**УДК 517.8**

**РОЗРОБКА ФОРМАЛЬНОГО АЛГОРИТМУ СКЛАДАННЯ ДВОЇСТОЇ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ**

**Лд. С. Чернова, С. Д. Титов, С. К Чернов, К. В. Колеснікова, Лб. С. Чернова, В. Д. Гогунський**

**РАЗРАБОТКА ФОРМАЛЬНОГО АЛГОРИТМА СОСТАВЛЕНИЯ ДВОИСТОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ**

**Лд. С. Чернова, С. Д. Титов, С. К Чернов, Е. В. Колесникова, Лб. С. Чернова, В. Д. Гогунський**

**DEVELOPMENT OF A FORMAL ALGORITHM FOR COMPILATION A DUAL LINER OPTIMIZATION TASK**

**Ld. Chernova, S. Titov, S. Chernov, K. Kolesnikova, Lb. Chernova, V. Gogunskii**

*Запропоновано строгий формальний алгоритм побудови двоїстої задачі для різних випадків запису (загальна, основна, стандартна та канонічна) прямої задачі лінійного програмування.*

*На початку наведено означення пари двоїстих задач для стандартної форми запису прямої задачі лінійного програмування. Такий підхід обґрунтовується з тих позицій, що за часом така пара була означена першою, оскільки мала змістовну інтерпретацію.*

*Економічною інтерпретацією стандартної задачі є максимізація прибутку при виробництві та реалізації деяких видів продукції. Такий підхід змістовно вказує на існування прямої задачі (I) та строго відповідної до неї двоїстої (спряженої) (II). Супутня до прямої задачі є задача про мінімізацію витрат.*

*Базовим поняттям теорії двоїстості в задачах лінійного програмування є той факт, що пара задач є взаємно спряженими – отримання двоїстої від двоїстої призводить до прямої задачі.*

*Строгий підхід до отримання алгоритму складання двоїстої задачі ґрунтується на твердженні – двоїста задача від двоїстої є прямою (вихідною) задачею. Для різних пар двоїстих задач строго доводиться виконання такого твердження.*

*Існуючі схеми переходу від прямої задачі до двоїстої носять змістовний характер. З огляду на цей факт, запропоновано та строго доведено алгоритм загального підходу до складання пар спряжених задач.*

*Формалізація розробленої схеми дозволяє легко отримувати пари відомих двоїстих задач. Це дозволило вперше запропонувати та довести істинність алгоритму побудови двоїстої задачі для довільної форми представлення прямої задачі*

*Ключові слова: лінійне програмування, пряма задача, двоїста задача, двоїстість, цільова функція, система обмежень, пари спряжених задач*

*Предложен строгий формальный алгоритм построения двойственной задачи для различных случаев записи (общая, основная, стандартная и каноническая) прямой задачи линейного программирования. В начале приведены определения пары двойственных задач для стандартной формы записи прямой линейного программирования. Такой подход обосновывается с тех позиций, что по времени такая пара была отмечена первой, поскольку имела содержательную интерпретацию.*

*Экономической интерпретацией стандартной задачи является максимизация прибыли при производстве и реализации некоторых видов продукции. Такой подход содержательно указывает на существование прямой задачи (I) и строго соответствующей ей двойственной (сопряженной) (II). Сопутствующая к прямой задаче является задача о минимизации расходов.*

*Базовым понятием теории двойственности в задачах линейного программирования является тот факт, что пара задач является взаимно сопряженными – получение двойственной от двойственной приводит к прямой задаче.*

*Строгий подход к получению алгоритма составления двойственной задачи основывается на утверждении – двойственная задача от двойственной является прямой (исходной) задачей. Такой подход использован в статье. Для разных пар двойственных задач строго доказывается выполнение такого утверждения.*

*Существующие схемы перехода от прямой задачи к двойственной носят содержательный характер. Учитывая этот факт, предложен и строго доказан алгоритм общего подхода к составлению пар сопряженных задач.*

*Формализация разработанной схемы позволяет легко получать пары известных двойственных задач. Это позволило впервые предложить и доказать истинность алгоритма построения двойственной задачи для произвольной формы представления прямой задачи*

*Ключевые слова: линейная оптимизация, прямая задача, двойственная задача, двойственность, целевая функция, система ограничений, пары сопряженных задач*

**1. Вступ**

Лінійне програмування набуло широкого застосування для розв’язання задач розподілу ресурсів [1], визначення найбільшого прибутку або найменшої вартості [2], управління виробничими запасами [3], формування оптимального плану перевезень [4], ідентифікації наукових досліджень [5] та ін.

Одним з підходів рішення задач лінійного програмування є застосування принципу двоїстості, який методологічно пов'язаний з теорією систем залежних нерівностей [4]. Такий аспект піднімає поняття двоїстості в задачах лінійного програмування (ЛП) до загальної математичної строгості. Ключовою теоремою в теорії ЛП є теорема Мінковського-Фаркаша [6]. Теорема надає необхідну та достатню умову для лінійної нерівності бути наслідком скінченої системи лінійних нерівностей. Важливість теореми полягає в тому, що всі основні факти теорії лінійного програмування [7] (в тому числі і в теорії двоїстості), можуть бути отриманні як наслідки цієї теореми.

Відомі способи переходу від прямої задачі до двоїстої базуються на якісних перетвореннях і носять змістовний характер. Формалізація і доведення коректності алгоритму побудови двоїстої задачі для довільної форми представлення прямої задачі дозволить легко отримувати коректні пари відомих двоїстих задач.

Актуальність досліджень обумовлена вимогами щодо спрощення розв’язань задач лінійного програмування на основі розробки формального алгоритму трансформації прямої задачі до двоїстої задачі лінійної оптимізації.

**2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми**

Без особливого перебільшення можливо констатувати той факт, що теорія двоїстості та випливаючи звідти пара спряжених задач є надважливими поняттями в теорії ЛП. В теорії множин, предикатів, висловлювань, в алгебрі подій та геометрії існують так звані теореми двоїстості. За певними правилами прямій теоремі ставиться у відповідність двоїста. В багатьох випадках математичні моделі різних систем інтерпретуються у формі задач дискретної оптимізації [8]. Пошук методів точного або наближеного розв’язків таких задач виконується з урахуванням належності їх до, так званих, задач з класу *P* та *NP* (алгоритми поліноміальної та експоненціальної реалізації розв’язку) [7].

У класичному розділі лінійного програмування відома така пара екстремальних задач. Пов’язано це з особливістю опуклих множин – замкнені опуклі множини у векторному просторі можливо описувати двояко, як у вихідному *Rn* так і у спряженому *Rm* просторі. Існуючі схеми переходу від прямої задачі лінійного програмування до двоїстої мають, як правило, змістовно економічний характер і тому не можуть задовольняти як економічну, так і технічну кібернетику, які широко застосовуються в моделях управління.

Комбінаторні методи точного та практичного розв’язку задач дискретної оптимізації посідають одне з вагомих місць в отриманні оптимальних значень таких задач [8]. Для реалізації алгоритмів розв’язку необхідно отримання первісного опорного плану, оцінок оптимальності та покращення у разі його не оптимальності. Сучасні комбінаторні методи для практичного розв’язку задач лінійного програмування потребують розробки алгоритмів, які дозволяють отримувати наближений розв'язок з гарантованою оцінкою відхилення від оптимуму [9].

Алгоритми перетворень в задачах лінійного програмування є ефективним прийомом пошуку розв’язку оптимізаційних задач [10]. Якщо виконати операцію перетворення прямої задачі в двоїсту, то такий прийом дозволить наочно спостерігати за припустимою множиною параметрів задачі [11]. Можна виконувати оцінку знизу та зверху значень цільової функції задачі та динамічно оцінювати можливість диверсифікації базисних оптимальних змінних з гарантованою точністю [12]. В роботі [13] розроблено метод термоекономічної оптимізації енергоємних систем з лінійною структурою на графах. Аналіз стійкості розв’язань в задачах детектування дублікатів в електронних документах наведено в роботі [14]. Складність відображення лінійних зв’язків в процесах навчання за допомогою ланцюгів Маркова досліджена в роботі [15]. Працездатність лінійних моделей для спортивних тренувань показана в роботі [16].

В розглянутих вище публікаціях, як правило, досліджені і застосовані окремі форми представлення задач лінійного програмування для різних випадків запису (загальна, основна, стандартна та канонічна форми) прямої задач. У той же час, незважаючи на те, що багато методів в цьому напрямі розвинуто та досліджено, існує проблема створення дієвих моделей на етапі отримання розв’язку систем рівнянь математичного опису складних систем [8].

Підходи, які зазвичай застосовуються для рішення задач ЛП, часто спрямовані на спрощення задач через використання специфічних обмежень [5], здійснення ітераційного пошуку розв’язку систем рівнянь [12], виконання декомпозиції систем за допомогою графів [13]. Означені способи розв’язку систем лінійних рівнянь спрямовані на використанні додаткової трансформації математичного опису систем з побудовою унікальних алгоритмів отримання рішення задачі [15]. Проблемною складовою задач ЛП є відсутність стратегій узагальнення пошуку рішень. Сутність даного дослідження є у тому, що пропонується на етапі формулювання задачі обрати найпростішу форму запису задачі, у тому числі з урахуванням існуючих спряжених двоїстих відображень задачі.

Двоїста задача ЛП отримується шляхом інверсії цільової функції і змінних вихідної задачі. Якщо цільова функція вихідної задачі задається на максимум, то цільова функція двоїстої до неї задачі задається на мінімум. Перехід до запису двоїстих задач слід виконувати за певним формалізованим алгоритмом. Наявність пар спряжених двоїстих задач ЛП дозволяє для всіх форм запису обрати раціональну стратегію пошуку розв’язань з огляду на обчислювальну складність рішення. Всі можливі перетворення вихідної задачі повинні покращувати розв’язок систем рівнянь математичного опису.

**3. Мета і завдання дослідження**

Метою дослідження є отримання формального алгоритму переходу до двоїстої задачі та строге доведення цих правил. Це надасть можливість для розв’язку задачі лінійного програмування обирати більш просту серед таких пар двоїстих задач.

Для досягнення мети були поставлені такі завдання:

– довести для існуючих пар двоїстих задач їх спряжений характер;

– представити у загальній формі запису операції переходу до двоїстої задачі від прямої задачі.

**4. Означення двоїстості для стандартної форми задачі лінійного програмування**

Припустимо, що пряма (вихідна) задача лінійного програмування подана у стандартній формі запису [17].

Назвемо наступну задачу ЛП стандартною задачею:



або у матричній формі запису:

.

Двоїстою або спряженою до неї задачею називають задачу вигляду:



або у матричній формі запису:



Для зручності введемо та прокоментуємо наступні позначення:



*–* коефіцієнти цільової функції  прямої задачі ЛП;



*–* змінні(невідомі) величини (план) прямої задачі ЛП;

**I** – умовне позначення прямої задачі;

**II** – умовне позначення двоїстої задачі;

 *–* матриця коефіцієнтів системи обмежень прямої задачі;

 *–* коефіцієнти правих частин системи обмежень прямої задачі;

 *–* змінні(невідомі) величини двоїстої задачі ЛП.

Введемо для розгляду системи коваріантних та контраваріантних векторів [17]

, *–* вектор*-*стовпчики (коваріантні вектори) матриці  системи обмежень Ω*І* прямої задачі;

 *–* вектор*-*рядочки (контраваріантні) матриці  системи обмежень ΩІ прямої задачі.

В такому разі, матриця  коефіцієнтів системи може бути представлена у векторному вигляді:



а пара двоїстих задач має третю форму запису:

 – пряма задача;

 *–* двоїста задача до наведеної прямої.

Підсумовуючи, остаточно маємо три форми запису означення двоїстої задачі до стандартної задачі ЛП:







Спряженість або двоїстість наведеного означення будемо обґрунтовувати певною послідовністю операцій, які у разі циклічного застосування повинні призвести до прямої задачі, тобто



де  – набір правил переходу до двоїстої задачі.

Ретельний аналіз означення двоїстої задачі для стандартної форми представлення прямої задачі, дозволяє визначити необхідні для переходу до двоїстої задачі операції 

– екстремальні вимоги цільових функцій прямої та двоїстої задач протилежні за смислом:



– для задачі на  цільової функції присутні в системі обмежень нерівності повинні мати знак :



– складові цільової функції двоїстої задачі є компонентами вектора правих частин системи обмежень прямої задачі ЛП;

– матриця *A*T системи обмежень двоїстої задачі ΩII є транспонованою до матриці *A* системи обмежень прямої задачі ΩI, оскільки *YA*=*ATYT*;

– частини системи обмежень двоїстої задачі: Ω*II* : (**a***i,***y***)*≥**c** є коефіцієнтами цільової функції W*I*=(**c**, **x**)→max прямої задачі;

– кожному обмеженню *–* нерівності системи обмежень прямої задачі ставиться у відповідність невід’ємна двоїста невідома

 

– кожній невід’ємній невідомій прямої задачі ЛП ставиться у відповідність обмеження*–*нерівність двоїстої

 

Зауважимо, що різні форми запису задач ЛП є еквівалентними *–* зберігають множину розв’язків. Добитися цього можливо за умови використання прийомів еквівалентного перетворення для переходу від однієї форми задач до іншої.

Так, певне рівняння системи обмежень задачі ЛП еквівалентне системі двох нерівностей:



Довільні за знаком змінні можуть бути представлені у вигляді різниці 2-х невід’ємних змінних:

  

Перехід від обмежень *–* нерівностей до обмежень *–* рівнянь виконують додаванням невід’ємної (балансової) змінної:

 

Для спрощення перетворення задач ЛП в різні форми запису також використовують перехід від максимізації до мінімізації цільової функції і навпаки:



Пересвідчимось в тому, що введені операції та перетворення виконують ланцюг спряженості для наведеної вище пари задач



Представимо двоїсту задачу у вигляді задачі на максимум та, застосовуючи правила переходу й еквівалентні перетворення, доведемо спряженість пари задач *–* двоїста задача від двоїстої дає вихідну пряму задачу.



Таким чином підтверджено, що головною ознакою двоїстості пар задач ЛП є можливість зведення їх одна до одної за означенням (двоїста до двоїстої є прямою задачею)

**4. 1. Модельний приклад № 1**

До прямої задачі лінійного програмування



скласти двоїсту задачу.

Розв'язок.

Для початку переходу до двоїстої задачі підготуємо систему обмежень. Для задачі на максимум необхідна наявність нерівностей вигляду ≤. З огляду на це, потрібно поміняти знак третьої та четвертої нерівності на протилежний за смислом, множенням на (–1).



Перехід до двоїстої задачі зручно виконувати в табл. 1.

Таблиця 1

Перехід до двоїстої задачідля модельного прикладу № 1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Y\X* |  |  |  |  |  |  |  | ? | B |
|  | 3 | 0 | –4 | –7 | 5 | –4 | –1 |  | 12 |
|  | 1 | –1 | 3 | –2 | 0 | 7 | 9 |  | 3 |
|  | –5 | 3 | 0 | –8 | 5 | –9 | –4 |  | –2 |
|  | –7 | 5 | 9 | 1 | 3 | 0 | 1 |  | –3 |
| ? |  |  |  |  |  |  |  |  | |
| C | –4 | 2 | –3 | –8 | 1 | –1 | 5 |

Дотримуючись алгоритму переходу до двоїстої задачі заповнюємо табл. 1. Представлення прямої задачі в стандартній формі має наступну двоїсту задачу:



Для отримання повного набору операцій по переходу до двоїстих задач, розглянемо наступну пару задач ЛП та доведемо їх спряженість.



Доведення*.*



Доведена двоїстість цієї пари задач, дозволяє сформулювати наслідки з означення двоїстості для стандартної задачі ЛП:

– кожному обмеженню *–* рівнянню прямої задачі ставиться у відповідність довільна за знаком двоїста невідома;



де  – двоїста змінна довільна за знаком;

– довільній за знаком змінній прямої задачі ставиться у відповідність обмеження *–* рівняння двоїстої задачі;



де– змінна прямої задачі довільна за знаком:

Застосовуючи аналогічні перетворення, можливо довести спряженість основних несиметричних форм пар двоїстих задач



Удалите, пожалуйста, лишние пробелы в формулах по всему текст статьи. У Вас стоят лишние пробелы, например, вокруг «:» или перед «I». Формула без лишнийх пробелов выглядит так – 





Задачі лінійної оптимізації, за математичною формулою запису, вимагають центральної юстировки системи обмежень під цільовою функцією. Тому наша форма запису є традиційною і більш правильною.

Що і треба було довести – основні несиметричні форми пар двоїстих задач є спряженими.

**4. 3. Модельний приклад № 2**

До прямої задачі лінійного програмування



скласти двоїсту задачу.

Розв'язок.

Маємо канонічну форму запису прямої задачі. Для переходу до двоїстої задачі складаємо табл. 2.

Таблиця 2

Перехід до двоїстої задачідля модельного прикладу № 2

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Y\X* |  |  |  |  |  | ? | B |
|  | –1 | –5 | –1 | –1 | 1 | = | –41 |
|  | 0 | 4 | 1 | 0 | –1 | = | 28 |
|  | 1 | 0 | 0 | –1 | 1 | = | 9 |
| ? |  |  |  |  |  |  | |
| C | 4 | 9 | 1 | 2 | –1 |

Дотримуючись алгоритму переходу до двоїстої задачі у випадку представлення прямої задачі в канонічній формі, маємо наступну двоїсту задачу:



Отримана форма запису двоїстої задачі відповідає прямій задачі. Тобто у разі представлення прямої задачі в канонічній формі можна отримати форму двоїстої задачі.

**4. 4. Модельний приклад № 3**

До прямої задачі лінійного програмування



скласти двоїсту задачу.

Розв'язок.

Для переходу до двоїстої задачі складаємо табл. 3.

Таблиця 3

Перехід до двоїстої задачідля модельного прикладу № 3

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Y\X* |  |  |  |  | ? | B |
|  | 4 | –5 | 3 | –1 |  | 3 |
|  | –1 | 2 | 4 | –7 |  | 2 |
|  | 3 | –1 | –1 | –7 |  | 3 |
|  | 1 | 8 | –5 | –9 |  | 8 |
| ? | = | = | = | = |  | |
| C | 1 | –3 | 5 | 2 |

Дотримуючись алгоритму переходу до двоїстої задача маємо наступну двоїсту задачу:

,

яка поставлена у відповідність вихідній (прямій) задачі. Підтверджено, що двоїста задача відповідає прямій задачі. Тобто у разі представлення прямої задачі в канонічній формі можна отримати форму двоїстої задачі.

**4. 5. Модельний приклад № 4**

До прямої задачі лінійного програмування



скласти двоїсту задачу.

Розв'язок.

Для переходу до двоїстої задачі складаємо табл. 4.

Таблиця 4

Перехід до двоїстої задачідля модельного прикладу № 4

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Y\X* |  |  |  |  | ? | B |
|  | 4 | –5 | 3 | –1 |  | 3 |
|  | –1 | 2 | 4 | –7 |  | 2 |
| ? | = | = | = | = |  | |
| C | 2 | 8 | –1 | 5 |

Дотримуючись алгоритму переходу до двоїстої задачі, маємо наступну двоїсту задачу:



яка поставлена у відповідність вихідній (прямій) задачі. Означені вище спряжені пари двоїстих задач є основою для узагальнення властивостей двоїстості в системах лінійного програмування у разі представлення прямої задачі в загальній формі.

**5. Двоїста задача для загальної форми прямої задачі**

Наведені пари двоїстих задач дозволяють виконати узагальнення означення двоїстості в задачах лінійного програмування на випадок представлення прямої задачі в загальній формі.

Нехай маємо загальну задачу лінійного програмування



або в розгорнутій формі запису



двоїстою до неї будемо називати задачу вигляду



або в іншій формі запису



*Модельний приклад № 5*

До прямої задачі лінійного програмування



скласти двоїсту задачу.

Розв'язок.

Для переходу до двоїстої задачі підготуємо систему обмежень прямої задачі – для задачі на мінімум необхідна наявність нерівностей тільки ≥. Змінюємо знак другої нерівності на протилежний.



Перехід до двоїстої задачі виконуємо в табл. 5.

Таблиця 5

Перехід до двоїстої задачідля модельного прикладу № 5

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Y\X* |  |  |  |  |  | ? | B |
|  | –3 | –5 | 9 | –1 | 8 |  | 24 |
|  | –1 | ––2 | 1 | –3 | 7 |  | –11 |
|  | 1 | 4 | 1 | –2 | –1 | = | 8 |
|  | –1 | 3 | 6 | –5 | –3 | = | 21 |
| ? | = | = |  | = |  |  | |
| C | 7 | –4 | 3 | –2 | 1 |

Двоїста задача має вигляд



Дослідимо випадок наявності недодатних невідомих у прямій задачі та порушення відповідності знака нерівності типу екстремуму цільової функції.

Доведемо, що кожній недодатній невідомій *x*≤0 прямої задачі ставиться у відповідність обмеження *–* нерівність, для max – ≥, та для min – ≤.

Пара задач ЛП є двоїстою.



Дійсно,



Таким чином доведено, що в разі порушення відповідності знаку нерівності типу оптимуму цільової функції, двоїсті відповідні невідомі мають бути недодатними *y*≤0.

Аналогічно встановлюється, що кожній недодатній невідомій *x*≤0 прямої задачі ставиться у відповідність обмеження – нерівність у двоїстій задачі, протилежне за знаком основному означенню. На цих підставах наведені пари задач є двоїстими







Таким чином, доведено, що кожній недодатній невідомій *x*≤0 прямої задачі ставиться у відповідність обмеження – нерівність у двоїстій задачі, яке протилежне за знаком основному означенню. На цих підставах наведені пари задач є двоїстими до вихідних задач.

**6. Двоїста задача для довільної форми прямої задачі ЛП**

Узагальнюючи доведення та наслідки можливо отримати загальний алгоритм переходу до двоїстої задачі для довільної форми запису прямої задачі лінійного програмування.

*Означення*

Для довільної форми представлення прямої задачі лінійного програмування



або у розгорнутій алгебраїчній формі запису



двоїстою до неї будемо називати задачу вигляду:



або у розгорнутій алгебраїчній формі запису



*Модельний приклад № 6*

Скласти двоїсту задачу до наведеної прямої задачі лінійного програмування



Розв'язок.

Перехід до двоїстої задачі виконуємо в табл. 6

Таблиця 6

Перехід до двоїстої задачідля модельного прикладу № 6

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *Y\X* |  |  |  |  | ? | B |
|  | –2 | –3 | 5 | 1 | = | 1 |
|  | 3 | 4 | –8 | –2 |  | 21 |
|  | 1 | –2 | –3 | 4 |  | 12 |
| ? | = |  | = |  |  | |
| C | 7 | –4 | 9 | –2 |

Двоїста задача має вигляд



яка поставлена у відповідність вихідній (прямій) задачі.Тобто доведено, що для довільної форми прямої задачі лінійного програмування існує загальний алгоритм переходу до двоїстої задачі.

**7.** **Обговорення результатів дослідження двоїстих задач**

Як відомо, розв’язання більшості задач ЛП здійснюється завдяки специфічним умовам задач або за рахунок спрощення запису задач через використання існуючих обмежень у формі рівностей або нерівностей [5]. Інколи вдається сформулювати завдання ітераційного пошуку розв’язку систем рівнянь [12] або виконати декомпозиції систем за допомогою графів [13]. Такі способи постановки задачі ЛП і розв’язку систем лінійних рівнянь застосовують прямі описи систем з побудовою унікальних алгоритмів отримання рішення задачі [15]. Незважаючи на широкий перелік різних форм відображення запису задач ЛП залишається актуальним визначення способів узагальнення пошуку рішень. Показано, що з практичної точки зору запропонований підхід дозволяє розширити можливості вибору форми представлення задач ЛП з метою спрощення обчислювальної складності оптимізаційних задач такого класу [18]. Пропонується на етапі формулювання задачі обрати найпростішу форму запису задач, у тому числі з урахуванням існуючих спряжених двоїстих відображень задачі.

Двоїсті спряжені пари відображень задач ЛП утворюються через інверсію цільової функції і змінних задачі. Відомі такі правила побудови двоїстої задачі:

– кожному *і*-му обмеженню вихідної задачі відповідає змінна *yi* двоїстої задачі; і навпаки, кожному *j*- му обмеженню двоїстої задачі відповідає змінна *xj* вихідної задачі;

– якщо одна з пари двоїстих задач сформульована на максимум цільової функції, то друга – на мінімум і навпаки;

– обмеження-нерівності слід записувати зі знаком «≥» – при мінімізації цільової функції;

– коефіцієнти цільової функції однієї із задач є вільними членами системи обмежень другої задачі;

– матриці, складені з коефіцієнтів обмежень вихідної і двоїстої задач, є взаємно транспонованими.

Оптимальні розв’язки двоїстих задач тісно пов’язані між собою, що дозволяє зробити висновок, що у загальному випадку немає потреби виконувати пошук рішення за описом як прямої так і двоїстої спряженої задачі. Достатньо визначити рішення тільки по одній формі опису.

Для оптимальних рішень прямої і двоїстої задачі, коли суворо виконується нерівність, обмеженням відповідають нульові змінні, а ненульовим змінним, що входять в опорний план, відповідають умови нечіткої нерівності обмеження, що реалізується, як рівність. Ці властивості подвійних рішень дозволяють суттєво скоротити час вирішення, якщо доводиться розв’язувати задачу, з числом обмежень набагато більшим числа змінних. Тоді можна, вирішивши двоїсту задачу, знайти її опорний план, після чого, відібравши в прямій задачі тільки обмеження, що відповідають опорному плану, вирішити для них звичайну систему лінійних рівнянь.

Прикладною цінністю запропонованого підходу є застосування отриманого результату для забезпечення можливості вдосконалення складних систем, що описуються системами лінійних рівнянь з наявністю систем лінійних обмежень [19]. Велика кількість математичних моделей в управлінні проектами має опис лінійних задач оптимізації. З огляду на це, наведені теоретичні відомості застосовуються для розв’язку їх спряжених задач, які мають практичну інтерпретацію. Узагальнення методу взаємної спряженості математичних відображень двоїстої задачі для довільної форми представлення прямої задачі дозволить легко отримувати коректні пари відомих двоїстих задач. Це дозволило запропонувати та довести істинність алгоритму побудови двоїстої задачі для довільної форми представлення прямої задачі. Основним недоліком запропонованого метода або обмеженістю метода є можливість його використання тільки для лінійних задач.

**8. Висновки**

1. Для існуючих пар двоїстих задач строго доведено їх спряжений характер, як головного критерію складання пар двоїстості. Формування двоїстої задачі ґрунтується на твердженні – двоїста задача від двоїстої є прямою (вихідною) задачею. Для різних пар двоїстих задач строго доведено виконання такого твердження.

2. Строго визначені операції переходу до двоїстої задачі від прямої задачі, представленої у загальній формі запису. З огляду на це, перехід до двоїстої задачі носить нескладний формальний порядок. Це дозволяє зробити висновок, що у загальному випадку немає потреби виконувати пошук рішення за описом як прямої так і двоїстої спряженої задачі. Достатньо визначити рішення тільки по одній формі опису задачі лінійного програмування.

**Література**

1. Drozd J., Drozd A. Models, methods and means as resources for solving challenges in co-design and testing of computer systems and their components // International Conference on Digital Technologies 2013, DT 2013. pp. 176-180. DOI: <https://doi.org/10.1109/DT.2013.6566307>
2. Сигал И.Х., Иванова А.П. Введение в прикладное дискретное программирование: модели и вычислительные алгоритмы. М., 2003, 240 с.
3. Гетманцев В. Д. Лінійна алгебра і лінійне програмування. – Київ, Либідь, 2001. - 250 с.
4. Teschl Gerald, Teschl Susanne. Mathematik für Informatiker. Band 1: Diskrete Mathematik und Lineare Algebra. Berlin, Springer, 2008. 519 s. DOI: 10.1007/978-3-540-77432-7
5. Biloshchytskyi A., Myronov O., Reznik R., Kuchansky A., Andrashko Yu., Paliy S., Biloshchytska S. A method to evaluate the scientific activity quality of HEIs based on a scientometric subjects presentation model // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2017. № 6/2 (90), pp. 16–22. DOI: 10.15587/1729-4061.2017.118377
6. Титов С.Д., Чернова Л.С. Вища та прикладна математика: Навч. посібник: У 2-х ч., Ч. 1., Х., Факт, 2017. 336 с.
7. Nozicka F., Guddat J., Hollatz H. Theorie der Linearen Optimierung – Berlin, Akademie, 1972. – 378 s.
8. Lau D. Algebra und Diskrete Mathematik. Zweite, korrigierte und erweiterte Auflage. Berlin, Springer, 2007. 485 s. DOI: 10.1007/978-3-642-19443-6\_3
9. Biloshchytskyi, A., Kuchansky, A., Andrashko, Yu., Biloshchytska, S., Kuzka, O., Shabala, Ye., Lyashchenko, T. A method for the identification of scientists' research areas based on a cluster analysis of scientific publications // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2017. № 5/2 (89). pp. 4-10. DOI: 10.15587/1729-4061.2017.112323
10. Biloshchytskyi, A., Kuchansky, A., Biloshchytska, S., Dubnytska, A. Conceptual Model of Automatic System of Near Duplicates Detection in Electronic Documents. *IEEE* International Conference «The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics» (CADSM). 2017. pp. 381–384. DOI: 10.1109/CADSM.2017.7916155
11. Unger N., Dempe S. Lineare Optimierung. – Wiesbaden, Springer, 2010. 142s.
12. Kolesnіkov O., Gogunskii V., Kolesnіkova K., Lukianov D., Olekh T. Development of the model of interaction among the project, team of project and project environment in project system // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2016. № 5/9 (83). pp. 20-26. DOI: [10.15587/1729-4061.2016.80769](http://dx.doi.org\10.15587/1729-4061.2016.80769)
13. Wu, C., Nikulshin, V. Method of thermoeconomical optimization of energy intensive systems with linear structure on graphs // *International Journal of Energy Research*. 2000. № 24(7). pp. 615-623. DOI: [https://doi.org/10.1002/1099-114X(20000610)24:7<615::AID-ER608>3.0.CO;2-P](https://doi.org/10.1002/1099-114X(20000610)24:7%3C615::AID-ER608%3E3.0.CO;2-P)
14. Biloshchytskyi, A., Kuchansky, A., Biloshchytska, S., & Dubnytska, A. (2017). Conceptual Model of Automatic System of Near Duplicates Detection in Electronic Documents. IEEE International Conference «The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics» (CADSM), pp. 381–384. DOI: 10.1109/CADSM.2017.7916155
15. Gogunskii, V., Kolesnіkov, О., Kolesnіkova, K., Lukianov, D. "Lifelong learning" is a new paradigm of personnel training in enterprises // Eastern–European Journal of Enterprise Technologies. 2016, № 4/2 (82), pp. 4 – 10. DOI: [10.15587/1729 4061.2016.74905](https://dx.doi.org/10.15587/1729%204061.2016.74905).
16. Demin, D*.* Perfection of approaches to the construction of the training process of athletes, considered in the framework of the implementation of the processes of non-formal education // Journal «ScienceRise: Pedagogical Education». 2017, № 9(17). pp. 28–46. DOI: [10.15587/2519-4984.2017.111110](https://dx.doi.org/10.15587/2519-4984.2017.111110)
17. Lax Peter D. Linear algebra and application. New York, Wiley, 2-nd ed. 2013. 377 p. URL: <https://www.wiley.com/en-us/Linear+Algebra+and+Its+Applications%2C+2nd+Edition-p-9781118626924>
18. [Drozd, J.](https://www.scopus.com/authid/detail.uri?origin=resultslist&authorId=56007618700&zone=), [Drozd, A.](https://www.scopus.com/authid/detail.uri?origin=resultslist&authorId=55388226700&zone=" \o "Показать сведения об авторе), [Maevsky, D.](https://www.scopus.com/authid/detail.uri?origin=resultslist&authorId=55887026000&zone=" \o "Показать сведения об авторе), [Shapa, L.](https://www.scopus.com/authid/detail.uri?origin=resultslist&authorId=56535337000&zone=) [The levels of target resources development in computer systems](https://www.scopus.com/record/display.uri?eid=2-s2.0-84946687373&origin=resultslist&sort=cp-f&src=s&nlo=&nlr=&nls=&sid=93f88c98eee2c038f9c39ba2413afff7&sot=aff&sdt=a&sl=56&s=AF-ID%28%22Odessa+National+Polytechnic+University%22+60008605%29&relpos=21&citeCnt=19&searchTerm=). Proceedings of IEEE East-West Design and Test Symposium, EWDTS. 2014, art. no. 7027104 DOI:10.1109/EWDTS.2014.7027104
19. Chernov, S. Algorithm for the simplification of solution to discrete optimization problems / S. Chernov, S. Titov, Ld. Chernova, V. Gogunskii, Lb. Chernova, K. Kolesnikova // Eastern–European Journal of Enterprise Technologies. 2018, № 3/4 (93), pp. 34 – 43. DOI: 10.15587/1729-4061.2018.133405

**References**

1. Drozd, J., Drozd, A. (2013). Models, methods and means as resources for solving challenges in co-design and testing of computer systems and their components. International Conference on Digital Technologies, DT 2013, 176-180. DOI: https://doi.org/10.1109/DT.2013.6566307

2. Sigal, I. Kh., Ivanova A. P. (2003). Introduction to Applied Discrete Programming: Models and Computational Algorithms, M., Fizmatlit, 240.

3. Hetmantsev, V. D. (2001). Linear algebra and linear programming. Kyiv, Lybid, 250.

4. Teschl, G., Teschl, S. (2008). Mathematik für Informatiker. Band 1: Diskrete Mathematik und Lineare Algebra. Berlin, Springer, 2008. 519 s. DOI: 10.1007/978-3-540-77432-7

5. Biloshchytskyi, A., Myronov, O., Reznik, R., Kuchansky, A., Andrashko, Yu., Paliy, S., & Biloshchytska, S. (2017). A method to evaluate the scientific activity quality of HEIs based on a scientometric subjects presentation model. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 6/2 (90), 16–22. DOI: 10.15587/1729-4061.2017.118377

6. Titov, S. D, Chernova L. S. (2017). Higher and Applied Mathematics: Teaching. Manual: In 2 ch., Ch. 1., X., Fact, 336.

7. Nozicka F., Guddat J., Hollatz H. (1972). Theorie der Linearen Optimierung. Berlin, Akademie, 378.

8. Lau, D. (2007). Algebra und Diskrete Mathematik. Zweite, korrigierte und erweiterte Auflage. Berlin, Springer. 485 s. DOI: 10.1007/978-3-642-19443-6\_3

9. Biloshchytskyi, A., Kuchansky, A., Andrashko, Yu., Biloshchytska, S., Kuzka, O., Shabala, Ye., & Lyashchenko, T. (2017). A method for the identification of scientists' research areas based on a cluster analysis of scientific publications. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 5/2 (89), 4-10. DOI:10.15587/1729-4061.2017.112323

10. Biloshchytskyi, A., Kuchansky, A., Biloshchytska, S., & Dubnytska, A. (2017). Conceptual Model of Automatic System of Near Duplicates Detection in Electronic Documents. IEEE International Conference «The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics» (CADSM), 381–384. DOI: 10.1109/CADSM.2017.7916155

11. Unger N., Dempe, S. (2010). Lineare Optimierung. Wiesbaden, Springer, 142s

12. Kolesnіkov, O., Gogunskii, V., Kolesnіkova, K., Lukianov, D., & Olekh, T. (2016). Development of the model of interaction among the project, team of project and project environment in project system. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 5/9 (83), 20-26 DOI: 10.15587/1729-4061.2016.80769

13. Wu, C., & Nikulshin, V. (2000). Method of thermoeconomical optimization of energy intensive systems with linear structure on graphs. International Journal of Energy Research, 24(7), 615-623. DOI: https://doi.org/10.1002/1099-114X(20000610)24:7<615::AID-ER608>3.0.CO;2-P

14. Biloshchytskyi, A., Kuchansky, A., Biloshchytska, S., & Dubnytska, A. (2017). Conceptual Model of Automatic System of Near Duplicates Detection in Electronic Documents. IEEE International Conference «The Experience of Designing and Application of CAD Systems in Microelectronics» (CADSM), 381–384. DOI: 10.1109/CADSM.2017.7916155

15. Gogunskii, V., Kolesnіkov, О., Kolesnіkova, K., & Lukianov, D. (2016). "Lifelong learning" is a new paradigm of personnel training in enterprises // Eastern–European Journal of Enterprise Technologies, 4/2 (82), С. 4 – 10. DOI: 10.15587/1729 4061.2016.74905

16. Demin D. (2017). Perfection of approaches to the construction of the training process of athletes, considered in the framework of the implementation of the processes of non-formal education. ScienceRise: Pedagogical Education. 9 (17), 28-46. DOI: https://doi.org/10.15587/2519-4984.2017.111110

17. Lax Peter D. (2013). Linear algebra and application. New York, Wiley, 2-nd ed., 377. Avaiable at: https://www.wiley.com/en-us/Linear+Algebra+and+Its+Applications%2C+2nd+Edition-p-9781118626924

18. Drozd, J., Drozd, A., Maevsky, D., & Shapa, L. (2014). The levels of target resources development in computer systems. Proceedings of IEEE East-West Design and Test Symposium, EWDTS 2014, art. no. 7027104 DOI: 10.1109/EWDTS.2014.7027104

19. Chernov, S., Titov, S., Chernova, Ld., Gogunskii, V., Chernova, Lb., Kolesnikova, K. Algorithm for the simplification of solution to discrete optimization problems. Eastern–European Journal of Enterprise Technologies. 2018, № 3/4 (93), 34 – 43. DOI: 10.15587/1729-4061.2018.133405

Чернова Людмила Сергіївна

Кандидат технічних наук

Кафедра інформаційних управляючих систем та технологій

Національний університет кораблебудування ім. адмирала Макарова

пр. Героїв України, 9, м. Миколаїв, Україна, 54025

Контактний телефон: +380956102868

Е-mail: myla-0108@mail.com

Кількість статей у загальнодержавних базах даних –11

Кількість статей у міжнародних базах даних – 8

Scopus ID: - Scopus *h*-index: -

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0666-0742>

Титов Сергій Дмитрoвич

Кандидат технічних наук, доцент

Кафедра вищої математики

Національний університет кораблебудування ім. адмирала Макарова

пр. Героїв України, 9, м. Миколаїв, Україна, 54025

Контактний телефон: +38067 70 89 309

Е-mail: ss1-ss10@ukr.net

Кількість статей у загальнодержавних базах даних – 42

Кількість статей у міжнародних базах даних – 4

Scopus ID: 57200749785 Scopus *h*-index: 1

ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8772-9889

Чернов Сергій Костянтинович

Доктор технічних наук, професор

Кафедра управління проектами

Національний університет кораблебудування ім. адмирала Макарова

пр. Героїв України, 9, м. Миколаїв, Україна, 54025

Контактний телефон: +380503182012

Е-mail: 19chsk56@gmail.com

Кількість статей у загальнодержавних базах даних – 51

Кількість статей у міжнародних базах даних – 14

Scopus ID: Scopus *h*-index: -

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5202-8820>

Колеснікова Катерина Вікторівна

Доктор технічних наук, професор

Кафедра технологій управління

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка

вул. Богдана Гаврилишина, 24, Київ, Україна, 02000

Контактний телефон: +38067-70-23-294

Е-mail: amberk4@gmail.com

Кількість статей у загальнодержавних базах даних – 102

Кількість статей у міжнародних базах даних – 27

Scopus ID: 57188623059 (Scopus *h*-index: 4)

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9160-5982>

Чернова Любава Сергіївна

Кандидат технічних наук

Кафедра програмного забезпечення автоматизованих систем

Національний університет кораблебудування ім. адмирала Макарова

пр. Героїв України, 9, м. Миколаїв, Україна, 54025

Контактний телефон: +380506030355

Е-mail: 19chls92@gmail.com

Кількість статей у загальнодержавних базах даних – 15

Кількість статей у міжнародних базах даних – 10

Scopus ID: - Scopus *h*-index: -

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5191-0272>

Гогунський Віктор Дмитрович

Доктор технічних наук, професор

Кафедра управління системами безпеки життєдіяльності

Одеський національний політехнічний університет

пр. Шевченко, 1, м. Одеса, Україна, 65044

Контактний телефон: +38067-709-79-30

Е-mail: vgog@i.ua

Кількість статей у загальнодержавних базах даних – 315

Кількість статей у міжнародних базах даних – 46

Scopus ID: [56054256000](http://www.scopus.com/inward/authorDetails.url?authorID=56054256000&partnerID=MN8TOARS) (Scopus *h*-index: 5)

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9115-2346>

Чернова Людмила Сергеевна

Кандидат технических наук, доцент

Кафедра информационных управляющих систем и технологий

Национальный университет кораблестроения им. адмирала Макарова

пр. Героев Украины, 9, г. Николаев, Украина, 54025

Контактный телефон: +380956102868

Е-mail: myla-0108@mail.com

Число статей в в общегосударственных базах данных – 11

Количество статей в международных базах данных – 8

Scopus ID: - Scopus *h*-index: -

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0666-0742>

Титов Сергей Дмитриевич

Кандидат технических наук, доцент

Кафедра высшей математики

Национальный университет кораблестроения им. адмирала Макарова

пр. Героев Украины, 9, г. Николаев, Украина, 54025

Контактный телефон: +38067 70 89 309

Е-mail: ss1-ss10@ukr.net

Число статей в общегосударственных базах данных – 42

Количество статей в международных базах данных – 4

Scopus ID: 57200749785 Scopus *h*-index: 1

ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8772-9889

Чернов Сергей Константинович

Доктор технических наук, профессор

Кафедра управления проектами

Национальный университет кораблестроения им. адмирала Макарова

пр. Героев Украины, 9, г. Николаев, Украина, 54025

Контактный телефон: +380503182012

Е-mail: 19chsk56@gmail.com

Число статей в общегосударственных базах данных – 51

Количество статей в международных базах данных – 14

Scopus ID: Scopus *h*-index: -

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5202-8820>

Колесникова Екатерина Викторовна

Доктор технических наук, профессор

Кафедра технологий управления

Киевский национальны университет им. Тараса Шевченко

ул. Богдана Гаврилишина, 24, г. Киев, Украина, 02000

Контактный телефон: +38067-70-23-294

Е-mail: amberk4@gmail.com

Количество статей в общегосударственных базах данных – 102

Количество статей в международных базах данных – 27

Scopus ID: 57188623059 (Scopus *h*-index: 4)

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9160-5982>

Чернова Любава Сергеевна

Кандидат технических наук, доцент

Кафедра программного обеспечения автоматизированных систем

Национальный университет кораблестроения им. адмирала Макарова

проспект Героев Украины, 9, г. Николаев, Украина, 54025

Контактный телефон: +380506030355

Е-mail: 19chls92@gmail.com

Число статей в в общегосударственных базах данных – 15

Количество статей в международных базах данных – 10

Scopus ID: - Scopus *h*-index: -

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5191-0272>

Гогунский Виктор Дмитриевич

Доктор технических наук, профессор

Кафедра управления системами безопасности жизнедеятельности

Одесский национальный политехнический университет

пр. Шевченко, 1, г. Одесса, Украина, 65044

Контактний телефон: +38067-709-79-30

Е-mail: vgog@i.ua

Количество статей в общегосударственных базах данных – 315

Количество статей в международных базах данных – 46

Scopus ID: [56054256000](http://www.scopus.com/inward/authorDetails.url?authorID=56054256000&partnerID=MN8TOARS) (Scopus *h*-index: 5)

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9115-2346>

Chernova Lyudmila

PhD, Associate Professor

Department of Information Control Systems and Technologies

### Admiral Makarov National University of Shipbuilding

Heroiv Ukrainy ave., 9, Mykolayiv, Ukraine, 54000

contact number: +380956102868

E-mail: myla-0108@mail.com

The number of articles in the national database – 11

The number of articles in international databases – 8

Scopus ID:

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0666-0742>

Titov Sergiy

PhD, Associate Professor

Department of Higher Mathematics

### Admiral Makarov National University of Shipbuilding

Heroiv Ukrainy ave., 9, Mykolayiv, Ukraine, 54000

contact number: +38067 70 89 309

E-mail: ss1-ss10@ukr.net

The number of articles in the national database – 42

The number of articles in international databases – 4

Scopus ID: 57200749785 (Scopus *h*-index: 1)

ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8772-9889>

Chernov Sergii

Doctor of Technical Sciences, Professor

Department of Project Management

### Admiral Makarov National University of Shipbuilding

Heroiv Ukrainy ave., 9, Mykolayiv, Ukraine, 54000

contact number: +380503182012

E-mail: 19chsk56@gmail.com

The number of articles in the national database – 51

The number of articles in international databases – 14

Scopus ID: - (Scopus *h*-index: -)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5202-8820>

Kateryna Kolesnikova

Doctor of Technical Sciences, Professor

Department of Management Technologies

Taras Shevchenko Kiyv National University

Bogdan Gavrilishin str., 24, Kiev, Ukraine, 02000

Contact number: 38067-7023294

E-mail: amberk4@gmail.com

The number of articles in the national database – 102

The number of articles in international databases – 27

Scopus ID: 57188623059 (Scopus *h*-index: 4)

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9160-5982>

Chernova Liubava

PhD, Associate Professor

Department of Computer-aided Systems Software Support

### Admiral Makarov National University of Shipbuilding

Heroiv Ukrainy ave., 9, Mykolayiv, Ukraine, 54000

contact number: +380506030355

E-mail: 19chls92@gmail.com

The number of articles in the national database – 15

The number of articles in international databases – 10

Scopus ID:

ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5191-0272>

Viktor Gogunskii

Doctor of Technical Sciences, Professor

Department of Systems Management Life Safety

Odessa National Polytechnic University

Shevchenko ave., 1, Odessa, Ukraine, 65044

contact number: +38067-709-79-30

E-mail: vgog@i.ua

The number of articles in the national database – 311

The number of articles in international databases – 41

Scopus ID: [56054256000](http://www.scopus.com/inward/authorDetails.url?authorID=56054256000&partnerID=MN8TOARS) (Scopus *h*-index: 5)

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9115-2346>

Нова пошта. Відділення № 17, м. Миколаїв

 просп. Героїв України (ран. Г. Сталінграду), 9д (МЕТРО)

Чернов Сергій Костянтинович

Телефон: +380503182012

*д.т.н. Кононенко Игорь Владимирович*

*Профессор, зав. кафедрой НТУ «ХПИ»*

*Тел.:0(50) 514 2016*

*E-mail: Igor Kononenko <igorvkononenko@gmail.com>*

*Рабочий адрес: 31002 Харьков, ул. Фрунзе, 21 НТУ «ХПИ»*

*д.т.н. Белощицкий Андрей Александрович*

*Зав. кафедрой технологий управления КНУ им. Т. Шевченко*

*Тел.: 0 (93) 676 68 88*

*E-mail: bao1978@gmail.com*

*Рабочий адрес: Киев, КНУ им. Тараса Шевченко*