точек струны в различные моменты времени. Для определения положения струны в момент времени t достаточно задать компоненты вектора смещения $\{U_1(x,t), U_2(x,t), U_3(x,t)\}$ точки x в момент t . Рассмотрим простую задачу о колебаниях струны. Будем предполагать, что смещения струны лежат в одной плоскости (x, U) и что вектор смещения U перпендикулярен в любой момент к оси x ; тогда процесс колебания можно описать одной функцией $U(x,t)$, характеризующей вертикальное перемещение

струны. Будем рассматривать струну как гибкую упругую нить. Математическое выражение понятия гибкости заключается в том, что напряжения, возникающие в струне, всегда направлены по касательным к ее мгновенному профилю (рис. 3.1). Это условие выражает собой то, что струна не сопротивляется изгибу.

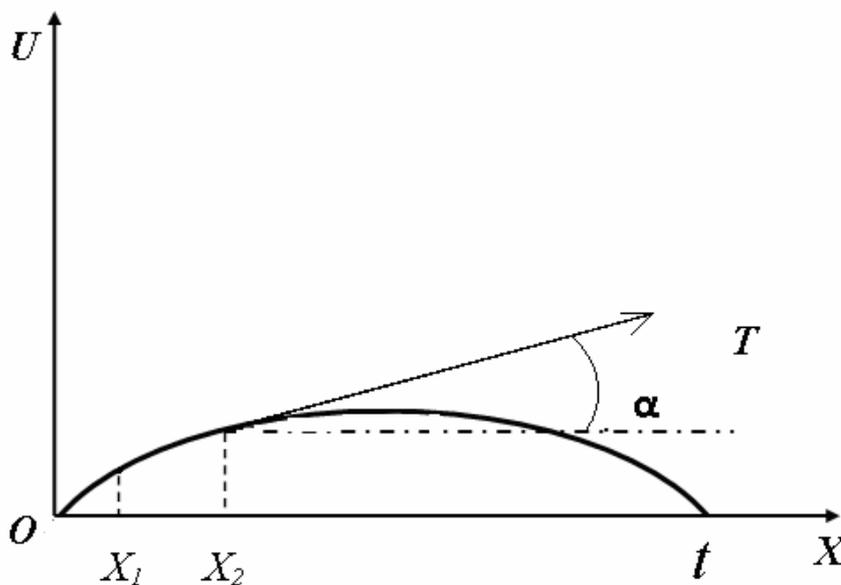


Рис. 3.1. Расчетная схема для вывода уравнения колебаний струны

Натяжение, возникающее в струне вследствие упругости, может быть вычислено по закону Гука. Будем рассматривать малые колебания струны и полагать, что $(U_x)^2 \approx 0$, пользуясь этим условием, подсчитаем удлинение, испытываемое участком струны (x_1, x_2) . Длина дуги этого участка

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (U_x)^2} dx = x_2 - x_1 = S.$$

Таким образом, в пределах точности удлинения участков струны в процессе колебания не происходит; отсюда в силу закона Гука следует, что натяжение T в каждой точке не меняется со временем. Покажем, что натяжение не зависит от x , т.е. $T(x) = T_0 = const$.

Найдем проекции натяжения на оси x и U (обозначим их T_x и T_U).

$$T_x(x) = T(x) \cos \alpha = \frac{T}{\sqrt{1 + (U_x)^2}} \cong T(x); \quad T_U(x) = T(x) \sin \alpha = T(x) \operatorname{tg} \alpha = T(x) U_x,$$

где α - угол касательной к кривой $U(x, t)$ с осью x . На участок (x_1, x_2) действуют силы натяжения, внешние силы и силы инерции. Сумма проекций всех сил на ось x должна быть равна нулю (рассматриваем только поперечные колебания). Так как силы инерции и внешние силы по предположению направлены вдоль оси U , то

$$T_x(x) - T_x(x_1) = 0 \text{ или } T(x) = T(x_2). \quad (3.1)$$

Отсюда в силу произвольности x_1 и x_2 следует, что натяжение не зависит от x , т.е. для всех значений x и t

$$T(x) = T_0. \quad (3.2)$$

После сделанных предварительных замечаний перейдем к выводу уравнения поперечных колебаний струны. Воспользуемся вторым законом Ньютона. Составляющая количества движения участка струны (x_1, x_2) по оси x

$\int_{x_1}^{x_2} U_t(\xi, t) \rho(\xi) d\xi$, где ρ — линейная плотность струны. Приравниваем изменение

количества движения за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi) [U_t(\xi, t_2) - U_t(\xi, t_1)] d\xi$$

импульсу действующих сил, складывающихся из натяжения

$$T_0 U_x \Big|_{x=x_2} - T_0 U_x \Big|_{x=x_1}$$

в точках x_2 и x_1 и внешней силы, которую будем считать непрерывно распределенной плотностью (нагрузкой) $F(x, t)$, рассчитанной на единицу длины. В результате получим уравнение поперечных колебаний элемента струны в интегральной форме:

$$\int_{x_1}^{x_2} [U_t(\xi, t_2) - U_t(\xi, t_1)] \rho(\xi) d\xi = \int_{t_1}^{t_2} T_0 [U_x(x_2, \tau) - U_x(x_1, \tau)] d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (3.3)$$

Для перехода к дифференциальному уравнению предположим существование и непрерывность вторых производных от $U(x, t)$. Тогда формула (3.3) после двукратного применения теоремы о среднем примет вид

$$U_{tt}(\xi^*, t^*)\rho(\xi^*)\Delta t\Delta x = \left\{T_0[U_{xx}(\xi^{**}, t^{**})] + F(\xi^{***}, t^{***})\right\}\Delta t\Delta x$$

где $\xi^*, \xi^{**}, \xi^{***} \in (x_1, x_2), (t^*, t^{**}, t^{***} \in (t_1, t_2))$.

Сократив $\Delta x\Delta t$ на и переходя к пределу при $x_2 = x, t_2 = t$, получим дифференциальное уравнение поперечных колебаний струны

$$T_0 U_{xx} = \rho U_{tt} = F(x, t). \quad (3.4)$$

В случае постоянной плотности $\rho = const$ этому уравнению обычно придают вид

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x, t); a = m \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}, \quad (3.5)$$

где $f(x, t) = \frac{1}{\rho} F(x, t) \quad (3.6)$

есть плотность силы, отнесенная к единице массы. При отсутствии внешней силы получим одномерное уравнение $U_{tt} = a^2 U_{xx}$ или $U_{xx} - U_{yy} = 0; y = at$, описывающее свободные колебания струны. Это уравнение является простейшим примером уравнения гиперболического типа. Если в точке $x_0 (x_1 < x_0 < x_2)$ приложена сосредоточенная сила $f_0(t)$ (рис. 3.2), то уравнение (5.3) запишется так:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(\xi) [U_t(\xi, t_2) U_t(\xi, t_1)] d\xi = \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \int_{t_1}^{t_2} T_0 [U_x(x_2, \tau) - U_x(x_1, \tau)] d\tau + \int_{t_1}^{t_2} f_0(\tau) d\tau.$$

Поскольку скорости точек струны ограничены, то при $x_1 > x_0$ и $x_2 > x_0$ интегралы в левой части этого равенства стремятся к нулю. Равенство (3.5) принимает вид

$$\int_{t_1}^{t_2} T_0 [U_x(x_0 + 0, \tau) - U_x(x_0 - 0, \tau)] d\tau = - \int_{t_1}^{t_2} f(\tau) d\tau \quad (3.7)$$

Пользуясь теоремой о среднем, сокращая обе части равенства на Δt и переходя к пределу при $t_2 \Rightarrow t_1$, получаем

$$U_x(x, t) \Big|_{x_0 - 0}^{x_0 + 0} = - \frac{1}{T_0} f_0(t).$$

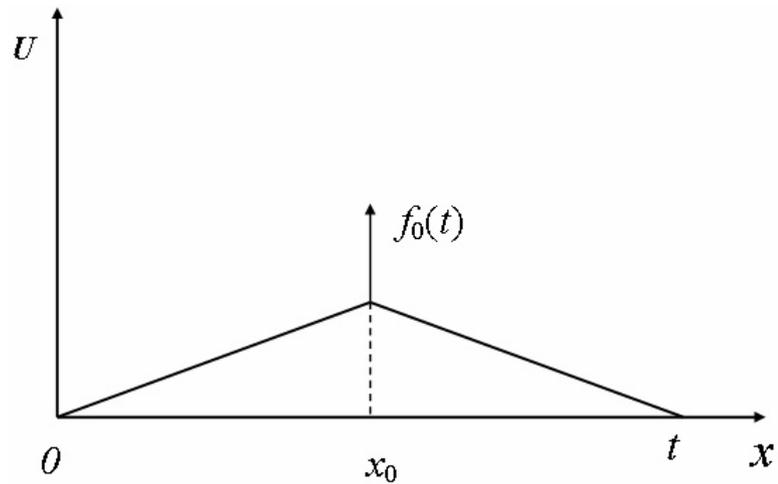


Рис. 3.2. К выводу уравнения поперечных колебаний струны

Отсюда видно, что в точке приложения сосредоточенной силы первые производные претерпевают разрыв и дифференциальное уравнение теряет смысл. В этой точке должны выполняться два условия сопряжения

$$\begin{cases} U(x_0 + 0, t) = U(x_0 - 0, t); \\ U(x_0 + 0, t) - U_x(x_0 - 0, t) = -\frac{1}{T_0} f_0(t) \end{cases} \quad (3.8)$$

первое из которых выражает непрерывность струны, второе определяет величину излома в точке x_0 , зависящую от $f_0(t)$ и натяжения T_0 .

3.3. Уравнения продольных колебаний стержней и струн.

Уравнения продольных колебаний для струны, стержня и пружины записываются одинаково. Рассмотрим стержень, расположенный на отрезке $(0, l)$ оси x . Процесс продольных колебаний может быть описан одной функцией $U(x, t)$, представляющей в момент смещение точки, имевшей в положении равновесия абсциссу x . При продольных колебаниях это смещение происходит вдоль стержня. При выводе уравнения будем предполагать, что натяжения, возникающие в процессе колебания, следуют закону Гука.

Подсчитываем удлинение элемента $(x, x + \Delta x)$ в момент t . Координаты концов этого элемента в момент t имеют значения $x + U(x, t)$, $x + \Delta x + U(x + \Delta x, t)$, а относительное удлинение равно $U_x(x + \theta \Delta x, t)$. Тогда по закону Гука натяжение

$$T(x, t) = k(x)U_x(x, t), \quad (3.9)$$

где $k(x)$ — модуль Юнга в точке $x(k(x)) > 0$.

Пользуясь теоремой об изменении количества движения, получаем интегральное уравнение колебаний

$$\int_{x_1}^{x_2} [U_t(\xi, t_2) - U_t(\xi, t)] \rho(\xi) d\xi = \int_{t_1}^{t_2} [k(x_2)U_x(x_2, \tau) - k(x_1)U_x(x_1, \tau)] d\tau + \int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} F(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (3.10)$$

где $F(x, t)$ плотность внешней силы, рассчитанная на единицу длины.

Предположим существование и непрерывность вторых производных функций $U(x, t)$. Применяя теорему о среднем и совершая предельный переход при $\Delta x = x_2 - x_1 \rightarrow 0$ и $\Delta t = t_2 - t_1 \rightarrow 0$ приходим к дифференциальному уравнению продольных колебаний стержня

$$[k(x)U_x]_x = \rho U_{tt} - F(x, t). \quad (3.11)$$

Если стержень однороден $k(x) = const$, $\rho = const$, то это уравнение записывают следующим образом:

$$U_{tt} = a^2 U_{xx} + f(x, t), \quad a = \sqrt{\frac{k}{\rho}}, \quad (3.12)$$

где

$$f(x, t) = \frac{F(x, t)}{\rho} \quad (3.13)$$

есть плотность силы, отнесенная к единице массы.

3.4. Энергия колебаний струны.

Найдем выражение для энергии поперечных колебаний струны $E = K + V$, где K — кинетическая и V — потенциальная энергия. Элемент струны, движущийся со скоростью $V = U_t$, обладает кинетической энергией

$$\frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} \rho(x) dx (U_t)^2; \quad m = \rho dx.$$

Кинетическая энергия всей струны

$$K = \frac{1}{2} \int_0^l \rho(x) [U_t(x,t)]^2 dx. \quad (3.14)$$

Потенциальная энергия поперечных колебаний струны, имеющей при $t = t_0$ форму $U(x, t_0) = U_0(x)$, равна работе, которую надо совершать, чтобы струна перешла из положения равновесия в положение $U_0(x)$. Пусть функция $U(x, t)$ дает профиль струны в момент t , причем $U(x, 0) = 0$, $U(x, t_0) = U_0(x)$. Элемент dx под действием равнодействующей силы натяжения

$$T \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x+dx} - T \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_x = T U_{xx} dx$$

за время dt проходит путь $U_t(x, t) dt$. Работа, производимая струной за время dt ,

$$\left\{ \int_0^1 T_0 U_{xx} U_t \right\} dt = \left\{ T_0 U_x U_t \Big|_2 - \int_0^1 T_0 U_x U_{xt} \right\} dt = \left\{ -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 T_0 (U_x)^2 dx + T_0 U_x U_t \Big|_0 \right\} dt.$$

Интегрируя по t от 0 до t_0 , получаем

$$-\frac{1}{2} \int_0^1 T_0 (U_x)^2 dx \Big|_0^{t_0} + \int_0^{t_0} T_0 U_x U_t \Big|_0^t dt = -\frac{1}{2} \int_0^1 T_0 [U_x(x, t_0)]^2 dx + \int_0^{t_0} T_0 U_x U_t \Big|_0^1 dt.$$

Нетрудно выяснить смысл последнего слагаемого правой части этого равенства. Действительно, $T_0 U_x \Big|_{x=0}$ есть величина натяжения на конце струны

$x = 0$; $U_t(0, t) dt$ — перемещение этого конца, а интеграл

$$\int_0^{t_0} T_0 U_x U_t \Big|_{x=0} dt \quad (3.15)$$

представляет работу, которую надо затратить на перемещение конца $x = l$. Аналогичный смысл имеет слагаемое, соответствующее $x = l$. Если концы струны закреплены, то работа на концах струны будет равна нулю (при этом $U(0, t) = 0$, $U_t(0, t) = 0$). Следовательно, при перемещении закрепленной на концах струны из положения равновесия $U = 0$ в положение $V_0(x)$ работа A не зависит от способа перевода струны в это положение и равна

$$A = -\frac{1}{2} \int_0^l T_0 [U_0(x)]^2 dx \quad (3.16)$$

потенциальной энергии струны в момент $t = t_0$ с обратным знаком. Таким образом, полная энергия струны

$$E = \frac{1}{2} \int_0^l [T_0 (U_x)^2 + \rho(x) (U_t)^2] dx. \quad (3.17)$$

Аналогично может быть получено выражение для потенциальной энергии продольных колебаний стержня. Впрочем, его можно получить также, исходя из формулы для потенциальной энергии упругого стержня

$$V = \frac{1}{2} k \left(\frac{l - l_0}{l_0} \right)^2 l_0,$$

где l_0 — начальная длина стержня; l — конечная длина. Отсюда непосредственно следует: $V = \frac{1}{2} \int_0^l k (U_x)^2 dx$.

3.5. Вывод уравнения электрических колебаний в проводниках.

Прохождение электрического тока по проводу с распределенными параметрами характеризуется силой тока и напряжением, которые являются функциями положения i и времени t . Применяя закон Ома к участку длиной dx , можно написать, что падение напряжения на элементе провода dx равно сумме электродвижущих сил:

$$-V_x = dx i R dx + i_0 L dx, \quad (3.18)$$

где R и L — сопротивление и коэффициент самоиндукции, рассчитанные на единицу длины. Количество электричества, притекающее на элемент провода dx за время dt

$$[i(x, t) - i(x + dx, t)] = -i_x dx dt \quad (3.19)$$

равно сумме количества электричества, необходимого для зарядки элемента dx и количества, теряющего вследствие несовершенства изоляции:

$$[i(x, t) - i(x + dx, t)] = -i_x dx dt, \quad (3.20)$$

где C и G — коэффициенты емкости и утечки, рассчитанные на единицу длины, причем величину потерь считаем пропорциональной напряжению в рассматриваемой точке провода.

Из формул (3.18), (3.19) и (3.20) получаем систему

$$\begin{cases} ix + CV_t + GV = 0; \\ V_x + Li_t + Ri = 0, \end{cases} \quad (3.21)$$

называемую системой телеграфных уравнений.

Чтобы получить одно уравнение, определяющее функцию i , продифференцируем первое равенство (3.21) по x , второе — по t , умножив его на C . Производя вычитание в предположении постоянства коэффициентов, найдем

$$i_{xx} + GV_x - CLi_{tt} - CRi_t = 0. \quad (3.22)$$

Заменяя V его значением из второго уравнения (3.21), получим уравнение для силы тока

$$i_{xx} = CLi_{tt} + (CR + GL)i_t + GRi. \quad (3.23)$$

Аналогично выглядит уравнение для напряжения:

$$V_{xx} = CLV_{tt} + (CR + GL)V_t + GRV. \quad (3.24)$$

Уравнение (3.22) или (3.23) называется телеграфным уравнением. Если можно пренебречь потерями через изоляцию и если сопротивление очень мало $G \cong R \cong 0$, то приходим к известному уравнению колебаний

$$a^2 V_{xx} = V_{tt}; \quad a = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

3.6. Поперечные колебания мембраны.

Мембраной называется плоская пленка, не сопротивляющаяся изгибу и сдвигу. Рассмотрим мембрану, натянутую на плоский контур C . Будем изучать поперечные колебания мембраны, в которых смещение перпендикулярно к плоскости мембраны.

Пусть dx — элемент дуги некоторого контура, взятого на поверхности мембраны и проходящего через точку $M(x, y)$. На этот элемент действует натяжение, равное Tds . Вектор T вследствие отсутствия сопротивления изгибу и сдвигу лежит в касательной плоскости к мгновенной поверхности мембраны и перпендикулярен к элементу ds . Можно показать, что отсутствие

сопротивления сдвигу приводит к тому, что величина натяжения не зависит от направления элемента, так что вектор натяжения $T = T(x, y, z)$ является функций x, y и t . Эти свойства вектора T служат математическим выражением отсутствия сопротивления изгибу и сдвигу.

Будем изучать малые колебания мембраны, пренебрегая квадратами первых производных U_x и U_y , где функция $U(x, y, t)$ определяет форму мембраны в момент времени t . Из этого предположения сразу же следует, что $T_h(x, y, t)$ — проекция натяжения на плоскость (x, y) равна абсолютной величине натяжения. В самом деле, при любой ориентации угол γ между вектором T и плоскостью (x, y) не превосходит угла γ' , образуемого нормалью к поверхности мембраны в точке (x, y) с осью z . Поэтому $\cos \gamma' \geq \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1+U_x^2+U_y^2}} \cong 1$, т.е.

$$\cos \gamma' = 1, \text{ и} \quad T_h(x, y, z, t) = T \cos \gamma' \cong T(x, y, z, t). \quad (3.25)$$

Вертикальная составляющая натяжения, очевидно $T_u = T \frac{\partial U}{\partial n}$. Выделим на поверхности мембраны элемент площади, проекция которого на плоскость (x, y) является прямоугольником $ABCD$ со сторонами, параллельными осям координат (рис. 3.3). На этот элемент действует сила натяжения:

$$T^* = \oint_{ABCD} T ds. \quad (3.26)$$

Вследствие отсутствия перемещения вдоль осей x и y проекции T^* на эти оси равны нулю: $T_x^* = \int_B^C T(x_2, y, t) dy - \int_A^D T(x_1, y, t) dy = \int_{y_1}^{y_2} \{T(x_2, y, t) - T(x_1, y, t)\} dy = 0$.

Аналогично: $T_y^* = \int_{x_1}^{x_2} \{T(x, y_2, t) - T(x, y_1, t)\} dx = 0$.

Пользуясь теоремой о среднем и учитывая произвол в выборе площадки $ABCD$ получаем

$$\begin{cases} T(x, y_1, t) = T(x, y_2, t); \\ T(x_1, y, t) = T(x_2, y, t), \end{cases} \quad (3.27)$$

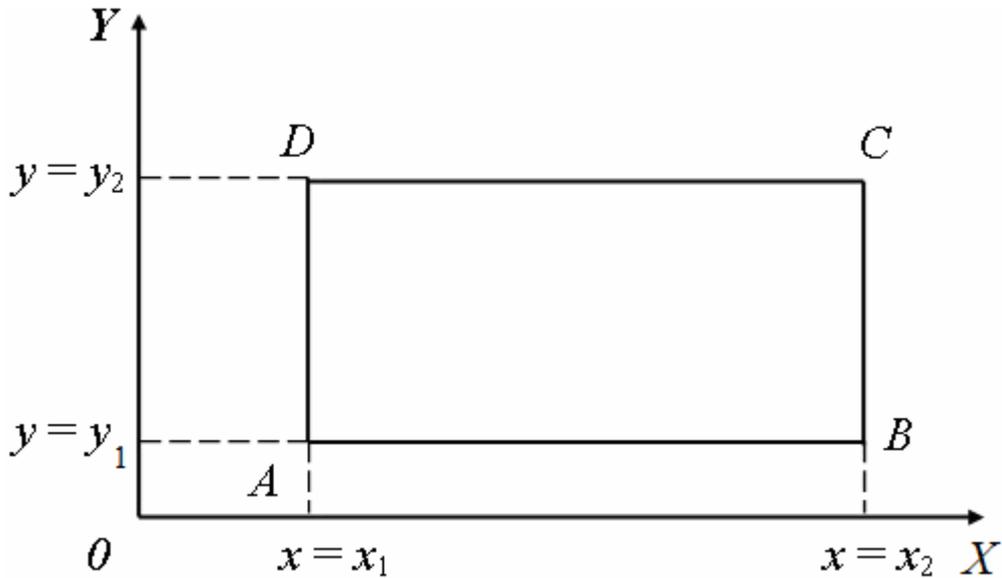


Рис. 3.3. Расчетная схема для вывода уравнения колебаний мембраны.

т.е. натяжение T не меняется при изменении x и y и может зависеть лишь от t . Площадь какого-либо элемента мембраны в момент времени t равна в данном приближении

$$\iint_{(s)} \frac{dxdy}{\cos \gamma} = \iint_{(s)} \sqrt{1+U_x^2 + U_y^2} dxdy = \iint_{(s)} dxdy. \quad (3.28)$$

Следовательно, в процессе колебаний не происходит растяжения, откуда в силу закона Гука вытекает независимость натяжений от времени. Таким образом, натяжение зависит от переменных x , y и t :

$$T(x, y, t) = const = T_0. \quad (3.29)$$

Перейдем к выводу уравнения колебаний мембраны. Воспользуемся теоремой о приращении количества движения. Пусть S_1 — проекция на плоскость (x, y) некоторого участка мембраны, а C_1 — граница S_1 . Приравнявая изменение количества движения импульсу вертикальных составляющих сил натяжения и внешних действующих сил с плотностью $F(x, y, t)$ получаем уравнение колебаний мембраны в интегральной форме

$$\int_{(s)} [U_t(x, y, t_2) - U_t(x, y, t_1)] \rho(x, y) dx dy = \int_{t_1}^{-t_2} \int_x T_0 \frac{\partial U}{\partial n} ds dt + \int_{t_1}^{-t_2} \int_{S_1} F dx dy dt, \quad (3.30)$$

где $\rho(x, y)$ — поверхностная плотность мембраны $F(x, y, t)$ — плотность внешней силы (на единицу площади). Для перехода к дифференциальному уравнению предположим, что функция $U(x, y, t)$ имеет непрерывные вторые производные. С помощью теоремы Остроградского контурный интеграл преобразуется в поверхностный

$$\int_{C_1} \frac{\partial U}{\partial n} ds = \iint_{S_1} (U_{xx} + U_{yy}) dx dy,$$

вследствие чего интегральное уравнение колебаний приводится к виду

$$\int_{t_1}^{-t_2} \iint_{S_1} \{ \rho U_{tt} - T_0 (U_{xx} + U_{yy}) - F(x, y, t) \} dx dy dt = 0.$$

Пользуясь теоремой о средней, произвольностью выбора S_1 и промежутка времени (t_1, t_2) , делаем заключение о тождественном равенстве нулю выражения в фигурных скобках. Таким образом, приходим к дифференциальному уравнению колебаний мембраны

$$\rho U_{tt} = T_0 (U_{xx} + U_{yy}) + F(x, y, t). \quad (3.31)$$

Для однородной мембраны уравнение колебаний можно записать в виде

$$T_{tt} = a^2 (U_{xx} + U_{yy}) + f(x, y, t), \quad a^2 = \frac{T}{\rho}, \quad (3.32)$$

где $f(x, y, t)$ — плотность силы, рассчитанная на единицу массы мембраны.

3.7. Уравнения гидродинамики и акустики.

Для характеристики движения жидкости пользуются функциями $V_1(x, y, z, t), V_2(x, y, z, t), V_3(x, y, z, t)$ представляющим компоненты вектора скорости V в точке (x, y, z) в момент t (эйлеровы переменные). Величинами, характеризующими движение жидкости, являются также плотность, $\rho(x, y, z, t)$

давление $P(x, y, z, t)$ и плотность внешних действующих сил $F(x, y, z, t)$ если они имеются, рассчитанная на единицу массы.

Рассмотрим некоторый объем жидкости и подсчитаем действующие на него силы. Пренебрегая силами трения, обусловленными вязкостью, т.е. рассматривая идеальную жидкость, получаем для результирующей сил давления выражение в виде поверхностного интеграла

$$-\iint_S p \vec{n} dS, \quad (3.33)$$

где S — поверхность объема T ; \vec{n} — единичный вектор внешней нормали. Формула Остроградского дает

$$-\iint_S p \vec{n} dS = \iiint_T \text{grad } p d\tau. \quad (3.34)$$

При вычислении ускорения какой-либо точки жидкости необходимо учесть перемещение самой точки. Пусть $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ — уравнение траектории этой точки. Производная скорости по времени

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} x' + \frac{\partial V}{\partial y} y' + \frac{\partial V}{\partial z} z' = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} V_1 + \frac{\partial V}{\partial y} V_2 + \frac{\partial V}{\partial z} V_3 = \frac{\partial V}{\partial t} + (\mathbf{v} \vec{\nabla}) v,$$

где

$$\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3.35)$$

Эта производная, учитывающая движение частицы среды (субстанции) называется субстанционной или материальной. Уравнение жидкости выражает связь между ускорением частиц и действующими на них силами

$$\iiint_T \rho \frac{dv}{dt} d\tau = -\iiint_T \text{grad } p d\tau + \iiint_T \rho \vec{F} d\tau,$$

где последний интеграл представляет собой равнодействующую внешних сил, приложенных к объему T . Отсюда в силу произвольности объема T получаем следующее уравнение движения идеальной жидкости в форме Эйлера:

$$v_i + (v_{\nabla})_i = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \vec{F}. \quad (3.36)$$

Перейдем к выводу уравнения непрерывности. Если внутри T нет никаких источников или стоков, то изменение в единицу времени количества жидкости, заключенной внутри T , равно потоку через границу S :

$$\frac{d}{dt} \iiint_T \rho dt = - \iint_S \rho v \vec{n} dS. \quad (3.37)$$

Преобразование поверхностного интеграла в объемный дает

$$\iiint_T \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho v \right) d\tau = 0.$$

Так как это равенство справедливо для сколь угодно малых объемов, то отсюда следует уравнение непрерывности $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho v = 0$ или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} v = 0. \quad (3.38)$$

К уравнениям (3.36) и (3.38) следует присоединить термодинамическое уравнение состояния, которое здесь возьмем в виде $p = f(\rho)$. Следовательно, получаем систему пяти уравнений с пятью функциями v_x, v_y, v_z, p и ρ . Если уравнение состояния содержало температуру, то нужно было бы добавить еще уравнение теплопереноса. Таким образом, система уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + (v \vec{\nabla}) v = F - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \quad p = f(\rho) \end{cases} \quad (3.39)$$

представляет замкнутую систему уравнений гидродинамики. Применим уравнения гидродинамики к процессу распространения звука в газе. Сделаем следующие допущения: 1) внешние силы отсутствуют; 2) процесс распространения звука является адиабатическим, поэтому уравнением состояния служит адиабата Пуассона

$$\frac{p}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v},$$

где ρ_0 и P_0 — начальная плотность и начальное давление; c_p и c_v — теплоемкость при постоянном давлении и постоянном объеме; 3) колебания

газа малы, можно пренебрегать высшими степенями скоростей, градиентов скоростей и изменения плотности. Назовем конденсацией газа величину $S(x, y, z, t)$ равную относительному изменению плотности:

$$S(x, y, z, t) = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}, \quad (3.40)$$

отсюда
$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + S}. \quad (3.41)$$

Уравнения гидродинамики при сделанных предположениях принимают вид:

$$v_t = -\frac{1}{\rho_0} \text{grad } p \quad (3.42)$$

$$\rho_t + \rho_0 \text{div } v = 0;$$

$$p = p_0(1 + S)^{\gamma} \cong p_0(1 + \gamma S),$$

так как

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \text{grad } p &= \frac{1}{\rho_0} (1 - S + \dots) \text{grad } p = \frac{1}{\rho_0} \text{grad } p + \dots, \\ \text{div } \rho v &= v \text{grad } \rho + \rho \text{div } v = \rho_0 \text{div } v + \dots, \end{aligned}$$

где точками обозначены члены второго и высших порядков малости. Вводя обозначение $a^2 = \gamma \frac{P_0}{\rho_0}$, перепишем систему (3.42) в виде

$$\begin{cases} v_t = -a^2 \text{grad } s; \\ s_t + \text{div } v = 0. \end{cases} \quad (3.42)$$

Применяя к первому уравнению (3.42) оператор дивергенции и меняя порядок дифференцирования, будем иметь

$$\text{div} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \text{div } v = -a^2 \text{div}(\text{grad } s) = -a^2 \nabla^2 s = -a^2 \Delta s,$$

где $\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа. Используя второе уравнение (3.42), получаем уравнение колебаний

$$\Delta s = \frac{1}{a^2} s_{tt},$$

или
$$a^2(\rho_{xx} + \rho_{yy} + \rho_{zz}) = \rho_{tt}. \quad (3.43)$$

Отсюда и из формулы (3.40) получаем уравнение для плотности

$$a^2(\rho_{xx} + \rho_{yy} + \rho_{zz}) = \rho_{tt}. \quad (3.43')$$

Уравнения (3.43) и (3.43') являются уравнениями колебаний. Введем теперь потенциал скоростей и покажем, что он удовлетворяет тому же уравнению колебаний (3.43), что и конденсация. Из $v_t = -a^2 \text{grad } s$ следует, что

$$v(x, y, z, t) = v(x, y, z, 0) - a^2 \text{grad} \left(\int_0^t s dt \right), \quad (3.44)$$

где $v(x, y, z, 0)$ — начальное распределение скоростей. Если потенциал поля скоростей в начальный момент

$$v \Big|_{t=0} = -\text{grad } f(x, y, z), \quad (3.45)$$

то имеет место соотношение

$$v = -\text{grad} \left[f(x, y, z) + a^2 \int_0^t s dt \right] = -\text{grad } U, \quad (3.46)$$

которое означает, что существует потенциал скоростей $U(x, y, z, t)$. Знания потенциала скоростей достаточно для описания всего процесса движения:

$$v = -\text{grad } U. \quad (3.47)$$

Подставляя эти значения в уравнения непрерывности $s_t + \text{div } V = 0$, получаем уравнение колебаний для потенциала $a^2(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) = U_{tt}$ или:

$$U_{tt} = a^2 \Delta U. \quad (3.48)$$

Для давления P и скорости также можно получить уравнение колебаний вида (3.48), называемое часто уравнением акустики.

При решении задач для двумерного и одномерного случаев надо в уравнении (3.48) оператор Лапласа заменить оператором $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ и, соответственно, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$. Постоянная имеет размерность скорости и является

скоростью распространения звука. Вычислим скорость звука в воздухе при нормальном атмосферном давлении. В этом случае $\gamma = \frac{7}{5}$ $\rho_0 = 0,001293 \frac{г}{см^3}$,

$$\rho_0 = 1,033 \frac{кг}{см^3}; \text{ следовательно } a = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} = 336 \frac{м}{с}.$$

В случае колебаний газа в ограниченной области на ее границе должны быть заданы определенные граничные условия. Если граница представляет собой твердую непроницаемую стенку, то нормальная составляющая скорости равна нулю, что приводит к условиям

$$\left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{\Sigma} = 0, \left. \frac{\partial s}{\partial n} \right|_{\Sigma} = 0. \quad (3.49)$$

3.8. Граничные и начальные условия.

При математическом описании физического процесса надо, прежде всего, поставить задачу, т.е. сформулировать условия, достаточные для однозначного определения процесса.

Дифференциальные уравнения с обыкновенными и, тем более частными производными имеют, вообще говоря, бесчисленное множество решений. Поэтому в том случае, когда физическая задача приводится к уравнению с частными производными, для однозначной характеристики процесса необходимо к уравнению присоединить некоторые дополнительные условия.

В случае обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка решение может быть определено начальными условиями, т. е. заданием значений функции и её первой производной при начальном значении аргумента (задача Коши). Встречаются и другие формы дополнительных условий, когда, например, задаются значения функции в двух точках (задача о цепной линии). Для уравнения с частными производными возможны также различные формы дополнительных условий.

Рассмотрим простейшую задачу о поперечных колебаниях струны, закрепленной на концах. В этой задаче $U(x, t)$ отклонение струны от оси x . Если концы струны $0 \leq x \leq \ell$ закреплены, то должны выполняться граничные условия

$$u(0, t) = 0, U(\ell, t) = 0. \quad (3.50)$$

Так как процесс колебаний струны зависит от ее начальной формы и распределения скоростей, то следует задать “начальные условия”

$$\begin{cases} U(x, t_0) = \phi(x) \\ U_t(x, t_0) = \psi(x). \end{cases} \quad (3.51)$$

Таким образом, дополнительные условия состоят из граничных и начальных условий, где $\phi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные функции точки. В дальнейшем покажем, что эти условия вполне определяют решение уравнения колебаний струны

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \quad (3.52)$$

Если концы струны движутся по заданному закону, то граничные условия (3.50) принимают другой вид: $u(0, t) = \mu_1(t)$, $u(l, t) = \mu_2(t)$, где $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ — заданные функции времени t . Аналогично ставится задача для продольных колебаний струны или пружины.

Возможны и другие типы граничных условий. Рассмотрим, например, задачу о продольных колебаниях пружины, один конец которой закреплен (точка подвеса), а другой — свободен. Закон движения конца не задан и зачастую является искомой функцией. В точке подвеса отклонение $u(0, t)$ на свободном конце $x = l$ натяжение пружины

$$T(l, k) = k \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} \quad (3.53)$$

равно нулю (нет внешних сил), так что математическая формулировка условия свободного конца имеет вид $U_x(l, t) = 0$.

Если конец $x = 0$ движется по определенному закону $\mu(t)$, а при $x = l$ задана

сила $v(t)$, то $u(0,t) = \mu(t)$, $u_x(l,t) = v(t)$, $v(t) = \frac{1}{k}v(t)$ типичным является также условие упругого закрепления, скажем для $ku_x(l,t) = -\alpha u(l,t)$ или,

$$u_x(l,t) = -hu(l,t), \quad h = \frac{\alpha}{k} \quad (3.54)$$

при котором конец $x = l$ может перемещаться, но упругая сила закрепления вызывает на этом конце натяжение, стремящееся вернуть сместившийся конец в прежнее положение. Эта сила, согласно закону Гука, пропорциональна смещению: коэффициент пропорциональности называется $u(l,t)$ коэффициентом жесткости закрепления. Если точка (система), относительно которой имеет место упругое закрепление, перемещается, и ее отклонение от начального положения дается функцией $\theta(t)$, то граничное условие принимает вид

$$U_x(l,t) = -h[u(l,t) - \theta(t)], \quad h = \frac{\alpha}{k} > 0. \quad (3.55)$$

Условие упругого закрепления на левом конце $x = 0$ имеет вид

$$u_x(0,t) = h[u(0,t) - \theta(t)], \quad h > 0.$$

Формально можно считать, что условие (3.55) имеет место и при $x = 0$, но $h < 0$. Следует отметить, что в случае жесткого закрепления (велико), когда даже наибольшие сдвиги конца вызывают большие натяжения, граничное условие (3.55) переходит в условие $u(l,t) = \mu(t), \alpha = \infty$ при $\mu(t) = \theta(t)$. В случае мягкого закрепления (α мало), при котором большие сдвиги конца вызывают слабые натяжения, граничное условие переходит в условие свободного конца

$$u_x(l,t) = 0, \quad \alpha = 0.$$

В дальнейшем, будем говорить о трех типах граничных условий:

граничное условие 1-го рода $u(0,t) = \mu(t)$ — заданный режим,

граничное условие 2-го рода $u_x(0,t) = v(t)$ — заданная сила,

граничное условие 3-го рода $u_x(0,t) = h[u(0,t) - \theta(t)]$ — упругое закрепление.

Аналогично задаются граничные условия и на втором конце $x = l$. Если функции, задаваемые в правой части $\mu(t)$, $\nu(t)$ или $\theta(t)$, равны нулю, то граничные условия называются однородными. Комбинируя различные перечисленные типы граничных условий, можно получить шесть типов простейших краевых задач.

Более сложное граничное условие имеет место, например, при упругом закреплении, не подчиняющемся закону Гука, когда натяжение на конце является нелинейной функцией смещения $u(l, t)$, так что

$$u_x(l, t) = \frac{1}{k} F[u(l, t)]. \quad (3.56)$$

Это граничное условие в отличие от рассматриваемых выше является нелинейным. Возможны, далее, соотношения между смещениями и натяжениями на разных концах системы. Например, в задачах о колебании кольца, когда $x = 0$ и $x = l$ представляют одну и ту же физическую точку, граничные условия принимают вид

$$u(l, t) = u(0, t); u_x(0, t) = U(l, t), \quad (3.57)$$

т.е. сводятся к требованиям непрерывности, u и u_x . Производные по t могут также входить в граничные условия. Если конец пружины испытывает сопротивление среды, пропорциональное скорости его движения (к концу закреплена пластинка, плоскость которой перпендикулярна оси пружины), то граничное условие принимает вид

$$ku_x(l, t) = -\alpha u_t(l, t). \quad (3.58)$$

Если к концу $x = l$ пружины прикреплен груз массы m , то при $x = l$ должно выполняться условие

$$mu_{tt}(l, t) = -ku_x(l, t) + mg. \quad (3.59)$$

Для поперечных колебаний струны все граничные условия записываются в той же форме с заменой k на T_0 .

В дальнейшем ограничимся рассмотрением трех простейших типов граничных условий, проводя основное изложение на примере первого типа граничного условия и отмечая лишь попутно особенности, связанные со вторым и третьим условиями.

Сформулируем первую краевую задачу для уравнения (3.5): найти функцию $u(x, t)$, определенную в области $0 \leq x \leq l, t \geq 0$, удовлетворяющую уравнению $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t)$ для $0 < x < l, t > 0$, граничным

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t) \quad (3.60)$$

и начальным условиям:

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad (3.60')$$

Аналогично ставится задача для уравнения (3.11). Если на обоих концах берутся граничные условия 2-го или 3-го рода, то соответствующие задачи называются второй или третьей краевыми задачами. Если граничные условия при $x = 0$ и $x = l$ имеют различные типы, то такие краевые задачи называют смешанными, не проводя более подробной их классификации.

Обратимся теперь к рассмотрению предельных случаев поставленной задачи. Влияние граничных условий в точке M_0 достаточно удаленной от границы, на которой они заданы, сказываются через достаточно большой промежуток времени. Если интересует явление в течение малого промежутка времени, когда влияние границ еще несущественно, то вместо полной задачи можно рассматривать предельную задачу с начальными условиями для неограниченной области: найти решение уравнения

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t) \quad -\infty < x < \infty, t > 0$$

с начальными условиями при $-\infty < x < \infty$.

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \phi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} \quad (3.61)$$

Эту задачу часто называют задачей Коши.

Если же изучается явление вблизи одной границы и влияние граничного режима на второй границе не имеет существенного значения на протяжении интересующего промежутка времени, то приходим к постановке задачи на полуограниченной прямой, когда помимо уравнения даны дополнительные условия:

$$u(0, t) = \mu(t), t \geq 0; \quad (3.62)$$

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \phi(x), \\ u_t(x, 0) &= \psi(x) \end{aligned} \right\} 0 \leq x < \infty.$$

Характер явления для моментов времени, достаточно удаленных от начального момента $t = 0$, вполне определяется граничными условиями, так как влияние начальных условий благодаря трению, присущему реальной системе, с течением времени ослабевает. Задачи этого типа встречаются особенно часто в случаях, когда система возбуждается периодическим граничным режимом, действующим длительное время. Такие задачи “без начальных условий” (на установившийся режим) формулируются следующим образом: найти решение изучаемого уравнения для $0 \leq x \leq l$ $t > 0$ при граничных условиях

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t). \quad (3.63)$$

Аналогично ставится задача без начальных условий для полуограниченной прямой. В дальнейшем будем рассматривать помимо основных краевых задач также предельные задачи, т.е. задачи в бесконечной области, когда одна или обе границы находятся в бесконечности.

3.9. Применение метода характеристик к изучению малых колебаний струны.

3.9.1. Неограниченная струна. Уравнение свободных колебаний однородной струны имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}. \quad (3.64)$$

Положим $\xi = x - at, \eta = x + at.$ (3.65)

Нетрудно видеть, что $x - at = C_1$ и $x + at = C_2$ суть характеристики уравнения (3.64)

Уравнение (3.64) в новых переменных запишется в виде $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$. Переписав

его как $\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} = 0 \right)$, получим $\frac{\partial u}{\partial \xi} = \varpi(\xi)$, где $\varpi(\xi)$ — произвольная функция.

Интегрируя полученное уравнение по ξ и рассматривая η как параметр, найдем, что $u = \int \varpi(\xi) d\xi + \theta_2(\eta)$, где $\theta_2(\eta)$ — произвольная функция η .

Предположив, что $\int \varpi(\xi) d\xi = \theta_1(\eta)$, получим $u = \theta_1(\eta) + \theta_2(\eta)$. Возвращаясь к старым переменным (x, t) , будем иметь

$$u(x, t) = \theta(x - at) + \theta_2(x + at). \quad (3.66)$$

Нетрудно проверить, что функция $u(x, t)$, определяемая формулой (3.66), есть решение уравнения (3.64), если θ_2 и θ_1 — произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции. Решение (3.66) уравнения (3.64) называется решением Даламбера.

Выясним физический смысл решения (3.66). Рассмотрим сначала частный случай колебания струны, когда $\theta_2 \equiv 0$, т.е. когда смещение струны определяется формулой

$$u_1 = \theta_1(x - at). \quad (3.67)$$

Положим, что наблюдатель, выйдя в начальный момент времени $t = 0$ из точки $x = c$ струны, передвигается в положительном направлении оси со скоростью, т.е. его абсцисса меняется по закону $x = c + at$ или $x - at = c$. Для такого наблюдателя смещение струны, определяемое формулой (3.67), будет оставаться все время постоянным, равным $\theta_1(c)$. Самое явление, описываемое функцией $u_1 = \theta_1(x - at)$, называется распространением прямой волны. Решение (3.67) представляет прямую волну, которая распространяется в положительном направлении оси X со скоростью a . Точно такое же решение $u_2 = \theta_2(x + at)$

представляет обратную волну, которая распространяется в отрицательном направлении оси X со скоростью a .

Таким образом, решение (3.66) является суммой прямой и обратной волн. Это приводит к следующему графическому способу построения формы струны в любой момент времени t . Строим кривые $u_1 = \theta_1(x)$, $u_2 = \theta_2(x)$ изображающие прямую и обратные волны в начальный момент времени $t = 0$ и затем, не изменяя их формы, передвигаем одновременно со скоростью a в разные стороны: $u_1 = \theta_1(x)$ - вправо, $u_2 = \theta_2(x)$ - влево. Чтобы получить теперь график струны, достаточно построить алгебраические суммы ординат раздвинутых кривых. Рассмотрим верхнюю полуплоскость xOt , в которой ось Ox соответствует положению струны в начальный момент времени $t = 0$. Всякая точка полуплоскости характеризует определенную точку x струны в определенный момент времени t . Нетрудно при этом найти графически те точки струны, начальные возмущения которых дошли в момент времени t_0 до точки x_0 . Это будут, согласно предыдущему, точки с абсциссами $x + at$, так как есть скорость распространения колебаний. Для нахождения их на оси достаточно провести через точку (x_0, t_0) две характеристики

$$x - at = x_0 - at_0, \quad x + at = x_0 + at_0. \quad (3.68)$$

В пересечении их с осью ox и получаются искомые точки (рис.3.4).

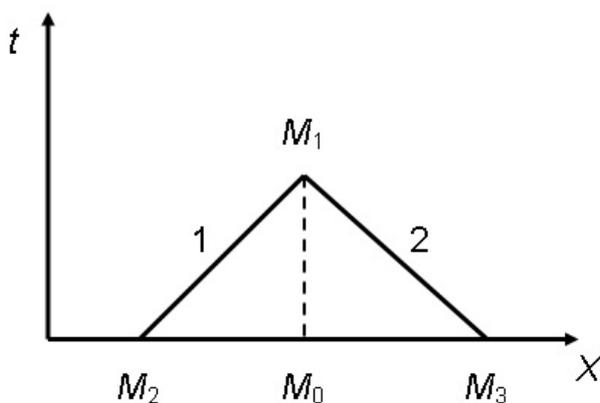


Рис. 3.4. Зависимости, изображающие прямую (1) и обратную (2) волны при колебании струны

Вдоль первой характеристики волна $\theta_1(x-at)$ сохраняет постоянное значение, т.е. прямая дает значения (x,t) , при которых прямая волна дает то же отклонение, что и при значениях (x_0, t_0) . Вторая характеристика из уравнения (5.68) играет ту же роль для обратной волны $\theta_2(x+at)$. Можно сказать коротко, что возмущения распространяются по характеристикам.

3.9.2. Задача Коши. Требуется найти решение уравнения (3.64), удовлетворяющее начальным условиям

$$u \Big|_{t=0} = \phi_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{t=0} = \phi_1(x). \quad (3.69)$$

Ввиду неограниченности струны функции $\phi_0(x)$ и $\phi_1(x)$ заданы в $(-\infty, \infty)$. В решении (3.66) уравнения (3.64) нужно выбрать функции $\theta_1(x), \theta_2(x)$ так, чтобы удовлетворить начальным условиям (3.69). Из начальных условий (3.69) имеем $\phi_0(x) = \theta_1(x) + \theta_2(x)$, $\phi_1(x) = -a[\theta_1'(x) - \theta_2'(x)]$, откуда интегрируя второе равенство, получаем

$$\theta_1(x) + \theta_2(x) = \phi_0(x), \quad \theta_1(x) - \theta_2(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x \phi_1(z) dz + C, \quad (3.70)$$

где C — произвольная постоянная. Из равенства (3.70) находим

$$\begin{aligned} \theta_1(x) &= \frac{1}{2} \phi_0(x) - \frac{1}{2} \int_0^x \phi_1(z) dz + \frac{C}{2}; \\ \theta_2(x) &= \frac{1}{2} \phi_0(x) - \frac{1}{2} \int_0^x \phi_1(z) dz - \frac{C}{2}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Подставив выражение (3.71) в решение (3.66), будем иметь

$$u(x,t) = \frac{\phi_0(x-at)}{2} - \frac{1}{2} \int_0^{x-at} \phi_1(z) dz + \frac{C}{2} + \frac{\phi_0(x+at)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{x+at} \phi_1(z) dz - \frac{C}{2}$$

или окончательно

$$u(x,t) = \frac{\phi_0(x-at) + \phi_0(x+at)}{2} + \frac{1}{2} a \int_{x-at}^{x+at} \phi_1(z) dz. \quad (3.72)$$

Формула (3.72) дает решение задачи Коши (3.64), (3.69), если $\phi_0(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно, в $\phi_1(x)$ — до первого.

Задача Коши (3.64), (3.69) поставлена коррективно. Действительно, полученное решение единственно, что следует из способа вывода формулы (3.72). Несомненно далее непрерывная зависимость решения (3.72) от начальных данных. В самом деле, для любого $\xi > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что если заменить $\phi_0(x)$ и $\phi_1(x)$ на $\bar{\phi}_0(x)$ и $\bar{\phi}_1(x)$ так, что $|\phi_0(x) - \bar{\phi}_0(x)| < \delta$, $|\phi_1(x) - \bar{\phi}_1(x)| < \delta$, $(-\infty < x < \infty)$ разность между новым решением $u(x, t)$ и первоначальным $u(x, t)$ будет по абсолютной величине меньше ξ на любом конечном отрезке времени. Это утверждение легко следует из формулы (3.72).

Рассмотрим два частных случая:

1. Начальные скорости точек струны равны нулю, а начальное смещение имеет место лишь в конечном промежутке струны, т.е. $\phi_0(x) = 0$ вне этого промежутка. Решение (3.72) выражается при этом формулой

$$u(x, t) = \frac{\phi_0(x - at) + \phi_0(x + at)}{2}. \quad (3.73)$$

Решение (3.73) является суммой двух волн, распространяющихся направо и налево со скоростью a , причем начальная форма обеих волн определяется функцией $\frac{1}{2}\phi_0(x)$ равной половине начального смещения. Пусть точка x струны лежит правее промежутка $(-\alpha, \alpha)$, т.е. $x > \alpha$. При $t < x - \frac{\alpha}{a}$ из вида функции $\phi_0(x)$ и формулы (3.73) следует, что $u(x, t) = 0$, т.е. до точки x волна еще не дошла. С момента времени $t = x - \frac{\alpha}{a}$ точка x начнет колебаться (момент прохождения переднего фронта прямой волны). При $t > \frac{x + \alpha}{a}$ из формулы (3.73) следует, что $u(x, t) = 0$. Моменту времени $t > \frac{x - \alpha}{a}$ соответствует прохождение

заднего фронта прямой волны через точку x , после чего в этой точке $u(x, t)$ обращается в нуль. Аналогичные рассуждения можно провести для точек струны, лежащих внутри промежутка $(-\alpha, \alpha)$ или левее его. Таким образом, в каждой точке струны после прохождения обеих волн для точек, лежащих вне области начального смещения, после прохождения только одной наступает покой.

2. Начальное смещение равно нулю, а отлична от нуля $\phi_0(x)$ лишь в конечном промежутке $(-\alpha, \alpha)$. В таком случае говорят, что струна имеет только начальный импульс. Решение (5.72) принимает следующий вид:

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \phi_1(z) dz \text{ или, полагая:}$$

$$\frac{1}{2} a \int_{x-at}^{x+at} \phi_1(z) dz = \psi(z) u(x, t) = \psi(x+at) - \psi(x-at),$$

т.е. по струне распространяются две волны — прямая и обратная. Исследуем решение (3.74) более подробно. Пусть точка x струны лежит правее промежутка $(-\alpha, \alpha)$. При $t = 0$ промежуток интегрирования $(x-at, x+at)$ вырождается в точку x , а затем при увеличении t он расширяется в обе стороны со скоростью a . При $t = \frac{x-\alpha}{a}$, промежуток $(x-at, x+at)$ будет налегать на $(-\alpha, \alpha)$, в котором $\phi_1(z)$ отлична от нуля, и точка x начнет колебаться (момент прохождения переднего фронта волны через точку x). Наконец, $t > \frac{x+\alpha}{a}$ $(x-at, x+at)$ при промежутке $(x-at, x+at)$ будет содержать целиком промежуток $(-\alpha, \alpha)$, интегрирование по $(-\alpha, \alpha)$ будет сводиться к интегрированию по $(-\alpha, \alpha)$, так как вне его $\phi_1(z) = 0$, т.е. при $t > \frac{x+\alpha}{a}$ имеем постоянное значение .

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{-\alpha}^{\alpha} \phi_1(z) dz \tag{3.74}$$

Момент времени $t = \frac{x + \alpha}{a}$ есть момент прохождения заднего фронта волны через точку x . Таким образом, действие начального импульса приводит к тому, что с течением времени точки струны сдвигаются на отрезок, длина которого выражается интегралом

$$\ell = \frac{1}{2a} \int_{-\alpha}^{\alpha} \phi_0(z) dz, \quad (3.75)$$

и остаются без движения в этом новом положении. Волны оставляют после себя как бы след своего прохождения.

3.9.3. Ограниченная струна. Рассмотрим теперь струну длиной k , закрепленную на концах. Задача о колебаниях такой струны сводится к нахождению решения волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.76)$$

$$\text{при граничных условиях } u \Big|_{x=0} = 0, \quad u \Big|_{x=1} = 0 \quad (0 < x < \ell) \quad (3.77)$$

$$\text{и начальных условиях } u \Big|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{x=0} = \phi_1(x). \quad (3.78)$$

$$\text{Решение Даламбера} \quad u(x, t) = \theta_1(x - at) + \theta_2(x + at) \quad (3.79)$$

конечно, годится в этом случае, но определение θ_1 , θ_2 по формулам

$$\begin{aligned} \theta_1(x) &= \frac{1}{2} \phi_0(x) - \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \phi_1(z) dz \\ \theta_2(x) &= \frac{1}{2} \phi_0(x) - \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \phi_1(z) dz \end{aligned} \quad (3.80)$$

встречает здесь то затруднение, что функция $\phi_0(x)\phi_1(x)$, а следовательно, $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$ определены лишь в промежутке согласно физическому смыслу задачи, а аргументы $x \pm t$ в формуле (3.79) могут лежать и вне этого промежутка. Стало быть, для возможного применения решения (3.79) нужно продолжить функции $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$ или, то что вполне эквивалентно, функции $\phi_0(x)\phi_1(x)$ вне промежутка $(0, \ell)$. С физической точки зрения это продолжение сводится к

определению такого начального возмущения бесконечной струны, как если бы он был закреплен на концах, а оставшаяся часть струны была бы отброшена.

Для продолжения функций $\phi_0(x)\phi_1(x)$ воспользуемся граничными условиями (3.77). Подставляя в правую часть уравнения (3.79) $x=0$ и $x=\ell$ принимая во внимание условия (3.77), получаем

$$\theta_1(-at) + \theta_2(at) = 0, \theta_1(\ell - at) + \theta_2(\ell + at) = 0$$

или, обозначая at через x

$$\theta_1(-x) = -\theta_2(x), \theta_1(\ell + x) = -\theta_2(\ell - x). \quad (3.81)$$

Когда x заменяется в промежутке $(0, \ell)$, то правая из формул определяет функцию $\theta_1(x)$ в промежутке $(-\ell, 0)$, вторая функцию $\theta_2(x)$ в промежутке $(\ell, 2\ell)$.

Стало быть, обе функции вполне определяются на промежутке длины 2ℓ . Далее из равенства следует, что $\theta_2(2\ell + x) = -\theta_1(-x) = \theta_2(x)$, $\theta_1(2\ell + x) = \theta_1(x)$, т.е.

функции $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$ являются периодическими с периодом 2ℓ . Итак, функции $\theta_1(x)$ и $\theta_2(x)$ определены при всех вещественных x . Принимая во внимание, что $\phi_0(x) = \theta_1(x) + \theta_2(x)$, $\phi_1(x) = a[\theta_2'(x) - \theta_1'(x)]$, найдем

$$\begin{aligned} \phi_0(-x) &= \theta_1(x) + \theta_2(-x) = -\theta_2(x) - \theta_1(x) = -\phi_0(x); \\ \phi_1(-x) &= a[\theta_1'(-x) - \theta_2'(-x)] = a[\theta_1'(x) - \theta_2'(x)] = \phi_1(x); \\ \phi_0(x + 2l) &= \phi_0(x); \phi_1(x + 2l) = \phi_1(x). \end{aligned}$$

Эти формулы показывают, что функция $\phi_0(x)$ и $\phi_1(x)$ продолжаются из промежутка $(0, l)$ в промежуток $(-l, 0)$ нечетным образом, а затем с периодом $2l$. Чтобы полученное решение имело непрерывные производные до второго порядка включительно, нужно, помимо условий дифференцируемости функций $\phi_0(x)$ и $\phi_1(x)$ потребовать еще выполнения условий. Это есть согласования начальных и граничных условий.

$$\phi_0(0) = \phi_0(l) = 0, \phi_0'(0) = \phi_0'(l), \phi_1(0) = \phi_1(l) = 0$$

Выясним, какое действие оказывают закрепленные концы струны на ее колебания. Для этого обратимся к полуплоскости. Ввиду ограниченности

струны надо рассматривать только полосу верхней полуплоскости между прямыми $t > 0$ и $x = 0$ (рис. 3.5).

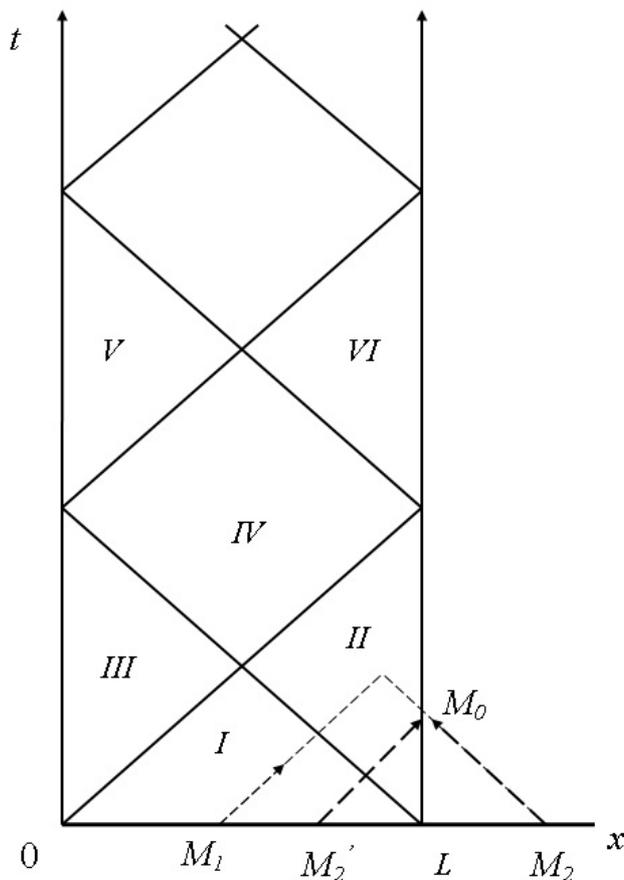


Рис. 3.5. Характер колебаний струны с закрепленными концами

Проведем через точки O и L характеристики до встречи с противоположными границами полосы и т.д. Таким образом, разобьем полосу на области I, II, III,... Точки области I соответствуют тем моментам времени t , когда к точкам струны доходят прямая и обратная волны, вышедшие в начальный момент времени из внутренних точек струны. Следовательно, фиктивно добавленные бесконечные части струны на процесс колебания еще не влияют. Точки вне области I соответствуют тем моментам времени, когда к точкам струны доходят уже волны, вышедшие в начальный момент времени из фиктивной части струны. Возьмем, например, точку $M_0(x_0, t_0)$ в области II. Так как $u(x_0, t_0) = \theta_1(x_0 - at_0) + \theta_2(x_0 + at_0)$, то в этой точке имеются две волны: одна — прямая, дошедшая от начально возмущенной M_1 струны с абсциссой $x = x_0 - at$,

другая — обратная из точки M_2 с абсциссой $x = x_0 + at$, причем в данном случае M_1 есть реальная точка струны, M_2 — фиктивная. Нетрудно заменить ее реальной точкой, заметив, что в силу зависимости (3.81):

$$\theta_2(x_0 + at_0) = \theta_2(\ell + x_0 + at_0 - \ell) = -\theta_1(2\ell - x_0 - at_0)$$

и, таким образом, обратная $\theta_2(x_0 + at)$ есть не что иное, как прямая волна $\theta_1(2\ell - x_0 - at_0)$ вышедшая в начальный момент времени из точки $M'_2(2\ell - x_0 - at_0)$ симметричной M_2 относительно точки L , которая, дойдя до конца струны L в момент $t = \frac{\ell - (2\ell - x_0 - at_0)}{a} = \frac{x_0 + at_0 - \ell}{a}$, изменила свое направление и знак на обратный и к моменту времени t_0 дошла в таком виде до точки M_0 .

Таким образом, действие закрепленного конца $x = 1$ свелось к отражению волны смещения, связанному с переменной знака смещения и с сохранением его абсолютной величины.

То же явление обнаружено и для волн, дошедших до конца $x = 0$ в точках области III имеем две волны: обратную и прямую, отраженную от конца $x = 0$. В точках областей IV, V, VI и т.д. получим волны, которые претерпели несколько таких отражений от обоих концов струны.

Из предыдущих рассуждений следует, что колебание струны, закрепленной на концах, будет периодическим с периодом $\frac{2\ell}{a}$.

3.10. Моделирование волновых процессов. Ряд важных узлов и деталей современных технических устройств работает в резко нестационарных режимах вследствие быстрого изменения во времени действующих на них внешних сил. При этом в конструкциях возникают динамические напряжения, которые должны учитываться при оценке прочности и работоспособности, а также при выборе оптимальных условий функционирования тех или иных упругих элементов. Последнее особенно важно для технических устройств, принцип действия которых основан на использовании нестационарных волновых полей и связанных с ними механических эффектов. Научной основой такого расчета

является теория нестационарных колебаний и волн в упругих телах. Определим, какие задачи механики и почему следует отнести к классу нестационарных задач.

Характер напряженно-деформированного состояния упругого тела во многом определяется скоростью изменения во времени приложенных к нему сил. Если силы не изменяются со временем, механические напряжения и деформации также неизменны. Такое механическое поле называется статическим. Для его определения используются уравнения равновесия сплошной среды.

Сходной по постановке со статической является квазистатическая задача, в условиях которой внешние силы могут изменяться, но настолько медленно, что можно пренебречь влиянием ускорений и рассматривать движение как последовательность состояний равновесия. Перемещения и напряжения, как и в статике, определяются из решений уравнения равновесия. Однако время входит в граничные условия, а, следовательно, и в выражения для напряжений и деформаций в качестве параметра.

Наконец, при быстром изменении нагрузок в упругом теле происходят процессы, носящие ярко выраженный волновой характер. В этом случае адекватной физике явления есть динамическая задача теории упругости. Наряду с силами упругости большое влияние на распределение напряжений оказывают силы инерции, которые необходимо учитывать при теоретическом анализе. Важным частным случаем динамической задачи является задача о гармонических колебаниях, в которой внешние нагрузки являются тригонометрическими функциями времени, изменяющимися с круговой частотой ω а механический процесс рассматривается в бесконечном интервале времени ($-\infty < t < \infty$). Начальные условия в гармонической задаче не ставятся. Механические перемещения, напряжения и деформации представляются функциями координат, умноженными на ту же функцию времени, которая входит в выражение для источников.

Нестационарная динамическая задача обычно формулируется для механических систем с импульсным возбуждением. Полная постановка этой задачи предполагает задание начального состояния (перемещений и скоростей точек) упругого тела, дополнительных соответствующими граничными условиями.

Интегральная теорема Фурье позволяет в принципе описать общий нестационарный случай набором гармонических составляющих. Однако восстановление нестационарного движения по его гармоническим составляющим является математически не менее, а зачастую более сложным, чем решение гармонической задачи.

Вместе с тем, задачи нестационарной динамики с нулевыми начальными условиями более физичны по своему содержанию, чем гармонические задачи. Решения нестационарных задач, являясь математически более сложными, могут быть достаточно глубоко проанализированы аналитическими методами. Усилия, затрачиваемые на такого рода анализ, возмещаются получением сравнительно простых физических закономерностей, не усматриваемых в первоначальной форме решения.

3.10.1. Уравнения продольных колебаний и характеристики распространения импульсов в бесконечном стержне. Упругие стержни являются наиболее простой и часто используемой моделью изучения распространения волн в телах, поперечные размеры которых малы по сравнению с размером в направлении распространения. Сравнительная простота получения результатов и физическая наглядность решений граничных задач делают модель стержня естественным начальным шагом на пути к исследованию сложных закономерностей волнового распространения импульсов в протяженных телах.

Рассматриваем лишь продольные колебания, для которых смещения частей параллельны оси стержня. Совмещая это направление с осью

декартовых координат, выведем уравнение движения упругого стержня, в общем случае, переменной площади поперечного сечения.

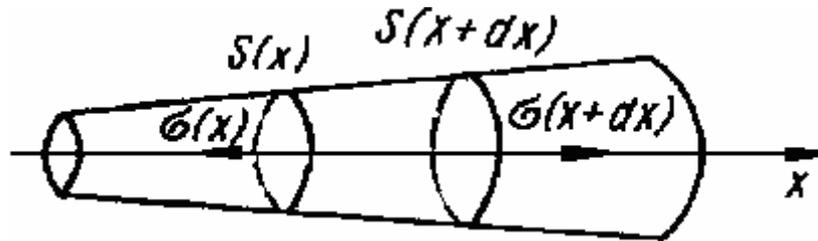


Рис. 3.6. Расчетная схема для изучения продольных колебаний стержня

Выделим в стержне элемент $(x, x+dx)$ длиной dx (рис. 3.6). Считая, что в направлениях, перпендикулярных к x , напряжения малы по сравнению с Δx , запишем уравнение закона Гука для стержня:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x, \quad (3.82)$$

где $\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ — продольная деформация; E — модуль Юнга. Уравнение движения следует из второго закона Ньютона, примененного к элементу стержня:

$$\sigma(x+dx)S(x+dx) - \sigma(x)S(x) = \rho S(x)dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (3.83)$$

где слева записана равнодействующая упругих сил, справа — сила инерции; $S_{(x)}$ обозначает площадь сечения x ; ρ — плотность материала. Разделив уравнение (3.83) на dx и подставив формулу (3.82), получим при $dx \rightarrow 0$.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(ES \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3.84)$$

уравнение колебания стержня с переменными по длине как площадью поперечного сечения, так и модулем упругости. Ограничиваясь случаем $E = const$ перепишем выражение (3.84) в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{S} \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (3.85)$$

где

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.86)$$

скорость распространения упругих волн в стержне. Следует различать скорость распространения волн и скорость движения частиц $\frac{\partial u}{\partial t}$. Последняя обычно намного меньше c . Уравнение (3.85) описывает колебания стержня из однородного материала, но переменной площади поперечного сечения.

Для стержня постоянного сечения зависимость (3.85) переходит в обычное волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (3.87)$$

Волновому уравнению (3.87) удовлетворяет выражение вида

$$u = f(ct - x) + g(ct + x), \quad (3.88)$$

где f и g — произвольные непрерывные функции. Любое решение уравнения (3.87) можно привести к виду (3.88). Выражение (3.88) представляет собой наиболее общее решение одномерного волнового уравнения.

Рассмотрим первое слагаемое в этом уравнении. Предположим, что функция $f(\alpha)$ отлична от нуля на промежутке $0 < \alpha < a$ (рис. 3.7,а). В первой записи для любого выбранного значения t можно построить $f(ct - x)$ как функцию x (рис.3.7,б), во второй — для фиксированного x как функцию t (рис.3.7,в). Таким образом, импульс $f(ct - x)$ представляет собой неизменное распределение перемещений, движущееся со скоростью c в сторону увеличения x . Определим, какую энергию имеет такой импульс. Плотность кинетической

энергии в единице объема стержня $T = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2$, плотность потенциальной

энергии $U = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon$, где $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$, а $\sigma = E \varepsilon$, так что $U = \frac{1}{2} E \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$. Поскольку u отлично

от нуля на промежутке $ct - a < x < ct$, то полные энергии получаются интегрированием по объему возмущенной части стержня:

$$T = \frac{1}{2} \rho S \int_{ct-a}^{ct} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx; U = \frac{1}{2} ES \int_{ct-a}^{ct} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Подставив в последнее $u = f(ct - x)$ и сделав замену переменной $ct - x = \alpha_1$, с учетом выражения (3.86), получим

$$T = U = \frac{1}{2} ES \int_0^a [f'(\alpha)]^2 d\alpha. \quad (3.89)$$

Замечательность результата (3.89) состоит, во-первых, в том, что кинетическая или потенциальная энергия импульса оказались равными, а во-вторых, в том, что они не изменяются со временем, поскольку правая часть зависит от только формы импульса.

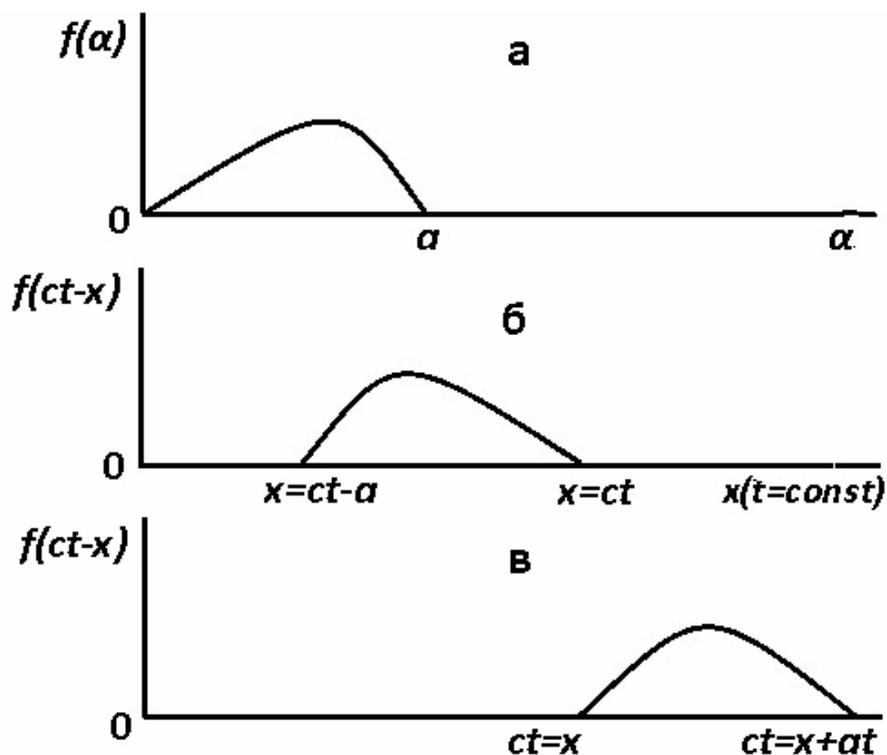


Рис. 3.7. Пространственное и временное описание одномерной волны

Аналогично могут быть рассмотрены импульсы, движущиеся в сторону уменьшения x , представляемые вторым слагаемым в формуле (3.88). Все сказанное выше переносится на такие импульсы изменений.

3.10.2. Волновые процессы в полубесконечном и составном бесконечном стержне. Рассмотрим полубесконечный стержень $0 < x < \infty$.

Пусть в нем каким-либо способом возбужден упругий импульс с перемещениями $u = f(ct + x)$ падающий из бесконечности. На торце $x = 0$ задано одно из двух условий: либо $u = 0$ (закрепленный торец) либо $\sigma = 0$, т.е. $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ (торец освобожден от напряжений). В случае закрепленного торца полное волновое поле (падающее плюс отраженное) имеет вид

$$u = f(ct + x) - f(ct - x) \quad (3.90)$$

и дает $u = 0$ при $x = 0$ и произвольном t . Продифференцировав по x , найдем деформации и напряжения:

$$\varepsilon = f'(ct + x) + f'(ct - x); \quad \sigma = E[f'(ct + x) + f'(ct - x)]. \quad (3.91)$$

Сравнив выражения (3.90) и (3.91), видим, что, в отличие от перемещений деформации и напряжения, при отражении не изменяют знака. Если, например, деформации (следовательно, и напряжения) в падающем импульсе были сжимающими, то и в отраженном они имеют тот же характер. Точно так же импульс растяжения отражается от закрепленного конца в виде импульса растяжения, рассматривая аналогично отражение от свободного торца, можно убедиться, что условию $\sigma \Big|_{x=0} = 0$ удовлетворяет решение

$$u = f(ct + x) + f(ct - x), \quad \varepsilon = f'(ct + x) - f'(ct - x), \quad \sigma = E[f'(ct + x) - f'(ct - x)],$$

т.е. теперь перемещения не изменяют знака, а деформации и напряжения меняют знак при отражении. Импульс сжатия отражается от свободного торца в виде импульса растяжения, а импульс растяжения — в виде импульса сжатия.

Изучив простейшие закономерности распространения и отражения импульсов от границы, рассмотрим более сложную и вместе с тем практически важную задачу о прохождении импульса через границу раздела материальных свойств. Стержень плотности ρ_1 , имеющий модуль упругости E_1 , занимает область $x < 0$. С ним жестко соединен стержень с параметрами $\rho_2 E_2$. Скорости продольных волн равны соответственно c_1, c_2 (рис. 3.8, а). В первом стержне в направлении склейки распространяется волновой импульс $u_i = f(c_1 t - x)$.

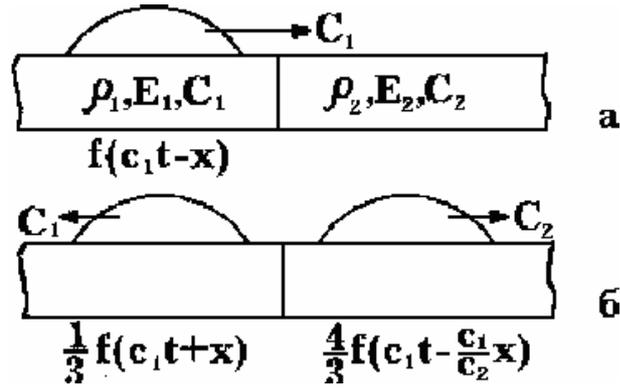


Рис. 3.8. Прохождение импульса через границу раздела физических свойств

После встречи с границей раздела $x=0$ в первом стержне кроме падающей волны появится отраженная $u_r = F(c_1t - x)$, а во втором — прошедшая волна $u_r = g(c_2t - x)$, распространяющаяся, естественно, со скоростью c_2 . Потребовав на границе $x=0$ непрерывности перемещений и напряжений

$$u_1 \Big|_{x=0} = u_2 \Big|_{x=0}; E_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = E_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=0}, \quad (3.92)$$

получаем систему уравнений $f(c_1t) + F(c_1t) = g(c_2t)$
 $-E_1 f'(c_1t) + E_1 f'(c_1t) = -E_2 g'(c_2t).$

Умножим второе уравнение на $c_1 dt$ и проинтегрируем по t от нуля до некоторого текущего t . Поскольку перемещения на фронтах волн обращаются в нуль, то, полагая $f(0) = g(0) = F(0) = 0$ получаем

$$F(c_1t) - g(c_2t) = -f(c_1t); E_1 F(c_1t) + E_2 \frac{c_1}{c_2} g(c_2t) = E_1 f(c_1t), \text{ откуда}$$

$$F(c_1t) = \frac{\chi_1 - \chi_2}{\chi_1 + \chi_2} f(c_1t); g(c_2t) = \frac{2\chi_2}{\chi_1 + \chi_2} f(c_1t),$$

где $\chi_1 = \rho_1 c_1, \chi_2 = \rho_2 c_2$ величины, называемые волновыми сопротивлениями соответственно первой и второй сред. Запишем окончательное решение поставленной задачи:

$$u_1 = f(c_1t) + \frac{\chi_1 - \chi_2}{\chi_1 + \chi_2} f(c_1t + x); \quad (3.93)$$

$$u_2 = \frac{2\chi}{\chi_1 + \chi_2} f \left[\frac{c_1}{c_2} (c_2 t - x) \right].$$

В том, что решение (3.93) удовлетворяет граничным условиям (3.92), можно убедиться непосредственно проверкой. На рис. 3.7,б показано распределение перемещений в стержне для случая $\rho_1 = \rho_2, c_1 = 2c_2, \chi_1 = 2\chi_2$.

Перейдем к анализу полученного решения. При $\chi_1 = \chi_2$ отраженной волны не возникает; волновое поле в этом случае имеет вид

$$u_1 = f(ct - x), \quad u_2 = f \left[\frac{c_1}{c_2} (c_2 t - x) \right].$$

Таким образом, если выполняется равенство $\rho_1 c_1 = \rho_2 c_2$ (среды согласованы по величине волновых сопротивлений), отражения не будет и волновая энергия полностью перейдет из одной среды в другую. В общем случае возникают как прошедшая, так и отраженная волны. Обозначим коэффициенты в правой части уравнения (3.93) следующим образом:

$$R = \frac{\chi_1 - \chi_2}{\chi_1 + \chi_2} = \frac{1+k}{1+k}; \quad T = \frac{2}{1+k}; \quad k = \frac{\chi_2}{\chi_1}.$$

Величины R и T называются соответственно коэффициентом отражения и прохождения по амплитуде. Вычислим по формулам (3.89) полные энергии падающего, отраженного и прошедшего импульсов, считая, что первоначальный импульс u_j имеет пространственную протяженность a . Для энергии падающего импульса в соответствии с формулой (3.89) имеем

$$W_j = T_j + U_j = E_1 S \int_0^a [f'(\alpha)]^2 d\alpha. \quad \text{Энергия отраженного импульса } W_r = \left(\frac{1-k}{1+k} \right) W_1^2.$$

Несколько сложнее находится энергия прошедшего импульса. Заметим, что в соответствии с уравнением (3.93) он имеет длину $\frac{c_2}{c_1} a$. Поэтому энергия прошедшего импульса вычисляется по формуле

$$W_z = E_2 S \left(\frac{2}{1+k} \right)^2 \int_0^{\frac{c_2}{c_1} a} f' \left[\left(\frac{c_2}{c_1} \alpha \right) \right]^2 d\alpha = \frac{4k}{(1+k)^2} W_1.$$

Проверка показывает, что $W_r + W_z = W_i$ сумма прошедшего и отраженного импульсов равна энергии падающего импульса. Рассмотрим коэффициенты отражения, и прохождения по энергии как функции отношения волновых сопротивлений k , они изображены графически на рис. 3.9

$$R^* = \frac{W_r}{W_i} = \left(\frac{1+k}{1-k} \right)^2; T^* = \frac{W_z}{W_i} = \frac{4k}{(1+k)^2}$$

При $k = 0$ имеем $R^* = 1, T^* = 0$, т.е. вся энергия отражается в первую среду, причем в отраженной волне перемещения имеют тот же знак.

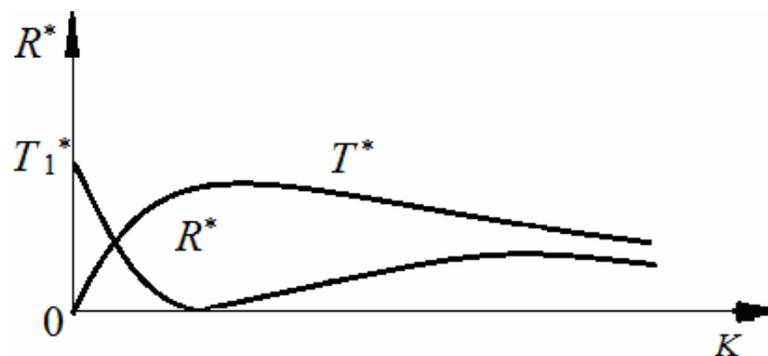


Рис. 3.9. Коэффициенты отражения R^* и прохождения T^* по энергии как функции отношения волновых сопротивлений

Очевидно, это предельный случай соответствует отражению от свободного торца. По мере увеличения k растет доля энергии, уносимой во вторую среду, и уменьшается энергия отраженной волны до тех пор, пока $k = 1$ отраженная волна не исчезнет. При дальнейшем увеличении k величина R^* стремится к единице, а T^* к нулю. Однако теперь перемещения в отраженной волне противоположны по знаку тем, что были в падающей, как в случае отражения от закрепленного торца.

Вопросы к третьей главе

1. Каковы особенности применения гиперболических уравнений к описанию технических систем?
2. Приведите расчетную схему для вывода уравнения колебаний струны.
3. Выведите уравнение поперечных колебаний струны.
4. Каковы особенности уравнений продольных колебаний стержней и струн?
5. Как выглядит выражение для энергии поперечных колебаний струны?
6. Как выглядит уравнение электрических колебаний в проводах?
7. Дайте определение мембраны и поперечных колебаний в ней.
8. Представьте схему для вывода уравнения колебаний мембраны.
9. Опишите постановку задачи о поперечных колебаниях струны, закрепленной на концах.
10. Охарактеризуйте типы граничных условий задачи колебаний струны.
11. Какова особенность применения метода характеристик к изучению малых колебаний струны?
12. Каковы отличия в задачах колебаний ограниченной и неограниченной струны?
13. Сформулируйте задачу Коши для определения колебаний струны.
14. Охарактеризуйте расчетную схему для изучения продольных колебаний стержня.
15. В чем особенность пространственного и временного описания одномерной волны?
16. Каковы особенности волновых процессов в полубесконечном и составном бесконечном стержнях?

Глава 4

УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА В ПРИЛОЖЕНИЯХ К МОДЕЛИРОВАНИЮ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ

4.1. Уравнения Лапласа и Пуассона

Рассмотрим стационарное тепловое поле. В главе 2 было показано, что температура нестационарного теплового поля удовлетворяет дифференциальному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u, \left(a = \frac{k}{c\rho} \right).$$

Если процесс стационарен, то устанавливается распределение температуры $u(x, y)$ не меняющееся с течением времени и, следовательно, удовлетворяющее уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0. \quad (4.1)$$

При наличии источников тепла получаем уравнение

$$\Delta u = -f, \quad (4.2)$$

где $f = \frac{F}{k}$ — плотность тепловых источников, а k — коэффициент теплопроводности. Неоднородное уравнение (4.2) часто называют уравнением Пуассона. Рассмотрим некоторый объем T , ограниченный поверхностью Σ . Задача о стационарном распределении температуры $V(x, y, z)$ внутри тела формулируется следующим образом: найти функцию $V(x, y, z)$, удовлетворяющую внутри T тела уравнению $\Delta u = -f(x, y, z)$ и граничному условию, которое может быть взято в одном из видов:

$$u = f_1 \text{ на } \Sigma \text{ (первая краевая задача);}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f_2 \text{ на } \Sigma \text{ (вторая краевая задача);}$$

$\frac{\partial u}{\partial n} + h(u - f_3) = 0$ на Σ (третья краевая задача), где f_1, f_2, f_3, h — заданные функции; $\frac{\partial u}{\partial n}$ — производная по внешней нормали к поверхности.

Первую краевую задачу для уравнения Лапласа часто называют задачей Дирихле, а вторую задачу — задачей Неймана.

Если ищется решение в области T_0 , внутренней (или внешней) по отношению к поверхности Σ , то соответствующую задачу называют внутренней (или внешней) краевой задачей.

В качестве второго примера рассмотрим потенциальное течение жидкости без источников. Пусть внутри некоторого объема T с границей Σ имеет место нестационарное течение несжимаемой жидкости (плотность), характеризуемое скоростью $v(x, y, z)$. Если течение жидкости не вихревое, то скорость является потенциальным вектором, т.е.

$$v = -grad \Phi, \quad (4.3)$$

где Φ скалярная функция, называемая потенциалом скорости. Если отсутствуют источники, то

$$div v = 0. \quad (4.4)$$

Подставляя сюда выражение (7.3) для v , получаем $div grad \Phi = 0$ или:

$$\Delta \Phi = 0, \quad (4.5)$$

т.е. потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа.

Пусть в однородной проводящей среде имеется стационарный ток с объемной плотностью $j(x, y, z)$. Если в среде нет объемных источников тока, то

$$div j = 0. \quad (4.6)$$

Электрическое поле E определяется через плотность тока из дифференциального закона Ома

$$E = \frac{j}{\lambda}, \quad (4.7)$$

где λ проводимость среды. Поскольку процесс стационарный, то электрическое поле является безвихревым или потенциальным, т.е. существует такая скалярная функция $\Phi(x, y, z)$, для которой:

$$E = -grad\Phi \quad (j = -\lambda grad\Phi) \quad (4.8)$$

Отсюда на основании формул (4.6) и (4.7) заключаем, что

$$E = -grad\Phi, \quad (4.9)$$

т.е. потенциал электрического поля стационарного тока удовлетворяет уравнению Лапласа. Рассмотрим электрическое поле стационарных зарядов. Из стационарности процесса следует, что

$$rotE = 0, \quad (4.10)$$

т.е. поле является потенциальным и $E = -grad\Phi$.

Пусть $\rho(x, y, z)$ — объемная плотность зарядов, имеющих в среде, характеризуемой диэлектрической постоянной $\sigma = 1$. Исходя из основных законов электродинамики

$$\iint_S E_n dS = 4\pi \sum e_i = 4\pi \iiint_T \rho d\tau, \quad (4.11)$$

где T — некоторый объем; S — поверхность, его ограничивающая, $\sum e_i$ — сумма всех зарядов внутри T , и пользуясь теоремой Остроградского

$$\iint_S E_n dS = \iiint_T divEd\tau, \quad (4.12)$$

получаем $divE = 4\pi\rho$. Подставляя сюда выражение (4.8) для E , имеем

$$\Delta\Phi = -4\pi\rho, \quad (4.13)$$

т.е. электростатический потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона. Если объемных зарядов нет $\rho = 0$, то потенциал должен удовлетворять уравнению Лапласа $\Delta\Phi = 0$.

Основные краевые задачи для рассмотренных процессов относятся к трем типам, приведенным выше.

4.2. Некоторые частные решения Лапласа. Гармонические функции и их приложения к решению уравнений Лапласа

Большой интерес представляют решения уравнения Лапласа, обладающие сферической или цилиндрической симметрией, т.е. зависящие только от одной переменной r или ρ . Решение уравнения Лапласа $u = U(r)$, обладающее сферической симметрией, будет определяться из обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dU}{dr} \right) = 0.$$

Интегрируя это уравнение, находим $U = \frac{C_1}{r} + C_2$, где C_1 и C_2 произвольные постоянные. Полагая, например, $C_1 = 1, C_2 = 0$, получаем функцию:

$$U_0 = \frac{1}{r}, \quad (4.14)$$

которую, часто называют фундаментальным решением уравнения Лапласа в пространстве. Аналогично, полагая $u = U(\rho)$. Находим решение, обладающее цилиндрической или круговой симметрией (в случае двух независимых переменных), в виде $U(\rho) = C_1 \ln \rho + C_2$. Выбирая, $C_1 = -1, C_2 = 0$ будем иметь:

$$U_0 = \ln \frac{1}{\rho}. \quad (4.15)$$

Функцию $U_0(\rho)$ часто называют фундаментальным решением уравнения Лапласа на плоскости (для двух независимых переменных). Функция $U_0 = \frac{1}{r}$ удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ всюду, кроме точки $r = 0$, где она обращается в бесконечность. С точностью до множителя пропорциональности она совпадает с полем точечного заряда, помещенного в начале координат. Потенциал этого поля $u = \frac{1}{r}$. Аналогично, функция $\ln \frac{1}{\rho}$ удовлетворяет уравнению Лапласа всюду, кроме

точки $\rho=0$, где она обращается в положительную бесконечность, и с точностью множителя совпадает с полем заряженной линии, потенциал которого $u = 2e_1 \ln \frac{1}{\rho}$, где e — плотность заряда, рассчитанная на единицу длины. Эти функции имеют большое значение в теории гармонических функций.

Весьма общим методом решения двухмерных задач для уравнения Лапласа является метод, использующий функции комплексного переменного.

Пусть $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ — некоторая функция комплексного переменного $z = x + iy$, причем u и v являются вещественными функциями переменных x и y . Наибольший интерес представляют так называемые аналитические функции, для которых существует производная

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Приращение $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, очевидно, может стремиться к нулю многими способами. Для каждого из способов стремления к нулю, вообще говоря, может получиться свое значение предела. Однако, если функция аналитическая, то предел $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z)$ находится при условии $z \rightarrow 0$ как $x \rightarrow 0$ или $i\Delta y \rightarrow 0$.

Необходимыми и достаточными условиями аналитичности функции $w = f(z)$ являются так называемые условия Коши — Римана

$$\left. \begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

Эти условия можно получить, например, следующим образом. Пусть $w = u + iv = f(z)$ — аналитическая функция. Вычисляя производные

$$w_x = u_x + iv_x = \frac{dw(z)}{\partial z} z_x = \frac{dw}{dz}; \quad w_y = u_y + iv_y = \frac{dw(z)}{\partial z} z_y = \frac{dw}{dz} i;$$

и требуя равенства значений $\frac{dw}{dz}$, определяемых на этих двух соотношениях, получаем $u_x + iv_x = v_y - iu_y = \frac{dw}{dz}$, откуда и следуют условия Коши - Римана. На доказательстве достаточности этих условий не будем останавливаться.

В теории функций комплексного переменного доказывается, что функция, аналитическая в некоторой области G плоскости $z = x + iy$, имеет в этой области производные всех порядков и разлагается в степенной ряд. В частности, для такой функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют непрерывные производные 2-го порядка по x и y .

Дифференцируя первое равенство формулы (4.16) по x , а второе по y получаем $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Подобным же образом, меняя порядок дифференцирования, находим

$$v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

Таким образом, действительная и мнимые части аналитической функции удовлетворяют уравнению Лапласа. Обычно говорят, что u и v , удовлетворяющие условию Коши — Римана, являются сопряженными гармоническими функциями.

Рассмотрим преобразование

$$\left. \begin{aligned} x &= x(u, v), u = u(x, y) \\ y &= y(u, v), v = v(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

взаимно однозначно отображающее некоторую область G плоскости (x, y) , на область плоскости G , так что каждой точке области G соответствует определенная точка области G и обратно, каждой точке области соответствует определенная точка области G .

Пусть $U = U(x, y)$ — некоторая вещественная функция дважды непрерывно дифференцируема, определенная внутри области G . Выясним, как изменяется при этом преобразовании оператор Лапласа функции $U = U[x(u, v), y(u, v)] = \tilde{U}(u, v)$.

Вычислим производные функции

$$\begin{aligned}
U_x &= \tilde{U}_u u_x + \tilde{U}_v v_x, U_y = \tilde{U}_u u_y + \tilde{U}_v v_y, \\
U_{xx} &= \tilde{U}_{uu} u_x^2 + \tilde{U}_{vv} v_x^2 + 2\tilde{U}_{uv} u_x v_x + \tilde{U}_u u_{xx} + v_y v_{xx}, \\
U_{yy} &= \tilde{U}_{uu} u_y^2 + \tilde{U}_{vv} v_y^2 + 2\tilde{U}_{uv} u_y v_y + \tilde{U}_u u_{yy} + v_y v_{yy},
\end{aligned}$$

откуда получаем

$$\begin{aligned}
U_{xx} + U_{yy} &= \tilde{U}_{uu} (u_x + v_y) + \tilde{U}_{vv} (v_x + v_y) + 2\tilde{U}_{uv} (u_x v_x + u_y v_y) + \\
&+ \tilde{U}_u (u_{xx} + u_{yy}) + \tilde{U}_v (v_{xx} + v_{yy}).
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Если u и v являются сопряженными гармоническими функциями, то преобразование (4.17) эквивалентно преобразованию, осуществляемому аналитической функцией

$$W = f(z) = u + iv \quad (z = x + iy). \tag{4.19}$$

В этом случае в силу условий Коши — Римана (4.16) для функций u и v должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned}
u_x^2 + u_y^2 &= u_x^2 + v_x^2 = v_y^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2, \\
u_x v_x + u_y v_y &= 0.
\end{aligned}$$

Формула (4.18) принимает вид

$$U_{xx} + U_{yy} = (\tilde{U}_{uu} + \tilde{U}_{vv}) |f'(z)|^2 \quad \text{или} \quad \Delta_{uv} U_{yy} = \frac{1}{|f'(z)|^2}. \tag{4.20}$$

Отсюда следует, что в результате преобразования (4.19) гармоническая в области G функция $U(x, y)$ переходит в функцию $U = U(u, v)$, гармоническую в области G , если только $|f'(z)|^2 \neq 0$. При изучении уравнений эллиптического типа будем пользоваться формулами Грина, являющимися прямым следствием формулы Остроградского. Формула Остроградского в простейшем случае имеет вид

$$\iiint_T \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\Sigma} R \cos \gamma d\sigma, \tag{4.21}$$

где T — некоторый объем, ограниченный достаточно гладкой поверхностью Σ , $R(x, y, z)$ — произвольная функция, непрерывная внутри $T + \Sigma$ и имеющая непрерывные производные внутри T ; γ — угол между направлением оси и

внешней нормалью κ . В справедливости этой формулы нетрудно убедиться, выполняя интегрирование по z . Формулу Остроградского обычно записывают в виде

$$\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv = \iint_{\Sigma} \{ P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma \} d\sigma, \quad (4.22)$$

где $dv = dx dy dz$ - элемент объема; $\alpha = (\hat{n}, x)$, $\beta = (\hat{n}, y)$, $\gamma = (\hat{n}, z)$ - углы внешней нормали к поверхности с координатными осями P, Q, R - произвольные дифференцируемые функции. Если P, Q, R рассматривать как компоненты некоторого вектора, то формулу Остроградского (4.22) можно записать следующим образом:

$$\iiint_T \operatorname{div} \vec{A} dv = \iint_{\Sigma} \vec{A} \vec{n} d\sigma,$$

где

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

и $\vec{A} \vec{n} = P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma$ — составляющая вектора \vec{A} вдоль внешней нормали.

Перейдем теперь к выводу формулы Грина. Пусть вместе со своими первыми производными внутри $T + \Sigma$ и имеющие непрерывные вторые производные внутри T .

Полагая, что $P = u \frac{dv}{\partial x}$, $Q = u \frac{dv}{\partial y}$, $R = \frac{dv}{\partial z}$ и пользуясь формулой

Остроградского (7.22), приходим к так называемой первой формуле Грина:

$$\iiint_T u \Delta v d\tau = \iint_{\Sigma} u \frac{dv}{\partial n} d\sigma - \iiint_T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right) d\sigma, \quad (4.23)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ оператор Лапласа; $\frac{\partial}{\partial n} = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial x} + \cos \beta \frac{\partial}{\partial y} + \cos \gamma \frac{\partial}{\partial z}$ —

производная по направлению внешней нормали. Если учесть соотношение

$\text{grad } u \text{ grad } v = \nabla u \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z}$, то формулу Грина можно представить в

виде $\iiint_T u \Delta v d\tau = -\iiint_{\Sigma} \nabla u \nabla v d\tau + \iint_{\Sigma} u \frac{dv}{\partial n} d\sigma$. Меняя местами функции и, получаем

$$\iiint_T v \Delta u d\tau = -\iiint_{\Sigma} \nabla v \nabla u d\tau + \iint_{\Sigma} v \frac{du}{\partial n} d\sigma \quad (4.24)$$

Вычитая из равенства (4.23) равенство (4.24), находим вторую формулу Грина

$$\iiint_T (u \Delta v - v \Delta u) d\tau = \iint_{\Sigma} \left(u \frac{dv}{\partial n} - v \frac{du}{\partial n} \right) dS, \quad (4.25)$$

Область может быть ограничена несколькими поверхностями. Формулы Грина применимы и в этом случае, причем поверхностные интегралы следует брать по всем поверхностям, ограничивающим область T .

Для функций двух $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ переменных имеют место аналогичные формулы Грина. Вторая формула Грина в области S с границей C имеет вид $\iint_S (u \Delta v - v \Delta u) dS = \int_C \left(u \frac{dv}{\partial n} - v \frac{du}{\partial n} \right) dl$, где $dS = dx dy$; dl элемент дуги вдоль C ;

$\Delta_2 v_2 = v_{xx} + v_{yy}$; — производная по направлению внешней к контуру нормали \vec{n} .

Функция $(M) = \frac{1}{R}$, где $R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ — расстояние между точками $M(x, y, z)$ $M_0(x_0, y_0, z_0)$ удовлетворяет уравнению Лапласа при $M \neq M_0$

Пусть гармоническая функция, непрерывная вместе с первыми производными в области $T + \Sigma$ и имеющая вторые производные в области T . Рассмотрим функцию где — некоторая внутренняя точка области. Поскольку эта функция имеет внутри области T разрыв непрерывности в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то непосредственно применять вторую формулу Грина в области к функциям и нельзя. Функция $v = \frac{1}{R_{mm_0}}$ ограничена в области $T - K_\varepsilon$ границей $T - K_\varepsilon$, где K_ε — шар радиуса ε с центром в точке M_0 и поверхностью Σ_ε (рис. 4.1).

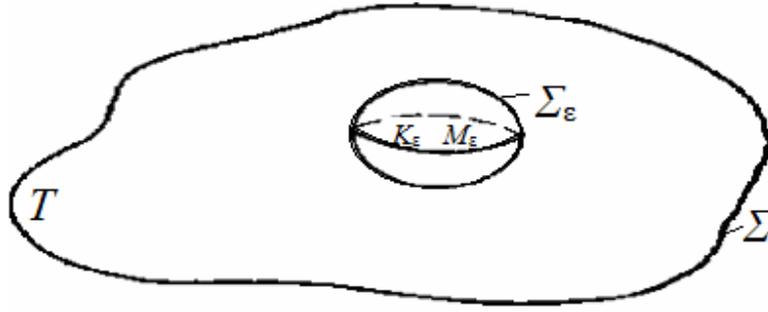


Рис. 4.1. Расчетная схема для вывода формулы Грина

Применяя вторую формулу Грина (4.25) к функциям u и $v = \frac{1}{R}$ в области, $T - K_\varepsilon$ получаем

$$\begin{aligned} \iiint_{T-K_\varepsilon} \left(u \Delta \frac{1}{R} - \frac{1}{R} \Delta u \right) d\tau &= \iint_{\Sigma_\varepsilon} \left(u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\sigma + \\ &+ \iint_{\Sigma_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) d\sigma - \iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma. \end{aligned} \quad (4.26)$$

В правой части равенства только последние два интеграла зависят от ε . Вычисляя производную по внешней нормали к области $T - K_\varepsilon$ на Σ_ε , находим,

что $\left. \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \right|_{\Sigma_\varepsilon} = - \left. \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{R} \right) \right|_{r=\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2}$, откуда:

$$\iint_{\Sigma_\varepsilon} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\Sigma_\varepsilon} u d\sigma = -4\pi\varepsilon^2 \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^* = 4\pi\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^*, \quad (4.27)$$

где u^* — среднее значение $u(M)$ на поверхности. Преобразуем третий интеграл:

$$\iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{\Sigma_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = -4\pi\varepsilon^2 \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^* = 4\pi\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^* \quad (4.28)$$

где $\left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^*$ — среднее значение нормальной производной $\frac{\partial u}{\partial n}$ на сфере Σ_ε .

Подставляя выражения (4.27) и (4.28) в формулу (4.26) и учитывая, что $\Delta \frac{1}{R} = 0$ в $T - K_\varepsilon$, находим:

$$\iiint_{T-K_\varepsilon} \left(-\frac{1}{R} \right) \Delta u d\tau = \iint_{\Sigma} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma + 4\pi u^* - 4\pi\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^* \quad (4.29)$$

Устремим теперь радиус к нулю. Тогда:

1) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^* = u(M_0)$, так как $u(M)$ непрерывная функция, а u^* — ее среднее значение по сфере радиуса с центром в точке M_0 ;

2) $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 4\pi\varepsilon \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^* = 0$, так как из непрерывности первых производных функций внутри $u(M)$ сразу же вытекает ограниченность нормальной производной в окрестности M_0 ;

3) по определению несобственного интеграла, имеем:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iiint_{T-K_\varepsilon} \left(-\frac{1}{R} \Delta u \right) d\tau = \iiint_T \left(-\frac{1}{R} \Delta u \right) d\tau .$$

В результате указанного предельного перехода $\varepsilon \rightarrow 0$ приходим к основной интегральной формуле Грина

$$4\pi u(M_0) = - \iint_{\Sigma} \left[u(P) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R_{M_0-P}} \right) - \frac{1}{R_{M_0-P}} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma - \iiint_T \frac{\Delta u(P)}{R_{M_0-P}} d\tau , \quad (4.30)$$

где $P = P(\xi, \eta, \zeta)$ — точка с координатами ξ, η, ζ смещенная на поверхности Σ .

Если точка M_0 находится вне области T , то непрерывна и гармонична во всех точках области Σ . Поэтому слева в формуле (4.30) получим нуль.

Рассмотрим случай, когда принадлежит поверхности Σ . Предположим, что имеет в M_0 касательную плоскость с непрерывными угловыми коэффициентами. Сфера Σ_ε радиуса ε центром в M_0 пересекает поверхность Σ и делит ее на две части Σ_1 и Σ_2 , часть σ лежит внутри шара K_ε . Формулу Грина (4.25) применим к u и $v = \frac{1}{R}$ в области $T - T_1$, где T_1 — область, ограниченная Σ_1 и частью сферы Σ_ε , лежащей внутри области T . Общая схема рассуждений,

приведших к формуле (4.29), остается неизменной, при этом следует лишь учесть, что интеграл по $\Sigma_1 + \Sigma_\varepsilon$, и внести соответствующие изменения в выражения (4.27), (4.28) и (4.29). В результате приходим к формуле, получающейся из уравнения (4.30) при замене 4π на 2π .

Объединяя все случаи, запишем основную формулу Грина в виде:

$$\Omega u(M_0) = \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{R_{M_0 P}} \frac{\partial u}{\partial n_p}(P) - u(P) \frac{\partial}{\partial n_p} \left(\frac{1}{R_{M_0 P}} \right) \right] d\sigma_p - \iiint_T \frac{\Delta u(p)}{R_{M_0 P}} d\tau_p,$$

где:

$$\Omega = \begin{cases} 4\pi & , \text{ если точка } M_0 \text{ лежит внутри } T, \\ 2\pi & , \text{ если точка } M_0 \text{ лежит на границе } \Sigma, \\ 0 & , \text{ если точка } M_0 \text{ лежит вне } T. \end{cases}$$

Отметим, что если точка M_0 является конической вершиной поверхности Σ , то $\Omega = a$ где a — величина телесного угла, образуемого касательным к Σ в точке M_0 . Для гармонической функции $\Delta u = 0$ и формула (4.30) принимает вид

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left[\frac{1}{R_{M_0 P}} \frac{\partial u}{\partial n_p}(P) - u(P) \frac{\partial}{\partial n_p} \left(\frac{1}{R_{M_0 P}} \right) \right] d\sigma_p, \quad (M_0 \text{ внутри } T). \quad (4.31)$$

Таким образом, значение гармонической функции в любой внутренней точке области выражается через значение этой функции и ее нормальной производной на поверхности области. При этом предполагается непрерывность функций $u(M)$ и ее первых производных вплоть до границы. Отметим сразу же, что каждый из интегралов

$$\iint_{\Sigma} \mu(P) \frac{1}{R_{M_0 P}} d\sigma_p \quad \text{и} \quad \iint_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial n_p} \left(\frac{1}{R_{M_0 P}} \right) \nu(P) d\sigma_p, \quad (4.32)$$

где μ и ν — непрерывные функции, является гармонической функцией вне поверхности Σ . В самом деле, так как подинтегральные функции и все их производные непрерывны вне поверхности Σ , то производные функций (4.32) любого порядка можно вычислять при помощи дифференцирования под знаком интеграла. Так как, кроме того, функции

$$\frac{1}{R_{MP}} u \frac{\partial u}{\partial n_p} \left(\frac{1}{R_{MP}} \right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{R} \right) \cos \alpha_p + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{1}{R} \right) \cos \beta_p + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{R} \right) \cos \gamma_p$$

удовлетворяют уравнению Лапласа по временным $M(x, y, z)$, то в силу обобщенного принципа суперпозиции функции (4.32) также удовлетворяют уравнению Лапласа по переменным x, y, z .

Отсюда вытекает важное следствие: всякая гармоническая функция внутри области гармоничности дифференцируема бесчисленное множество раз. Отметим также, что гармоническая функция аналитическая (разлагается в степенной ряд) во всякой точке M_0 области T . В этом можно убедиться с помощью рассуждений, основанных на том же интегральном представлении (4.31).

Аналогичные формулы имеют место и для гармонических функций двух независимых переменных. Пусть S — некоторая область на плоскости, (x, y) ограниченная контуром C , а n — направление нормали к этому контуру, внешнее по отношению к области. Полагая во второй формуле Грина $\nu = \ln \frac{1}{R_{M_0 P}}$ где

$R_{M_0 P} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ расстояние $P(x, y)$ от фиксированной точки $M_0(x_0, y_0)$ и рассуждая подобно тому, как это было для трехмерного случая, получаем основную формулу Грина на плоскости

$$\Omega u(M_0) = \int \left[\ln \frac{1}{R_{M_0 P}} \frac{\partial u}{\partial n_p}(P) - u(P) \frac{\partial}{\partial n_p} \left(\ln \frac{1}{R_{M_0 P}} \right) \right] dS_p - \iint \Delta u(p) \ln \frac{1}{R_{M_0 P}} dS_p,$$

где

$$\Omega = \begin{cases} 2\pi & , \text{ если точка } M_0 \text{ лежит внутри } S, \\ \pi & , \text{ если точка } M_0 \text{ лежит на границе } S, \\ 0 & , \text{ если точка } M_0 \text{ лежит вне } S. \end{cases}$$

Если $u(M)$ гармоничная внутри S функция M_0 и лежит внутри S , то

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi} \int \left[\ln \frac{1}{R_{MP}} \frac{\partial u}{\partial n_p}(P) - u(P) \left(\ln \frac{1}{R_{MP}} \right) \right] dS_p.$$

Установим несколько важнейших свойств гармонических функций:

1. Если v — функция, гармоническая в области T ограниченной поверхностью Σ , то

$$\iint_S \frac{\partial v}{\partial n} d\sigma = 0, \tag{4.33}$$

где S — любая замкнутая поверхность, целиком лежащая в области T . В самом деле, подставляя в первую формулу Грина на (4.23) какую-либо гармоническую функцию $v(\Delta v=0)$ и функцию $u=1$ сразу же получим формулу (4.33). Из формулы (4.33) следует, что вторая краевая задача $u=0$ в T , $\frac{\partial u}{\partial n}=f$ может иметь решение только при условии $\iint_{\Sigma} f d\sigma = 0$. Это свойство гармонических функций можно интерпретировать как условие отсутствия источников внутри области T .

2. Если функция $u(M)$ гармонична в некоторой области T , а M_0 — какая-нибудь точка, лежащая внутри области, то имеет место формула

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint_{\Sigma_a} u d\sigma, \tag{4.34}$$

где Σ_a — сфера радиуса a с центром в точке M_0 , целиком лежащая в области T (теорема среднего значения). Эта теорема утверждает, что значение

гармонической функции в некоторой точке M_0 равно среднему значению этой функции на любой сфере Σ с центром в M_0 , если сфера Σ_a не выходит из области гармоничности функции. Применим формулу (4.31) к шару центром в точке M_0 и поверхностью Σ_a :

$$4\pi u(M_0) = -\iint_{\Sigma_a} \left[u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) - \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} \right] d\sigma.$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{a} \Sigma_a u \iint_{\Sigma_a} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma = 0, \quad \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \Big|_{\Sigma_a} = \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \Big|_{R=a} = -\frac{1}{a^2}$$

(направление внешней нормали к Σ_a совпадает с направлением радиуса), сразу же получаем выражение (4.34). Записывая его в виде

$$4\pi \rho^2 u(M_0) = \iint_{\Sigma_\rho} u(P) d\sigma_\rho$$

и интегрируя по ρ от 0 до a , получаем: $u(M_0) = \frac{1}{V_a} \iiint_K u d\tau_\rho$, $V_a = \frac{4\pi}{3} a^3$, т.е. $u(M_0)$ есть среднее по объему шара K_a с границей Σ_a . Для случая двух независимых переменных имеет место аналогичная теорема о среднем значении:

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi a} \int_{C_a} u dS, \tag{4.35}$$

где C_a окружность радиуса a центром в точке M_0 , лежащая в области гармоничности.

3. Если функция $u(M)$, определенная и непрерывная в замкнутой области, $T + \Sigma$ удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ внутри T , то максимальные и минимальные значения функции достигаются на поверхности Σ (принцип максимального значения).

Допустим, что функция $u(M)$ достигает максимального значения в некоторой внутренней точке M_0 области T так что $u_0 = u(M_0) \geq u(M)$, где M —

любая точка области T . Окружим точку M_0 сферой Σ_ρ радиуса ρ , целиком лежащей внутри области T . Поскольку, по предположению $u(M_0)$, есть наибольшее значение функции $u(M)$ в $T + \Sigma$, то $u \Big|_{\Sigma} \leq u(M_0)$. Пользуясь формулой среднего значения (4.34) и заменяя под интегралом всюду $u(M)$ значением $u(M_0)$, получаем

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_{\Sigma_\rho} u(M) d\sigma_m \leq \frac{1}{4\pi\rho^2} \iint_{\Sigma_\rho} u(M_0) d\sigma_m = u(M_0) \quad (4.36)$$

Если предположить, что хотя бы в одной точке M сферы $u(M) < u(M_0)$, то очевидно, что вместо знака \leq будем иметь знак $<$ что приводит к противоречию. Таким образом, на всей поверхности $\sum_\rho u(M) \equiv u(M_0)$.

Если ρ_0^m — минимальное расстояние от M_0 до поверхности Σ , то $u(M) = u(M_0)$ для всех точек, лежащих внутри $\Sigma_{\rho_0^m}$. Отсюда следует, что в точках M^* , принадлежащих общей части $\Sigma_{\rho_0^m}$ и Σ , по непрерывности $u(M^*) = u(M_0)$. Это и доказывает теорему, поскольку максимальное значение $u(M)$ достигается в точках границы M^* .

Нетрудно убедиться, что если область T связная и максимальное значение достигается хотя бы в одной внутренней точке M_0 то $u(M) \equiv u(M_0)$ во всей области. Пусть $M^{(0)}$ — какая-либо другая точка области T . Соединим точку $M^{(0)}$ с M_0 ломаной линией (рис. 4.2), длину которой обозначим L . Пусть M_1 — последняя точка выхода линии L из $\Sigma_{\rho_0^m}$. В этой точке $u(M_1) = u(M_0)$. Опишем из этой точки сферу $\Sigma_{\rho_1^m}$ радиуса ρ_1^m касающуюся Σ и пусть M_2 — последняя точка выхода L из $\Sigma_{\rho_1^m}$; в этой точке $u(M_2) = u(M_0)$. Продолжая этот процесс далее, получим, что не более чем через $\rho = \frac{1}{\rho^m}$ шагов, где ρ^m — минимальное расстояние L до Σ , одна из этих сфер захватит точку, откуда следует, что в силу

произвольности и непрерывности в замкнутой области, заключаем, что $u(M) = u(M_0)$ всюду, включая точки границы. Таким образом, из всех гармонических функций только постоянная может достигать своего максимального значения во внутренних точках области.

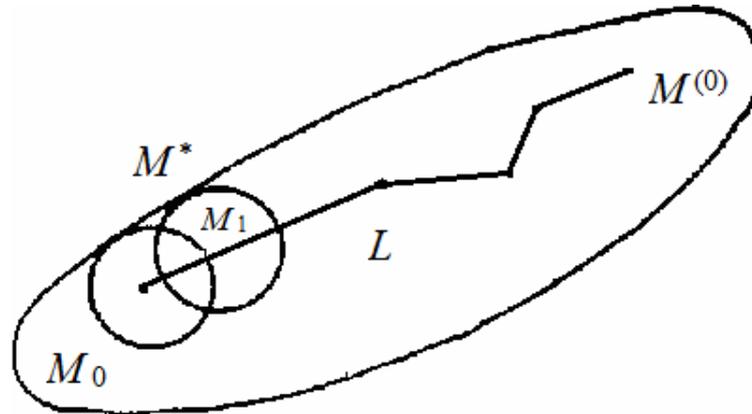


Рис. 4.2. Область гармоничности функции

Аналогичную теорему можно доказать относительно минимального значения.

Следствие 1. Если функции u и v непрерывны в области $T + \Sigma$, гармоничны в T и если $u \leq v$ на Σ , то и $u \leq v$ всюду внутри T .

В самом деле, функция $v - u$ непрерывна в $T + \Sigma$, гармонична в T и $v - u \geq 0$.

В силу принципа максимального значения $v - u \geq 0$ всюду внутри T , откуда и следует наше утверждение.

Следствие 2. Если функции u и v непрерывны в области $T + \Sigma$, гармоничны в T и если $|u| \leq v$ на Σ , то $|u| \leq v$ всюду внутри T . Из условий теоремы следует, что три гармонические функции — u, v и u удовлетворяют условиям $-v \leq u \leq v$.

Применяя дважды следствие 1, получаем, что $-v \leq u \leq v$ всюду внутри или внутри T .

Следствие 3. Для гармонической в T и непрерывной в $T + \Sigma$ функции $u(M)$ выполняется неравенство $|u| \leq \text{MAX}|u|_{\Sigma}$ всюду в $T + \Sigma$. Для доказательства положим и воспользуемся следствием 2.

Хотя изложение проводилось для трех измерений, однако все результаты переносятся на случай гармонических функций любого числа переменных.

4.3. Единственность и устойчивость краевых задач Дирихле и Неймана

Пусть дана область T , ограниченная замкнутой поверхностью Σ , на которой задана некоторая функция f . В простейшем случае, когда граничная функция f непрерывна, первая внутренняя краевая задача (внутренняя задача Дирихле) для уравнения Лапласа обычно ставится следующим образом.

Требуется найти функцию u , которая:

- а) определена и непрерывна в замкнутой области $T + \Sigma$, включая границу;
- б) удовлетворяет внутри области T уравнению $\Delta u = 0$;
- в) принимает на границе Σ заданные значения f .

В условии предполагается гармоничность функции внутри области T . Требование гармоничности на границе является излишним, так как повлекло бы за собой дополнительные ограничения для граничных значений.

Условие непрерывности в замкнутой области (или какое-либо другое условие, разъясняющее смысл того, что функция принимает на границе заданные значения) необходимо для единственности. Если отказаться от этого условия, то любую функцию, равную постоянной C внутри T и заданной функции f на Σ можно рассматривать как решение задачи, поскольку она удовлетворяет условиям а) и в).

Докажем теорему единственности: первая внутренняя краевая задача для уравнения Лапласа не может иметь двух различных решений.

Допустим, что существует две различные функции u_1 и u_2 , являющиеся решениями задачи, т.е. функции, непрерывные в замкнутой области $T + \Sigma$, удовлетворяющие внутри области уравнению Лапласа и на поверхности Σ принимающие одно и то же значение f . Разность этих функций $u = u_1 - u_2$ обладает следующими свойствами:

- 1) $\Delta u = 0$ внутри области T ;
- 2) u непрерывна в замкнутой области $T + \Sigma$;
- 3) $u \Big|_{\Sigma} = 0$.

Функция $u(M)$ таким образом, непрерывна и гармонична в области T и равна нулю на границе. Как известно, всякая непрерывная функция в замкнутой области достигает своего максимального значения. Убедимся в том, что $u \equiv 0$. Если функция $u \equiv 0$ и хотя бы в одной точке $u > 0$, то она должна достигать положительного максимального значения внутри области, что невозможно. Совершенно так же доказывается, что функция не может принимать нигде внутри T отрицательных значений. Отсюда следует, что $u \equiv 0$.

Перейдем к доказательству непрерывной зависимости решения первой краевой задачи от граничных данных. Напомним, что задача называется физически определенной, если малому изменению условий, определяющих решение задачи, в данном случае граничных условий, соответствует малое изменение самого решения.

Пусть u_1 и u_2 непрерывные в $T + \Sigma$ и гармоничные внутри T функции, для которых $|u_1 - u_2| \leq \varepsilon$ на Σ . Тогда это неравенство выполняется внутри T . Это утверждение непосредственно вытекает из следствия 2, в силу того, что $U = \varepsilon$ является гармонической функцией.

Таким образом, доказана непрерывная зависимость решения от граничных условий и единственность первой внутренней задачи.

Часто встречаются также первая краевая задача с разрывными граничными условиями. Функция, непрерывная в замкнутой области, не может быть решением этой задачи. Поэтому требуется уточнить постановку первой краевой задачи применительно к рассматриваемому случаю.

Пусть на кривой C , ограничивающей область S , на плоскости (x, y) задана кусочно-непрерывная функция $f(P)$. Требуется найти функцию $u(M)$: 1) гармоничную внутри области S ; 2) непрерывно примыкающую к граничным значениям в точках непрерывности последних; 3) ограниченную в замкнутой области $S + C$.

Заметим, что дополнительное требование ограниченности фактически относится к окрестностям точек разрыва функции $f(P)$. Докажем следующую теорему: решение первой краевой задачи с кусочно-непрерывными граничными значениями единственно.

Пусть u_1 и u_2 — два решения поставленной задачи. Разность $V = u_1 - u_2$

1) является гармонической функцией внутри S

2) непрерывно примыкает к нулевым граничным значениям на границе, за исключением точек разрыва $f(P)$ в которых она может претерпевать разрыв;

3) ограничена в $S + C; |v| < \pi$.

Построим гармоническую функцию
$$U(M) = \varepsilon \sum_{j=1}^n \ln \frac{D}{r_j},$$

где ε — произвольное положительное число, D — диаметр области, r_j — расстояние от рассматриваемой точки до i -й точки разрыва p . Функция $U(M)$ положительна, так как все слагаемые больше нуля. Построим в каждой точке разрыва P_j круг K_j радиуса δ , выбрав так, чтобы каждое слагаемое $\varepsilon \ln \frac{D}{r_j}$, на

соответствующей окружности C превосходило A , т.е. чтобы $\varepsilon \ln \frac{D}{\sigma} \geq A$. Функция непрерывна в замкнутой области $S - \sum_{j=1}^N K_j$ и $|V| \leq U$ на границе этой области.

Поэтому в силу принципа максимума U является мажорантой функции $v: |v(M)| \leq U(M)$. Фиксировав произвольную точку M из области S и устремив, $\varepsilon \rightarrow 0$ получим: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} U(M) = 0$, следовательно, $v(M) = 0$, так как v не зависит от ε , или $u_1 = u_2$, что и требовалось доказать. Внешние краевые задачи по-разному ставятся для трех и двух независимых переменных. Рассмотрим сначала случай трех переменных.

Пусть T — область, внешняя к некоторой замкнутой поверхности. Первая внешняя краевая задача (внешняя задача Дирихле) состоит в следующем: требуется найти функцию $u(x, y, z)$ удовлетворяющую условиям:

1. $\Delta u = 0$ в неограниченной области T ;
2. всюду непрерывна, включая поверхность Σ ;
3. $u \Big|_{\Sigma} = f(x, y, z)$, где функция, заданная на поверхности Σ ;
4. $u(M)$ равномерно стремится к 0 на бесконечности: $u(M) \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$.

Последнее условие является существенным для единственности решения, в чем легко убедиться на простом примере. Пусть требуется решить внешнюю первую краевую задачу для сферы S_R радиуса R с постоянными граничным условием $u \Big|_S = \text{const} = f_0$.

Опуская условие 4, видим, что решениям задачи могут служить функции $u_1 = f_0$ и $u_2 = f_0 \frac{R}{\gamma}$, а также любая функция $u = \alpha u_1 + \beta u_2$ где $\alpha + \beta = T$. Докажем, что внешняя первая краевая задача для гармонических функций с тремя независимыми переменными имеет единственное решение. Предполагая

существование двух решений u_1 и u_2 , удовлетворяющих условиям 1-4, видим, что их разность $u = u_1 - u_2$ представляет собой решение задачи с нулевыми граничными условиями. Поскольку условие 4 выполнено также для функции u , то для произвольного $\varepsilon > 0$ можно указать R^* , что $|u(M)| < \varepsilon$ при $r > R^*$.

Если точка лежит внутри области T' (рис. 4.3), заключенной между поверхностью Σ и сферой $S_r (r \geq R^*)$, то и $|u(M)| < \varepsilon$, как следует из принципа максимального значения, примененного к области T . В силу произвольности заключаем, что $u = 0$ в области T' , а также и во всей области T что и доказывает единственность решения внешней первой краевой задачи в пространстве.

Первая внешняя задача на плоскости ставится следующим образом: требуется найти функцию $u(M)$, удовлетворяющую условиям:

1. $\Delta u = 0$ в рассматриваемой бесконечной области Σ , ограниченной контуром C ;
2. функция всюду непрерывна, включая C ;
3. $u|_C = f(x, y)$, где f — функция, заданная на C ;
4. $u(M)$ ограничена в бесконечности, т.е. существует такое число N , что $|u(M)| \leq N$.

Требование обращения решения в нуль на бесконечности и здесь оказывается достаточным, чтобы доказать, что двух разных решений быть не может, но оно является слишком сильным, так как при нем задача может оказаться вообще неразрешимой.

Докажем, что внешняя первая краевая задача для функций двух переменных имеет единственное решение.

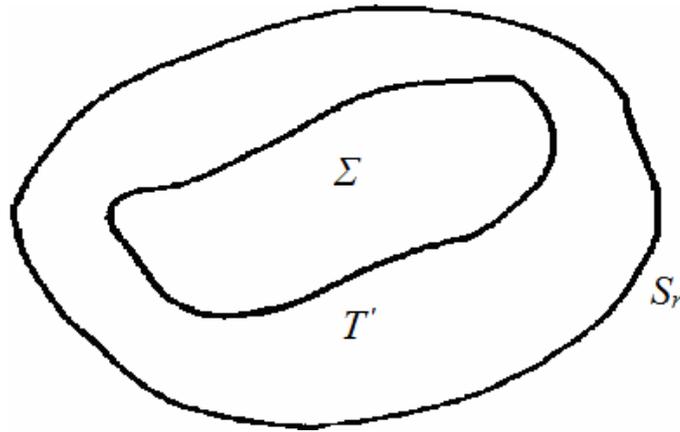


Рис. 4.3. Расчетная схема к решению внешней краевой задачи

Допуская существование двух различных решений u_1 и u_2 и рассматривая их разность $u = u_1 - u_2$, являющуюся решением первой краевой задачи с нулевыми граничными условиями, будем в силу условия 4 иметь $|u| \leq N = N_1 + N_2$, где N_1 и N_2 таковы что $|u_1| \leq N_1$, $|u_2| \leq N_2$. Обозначим через Σ_1 область, лежащую внутри S и являющуюся дополнением к области Σ , так что $\Sigma + \Sigma_1$ есть вся плоскость. Возьмем точку M внутри и окружность радиуса R с центром в точке, лежащую внутри Σ_1 (рис. 4.4.). Гармоническая функция $\ln \frac{1}{R}$ не имеет особенностей в области Σ ; функция $\ln \left(\frac{R_{MM_0}}{R} \right)$ положительна по всей области Σ , включая S . Пусть C_{R_1} окружность радиуса R_1 с центром в M_0 , содержащая целиком контур Σ' и S — область, ограниченная кривыми S и C_{R_1} . Функция U_{R_1} , определяемая равенством

$$U_{R_1} = N \frac{\ln \left(\frac{R_{MM_0}}{R} \right)}{\ln \left(\frac{R_1}{R} \right)} \quad (4.37)$$

есть гармоническая функция, равная N на окружности радиуса R , положительная на S ; из принципа максимального значения следует, что

U_{R_1} является мажорантой для модуля функции $u(M)$ в области Σ ; $|u(M)| < U_{R_1}(M)$.
 Фиксируем точку M и будем неограниченно увеличивать R_1 . Очевидно, что $U_{R_1}(M) \rightarrow 0$ при $R_1 \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что $u(M) = 0$.

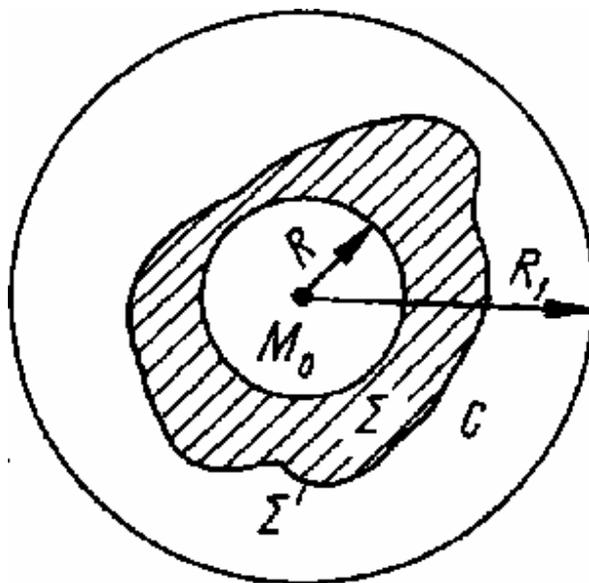


Рис. 4.4. Расчетная схема определения единственности решения

Тем самым, в силу произвольности M единственность решения поставленной задачи доказана. Единственность решения этой задачи можно также доказать, пользуясь преобразованием обратных радиус-векторов, переводящим область, внешнюю к контуру C , в область, внутреннюю к нему.

При этом бесконечно удаленная точка перейдет в изолированную особую точку, в окрестности которой функция ограничена. Из теоремы будет вытекать гармоничность функции в начале координат, а тем самым и единственность решения.

Из приведенных рассуждений следует, что гармоническая функция двух переменных $u(M)$ ограниченная в бесконечности, стремится к определенному пределу при M , стремящейся к бесконечности.

Различие между первой краевой внешней задачи для двух и трех переменных можно пояснить на следующем физическом примере. Пусть дан шар

радиуса, на поверхности которого поддерживается температура U_0 и требуется определить стационарное распределение температуры во внешнем пространстве.

Функция $U = U\left(\frac{R}{r}\right)$ представляет решение этой задачи, обращающееся в нуль на бесконечности.

Рассмотрим теперь двумерную задачу, и пусть на окружности радиуса задано постоянное граничное значение $u\Big|_{\Sigma} = f_0 = const.$

В этом случае $u = f_0$ есть единственное ограниченное решение задачи и никакого решения, обращающегося в нуль на бесконечности, не существует. Мы уже встречались с существенно различным характером гармонических функций в бесконечности для двух и трех независимых переменных (например, поведение и на бесконечности). Для пространственной $\frac{1}{r}$ и $\ln \frac{1}{r}$ плоской неограниченных областей имеет место принцип максимального значения. В этом нетрудно убедиться с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые были использованы при доказательстве теорем единственности. Отсюда вытекает непрерывная зависимость решения от граничных условий.

Решением второй краевой задачи будем называть функцию u , непрерывную в области $T + \Sigma$ и удовлетворяющую на поверхности Σ условию $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Sigma} = f(M).$

Докажем, что решение второй внутренней краевой задачи (внутренней задачи Неймана) определяется с точностью до произвольной постоянной.

Доказательство проведем при дополнительном предположении, что функция u имеет первые производные в области $T + \Sigma$. Пусть u_1 и u_2 две непрерывно дифференцируемые в $T + \Sigma$ функции, удовлетворяющие уравнению $\Delta u = 0$ и условию $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Sigma} = f(M)$ на Σ . Для функции $u = u_1 - u_2$ будем иметь: $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Sigma} = 0$

Полагая в первой формуле Грина (4.23) $v = u$ и учитывая соотношение

$$\Delta u = 0 \text{ и } \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\Sigma} = 0, \text{ получаем: } \iiint_T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 d\tau = 0$$

Отсюда в силу непрерывности функции и ее первых производных следует

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} \equiv 0, \text{ т.е. } u = \text{const}, \text{ что и требовалось доказать.}$$

4.4. Решение краевых задач методом разделения переменных

Решение краевых задач для уравнения Лапласа может быть найдено методом разделения в случае некоторых простейших областей (круг, прямоугольник, шар и цилиндр и др.). Получающиеся при этом задачи на собственные значения (задачи Штурма-Лиувилля) приводят к различным классам специальных функций. Рассмотрим задачи Дирихле (внутреннюю и внешнюю), при решении которых используются только тригонометрические функции.

Решим первую краевую задачу для круга: найти функцию u удовлетворяющую уравнению внутри круга

$$\Delta u = 0 \tag{4.38}$$

и граничному условию на границе круга

$$u = f \tag{4.39}$$

где f — заданная функция.

Предположим сначала, что функция f непрерывна и дифференцируема и решение $u(M)$ непрерывно в замкнутой области; в дальнейшем освободимся от условия дифференцируемости и даже непрерывности функции $u(M)$. Наряду с внутренней краевой задачей будем рассматривать также внешнюю краевую задачу. Введем полярную систему координат (ρ, ϕ) с началом в центре круга. Уравнение (4.38) в полярных координатах имеет вид

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0. \tag{4.40}$$

Будем решать задачу методом разделения переменных, т.е. будем искать частное решение уравнения (4.38) вида

$$u(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi) \neq 0$$

$$\frac{\frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dR}{d\rho}\right)}{\frac{R}{\rho}} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda$$

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0, \quad \Phi \neq 0; \quad (4.41)$$

где $\lambda = const$. Отсюда получаем два уравнения

$$\rho \frac{d}{d\rho}\left(\rho \frac{dR}{d\rho}\right) - \lambda R = 0; \quad R \neq 0 \quad (4.42)$$

Первое из уравнений дает: $\Phi(\phi) = A \cos \sqrt{\lambda\phi} + B \sin \sqrt{\lambda\phi}$. Заметим, что при изменении угла ϕ на величину 2π однозначная функция $u(\rho, \phi)$ должна вернуться к исходному значению $u(\rho, \phi + 2\pi) = u(\rho, \phi)$ (условие периодичности). Отсюда следует, что $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$ является периодической функцией угла ϕ с периодом 2π . Это возможно только, если $\sqrt{\lambda} = n$, где n — целое число, и $\Phi_n(\phi) = A \cos n\phi + B \sin n\phi$.

Функцию $R(\rho)$ будем искать в виде $R(\rho) = \rho^\mu$. Подставляя в уравнение (4.42) и сокращая на ρ^μ , находим $n^2 = \mu^2$ или $n = \pm\mu$ ($n > 0$). Следовательно, $R(\rho) = C\rho^n + D\rho^{-n}$, где C и D — постоянные.

Для решения уравнений внутренней задачи надо положить $R(\rho) = C\rho^n + D\rho^{-n}$, так как, если $D \neq 0$, то функция $u = R(\rho)\Phi(\phi)$ обращается в бесконечность при $\rho = 0$ и не является гармонической функцией внутри круга. Для решения внешней задачи, наоборот, надо брать $R = D\rho^{-n}$ ($\mu = -n$), так как решение внешней задачи должно быть ограничено в бесконечности. Итак, частные решения нашей задачи найдены:

$$u_n(\rho, \phi) = \rho^n (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi), \rho \leq a; \quad u_n(\rho, \phi) = \frac{1}{\rho^n} (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi), \rho \geq a.$$

Суммы этих решений $u(\rho, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi)$ для внутренней задачи;

$$u(\rho, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi), \rho \geq a$$

при достаточно хорошей сходимости также будут гармоническими функциями. Для определения коэффициентов A_n и B_n используем граничное условие

$$u(\rho, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi) = f. \quad (4.43)$$

Считая, что f задана как функция угла возьмем ее разложение в ряд Фурье

$$f(\phi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos n\phi + \beta_n \sin n\phi), \quad (4.44)$$

$$\text{где } \alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) d\psi; \quad \alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cos n\psi d\psi; \quad n=1, 2, \dots; \quad \beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \sin n\psi d\psi; \quad n=1, 2, \dots$$

Сравнивая ряды (4.43) и (4.44) находим $A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, A_n = \frac{\alpha_n}{a^n}, B_n = \frac{\beta_n}{a^n}$ для внутренней

задачи; $A_0 = \frac{\alpha_0}{2}, A_n = \alpha_n a^n, B_n = \beta_n a^n$ для внешней задачи. Таким образом, получили

формальное решение первой внутренней задачи для круга в виде ряда

$$u(\rho, \phi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n (\alpha_n \cos n\phi + \beta_n \sin n\phi), \quad (4.45)$$

а решение внешней задачи в виде

$$u(\rho, \phi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\rho}\right)^n (\alpha_n \cos n\phi + \beta_n \sin n\phi). \quad (4.46)$$

Чтобы убедиться в том, что полученные функции действительно являются искомыми решениями, нужно убедиться в применимости принципа суперпозиции, для чего необходимо доказать сходимость рядов, возможность их почленного дифференцирования, а также непрерывность этих функций на границе круга. Оба ряда можно представить одной формулой

$$u(\rho, \phi) = \sum t^n (\alpha_n \cos n\phi + \beta_n \sin n\phi) + \frac{\alpha_0}{2},$$

где $t = \begin{cases} \frac{\rho}{a} \leq 1 & \text{при } \rho \leq a \text{ (внутренняя задача)} \\ \frac{a}{\rho} \leq 1 & \text{при } \rho \geq a \text{ (внешняя задача)} \end{cases}$ α_n, β_n - коэффициенты Фурье функции

$f(\psi)$.

Докажем, что ряды (4.45), (4.46) можно дифференцировать при $t < 1$ любое число раз. Пусть $u_n = t^n (\alpha_n \cos n\phi + \beta_n \sin n\phi)$.

Вычислим производную функции u_n по ϕ . Отсюда получаем оценку

$$\left| \frac{\partial^k u_n}{\partial \phi^k} \right| \leq t^n n^k 2M, \quad (4.47)$$

где через M обозначим максимум модуля коэффициентов Фурье α_n и β_n :

$$|\alpha_n| \leq M, |\beta_n| \leq M.$$

Фиксируем некоторые значения $\rho_0 < a$ (для внутренней задачи) или $\rho_1 = \frac{a^2}{\rho_0} > a$ (для

внешней задачи), при этом $t_0 = \frac{\rho_0}{a} < 1$. Рассматривая ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} t^n n^k (|\alpha_n| + |\beta_n|) \leq 2M \sum_{n=1}^{\infty} t_0^n n^k, t \leq t_0$$

видим, что он сходится равномерно при $t \leq t_0 \leq 1$ при любом k . Поэтому ряды (4.45) и (4.46) можно дифференцировать по ϕ в любой точке внутри (вне) круга любое число раз. Аналогично доказывается, что по переменной ρ также дифференцировать ряды (4.45) и (4.46) внутри (вне круга радиуса $\rho_0 < a$ ($\rho_0 > a$)) сколько угодно раз. В силу произвольности, ρ_0 заключаем, что ряды (4.45) и (4.46) почленно дифференцируемы во всякой внутренней (внешней) точке круга. Из возможности почленного дифференцирования следует применимость принципа суперпозиции. Таким образом доказано, что функции (4.45) и (4.46) удовлетворяют уравнению $\Delta u = 0$.

При этом доказательстве пользовались только тем свойством функции $f(\phi)$, что ее коэффициенты Фурье ограничены условиями (4.47). Это имеет место для любой ограниченной функции (и даже для любой абсолютно интегрируемой функции). Таким образом, ряды (4.45) и (4.46), соответствующие любой ограниченной функции, определяют функции, удовлетворяющие уравнению $\Delta u = 0$ для $t < 1$. Этим замечанием воспользуемся позже при обобщении результатов, полученных в настоящем пункте.

Обратимся теперь к доказательству непрерывности функции в замкнутой области ($t \leq 1$). Очевидно, что без более детальных сведений относительно свойств функций $f(\phi)$ этого сделать нельзя.

Из предложенной непрерывности и дифференцируемости функции $f(\phi)$ следует ее разложить в ряд Фурье, а также сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|\alpha_n| + |\beta_n|) < \infty \quad (4.48)$$

Следовательно,

$$|t_n \alpha_n \cos \phi| \leq |\alpha_n|, \quad |t_n \beta_n \sin \phi| \leq |\beta_n|$$

Поэтому ряды (4.45) и (4.46) сходятся равномерно при $t \leq 1$ и, следовательно, представляемые ими функции непрерывны на границе круга. Из формулы (4.48) видно, что функция (4.46), полученная для внешней задачи, ограничена на бесконечности.

Таким образом, установлено, что ряды (4.45) и (4.46) удовлетворяют всем условиям рассматриваемых задач. Преобразуем их к более простому виду. Для определенности рассмотрим внутреннюю задачу, а для внешней напомним по аналогии.

Подставляя выражения для коэффициентов Фурье в формулу (4.45) и меняя порядок суммирования и интегрирования, будем иметь

$$\begin{aligned}
u(\rho, \phi) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a} \right)^n (\cos n\psi \cos n\phi + \sin n\psi \sin n\phi) \right\} d\psi = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a} \right)^n \cos n(\phi - \psi) \right\} d\psi.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Произведем следующие тождественные преобразования:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} t^n (\cos n(\phi - \psi)) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} t^n [e^{jn(\phi - \psi)} + e^{-jn(\phi - \psi)}] = \\
&= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [(te^{jn(\phi - \psi)})^n + (te^{-jn(\phi - \psi)})^n] \right\} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{te^{jn(\phi - \psi)}}{1 - te^{j(\phi - \psi)}} + \frac{te^{-jn(\phi - \psi)}}{1 - te^{-j(\phi - \psi)}} \right] = \\
&= \frac{1}{2} \frac{1 - t^2}{1 - 2t \cos(\phi - \psi) + t^2}, \quad t = \frac{\rho}{a} < 1.
\end{aligned}$$

Подставляя полученные результаты в равенство (4.49), получаем

$$u(\rho, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2a\rho \cos(\phi - \psi) + a^2} d\psi. \tag{4.50}$$

Эта формула, дающая решение первой краевой задачи внутри круга, называется интегралом Пуассона, а подынтегральное выражение

$$K(\rho, \phi, a, \psi) = \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2a\rho \cos(\phi - \psi) + a^2} d\psi$$

— ядром Пуассона. Отметим, что $K(\rho, \phi, a, \psi) > 0$ при $\rho < a$, $2a\rho < a^2 - \rho^2$ так как $2a\rho < a^2 - \rho^2$, если $\rho = a$.

Интеграл Пуассона выведен в предположении $\rho < a$; при $\rho = a$ представление (4.50) теряет смысл. Однако $\lim_{\rho \rightarrow 0} u(\rho, U) = f_0(\phi_0)$, $\phi \rightarrow 0$ так как ряд, из которого получен интеграл Пуассона, является непрерывной функцией в замкнутой области. Функция, определенная формулой

$$u(\rho, \phi) = \begin{cases} u(\rho, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2a\rho \cos(\phi - \psi) + a^2} d\psi, & \rho = a \\ f(\phi), & \rho < a \end{cases} \tag{4.51}$$

удовлетворяет уравнению $\Delta u = 0$ при $\rho < a$ непрерывна в замкнутой области, включая окружность $\rho = a$. Решение внешней краевой задачи, очевидно, имеет вид

$$u(\rho, \phi) = \begin{cases} u(\rho, \phi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{a^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2a\rho \cos(\phi - \psi) + a^2} d\psi, & \rho > a \\ f(\phi), & \rho = a \end{cases}$$

В самом начале предположили, что функция $f(\phi)$ непрерывна и дифференцируема, и, пользуясь этим, доказали, что решение задачи можно представить в виде бесконечного ряда. В дальнейшем с помощью тождественных преобразований перешли от ряда к интегралу Пуассона.

Интеграл Пуассона дает решение первой краевой задачи и в том случае, если функция $f(\phi)$ только непрерывна.

4.5. Метод функции Грина

Будем рассматривать решение граничных задач, принадлежащие классу функций, непрерывных в изучаемой области вместе со своими первыми производными. Это даст возможность широко использовать интегральные формулы. Рассмотрим задачу Дирихле:

$$\left. \begin{aligned} \Delta u &= f, & \text{когда } x \in V - FV \\ u &= \psi, & \text{когда } x \in FV \end{aligned} \right\}, \quad (4.52)$$

где V — ограниченная область; а f и ψ непрерывные функции. Предположим, что

$$G(\xi, x) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{r} + \phi(\xi, x) \right] (r \equiv |\xi - x|) \quad (4.53)$$

фундаментальное решение уравнения Лапласа в области V , обращающееся в нуль на ее границе FV . Для этого функция $\phi(\xi, x)$ должна быть решением граничной задачи

$$\left. \begin{aligned} \Delta \phi(\xi, x) &= 0, & \text{когда } \xi, x \in V - FV; \\ \phi(\xi, x) &= -\frac{1}{r}, & \text{когда } \xi \in FV, \quad x \in V - FV. \end{aligned} \right\} \quad (4.54)$$

Подставив в формулу (4.43) значения величины, заданные в граничной задаче (4.52), и положив получим

$$u(x) = - \int_{FV} \psi \frac{dG}{dn} dS_{\xi} - \iiint_V fGdV, x \in V - FV \quad (4.55)$$

Если фундаментальное решение $G(\xi, x)$ и его производная $\frac{dG}{dn}$ существуют, то эта формула даст решение задачи Дирихле (4.52), принадлежащее рассматриваемому классу функций, в интегральной форме. Тем самым, решение задачи Дирихле (4.52) общего вида для неоднородного уравнения сможет быть заменено разыскиванием функции $G(\xi, x)$ для чего требуется найти решение задачи Дирихле (4.54) частного вида для однородного уравнения. Фундаментальное решение $G(\xi, x)$ называют функцией Грина задачи (4.52) или функцией Грина оператора Лапласа.

Полученный результат непосредственно рассматривается на внешнюю задачу Дирихле для уравнения Лапласа: $\Delta u = 0$. Это вытекает из совпадения формул (4.44) и (4.45) для ограниченной и бесконечной области. Что же касается внешней задачи Дирихле для уравнения Пуассона, то проведение рассуждений, аналогичных проведенным для внутренней задачи, требует обобщения формулы (4.43) на бесконечные области. Последнее возможно для решений уравнения Пуассона, удовлетворяющих на бесконечности неравенствам

$$u < \frac{A}{\rho}, \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| < \frac{A}{r^2}, i = 1, 2, 3; r > r_0 \quad (4.56)$$

где A и r_0 — ограниченные числа, аналогичные неравенствам (4.24) для гармонических функций, при дополнительном условии, что интеграл $\iiint_V fLdV$ имеет смысл. В самом деле, при этом для обобщения формулы (4.43) достаточно провести те же рассуждения, что и при обобщении формулы (4.44). Неравенства (4.56) носят название условий регулярности на бесконечности. Итак, решения

рассматриваемого класса внешней задачи Дирихле для уравнения Пуассона, регулярные на бесконечности, при условии, что интеграл имеет смысл, также представим в формуле (4.55), если только соответствующая функция Грина существует. Перейдем к смешанной задаче:

$$\begin{aligned} \Delta U &= f, \quad \text{когда } x \in V - FV \\ \frac{du}{dn} + \beta U &= \psi, \quad \text{когда } x \in FV \end{aligned} \quad (4.57)$$

Воспользовавшись тождеством $L\left(\frac{du}{dn} + \beta u\right) - u\left(\frac{dL}{dn} + \beta L\right) = L\frac{du}{dn} - u\frac{dL}{dn}$ и

введя для сокращения обозначение $P = \frac{d}{dn} + \beta$, преобразуем формулу (4.55) к виду

$$U(x) = \iint_{FV} (LPu - uPL) dS_\xi - \iiint_V L\Delta u dV, \quad x \in V - VF \quad (4.58)$$

Пусть $G(\xi, x)$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа в области V , удовлетворяющее условию $P_\xi G(\xi, x) = 0$, когда $\xi \in FV, x \in V - FV$.

Для этого функция $\Phi(\xi, x)$ должна быть решением граничной задачи

$$\Delta \Phi_\xi = 0, \quad \text{когда } \xi, x \in V - FV; \quad (4.59)$$

$$P_\xi \Phi = -P_\xi \frac{1}{r}, \quad \text{когда } \xi \in FV, \quad x \in V - FV. \quad (4.60)$$

Подставив в формулу (4.58) значения величин, заданные в граничной задаче (4.57), и положив $L = G$, получим интегральное представление решения этой задачи:

$$U(x) = \iint_{FV} (LPu - uPL) dS_\xi - \iiint_V L\Delta u dV, \quad x \in V - VF \quad (4.61)$$

Фундаментальное решение $G(\xi, x)$ называют функцией Грина задачи (4.57).

Обратимся, наконец, к задаче Неймана:

$$\begin{aligned} \Delta u &= f, \quad \text{когда } x \in V - FV; \\ \frac{du}{dn} &= \phi, \quad \text{когда } x \in FV. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Проведя те же рассуждения, что и для смешанной задачи, приходим к выводу, что решение задачи Неймана выражалось бы формулой, совпадающей с формулой (4.61): если бы функция $\Phi(\xi, x)$ была решением граничной задачи

$$\begin{aligned} \Delta_{\xi} \Phi &= 0, \text{ когда } \xi, x \in V - FV; \\ \frac{d\Phi}{dn_{\xi}} &= -\frac{d}{dn_{\xi}} \frac{1}{r}, \text{ когда } \xi \in FV, x \in V - FV. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Но такой функции Φ не существует. В самом деле, положив в формуле (4.44) $u=1$, $L(\xi, x) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r}$, найдем, что

$$\iint_{FV} \frac{d\Phi}{dn} dS = -\iint_{FV} \frac{d}{dn} \frac{1}{r} dS = 4\pi \neq 0, \quad (4.64)$$

когда $x \in V - FV$, между тем, как, согласно формуле (4.34), интеграл от нормальной производной гармонической функции по замкнутой поверхности должен быть равен нулю.

Так как не существует решения задачи (4.63), то не существует и фундаментального решения, имеющего нормальную производную, равную нулю на границе конечной области. Тем не менее, может существовать фундаментальное решение, нормальная производная которого на границе области постоянна и которое, в связи с этим, может играть роль, аналогичную роли функции Грина смешанной задачи (4.57). Чтобы найти это решение, изменим граничное условие задачи (4.63), положив

$$\frac{d\Phi}{dn} = -\frac{4\pi}{S} - \frac{d}{dn} \left(\frac{1}{r} \right), \text{ когда } \xi \in FV, x \in V - FV.$$

Здесь $S = \iint_{FV} dS$ — площадь поверхности FV . Легко видеть, что соотношение (4.33)

теперь соблюдается и, следовательно, функция $\Phi(\xi, x)$ может существовать,

определив с ее помощью фундаментальное решение $G(\xi, x) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r} + \Phi \right)$, найдем,

что $\frac{dG}{dn} = -\frac{1}{S}$. Подставив в формулу (4.55) $L = G$ и значения величин, заданные в задаче (4.62), получим

$$u(x) = \iint_{FV} G \psi dS_\xi + \frac{1}{S} \iint_{FV} u dS_\xi - \iiint_V f G dV_\xi, \quad x \in V - FV$$

Интеграл $\frac{1}{S} \iint_{FV} u dS$ представляет среднее значение неизвестной функции на поверхности вообще говоря, также неизвестное. Однако, как известно, решения задачи Неймана определены лишь с точностью до постоянного слагаемого, подбором которого среднему значению решения на поверхности можно FV придать любое наперед заданное значение. Следовательно, данный интеграл должен рассматриваться как произвольная постоянная. Таким образом, найдя решение Φ задачи

$$\Delta_\xi \Phi = 0, \quad \text{когда } x, \xi \in V - FV; \quad (4.65)$$

$$\frac{d\Phi}{dn_\xi} = \frac{4}{S} = -\frac{d}{dn_\xi} \left(\frac{1}{r} \right) \quad x, \xi \in V - FV \quad \bar{S} = \iiint_{FV} dS;$$

и определив по формуле (4.53) фундаментальное решение можно по формуле (4.61) построить то из решений задачи Неймана (4.62), среднее значение которого на поверхности равно нулю. Все остальные решения задачи Неймана могут быть получены прибавлением к этому решению произвольной постоянной.

В отношении распространения формулы (4.61) на внешние смешанную задачу и задачу Неймана справедливы те же соображения, что и в отношении формулы (4.55): на внешние задачи для уравнения Лапласа она распространяется непосредственно, а для уравнения Пуассона — при условии регулярности решения и сходимости интеграла $\iiint_V f G dV$. При этом внешняя задача Неймана каких-либо особенностей по сравнению с внешней смешанной задачей не имеет, так как условие (4.34) не распространяется на функции, гармоничные в

бесконечной области. Функция Грина имеет простой физический смысл $u(\xi)$ поля, создаваемого точечными источниками. Поясним это на примере поля точечного электрического заряда. По закону Кулона, в свободном пространстве потенциал поля единичного точечного заряда, расположенного в точке x , равен $\frac{1}{4\pi r}$ (в рационализованной системе единиц), где $r = |\xi - x|$. Предположим, однако, что этот заряд расположен в плоскости внутри заземленного проводника. При этом на границе полости будут индуцированы заряды, потенциал $\frac{\Phi}{4\pi}$ поля которых вне полости должен скомпенсировать поле точечного заряда, поскольку потенциал заземленного проводника равен нулю. Вследствие этого, потенциал на границе полости должен удовлетворять граничному условию $\Phi = -\frac{1}{r}$. Отсюда ясно, что потенциал полного поля в полости $\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r} + \Phi \right)$ представляет функцию Грина задачи Дирихле, поставленной для образованной полостью области.

Коснемся вопроса о существовании функции Грина. Как ясно из их физической интерпретации, следует ожидать, что функция Грина существует при весьма общих условиях. В теории дифференциальных уравнений эллиптического типа доказывается, что функция Грина существует, если решения соответствующих граничных задач существуют и единственны. Решения этих задач представимы формулами (4.55) и (4.61).

Вопросы к четвертой главе

1. Какое распределение температуры удовлетворяет уравнению Лапласа?
2. Как называют первую краевую задачу для уравнения Лапласа?
3. Чем характеризуются внутренние и внешние краевые задачи для уравнения Лапласа?
4. Как определяется решение уравнения Лапласа, обладающего сферической симметрией?
5. Какую функцию называют фундаментальным решением уравнения Лапласа на плоскости?
6. Какие формулы используются при изучении уравнений эллиптического типа?
7. Как выглядит расчетная схема для вывода формулы Грина?
8. Как выглядит основная интегральная формула Грина?
9. Сформулируйте первую внутреннюю краевую задачу (внутреннюю задачу Дирихле) для уравнения Лапласа при непрерывности граничной функции.
10. Сформулируйте теорему о среднем значении гармонической функции
11. Докажите единственность решения внешней первой краевой задачи для функций двух переменных.
12. В чем заключается решение краевых задач для уравнения Лапласа методом разделения переменных?
13. Поясните физический смысл функции Грина на примере поля точечного заряда.

РАСЧЕТНАЯ РАБОТА ПО КУРСУ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

5.1. Методические указания по решению типовых заданий расчетной работы

Задание 1. Найти области гиперболичности, эллиптичности и параболичности уравнения

$$(l+x)u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2u_{yy} = 0 \quad (5.1)$$

И исследовать их зависимость от l , где l – числовой параметр.

Решение. Дискриминант уравнения (5.1) равен

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = x^2y^2 + (l+x)y^2 = y^2(x^2 + x + l) = y^2(x-x_1)(x-x_2),$$

где $x_1 = -\frac{1-\sqrt{1-4l}}{2}$, $x_2 = -\frac{1+\sqrt{1-4l}}{2}$.

При $l < \frac{1}{4}$, дискриминант уравнения (5.1) будет больше нуля когда $x < x_1$, а также при $x > x_2$ и уравнение в этом случае будет гиперболично, а при $x_1 < x < x_2$ оно эллиплично, поскольку дискриминант уравнения будет меньше нуля, прямые $x = x_1$, и $x = x_2$, $y = 0$ состоят из точек параболичности. При $l = \frac{1}{4}$ область эллиптичности исчезает, так как $x_1 = x_2 = -\frac{1}{2}$; прямая $x = -\frac{1}{2}$ состоит из точек параболичности. При $l > \frac{1}{4}$ уравнение гиперболично всюду.

Задание 2. Найти решение $y = y(x)$ дифференциального уравнения

$$y'' + \lambda y = 0, \quad (5.2)$$

$$1 \leq x \leq 2, \quad y(1) = y'(2) = 0 \quad (5.3)$$

Решение. Рассмотрим три случая.

1) $\lambda < 0$. Общее решение уравнения (5.2) имеет вид

$$y = C_1 \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda}(x-1) + C_2 \operatorname{ch} \sqrt{-\lambda}(x-1)$$

Из условия $y(1) = 0$ находим $C_2 = 0$, $y(x) = C_1 \operatorname{sh} \sqrt{-\lambda}(x-1)$.

Из условия $y'(2) = 0$ получаем $C_1 = 0$, т.е. $y(x) \equiv 0$;

2) $\lambda = 0$. Общее решение уравнения (5.2) имеет вид $y(x) = C_1 x + C_2$

Из условия (3) следует $C_1 = C_2 = 0$, т.е. $y(x) \equiv 0$.

3) $\lambda > 0$. Общее решение уравнения (5.2) имеет вид

$$y(x) = C_1 \sin \sqrt{\lambda}(x-1) + C_2 \cos \sqrt{\lambda}(x-1)$$

Из условия $y(1) = 0$ получаем $C_2 = 0$, $y(x) = C_1 \sin \sqrt{\lambda}(x-1)$. Условие $y'(2) = 0$ приводит к уравнению $C_1 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} = 0$. Так как $\sqrt{\lambda} \neq 0$ и $C_1 \neq 0$, то $\cos \sqrt{\lambda} = 0$, откуда следует

$$\sqrt{\lambda} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

таким образом, собственные значения задачи (5.2) – (5.3) равны

$$\lambda_n = \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right)^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

Собственные функции: $y_n = \sin \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right) (x-1), \quad n = 1, 2, \dots$

Задание 3. Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2 \frac{d^2 u}{dx^2} - y^2 \frac{d^2 u}{dy^2} = 0.$$

Решение. Здесь $a = x^2$, $b = 0$, $c = -y^2$, $b^2 - ac = x^2 y^2 > 0$, следовательно, это уравнение гиперболического типа. Составим характеристическое уравнение:

$$x^2 (dy)^2 - y^2 (dx)^2 = 0 \quad \text{или} \quad (x dy + y dx)(x dy - y dx) = 0$$

Получаем два дифференциальных уравнения

$$x dy + y dx = 0 \quad \text{и} \quad x dy - y dx = 0.$$

Разделим переменные и проинтегрируем

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0, \quad \ln y + \ln x = \ln C_1$$

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0, \quad \ln y - \ln x = \ln C_2.$$

После потенцирования получим $x \cdot y = C_1$ и $\frac{y}{x} = C_2$

Введем новые переменные $\xi = xy$, $\eta = y/x$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} y - \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{y}{x^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} x + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{1}{x};$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} y \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{y}{x^2} \right) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) y - \\
&- \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \frac{y}{x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{2y}{x^3} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} y + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{y}{x^2} \right) y - \\
&- \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} y - \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{y}{x^2} \right) \frac{y}{x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{2y}{x^3} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} y^2 - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{y^2}{x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{y^2}{x^4} + 2 \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{y}{x^3}; \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right) \frac{1}{x} = \\
&= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} x + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{1}{x} \right) x + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \xi} x + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{1}{x} \right) \frac{1}{x} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} x^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{1}{x^2};
\end{aligned}$$

Подставим в дифференциальное уравнение найденные для вторых производных выражения, получим

$$\begin{aligned}
x^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} y^2 - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{y^2}{x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{y^2}{x^4} + 2 \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{y}{x^3} \right) - y^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} x^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{1}{x^2} \right) &= 0 \\
-4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \cdot y^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{y}{x} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} \cdot \frac{1}{xy} = 0; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2\xi} \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} &= 0;
\end{aligned}$$

Уравнение приведено к каноническому виду.

Задание 4. Найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} \tag{5.4}$$

удовлетворяющее краевым условиям:

$$U(0,t) = 0; \quad U(l,t) = 0; \tag{5.5}$$

$$U(x,0) = x^2; \quad \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 0. \tag{5.6}$$

Решение. Будем искать частное решение, удовлетворяющее краевым условиям, в виде произведения двух функций $X(x)$ и $T(t)$.

$$U(x,t) = X(x) \cdot T(t).$$

Подставим это решение в уравнение (5.4)

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} = X(x) \cdot T''(t); \quad \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = T(t) X''(x); \quad X(x) \cdot T''(t) = T(t) X''(x)$$

Разделим в последнем уравнении переменные, получим

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad (5.7)$$

В левой части равенства (5.7) стоит функция от t , а в правой от x . Равенство возможно, когда левая и правая части не зависят ни от x , ни от t и равна константе, то есть $\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\beta$. Отсюда получим

$$X''(x) + \beta X(x) = 0; \quad T''(t) + \beta a^2 T(t) = 0.$$

Общее решение этих уравнений будет:

$$X(x) = A \cdot \cos \sqrt{\beta} x + B \cdot \sin \sqrt{\beta} x. \quad (5.8)$$

$$T(t) = C \cdot \cos a \cdot \sqrt{\beta} t + D \cdot \sin a \cdot \sqrt{\beta} t \quad (5.9)$$

Здесь A, B, C, D – произвольные постоянные.

Решение $U(x, t)$ будет иметь вид

$$U(x, t) = (A \cdot \cos \sqrt{\beta} x + B \cdot \sin \sqrt{\beta} x)(C \cdot \cos a \cdot \sqrt{\beta} t + D \cdot \sin a \cdot \sqrt{\beta} t)$$

Найдем A и B используя граничные условия. Из граничных условий (5.5) следует, что при $x = 0$ и при $x = l$ функция $U(x, t)$ при любом t равна нулю. Поскольку $U(x, t) = T(t) \cdot X(x)$, то в этом случае должны равняться нулю либо $T(t)$, либо $X(x)$. $T(t)$ не может тождественно равняться нулю, поскольку тогда бы $U(x, t)$ равнялась нулю при любом x и t , что условию задачи противоречит. Следовательно, $X(x)$ должно удовлетворять условию (5), то есть $X(0) = 0, X(l) = 0$. Из (8) следует:

$$0 = A \cdot 1 + B \cdot 0; \quad 0 = A \cdot \cos \sqrt{\beta} \cdot l + B \cdot \sin \sqrt{\beta} \cdot l.$$

Отсюда получим $A = 0$ и $B \cdot \sin \sqrt{\beta} \cdot l = 0$. $B \neq 0$, так как при $B = 0$ и $A = 0$, X тоже будет равен нулю, что противоречит условию. Значит $\sin \sqrt{\beta} \cdot l = 0$. И $\sqrt{\beta} = \frac{n\pi}{l}$, ($n = 1, 2, \dots$) $n \neq 0$, поскольку тогда $\sqrt{\beta} = 0$, $X(x) = 0$ и $U(x, t)$ тождественно равно нулю, что невозможно. Значит $X(x) = B \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x$. Для найденных собственных значений β решение уравнения (5.4) можно записать так:

$$U_n(x, t) = \sin \frac{n\pi}{l} x \left(C_n \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{an\pi}{l} t \right) \quad (5.10)$$

Каждому n соответствует свое решение U_n со своими постоянными C_n и D_n . Постоянная B включена в C_n и D_n . Эти постоянные должны быть такими, чтобы решение соответствовало начальным условиям (5.6). При $t = 0$ уравнение (5.10) примет вид: $x^2 = C_n \sin \frac{n\pi}{l} x$. Отсюда $C_n = x^2 / \sin \frac{n\pi}{l} x$.

Подставив найденное значение C_n в (5.9), получим:

$$U_n(x,t) = x^2 \cos \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \frac{an\pi}{l} t.$$

Для определения D_n воспользуемся вторым начальным условием (5.6).

$$\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = - \frac{an\pi}{l} (x^2 \sin \frac{an\pi}{l} t + D_n \sin \frac{n\pi}{l} x \cos \frac{an\pi}{l} t) = 0$$

При $t = 0$, из последнего выражения получается $D_n \frac{an\pi}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x = 0$.

$\sin \frac{n\pi}{l} x$ не может равняться нулю при всех значениях x , значит $D_n = 0$.

Решением уравнения с краевыми условиями (5.5 – 5.6) будет:

$$U_n(x,t) = x^2 \cos \frac{an\pi}{l} t.$$

Сумма всех решений также является решением:

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} x^2 \cos \frac{an\pi}{l} t.$$

Задание 5. Применим метод разделения переменных для решения уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (5.11)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде произведения двух функций, каждая из которых зависит от одной переменной:

$$T(x,t) = V(x) \cdot U(t) \quad (5.12)$$

Поскольку это произведение есть решение, подставим его в уравнение (5.11), найдя предварительно частные производные.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = V(x) \cdot U'(t); \quad \frac{\partial T}{\partial x} = V'(x) \cdot U(t); \quad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = V''(x) \cdot U(t). \quad (5.13)$$

$$V(x) \cdot U'(t) = a^2 \cdot V''(x) \cdot U(t) \text{ или } \frac{U'(t)}{a^2 U(t)} = \frac{V''(x)}{V(x)} = -\beta^2 \quad (5.14)$$

Каждое из отношений (5.14) не может зависеть ни от x , ни от t и поэтому, равно константе, которую обозначим $-\beta^2$. Из (5.14) получим два уравнения:

$$U'(t) + \beta^2 a^2 \cdot U(t) = 0 \quad \text{и} \quad V''(x) + \beta^2 V(x) = 0.$$

Для их решения запишем характеристические уравнения и найдем их корни:

$$1) \quad r + a^2 \cdot \beta^2 = 0; \quad r = -a^2 \cdot \beta^2.$$

Решение первого уравнения будет иметь вид:

$$U(t) = C_1 e^{-a^2 \cdot \beta^2 t}.$$

где C_1 – произвольная константа.

$$2) \quad r^2 + \beta^2 = 0, \quad r^2 = -\beta^2, \quad r_{1,2} = \pm \beta \cdot i$$

Так как корни характеристического уравнения комплексные, решение второго уравнения примет такой вид:

$$V(x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x,$$

где A, B – произвольные константы.

Подставим найденные значения в (5.12), получим:

$$T(x, t) = e^{-a^2 \cdot \beta^2 t} \cdot [A(\beta) \cos \beta x + B(\beta) \sin \beta x] \quad (5.15)$$

Постоянная C_1 включена в $A(\beta)$ и $B(\beta)$.

Множество значений β находится из краевых условий и называются собственными значениями для данной краевой задачи. Каждому собственному значению β соответствует свое решение (5.15) и свои константы A и B . Поэтому их можно считать функциями β . Сумма решений (5.15) так же является решением:

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x, t),$$

где n – номер собственного значения β .

Задание 6. Найти решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \leq r < 2$, принимающее на границе круга значения $u|_{r=2} = 2\varphi + 1$.

Решение задачи будем искать в виде

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \cdot r^n.$$

Найдем коэффициенты Фурье:

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (2\varphi + 1) d\varphi = \frac{1}{\pi} (\varphi^2 + \varphi) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 2.$$

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi 2^n} \int_{-\pi}^{\pi} (2\varphi + 1) \cos n\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi 2^n} \left[(2\varphi + 1) \frac{1}{n} \sin n\varphi \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2 \frac{1}{n} \sin n\varphi d\varphi \right] = \\ &= \frac{2}{\pi 2^n n^2} \cos n\varphi \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{1}{\pi 2^n} \int_{-\pi}^{\pi} (2\varphi + 1) \sin n\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi 2^n} \left[(2\varphi + 1) \frac{-1}{n} \cos n\varphi \Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} 2 \frac{1}{n} \cos n\varphi d\varphi \right] = \\ &= \frac{-(-1)^n 4\pi}{\pi 2^n n} + \frac{2}{\pi 2^n n^2} \sin n\varphi \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-2} n}. \end{aligned}$$

$$u(r, \varphi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-2} n} \sin n\varphi \right) r^n \quad \text{Ответ: } u(r, \varphi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-2} n} \sin n\varphi \right) r^n$$

5.2. Варианты заданий для выполнения расчетной работы

В каждом варианте нужно выполнить следующие задания:

1. Найти области гиперболичности, эллиптичности и параболичности уравнения и исследовать их зависимость от l , где l – числовой параметр.
2. Найти все собственные числа и собственные решения краевой задачи (задача Штурма – Лиувилля)
3. Привести уравнение к каноническому виду.
4. Решить первую смешанную задачу для волнового уравнения на отрезке.
5. Найти решение первой смешанной задачи для уравнения теплопроводности на отрезке.
6. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в круге.

Вариант 1

1. $(l+x)u_{xx}+2xyu_{xy}-y^2u_{yy}=0$

2. $y''+\square y=0, 1 \leq x \leq 2, y(1)=y'(2)=0$

3. $u_{xx}+2u_{xy}-u_{yy}+u_x+u_y$

4. $u_{tt}=u_{xx}, 0 < x < 1, 0 < t < \infty, u(x,0)=x(x-1), u_t(x,0)=0, u(0,t)=0, u(1,t)=0$

5. $u_t=16u_{xx}, 0 < x < 3, t > 0, u(x,0)=\begin{cases} \frac{x^2}{3}, & 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ 3-x, & \frac{3}{2} < x \leq 3 \end{cases}$

6. $\Delta u=0, 0 \leq r < 1, u|_{r=1} = 2 \cos \varphi$

Вариант 2

1. $lu_{xx}+2xyu_{xy}-y^2u_{yy}=0$

2. $y''+\square y=0, \frac{3}{2} \leq x \leq 2, y(\frac{3}{2})=y'(2)=0$

3. $u_{xx}+4u_{xy}+4u_{yy}-u_x-2u_y=0$

4. $u_{tt}=u_{xx}, 0 < x < \frac{3}{2}, 0 < t < \infty, u(x,0)=x(x-\frac{3}{2}), u_t(x,0)=0, u(0,t)=0, u(\frac{3}{2},t)=0$

5. $u_t=u_{xx}, 0 < x < 2, t > 0, u(x,0)=\begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}, u(0,t)=u(2,t)=0$

6. $\Delta u=0, 0 \leq r < 2, u|_{r=2} = 2 \sin \varphi$

Вариант 3

1. $(l-x)u_{xx}+2xyu_{xy}-y^2u_{yy}=0$

2. $y''+\square y=0, \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, y(\frac{\pi}{2})=y'(\pi)=0$

3. $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}-2u_x-2u_y=0$

4. $u_{tt}=u_{xx}, 0 < x < \frac{3}{2}, 0 < t < \infty, u(x,0)=x(x-\frac{3}{2}), u_t(x,0)=0, u(0,t)=0, u(\frac{3}{2},t)=0$

5. $u_t=25u_{xx}, 0 < x < 5, t > 0, u(x,0)=\begin{cases} \frac{2x^2}{5}, & 0 \leq x \leq \frac{5}{2} \\ 5-x, & \frac{5}{2} < x \leq 5 \end{cases}, u(0,t)=u(5,t)=0$

6. $\Delta u=0, 0 \leq r < 1, u|_{r=1} = 2 \sin \varphi$

Вариант 4

1. $(l+y)u_{xx} + 2xyu_{xy} - yu_{yy} = 0$

2. $y'' + \square y = 0, \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, y(\frac{\pi}{4}) = y'(\frac{\pi}{2}) = 0$

3. $u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} + u_x + 3u_y = 0$

4. $u_{tt} = 4u_{xx}, 0 < x < 2, 0 < t < \infty, u(x, 0) = x(x-2), u_t(x, 0) = 0, u(0, t) = 0, u(2, t) = 0$

5. $u_t = 16u_{xx}, 0 < x < 4, t > 0, u(x, 0) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x \leq 2 \\ 4-x, & 2 < x \leq 4 \end{cases}, u(0, t) = u(4, t) = 0$

6. $\Delta u = 0, 0 \leq r < 2, u|_{r=2} = \cos \varphi$

Вариант 5

1. $(l-y)u_{xx} + 2xyu_{xy} - yu_{yy} = 0$

2. $y'' + \square y = 0, \frac{1}{2} \leq x \leq 1, y(\frac{1}{2}) = y'(1) = 0$

3. $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - 2u_x + 6u_y = 0$

4. $u_{tt} = \frac{1}{4}u_{xx}, 0 < x < \frac{1}{2}, 0 < t < \infty, u(x, 0) = x(x - \frac{1}{2}), u_t(x, 0) = 0, u(0, t) = 0, u(\frac{1}{2}, t) = 0$

5. $u_t = 4u_{xx}, 0 < x < 5, t > 0, u(x, 0) = \begin{cases} \frac{2x^2}{5}, & 0 \leq x \leq \frac{5}{2} \\ 5-x, & \frac{5}{2} < x \leq 5 \end{cases}, u(0, t) = u(5, t) = 0$

6. $\Delta u = 0, 0 \leq r < 3, u|_{r=3} = 2 \sin \varphi$

Вариант 6

1. $2lu_{xx} + 2xyu_{xy} - yu_{yy} = 0$

2. $y'' + \square y = 0, \frac{3}{4} \leq x \leq 1, y(\frac{3}{4}) = y'(1) = 0$

3. $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} - 3u_x - 3u_y = 0$

4. $u_{tt} = 4u_{xx}, 0 < x < 1, 0 < t < \infty, u(x, 0) = x(x-1), u_t(x, 0) = 0, u(0, t) = 0, u(1, t) = 0$

5. $u_t = u_{xx}, 0 < x < 3, t > 0, u(x, 0) = \begin{cases} \frac{2x^2}{3}, & 0 \leq x \leq \frac{3}{2} \\ 3-x, & \frac{3}{2} < x \leq 3 \end{cases}, u(0, t) = u(3, t) = 0$

6. $\Delta u = 0, 0 \leq r < 1, u|_{r=1} = 4 \sin \varphi$

Вариант 7

1. $lyu_{xx} + 2xyu_{xy} - yu_{yy} = 0$

2. $y'' + \square y = 0, \pi \leq x \leq 2\pi, y(\pi) = y'(2\pi) = 0$

3. $u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} + 3u_x - 6u_y = 0$

4. $u_{tt} = \frac{4}{9}u_{xx}, 0 < x < \frac{2}{3}, 0 < t < \infty, u(x, 0) = x(x - \frac{2}{3}), u_t(x, 0) = 0, u(0, t) = 0, u(\frac{2}{3}, t) = 0$

5. $u_t = 25u_{xx}, 0 < x < 8, t > 0, u(x, 0) = \begin{cases} \frac{x^2}{4}, & 0 \leq x \leq 4 \\ 8 - x, & 4 < x \leq 8 \end{cases}, u(0, t) = u(8, t) = 0$

6. $\Delta u = 0, 0 \leq r < 4, u|_{r=4} = 2 \cos \varphi$

Вариант 8

1. $4lyu_{xx} + 2xyu_{xy} - yu_{yy} = 0$

2. $y'' + \square y = 0, \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}, y(\frac{\pi}{2}) = y'(\frac{3\pi}{4}) = 0$

3. $9u_{xx} + 6u_{xy} + u_{yy} - 9u_x - 3u_y = 0$

4. $u_{tt} = 4u_{xx}, 0 < x < \frac{1}{2}, 0 < t < \infty, u(x, 0) = x(x - \frac{1}{2}), u_t(x, 0) = 0, u(0, t) = 0, u(\frac{1}{2}, t) = 0$

5. $u_t = 9u_{xx}, 0 < x < 2, t > 0, u(x, 0) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \end{cases}, u(0, t) = u(2, t) = 0$

6. $\Delta u = 0, 0 \leq r < 2, u|_{r=2} = 2 \sin \varphi$

Вариант 9

1. $(l+1)u_{xx} + 2xyu_{xy} - yu_{yy} = 0$

2. $y'' + \square y = 0, 1 \leq x \leq \frac{3}{2}, y(1) = y'(\frac{3}{2}) = 0$

3. $u_{xx} + 8u_{xy} + 16u_{yy} - u_x - 4u_y = 0$

4. $u_{tt} = u_{xx}, 0 < x < 2, 0 < t < \infty, u(x, 0) = x(x-2), u_t(x, 0) = 0, u(0, t) = 0, u(2, t) = 0$

5. $u_t = 16u_{xx}, 0 < x < 1, t > 0, u(x, 0) = \begin{cases} 2x^2, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}, u(0, t) = u(1, t) = 0$

6. $\Delta u = 0, 0 \leq r < 1, u|_{r=1} = 8 \sin \varphi$

Вариант 10

1. $(l-4)u_{xx} + 2xyu_{xy} - y^2u_{yy} = 0$

2. $y'' + \square y = 0, \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}, y(\frac{1}{4}) = y'(\frac{1}{2}) = 0$

3. $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} + 4u_x - 4u_y = 0$

4. $u_{tt} = 16u_{xx}, 0 < x < 3, 0 < t < \infty, u(x, 0) = x(x-3), u_t(x, 0) = 0, u(0, t) = 0, u(3, t) = 0$

5. $u_t = 4u_{xx}, 0 < x < 4, t > 0, u(x, 0) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x \leq 2 \\ 4-x, & 2 < x \leq 4 \end{cases}, u(0, t) = u(4, t) = 0$

6. $\Delta u = 0, 0 \leq r < 2, u|_{r=2} = 5 \cos \varphi$

Глава 6.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРОВЕДЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ТЕМЕ «АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»

6.1. Метод характеристик

Метод характеристик (метод Даламбера) – эффективный метод решения начальных и краевых задач для уравнений гиперболического типа, классическая форма которых имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} = 0. \quad (6.1)$$

К этому уравнению с помощью замены переменных $\alpha = x - at$; $\beta = x + at$ приводится, например, волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (6.2)$$

Общее решение (6.1) имеет вид

$$u(\alpha, \beta) = \Phi_1(\alpha) + \Phi_2(\beta).$$

где Φ_1 и Φ_2 – произвольные функции. Запишем с учетом (6.2)

$$u(x, t) = \Phi_1(x + at) + \Phi_2(x - at). \quad (6.3)$$

Первое слагаемое характеризует прямую волну, второе – обратную.

Для определения Φ_1 и Φ_2 необходимо использовать начальные и, возможно, граничные условия. Например, имеется решение уравнения (6.2) $u(x, t)$, $x \in]-\infty, +\infty[$, $t \in [0, +\infty[$, с начальными условиями

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x) \\ u'_t(x, 0) &= F(x) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Подставляя (3) в (4) получаем следующую систему

$$\begin{aligned}\Phi_1(x) &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x F(y)dy; \\ \Phi_2(x) &= \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2a} \int_x^{x_0} F(y)dy\end{aligned}\tag{6.5}$$

Искомое решение задачи Коши (6.2), (6.4) запишем в виде формулы Даламбера

$$u(x,t) = \frac{f(x-at) + f(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(y)dy$$

Если решение задачи (6.2), (6.4) имеется на интервале $x \in x[0, +\infty]$, то необходимо учесть граничные условия

$$u(0, t) = 0\tag{6.6}$$

$$u_x'(0, t) = 0\tag{6.7}$$

$$u_x'(0, t) - hu(0, t) = 0\tag{6.8}$$

В случае однородных граничных условий (6.6) и (6.7), решение задачи на полубесконечном интервале сводится к решению на бесконечном $x \in (-\infty, +\infty)$, продолжением начальных условий на весь промежуток нечетным образом, т.е. $f(-x) = -f(x)$, $F(-x) = -F(x)$.

Пример 1. Найти решение $u(x,t)$ задачи Коши, где $x \in]-\infty, +\infty[$, $t \in [0, +\infty[$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x,0) = \sin x, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0.$$

Решение. Используя формулу Даламбера (6.5), где $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = 0$

$$u(x,t) = \left[\sin\left(x - \frac{1}{2}t\right) + \sin\left(x + \frac{1}{2}t\right) \right] = \sin x \cos \frac{t}{2}\tag{6.9}$$

Пример 2. Найти распределение напряжения в момент времени t ($0 < t < \infty$) в неограниченном ($-\infty < x < \infty$) проводе линии без искажений (при выполнении условия $GL = CR$), где G , L , C , R соответственно проводимость, самоиндукция, емкость и сопротивление единицы длины провода, если напряжение и сила тока в начальный момент времени $f(x)$ и $F(x)$.

Решение. Сформулируем условия в виде задачи Коши:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x} + cu, \quad t \in [0, +\infty), \quad (6.10)$$

$$U(x,0) = f(x), \quad (6.11)$$

$$u_t(x,0) = -\frac{1}{C} F(x) - \frac{G}{C} f(x), \quad (6.12)$$

где $x \in (-\infty, +\infty)$. Уравнение (6.10) является гиперболическим и с учетом условия задачи и заменой $\alpha = x - at$; $\beta = x + at$. приводим к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha \partial \beta} = 0, \quad W = ue^{-\frac{b}{4a}(\beta-\alpha)}.$$

Согласно (6.3) можно записать

$$u(x,t) = e^{\frac{b}{2}t} (\Phi_1(x+at) + \Phi_2(x-at)). \quad (6.13)$$

Подставляя (6.13) в начальные условия (6.12), получаем следующую систему для определения Φ_1 и Φ_2 :

$$\begin{cases} \Phi_1(x) + \Phi_2(x) = f(x) \\ \frac{b}{2}(\Phi_1(x) - \Phi_2(x)) = a((\Phi_1'(x) - \Phi_2'(x))) = -\frac{1}{C}F'(x) - \frac{G}{C}f(x) \end{cases}$$

Учитывая, что $\frac{b}{2} = -\frac{G}{C}$, $\frac{1}{C} = \sqrt{\frac{L}{C}}$, можно записать

$$\begin{cases} \Phi_1(x) + \Phi_2(x) = f(x) \\ \Phi_1'(x) - \Phi_2'(x) = -\sqrt{\frac{L}{C}}F'(x); \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \Phi_1(x) + \Phi_2(x) = f(x) \\ \Phi_1(x) - \Phi_2(x) = -\sqrt{\frac{L}{C}}F(x) \end{cases}$$

откуда

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{2}(f(x) - \sqrt{\frac{L}{C}}F(x)); \quad \Phi_2(x) = \frac{1}{2}(f(x) + \sqrt{\frac{L}{C}}F(x)),$$

Согласно (6.13) искомое распределение запишется в виде

$$u(x,t) = \frac{1}{2} e^{\frac{b}{2}t} [f(x+at) + f(x-at) + \sqrt{\frac{L}{C}}(F(x+at) - F(x-at))]. \quad (6.14)$$

Задачи для самостоятельной работы

1. Найти решение $u(x,t)$ задачи Коши $(-\infty < x < +\infty; 0 < t < \infty)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u(x,0) = \cos x, \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0.$$

2. Найти решение $u(x,t)$ задачи Коши $(-\infty < x < +\infty; 0 < t < \infty)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u(x,0) = e^{-x}, u'_t(x,0) = 4.$$

3. Найти решение $u(x,t)$ задачи Коши $(-\infty < x < +\infty; 0 < t < \infty)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u(x,0) = b \sin x, u'_t(x,0) = c \cos x,$$

где b, c – произвольные константы.

4. Найти распределение тока в момент времени $t(0 < t < \infty)$ в неограниченном проводе линии без искажений ($GL=CR$), если напряжение и сила тока в начальный момент времени ($t=0$) равны соответственно $f(x)$ и $F(x)$.

5. В области $(0 \leq x < \infty; 0 < t < \infty)$ найти решение уравнения (6.2), удовлетворяющее условиям $u(x,0)=0$, $u'_t(x,0) = \sin x$, $u'_x(0,t) = 0$.

6. Найти при $(0 \leq x < \infty; 0 < t < \infty)$ решение уравнения (6.2), удовлетворяющее условиям $u(x,0) = \frac{x^2}{1+x^2}$, $u'_t(x,0) = 0$, $u'(0,t) = 0$.

7. Найти распределение тока в момент времени $t(0 < t < \infty)$ в полугограниченном проводе $(0 \leq x < \infty)$ линии без искажений ($GL=CR$), если напряжение и сила тока в начальный момент времени ($t=0$) равны соответственно $f(x)$ и $F(x)$, а на конце $x=0$ выполняется условие $i'_t(0,t) = 0$.

8. Полуограниченная струна $(0 \leq x < \infty)$ в начальный момент времени имеет форму $u(x,0)=0$ и начальную скорость

$$u'_t(x,0) = \begin{cases} c & \text{при } x \in [0, l) \\ 0 & \text{при } x \in [l, +\infty). \end{cases}$$

Найти форму струны в момент времени $t \in (0, +\infty)$.

6.2. Метод Фурье

Метод Фурье, или метод разделения переменных, широко используется при решении многих задач математической физики, в частности, при решении краевых задач для уравнений гиперболического и параболического типов, заданных в ограниченных областях. Поиск искомой функции нескольких переменных осуществляется в виде произведений функций одной переменной. После подстановки этого произведения в исходное уравнение получается несколько обыкновенных дифференциальных уравнений, часть которых с краевыми условиями исходной задачи является краевыми задачами Штурма-Лиувилля. Под решением этой задачи понимается определение всех собственных чисел λ , для которых существует нетривиально дважды непрерывно дифференцируемое решение $y(x)$ (собственная функция) уравнения

$$\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{dy}{dx} \right) - q(x)y + \lambda \rho(x) = 0 \quad (6.15)$$

Которое удовлетворяет граничным условиям

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \quad (6.16)$$

где $q(x) \geq 0$, $\rho(x) > 0$ – непрерывные на $[a, b]$ функции, $\rho(x) > 0$ – непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$.

Свойства собственных значений и собственных функций:

1. Существует счетное множество собственных значений $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$, $\lambda_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, которым соответствуют собственные функции $y_i(x)$.
2. Собственные функции на отрезке $[a, b]$, которые соответствуют разным значениям λ , ортогональны с весом $\rho(x)$

$$\int_a^b \rho(x) y_n(x) y_k(x) dx = 0 \quad \text{при } k \neq n$$

3. Теорема Стеклова. Всякая функция $f(x)$, которая удовлетворяет краевым условиям (16) и имеет непрерывную первую производную и кусочно-

непрерывную вторую производную, раскладывается в абсолютно равномерно сходящийся ряд по собственным функциям y_n :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x), \quad c_n = \int_a^b \rho(x) y_n(x) f(x) dx.$$

Следовательно, искомое решение краевой задачи можно представить в виде ряда по произведениям собственных функций соответствующих задач Штурма-Лиувилля.

Пример 1. Рассмотрим задачу решения волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < l, t > 0)$$

с граничными условиями

$$u(t, x = 0) = u(t, x = l) = 0 \quad (t \geq 0)$$

при начальных условиях

$$u(t = 0, x) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t = 0, x) = \psi(x) \quad (0 \leq x \leq l),$$

где $\varphi(x), \psi(x)$ - непрерывные функции, заданные на промежутке $[0; l]$.

Задача нахождения решения уравнения (6.1), удовлетворяющее указанным начальным и граничным условиям, называется смешанной задачей для волнового уравнения (6.1). Будем искать решение $u(t, x)$ уравнения (6.1) с помощью метода разделения переменных, т.е. строим решение в виде

$$u(t, x) = X(x) \cdot T(t), \quad (6.17)$$

где функция $X(x)$ зависит от одной переменной x , а функция $T(t)$ - зависит только от переменной t . Подставляя в уравнение (5.1) решение, записанное в виде (5.4), получим равенство:

$$X(x) \cdot T''(t) = a^2 \cdot X''(x) \cdot T(t).$$

Разделяем в полученном равенстве переменные (с учетом того, что ищем не тождественно равное нулю решение):

$$\frac{T''(t)}{a^2 \cdot T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Поскольку при подстановке решения в исходное уравнение полученное равенство должно выполняться при всех значениях переменных x , t , то равенство возможно тогда и только тогда, когда обе части его равны одной и той же постоянной, которую обозначим ($\square\lambda$). После приравнивания обеих частей равенства указанной константе, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda \cdot X(x) = 0 \\ T''(t) + a^2 \cdot \lambda \cdot T(t) = 0 \end{cases} \quad (6.18-6.19)$$

Запишем граничные условия (5.2) в терминах новых искомым функций $X(x)$ и $T(t)$:

$$X(0) \cdot T(t) = X(l) \cdot T(t) = 0. \quad (6.20)$$

Поскольку $T(t) \neq 0$ при всех t , то граничные условия для функции $X(x)$ примут вид: $X(0) = X(l) = 0$. В итоге получаем задачу Штурма-Лиувилля:

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda \cdot X(x) = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases} \quad (6.21)$$

Решением этой задачи являются собственные числа $\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}$ ($n \in \mathbb{N}$), каждому из которых соответствует собственная функция

$$X_n(x) = \sin \frac{\pi n x}{l}$$

Подставляя найденные числа $\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}$ в уравнение, получим линейной однородное дифференциальное уравнение для нахождения функций $T(t)$:

$T''(t) + \frac{\pi^2 n^2 a^2}{l^2} T(t) = 0$, решая которое методом Эйлера, находим

$$T_n(t) = a_n \cdot \cos \frac{\pi n a t}{l} + b_n \cdot \sin \frac{\pi n a t}{l}.$$

В итоге частные решения уравнения принимают вид $u_n(t, x) = X_n(x) \cdot T_n(t)$. Идея метода Фурье состоит в том, что общее решение задачи (6.1) ищется в виде суммы частных решений $u_n(t, x)$:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{l} \cdot \left(a_n \cdot \cos \frac{\pi n a t}{l} + b_n \cdot \sin \frac{\pi n a t}{l} \right). \quad (6.22)$$

Чтобы окончательно найти решение $u(t, x)$ остается лишь доопределить коэффициенты a_n и b_n функции $T_n(t)$ так, чтобы решение (6.21) удовлетворяло начальным условиям. Предварительно вычислив частную производную

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{l} \cdot \left(a_n \cdot \left(-\frac{\pi n a}{l} \right) \cdot \sin \frac{\pi n a t}{l} + b_n \cdot \frac{\pi n a}{l} \cdot \cos \frac{\pi n a t}{l} \right)$$

и подставив в $u(t, x)$ и в

$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x)$ $t = 0$, с учетом (6.22) получаем:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin \frac{\pi n x}{l} = \varphi(x) \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \frac{\pi n a}{l} \cdot \sin \frac{\pi n x}{l} = \psi(x) \end{cases}$$

Формулы представляют собой разложения функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряд Фурье по синусам в интервале $(0; l)$, т.е.

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \cdot \sin \frac{\pi n x}{l} dx \\ b_n \cdot \frac{\pi n a}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l \psi(x) \cdot \sin \frac{\pi n x}{l} dx \end{cases}$$

Подставляя найденные по формулам коэффициенты a_n и b_n в выражение (6.22), получаем общее решение смешанной задачи для волнового уравнения.

Пример 2. Решить задачу о свободных колебаниях конечной однородной струны, закрепленной на концах $x = 0$ и $x = 2$, если начальное отклонение струны имеет форму параболы с уравнением $u = 2x - x^2$, а начальная скорость точек струны равна нулю (коэффициент a считать равным 9).

Решение: пусть $u(t, x)$ - искомая функция, описывающая отклонение струны от положения равновесия в точке с координатой x в момент времени t . Тогда эта функция удовлетворяет волновому уравнению, с граничными условиями (которые выражают закрепленность концов струны) и начальными условиями (которые выражают начальную форму и начальную скорость точек струны), где $a = 9$, $l = 2$, $\varphi(x) = u(t = 0, x) = 2x - x^2$, $\psi(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(t = 0, x) = 0$.

Используя формулу (6.21), получим, что решение данной задачи имеет вид

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{2} \cdot \left(a_n \cdot \cos \frac{9\pi n t}{2} + b_n \cdot \sin \frac{9\pi n t}{2} \right). \quad (6.23)$$

Для нахождения a_n и b_n воспользуемся системой:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin \frac{\pi n x}{2} = \varphi(x) = 2x - x^2 \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \frac{9\pi n}{2} \cdot \sin \frac{\pi n x}{2} = \psi(x) = 0 \end{cases}.$$

Следовательно, используя систему, получим:

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{2} \int_0^2 (2x - x^2) \cdot \sin \frac{\pi n x}{2} dx \\ b_n \cdot \frac{9\pi n}{2} = \frac{2}{2} \int_0^2 0 \cdot \sin \frac{\pi n x}{2} dx \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

откуда следует, что $b_n = 0$, а для нахождения коэффициентов a_n необходимо вычислить интегралы:

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^2 (2x - x^2) \cdot \sin \frac{\pi n x}{2} dx = -\frac{2}{\pi n} (2x - x^2) \cdot \cos \frac{\pi n x}{2} \Big|_0^2 - (-1) \cdot \frac{2}{\pi n} \int_0^2 (2 - 2x) \cdot \cos \frac{\pi n x}{2} dx = (0 - 0) + \\ &+ \frac{2}{\pi n} \cdot (2 - 2x) \cdot \frac{2}{\pi n} \cdot \sin \frac{\pi n x}{2} \Big|_0^2 - \left(\frac{2}{\pi n} \right)^2 \cdot \int_0^2 (-2) \cdot \sin \frac{\pi n x}{2} dx = \frac{4}{\pi^2 n^2} ((2 - 8) \cdot \sin(\pi n) - (2 - 0) \cdot \sin 0) - \\ &- \frac{16}{\pi^3 n^3} \cos \frac{\pi n x}{2} \Big|_0^2 = (0 - 0) - \frac{16}{\pi^3 n^3} (\cos(\pi n) - 1) = \frac{16}{\pi^3 n^3} (1 - (-1)^n). \end{aligned}$$

Подставляя найденные коэффициенты в (6.23), получаем решение

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi n x}{2} \cdot \left(\frac{16}{\pi^3 n^3} (1 - (-1)^n) \cdot \cos \frac{9\pi n t}{2} + 0 \cdot \sin \frac{9\pi n t}{2} \right).$$

Ответ: $u(t, x) = \frac{16}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^n)}{n^3} \cdot \cos \frac{9\pi n t}{2} \cdot \sin \frac{\pi n x}{2}.$

Пример 3. Для струны, закрепленной на концах $x=0$ и $x=1$, найти решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$u|_{t=0} = 7 \sin(2\pi x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 3 \sin(4\pi x) - \sin(9\pi x).$$

Решение: по условию задачи: $a = 2$, $l = 1$, $\varphi(x) = u(t = 0, x) = 7 \sin(2\pi x)$,

$\psi(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(t = 0, x) = 3 \sin(4\pi x) - \sin(9\pi x)$. С учетом формулы (6.11) решение указанной смешанной задачи примет вид:

$$u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi n x) \cdot (a_n \cdot \cos(2\pi n t) + b_n \cdot \sin(2\pi n t)). \quad (6.24)$$

Поэтому из (5.13) получим систему:

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{1} \int_0^1 7 \sin(2\pi x) \cdot \sin(\pi n x) dx \\ b_n \cdot 2\pi n = \frac{2}{1} \int_0^1 (3 \sin(4\pi x) - \sin(9\pi x)) \cdot \sin(\pi n x) dx \end{cases} \quad (6.25)$$

Поскольку система собственных функций $\{\sin(\pi x), \sin(2\pi x), \dots, \sin(\pi n x), \dots\}$ обладает свойством ортогональности, то

$$\int_0^1 \sin(\pi n x) \cdot \sin(\pi m x) dx = 0, \text{ если } n \neq m. \quad (6.26)$$

Поэтому $a_n = 14 \int_0^1 \sin(2\pi x) \cdot \sin(\pi n x) dx = 0$ для всех натуральных чисел $n \neq 2$.

При $n = 2$ получаем:

$$a_2 = 14 \int_0^1 \sin^2(2\pi x) dx = \frac{14}{2} \int_0^1 (1 - \cos(4\pi x)) dx = 7 \int_0^1 dx - 7 \int_0^1 \cos(4\pi x) dx = 7x|_0^1 - \frac{7}{4\pi} \sin(4\pi x)|_0^1 = 7.$$

Аналогично определяем:

$$b_n = \frac{2}{2\pi n} \int_0^1 (3\sin(4\pi x) - \sin(9\pi x)) \cdot \sin(\pi n x) dx = \frac{3}{\pi n} \int_0^1 \sin(4\pi x) \cdot \sin(\pi n x) dx - \frac{1}{\pi n} \int_0^1 \sin(9\pi x) \cdot \sin(\pi n x) dx.$$

Учитывая свойство ортогональности (5.17), заметим, что

$$\int_0^1 \sin(4\pi x) \cdot \sin(\pi n x) dx = 0 \text{ для всех } n \neq 4$$

и

$$\int_0^1 \sin(9\pi x) \cdot \sin(\pi n x) dx = 0 \text{ для всех } n \neq 9.$$

Следовательно, все коэффициенты b_n ($n \in \mathbb{N}$), кроме b_4 и b_9 , равны нулю.

При $n = 4$ имеем:

$$b_4 = \frac{3}{4\pi} \int_0^1 \sin^2(4\pi x) dx = \frac{3}{8\pi} \int_0^1 (1 - \cos(8\pi x)) dx = \frac{3}{8\pi} x \Big|_0^1 - \frac{3}{64\pi^2} \sin(8\pi x) \Big|_0^1 = \frac{3}{8\pi} - 0 = \frac{3}{8\pi}. \quad (6.27)$$

При $n = 9$:

$$b_9 = -\frac{1}{9\pi} \int_0^1 \sin^2(9\pi x) dx = -\frac{1}{18\pi} \int_0^1 (1 - \cos(18\pi x)) dx = -\frac{1}{18\pi} x \Big|_0^1 + \frac{1}{324\pi^2} \sin(18\pi x) \Big|_0^1 = -\frac{1}{18\pi}.$$

Подставляя найденные коэффициенты в (5.15), получим

$$u(t, x) = 7 \sin(2\pi x) \cdot \cos(4\pi t) + \frac{3}{8\pi} \sin(4\pi x) \cdot \sin(8\pi t) - \frac{1}{18\pi} \sin(9\pi x) \cdot \sin(18\pi t). \quad (6.28)$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти закон свободных колебаний струны, закрепленной на концах $x=0$ и $x=3$, если в начальный момент времени форма струны имеет вид ломаной OAB , где $O(0; 0)$, $A(2; -0,1)$, $B(3; 0)$. Найти форму струны в момент времени t , если начальные скорости точек равны нулю.

2. Найти закон свободных колебаний (в случае $a = 1$) струны длины 1, расположенной на отрезке $[0;1]$, если в начальный момент времени струне придали форму параболы

$$u(t=0, x) = \varphi(x) = \frac{x(1-x)}{8},$$

а затем струну отпустили с начальной скоростью, равной нулю.

3. В полуполосе $0 < x < 3, t > 0$ для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

решить смешанную задачу:

$$u(t, x=0) = u(t, x=3) = 0,$$

$$u(t=0, x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(t=0, x) = \sin \frac{2\pi x}{3}.$$

4. Найти закон распределения температуры $u(t, x)$ внутри стержня, у которого левый конец (при $x=0$) поддерживают при постоянной нулевой температуре, а правый конец (при $x=l$) теплоизолирован от окружающей среды, т.е. $\frac{\partial u}{\partial x}(t, x=l) = 0$. Причем начальная температура стержня задана функцией

$$u(t=0, x) = \varphi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ u_0, & \frac{l}{2} < x \leq l \end{cases}.$$

5. Найти решение смешанной задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 3, t > 0, \\ u(t, x=0) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, x=3) = 0; & u(t=0, x) = x. \end{cases}$$

6. Найти закон распределения температуры в стержне длиной π с теплоизолированной боковой поверхностью, если на концах стержня $x=0$ и $x=\pi$ поддерживается нулевая температура, а начальная температура стержня задана функцией $u(t=0, x) = \varphi(x) = 2 \sin 3x - \sin x$.

6.3. Метод интегральных преобразований

Этот метод базируется на взаимно обратных формулах

$$F(\alpha) = \int_a^b f(x)K(\alpha, x)dx; \quad (6.29)$$

$$f(x) = \int_l F(\alpha)R(x, \alpha)d\alpha, \quad (6.30)$$

первая из которых определяет изображение (трансформанту) $F(\alpha)$ функции $f(x)$, заданной на интервале $a < x < b$, а вторая восстанавливает оригинал $f(x)$. Функции двух переменных $K(\alpha, x)$ и $R(x, \alpha)$ называются ядрами прямого и обратного преобразования. В (29) α может принимать комплексные значения, в (30) интегрирование по контуру l производится в комплексной плоскости. Преобразуемая функция также может зависеть от нескольких переменных: $f=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Ее трансформантой по некоторой переменной x_j является функция $f=f(x_1, x_2, \dots, x_{j-1}, \alpha, x_{j+1}, \dots, x_n)$. Интегральное преобразование (ИП) переводит функцию n переменных в функцию $n-1$ переменной, так как α можно считать параметром преобразования.

Применение метода ИП к решению краевых задач в частных производных сводится к следующему: обе части дифференциального уравнения умножаются на функцию $K(\alpha, x_j)$ и интегрируются по переменной x_j на всем интервале ее определения ($a_j \leq x_j \leq b_j$). Если при этом выполняются следующие два условия: а) применение ИП исключает переменную x_j в обеих частях уравнения; б) выполняются граничные условия по исключаемой переменной, то в результате приходим к краевой задаче, размерность которой на единицу меньше размерности исходной задачи (x_j исключена), причем новой неизвестной является трансформанта искомой функции.

Если удастся повторить описанный прием, последовательно исключая с помощью ИП остальные переменные, то на последнем шаге получим одномерную краевую задачу. С помощью известных методов и обратного

преобразования получаем решение задачи. При использовании ИП основная трудность – в вычислении интегралов (6.29-6.30), которые для основных ИП широкого класса функций собраны в таблицы. К основным ИП относятся:

Экспоненциальное преобразование Фурье

$$K(\alpha, x) = e^{i\alpha x}, a = -\infty, b = +\infty;$$

$$R(\alpha, x) = \frac{1}{2\pi} e^{-i\alpha x}, l = (-\infty, +\infty).$$

Для преобразования производных функций $f(x)$ необходима формула

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^{(m)}(x) e^{-i\alpha x} dx = (-i\alpha)^m F(\alpha); f^{(k)}(x) \Big|_{x \rightarrow \pm\infty} = 0. \quad (6.31)$$

Для ИП востребованы также формулы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix(\alpha+a)} dx = 2\pi\delta(\alpha+a); \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} e^{i\alpha x} dx = i\pi \operatorname{sgn}(\alpha), \quad (6.32)$$

где $\delta(\alpha)$ – дельта функция со свойством

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(\tau-s)d\tau = f(s); \quad (6.33)$$

$\operatorname{sgn}(s)$ – функция знака

$$\operatorname{sgn}(s) = \begin{cases} 1, s > 0 \\ 0, s = 0 \\ -1, s < 0 \end{cases} \quad (6.34)$$

Косинус-преобразование Фурье по (6.29-6.30) с изменениями

$$K(\alpha, x) = \cos \alpha x, a = 0, b = +\infty;$$

$$R(\alpha, x) = \frac{2}{\pi} \cos \alpha x, l = (0, +\infty).$$

Применение \cos -преобразования опирается на свойство:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f''(x) \cos \alpha x dx = -\alpha^2 F(\alpha) - f'(0); f^{(k)}(x) \Big|_{x \rightarrow \infty} = 0. \quad (6.35)$$

Синус-преобразование Фурье по (6.29-6.30), где

$$K(\alpha, x) = \sin \alpha x, a = 0, b = +\infty;$$

$$R(\alpha, x) = \frac{2}{\pi} \sin \alpha x, l = (0, +\infty).$$

Применение *sin*-преобразования связано со свойством:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f''(x) \sin \alpha x dx = -\alpha^2 F(\alpha) - \alpha f(0); f^{(k)}(x) \Big|_{x \rightarrow \infty} = 0, K = 1, 2. \quad (6.36)$$

Преобразование Лапласа (операционный метод). Пусть $f(x)$ удовлетворяет условию $|f(x)| < M e^{S_0 x}$ ($x \in (0, +\infty)$), где $M, S_0 > 0$ – постоянные. Преобразование Лапласа соответствует (29-30) с учетом

$$K(\alpha, x) = e^{-\alpha x}, a = 0, b = +\infty;$$

$$R(\alpha, x) = \frac{1}{2\pi i} e^{\alpha x}, l = (\gamma + i\infty, \gamma - i\infty), \gamma > S_0.$$

Преобразование производных производится так:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^{(m)}(x) e^{-\alpha x} dx = \alpha^m F(\alpha) - \sum_{K=0}^{M-1} \alpha^{M-1-K} f^{(K)}(0). \quad (6.37)$$

Пример 1. Решить задачу о свободных колебаниях бесконечной струны:

$u(x, t)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, (-\infty < x < +\infty; 0 < t < \infty); \quad (6.38)$$

$$\frac{\partial^K u}{\partial x^K} \Big|_{x \rightarrow \infty} = 0, K = 0, 1, (0 < t < \infty); \quad (6.39)$$

$$u(x, 0) = \phi(x), \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x). \quad (6.40)$$

Решение. Применим экспоненциальное преобразование Фурье. Область его действия совпадает с областью изменений x . Это преобразование преобразует операцию дифференцирования в умножения трансформанты на соответствующую степень параметра преобразования. Применение преобразования Фурье позволит удовлетворить (6.39). Умножим (6.38) на ядро преобразования и проинтегрируем по x на бесконечном интервале:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} e^{i\alpha x} dx = \alpha^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{i\alpha x} dx, 0 < t < \infty. \quad (6.41)$$

Обозначив $u(\alpha, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{i\alpha x} dx$, подставив (6.31) в (6.41) получим

дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u(\alpha, t)}{\partial t^2} = a^2 (-i\alpha)^2 u(\alpha, t).$$

Преобразуя (6.40) и вводя обозначения

$$\Phi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau) e^{i\alpha\tau} d\tau; \Psi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\tau) e^{i\alpha\tau} d\tau, \quad (6.42)$$

получаем следующую задачу для трансформанты $u(\alpha, t)$

$$\frac{\partial^2 u(\alpha, t)}{\partial t^2} = a^2 \alpha u(\alpha, t) = 0, 0 < t < \infty; \quad (6.43)$$

$$u(\alpha, 0) = \Phi(\alpha), u'_t(\alpha, 0) = \Psi(\alpha). \quad (6.44)$$

Определяя в общем решении $u(\alpha, t) = C_0(\alpha) \cos aat + C_1(\alpha) \sin aat$, уравнения (6.43) произвольные коэффициенты $C_j(\alpha)$ ($j=0,1$) с помощью (6.44) и применяя формулу обратного преобразования Фурье, получаем

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\Phi(\alpha) \cos aat + \frac{1}{a\alpha} \Psi(\alpha) \sin aat \right] e^{-i\alpha x} dx. \quad (6.45)$$

Функция $u(x, t)$ является решением краевой задачи (6.38-6.40). Это решение можно выразить через функции $\phi(x)$, $\psi(x)$. Подставим (6.42-6.43) и изменим порядок интегрирования:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_1(x, t, \tau) \phi(\tau) d\tau + \frac{1}{2\pi a} \int_{-\infty}^{+\infty} R_2(x, t, \tau) \psi(\tau) d\tau; \quad (6.46)$$

где $R_1(x, t, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(x-\tau)} \cos aat d\alpha$, $R_2(x, t, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha(x-\tau)} \sin aat d\alpha$.

Воспользовавшись формулой Эйлера $e^{-\alpha(x-\tau)} = \cos \alpha(x-\tau) - i \sin \alpha(x-\tau)$ и интегралами (6.32), получим:

$$\begin{aligned} R_1(x, t, \tau) &= \pi [\delta(x+at-\tau) + \delta(x-at-\tau)]; \\ R_2(x, t, \tau) &= \frac{\pi}{2} [\operatorname{sgn}(x+at-\tau) - \operatorname{sgn}(x-at-\tau)]. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Учитывая (6.33-6.34) и подставляя (6.47) в (6.46), получим формулу

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau) d\tau,$$

которая совпадает с решением методом Даламбера.

Пример 2. Решить задачу теплопроводности для полубесконечного стержня:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (0 < x < +\infty; 0 < t < \infty); \quad (6.48)$$

$$u(0,t) = \psi(t), \quad \left. \frac{\partial^K u}{\partial x^K} \right|_{x \rightarrow \infty} = 0, \quad K = 0, 1, \quad (0 < t < \infty); \quad (6.49)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 < x < \infty. \quad (6.50)$$

Решение. Для исключения x воспользуемся синус-преобразованием Фурье, определенном на полубесконечном интервале. Это диктуется формулой преобразования второй производной, содержащей, кроме трансформанты, только граничное значение преобразуемой функции. Умножая (6.48) на ядро преобразования и интегрируя по x , получаем

$$\frac{\partial u(\alpha,t)}{\partial t} = a^2[-\alpha^2 u(\alpha,t) + \alpha u(0,t)], \quad 0 < t < \infty, \quad (6.51)$$

где

$$u(\alpha,t) = \int_0^{+\infty} u(x,t) \sin \alpha x dx.$$

Учитывая в (6.51) граничное условие (6.49) и применяя преобразование к (6.50) получаем краевую задачу относительно трансформанты

$$\frac{\partial u(\alpha,t)}{\partial t} = a^2[-\alpha^2 u(\alpha,t) + \alpha u(0,t)], \quad 0 < t < \infty, \quad (6.52)$$

$$u(\alpha,0) = \Phi(\alpha), \quad (6.53)$$

где

$$\Phi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\tau) e^{i\alpha\tau} d\tau; \Psi(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\tau) e^{i\alpha\tau} d\tau, \quad (6.54)$$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения (6.52) выглядит

$$u(\alpha, t) = C(\alpha) e^{-a^2 \alpha^2 t} + u_*(\alpha, t), \quad (6.55)$$

где $C(\alpha)$ – произвольная функция параметра преобразования; $u_*(\alpha, t)$ – частное решение неоднородного уравнения (6.52):

$$u_*(\alpha, t) = a^2 \alpha \int_0^t e^{-a^2 \alpha^2 (t-\tau)} \psi(\tau) d\tau, \quad (6.56)$$

Применим к (6.55) обратное синус-преобразование Фурье

$$u(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \Phi(\alpha) e^{-a^2 \alpha^2 t} \sin \alpha x d\alpha + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} u_*(\alpha, t) \sin \alpha x d\alpha. \quad (6.57)$$

Полученное решение можно выразить через $\phi(x)$ и $\psi(x)$. Для этого в (6.57) надо подставить (6.54) и (6.56). Изменив порядок интегрирования и при помощи

$$\sin \alpha x \sin \alpha \tau = \frac{1}{2} [\cos \alpha(x - \tau) - \cos \alpha(x + \tau)],$$

а также табличными интегралами

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta y^2} \cos by dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \exp\left(-\frac{b^2}{4\beta}\right); \int_0^{\infty} y e^{-\beta y^2} \sin by dy = \frac{b}{4\beta} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \exp\left(-\frac{b^2}{4\beta}\right),$$

Окончательное решение имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{\tau} \int_0^{\infty} \phi(\tau) \left[e^{\frac{(x-\tau)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2 t}} \right] d\tau + x \int_0^t \psi(\tau) \frac{e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{(t-\tau)^2}} d\tau \right\}.$$

Пример 3. Найти форму колеблющейся струны, закрепленной на концах, если начальные скорости ее точек равны нулю, а начальные отклонения заданы

соотношением $f(x) = A \sin \frac{\pi x}{l}$.

Решение. Постановка задачи: найти решение уравнения $U''_{tt} = a^2 U''_{xx}$, $x \in [0, l]$, $t \in [0, +\infty)$, неравное тождественно нулю, удовлетворяющее граничным условиям

$$U(0, t) = 0, t \in [0, +\infty), U(l, t) = 0, t \in [0, +\infty) \text{ и}$$

начальным условиям

$$U(x, 0) = A \sin \frac{\pi x}{l}, U'_t(x, 0) = 0.$$

Будем решать эту задачу методом Лапласа. Применим преобразование Лапласа по переменной t , предварительно переписав уравнение в виде

$$U''_{xx} = \frac{1}{a^2} U''_{tt}.$$

Будем иметь

$$U''_{xx}(x, p) - \frac{1}{a^2} \left(p^2 U(x, p) - p A \sin \frac{\pi x}{l} - 0 \right) = 0$$

или

$$U''_{xx}(x, p) - \frac{p^2}{a^2} U(x, p) = -\frac{p}{a^2} A \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Граничные условия при этом примут вид

$$U(0, p) = U(l, p) = 0.$$

Относительно изображения искомого решения – функции $U(x, p)$ получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, неоднородное, с правой частью специального вида. Его решение

$$U = \dot{U} + \bar{U},$$

где \dot{U} – общее решение однородного уравнения

$$U'' - \frac{p^2}{a^2} U = 0.$$

Составим и решим характеристическое уравнение

$$r^2 - \frac{p^2}{a^2} = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm \frac{p}{a}.$$

Тогда общее решение однородного уравнения примет вид

$$\bar{U} = C_1 e^{\frac{p}{a}x} + C_2 e^{-\frac{p}{a}x}.$$

\bar{U} – частное решение неоднородного уравнения. Его вид с точностью до неопределенных коэффициентов будет

$$\bar{U} = B \cos \frac{\pi x}{l} + C \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Для нахождения B и C вычислим

$$\bar{U}' = -B \frac{\pi}{l} \sin \frac{\pi x}{l} + C \frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l}, \quad \bar{U}'' = -B \frac{\pi^2}{l^2} \cos \frac{\pi x}{l} - C \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l}$$

и подставим в уравнение:

$$-B \frac{\pi^2}{l^2} \cos \frac{\pi x}{l} - C \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi x}{l} - B \frac{p^2}{a^2} \cos \frac{\pi x}{l} - C \frac{p^2}{a^2} \sin \frac{\pi x}{l} = -\frac{p}{a^2} A \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned} -B \left(\frac{\pi^2}{l^2} + \frac{p^2}{a^2} \right) &= 0 \Rightarrow B = 0; \\ -C \left(\frac{\pi^2}{l^2} + \frac{p^2}{a^2} \right) &= -\frac{p}{a^2} A \Rightarrow C = \frac{Ap}{a^2 \left(\frac{\pi^2}{l^2} + \frac{p^2}{a^2} \right)} = \frac{Ap}{p^2 + \left(\frac{a\pi}{l} \right)^2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$U(x, p) = C_1 e^{\frac{p}{a}x} + C_2 e^{-\frac{p}{a}x} + \frac{Ap}{p^2 + \left(\frac{a\pi}{l} \right)^2} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Для нахождения C_1 и C_2 удовлетворим граничным условиям:

$$\begin{aligned} U(0, p) = 0 &\Rightarrow \begin{cases} 0 = C_1 + C_2 \\ 0 = C_1 e^{\frac{p}{a}l} + C_2 e^{-\frac{p}{a}l} \end{cases} \\ U(l, p) = 0 &\Rightarrow \end{aligned}$$

Очевидно, что $C_1 = C_2 = 0$.

Таким образом, имеем
$$U(x, p) = \frac{Ap}{p^2 + \left(\frac{\pi a}{l}\right)^2} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Возвращаясь к оригиналу, получим:

$$U(x, p) = U(x, t) = A \cos \frac{\pi a}{l} t \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Пример 4. Найти решение уравнения теплопроводности $U'_t = a^2 U''_{xx}$, удовлетворяющие начальному условию $U(x, 0) = \frac{A}{l}(l - x)$, где $0 \leq x \leq l$ и граничным условиям $U(0, t) = A$ и $U(l, t) = 0$.

Решение. Применяя к уравнению теплопроводности преобразование Лапласа по переменной t , получим:

$$pU(x, p) - \frac{A}{l}(l - x) = a^2 U''_{xx}(x, p).$$

Граничные условия при этом примут вид

$$U(0, p) = \frac{A}{p}, \quad U(l, p) = 0.$$

Перепишем полученное обыкновенное дифференциальное уравнение в виде

$$U'' - \frac{p}{a^2} U = -\frac{A(l - x)}{a^2 l}.$$

Его общее решение: $U = \dot{U} + \bar{U}$,

где \dot{U} – общее решение однородного уравнения

$$U'' - \frac{p}{a^2} U = 0.$$

Составим и решим характеристическое уравнение:

$$r^2 - \frac{p}{a^2} = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{p}}{a}.$$

Тогда

$$\dot{U} = C_1 e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Второе слагаемое \bar{U} есть частное решение неоднородного уравнения.

$$U'' - \frac{p}{a^2}U = -\frac{A(l-x)}{a^2l}.$$

Оно имеет вид $\bar{U} = Bx + C$. Тогда

$$\bar{U}' = B, \bar{U}'' = 0.$$

Подставляя в уравнение, находим:

$$-\frac{p}{a^2}(Bx + C) = -\frac{A(l-x)}{a^2l} \Rightarrow -\frac{p}{a^2}B = \frac{A}{a^2l} \Rightarrow B = -\frac{A}{pl};$$

$$-\frac{p}{a^2}C = -\frac{A}{a^2} \Rightarrow C = \frac{A}{p}.$$

Отсюда

$$\bar{U} = -\frac{A}{pl}x + \frac{A}{p}.$$

Тогда

$$U(x, p) = C_1 e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} - \frac{A}{pl}x + \frac{A}{p}.$$

Удовлетворим граничным условиям:

$$U(0, p) = \frac{A}{p} \Rightarrow \frac{A}{p} = C_1 + C_2 + \frac{A}{p} \Rightarrow C_1 + C_2 = 0;$$

$$U(l, p) = 0 \Rightarrow 0 = C_1 e^{\frac{\sqrt{p}}{a}l} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}l} \Rightarrow C_1 = C_2 = 0.$$

При этом

$$U(x, p) = -\frac{A}{pl}x + \frac{A}{p}.$$

Возвращаясь к оригиналу, получим:

$$U(x, p) = U(x, t) = -\frac{A}{l}x + A \text{ или } U(x, t) = \frac{A}{l}(l - x).$$

Задачи для самостоятельной работы

Применяя интегральное преобразование Фурье и Лапласа, решить следующие задачи.

1. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = u'_t(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty.$

2. $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty.$

3. $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty.$

4. Решить задачу теплопроводности для бесконечного стержня ($-\infty < x < \infty$), если в начальный момент времени при $x \in [-l, l]$ стержень имеет температуру T_0 , а при $|x| > l$ - нулевую температуру.

5. Найти распределение температуры в бесконечном стержне ($-\infty < x < \infty$), если при $t = 0$ стержень имел нулевую температуру, а при $t > 0$ в единицу времени на единицу объёма выделяется количество теплоты $f(x, t) = Q|c\rho) = const$.

6. $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0; \quad u(0, t) = \mu(t), \quad t > 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \infty.$

7. $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0; \quad u'(0, t) = v(t), \quad t > 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \infty.$

8. $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0; \quad u(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 < x < \infty.$

9. Решить задачу для полубесконечного изолированного стержня, если начальная температура стержня постоянна и равна T_0 , а на конце $x = 0$ поддерживается постоянная температура T_l .

$$10. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = A \sin \frac{\pi x}{l}; \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq l;$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t > 0.$$

$$11. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = A \cos \frac{\pi x}{l}; \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad x \in [0, l];$$

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(l, t)}{\partial x}, \quad t > 0.$$

$$12. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [0, l], \quad t > 0; \quad u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = B \sin \frac{\pi x}{l}, \quad t \in [0, l];$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

$$13. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \infty, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = 0, \quad x > 0; \quad u(0, t) = u_0, \quad t > 0.$$

$$14. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0; \quad u(x, 0) = A \sin \frac{\pi x}{l}, \quad x \in [0, l]; \quad u(0, t) = u(l, t) = 0,$$

$$t > 0.$$

$$15. \quad \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0; \quad t > 0; \quad u(x, 0) = 0, \quad x > 0; \quad u(0, t) = 0; \quad u(h, t) = u_0, \quad t > 0.$$

16. К концу $x = 0$ полубесконечной электрической линии без потерь ($R = G = 0$), начиная с момента $t = 0$, подключена ЭДС $E(t)$. Найти напряжение $u(x, t)$ для $t > 0$ в линии, если начальное напряжение и начальный ток в ней равны нулю.

17. К концу $x = 0$ полубесконечной электрической линии без «искажения» ($RC = LG$), начиная с момента $t = 0$, подключена ЭДС $E(t)$. Найти напряжение $u(x, t)$ для $t > 0$ в линии, если начальные напряжение и ток в ней равны нулю.

18. Линия длиной l без потерь ($R = G = 0$) заряжена до напряжения u_0 . В момент времени $t = 0$ левый её конец ($x = 0$) замыкается накоротко. Найти значение напряжения $u(x, t)$ по истечении времени t .

Список литературы

1. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1969. – 288 с.
2. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1984.
3. Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Задачи по математической физике. – М.: Изд-во МГУ, 1998.
4. Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. Сборник задач по математической физике. – М.: Наука, 1972.
5. Владимиров В.С. и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. - М.:Наука, 2001. - 271 с.
6. Левин В.И. Методы математической физики. – М.: Учпедгиз, 1960.
7. Методические указания к разделу «Уравнения математической физики» для студентов II курса всех специальностей / Сост. С.И. Козовый, А.В. Усов, А.Ф. Кривой, А.В. Плотников. – Одесса: ОПИ. – 40 с.
8. Методы математической физики / В.Г. Багров, В.В. Белов, В.Н. Задорожный, А.Ю. Трифонов. – Томск, 2002. – 645 с.
9. Мисюркеев И.В. Сборник задач по методам математической физики. – М.: Просвещение, 1975.
10. Несис Е.И. Методы математической физики. – М.: Просвещение, 1977.
11. Оборский Г.А. Моделирование систем: [Монография] / Г.А. Оборский, А.Ф. Дащенко, А.В. Усов, Д.В. Дмитришин. – Одесса: Астропринт, 2013. – 664 с.
12. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 2. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
13. Салехова И.Г., Аблаева С.Г. Методические указания к курсу "Уравнения математической физики". - Казань: КГУ, 2007. - 148 с.
14. Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике. – М.: Изд-во МГУ, 2000.

15. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами /под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979.
16. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Московский университет, 1999. - 798 с.
17. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГУ, 1999.
18. Уравнения математической физики: учебное пособие / П. А. Вельмисов, Ю. В. Покладова. – Ульяновск : УлГТУ, 2012. – 48 с.
19. Усов А.В. Вероятностно-статистическое моделирование технико-экономических систем / А.М. Третьяк, А.В. Усов, А.П. Коновалов, К.А. Дубров. – Одесса: Астропринт, 2003. – Ч.1, Ч.2. – 224 с.
20. Усов А.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения и их приложения / А.В. Усов, Д.В. Дмитришин, Ю.А. Морозов, К.А. Дубров. – Одесса: Астропринт, 2005.- 496 с.
21. Усов А.В., Шпинковський О.А., Шпинковська М.І. Чисельні методи та їх реалізація у середовищі *Scilab*: Навч. посіб. для студентів вищих навч. закладів. – Київ: Освіта України. 2013. – 192 с.
22. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1968.

Учебное пособие

Усов Анатолий Васильевич
Шпинковский Александр Анатольевич
Шпинковская Мария Ивановна

Уравнения математической физики в моделировании технических систем

Підписано до друку 28.07.2014 р.
Формат 60x84/16 Ум. друк. арк. 11,6
Папір офсетний. Наклад 100 прим.

ФОП «Сухачов»

65023 м. Одеса, вул. Садова, 14

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єкт видавничої справи ДК 4362 від 13.07.2012 р.
Тел.: (098)457-75-00, (044) 384-26-08, (050) 552-20-13
E-mail: osvita.odessa@gmail.com, www.rambook.ru

Видавництво «Освіта України»

04136, м. Київ, вул. Маршала Гречка, 13, оф. 808

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єктів видавничої справи ДК №1957 від 23.04.2009 р.
Тел.: (044) 384-26-08, (097) 479-78-36, (050) 552-20-13
E-mail: osvita2005@gmail.com, www.rambook.ru

Видавництво «Освіта України» запрошує авторів до співпраці
з випуску видань, що стосуються питань управління,
модернізації, інноваційних процесів, технологій,
методичних і методологічних аспектів освіти та навчального
процесу у вищих навчальних закладах.
Надаємо всі види видавничих та поліграфічних послуг.