85-летию университета посвящается

Труды Одесского политехнического университета

Научный и производственно-практический сборник по техническим и естественным наукам

Вып. 1 (19). 2003

Одесса

Министерство образования и науки Украины

Одесский национальный политехнический университет

Труды

ОДЕССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Научный и производственно-практический сборник

Вып. 1(19). 2003

Одесса

В ходе исследования выявилось следующее (см. рисунок). Установка стоек с проволокой в воду привела к снижению сопротивления, измеренного на клеммах измерительной ячейки до 4,1 Ом в дистиллированной воде и до 3,7 Ом в водопроводной воде. Нагрев воды в кювете приводил к падению электрического сопротивления на экспериментальной ячейке. Однако, если на дистиллированной воде падение сопротивления происходило вплоть до температуры кипения, то на водопроводной воде наблюдался минимум примерно при 85 °С, а далее сопротивление росло, и при температурах около 97 °С сопротивление ячейки с дистиллированной водой и с водопроводной уравнивались. Полученный рост сопротивления при температурах выше 85 °С может быть объяснен активным выделением из воды растворенного воздуха, а т.к. выделение происходит в основном на поверхностях, то это приводит к повышению электрического сопротивления цепочки стойка — корпус кюветы — стойка. Охлаждение ячейки с предварительно нагретой до 99,8 °С водопроводной водой шло по тому же графику, что и нагрев дистиллированной воды. Повторение процедуры нагрева водопроводной воды, прошедшей предварительный нагрев, а затем охлаждение привело к совпадению зависимости сопротивление-температура, полученной для указанного случая, с подобной зависимостью, полученной при нагреве ячейки в дистилляте.

Установка на стойки электроизоляции в виде термоусадочного пластика полностью устранило влияние перечисленных факторов: электрическое сопротивление как "сухой" так и погруженной в воду ячейки отличались не более чем на 1 %.

Проведенное исследование показало недопустимость применения неизолированных элементов крепления проволочных нагревателей при исследовании кипения на проволоке в объеме воды с измерением температуры через электрическое сопротивление нагревателя.

Погрешность измерения температуры проволоки минимальна при электрически изолированных элементах крепления.

Литература

1. Стырикович М.А., Резников М.И. Методы экспериментального изучения процессов генерации пара. — Изд. 2-е. — М.: Энергия, 1977. — 280 с.
2. Григорьев В.А., Павлов Ю.М., Аметистов Е.В. Кипение криогенных жидкостей. — М.: Энергия, 1977. — 288 с.
3. Улиг Г.Г., Реви Р.У. Коррозия и борьба с ней. — Л.: Химия, 1989. — 456 с.
4. Королев А.В., Литвин А.Н. Экспериментальное исследование шумов кипения на электрически обогреваемой проволоке // Тр. Одес. политехн. ун-та. — Одесса, 2001. — Вып. 1(13). — С. 63 — 66.

Поступила в редакцию 10 декабря 2002 г.

УДК 532.542+532.517.43

С.В. Сурков, инженер, Одес. нац. политехн. ун-т

ВТОРИЧНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В КАНАЛАХ С КРУГЛЫМ И КОЛЬЦЕВЫМ ПОПЕРЕЧНЫМ СЕЧЕНИЕМ

С.В. Сурков. **Вторинні течії в каналах із круглим та кільцевим поперечним перерізом.** Розроблено спрощену модель вторинних течій для труб із круглим та кільцевим поперечним перерізом. Побудовано лінії току та проаналізовано розподіли швидкостей.

S.V. Surkov. **Secondary flows in ducts with the round and circular cross-section.** A simplified model of secondary flows in round and circular ducts is developed. Stream-lines are build and velocity distributions are analysed.

Согласно классификации Прандтля вторичные течения второго рода возникают в каналах некруглого поперечного сечения, видимо, из-за неравномерности распределения касательных напряжений на стенке [1].

Модель таких течений для случая установившегося, стабилизированного по длине трубы движения жидкости предложена ранее [2]. Показано, что если одновременно пренебречь вязким трением, замедляющим вращение вихря, и растяжением вдоль оси, интенсифицирующим это вращение, то уравнения движения жидкости сводятся к уравнению

$$\nabla^2\psi = C\psi\,, \tag{1}$$

где ψ — функция тока, м^2/с;

$\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа;

C — константа.

Вторичные течения первого рода возникают в поперечных сечениях труб или каналов под действием массовых сил [1]. Их классическим примером является парный вихрь, возникающий в изогнутой круглой трубе под действием центробежной силы.

В цилиндрической системе координат $(r,\ \varepsilon)$ уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varepsilon^2} = k^2\psi\,, \tag{2}$$

где $k^2 = C$ — постоянная, которая может быть как положительной, так и отрицательной.

Это уравнение решается путем разделения переменных [3]

$$\psi(r,\varepsilon) = f_1(r)f_2(\varepsilon)\,,$$

где $f_1(r)$ — функция, зависящая только от радиуса;

$f_2(\varepsilon)$ — функция, зависящая только от полярного угла.

Уравнение (2) тогда приводится к виду

$$f_2(\varepsilon)[r^2 f_1''(r) + rf_1'(r) \pm k^2r^2 f_1(r)] = -f_1(r)f_2''(\varepsilon)$$

или

$$\frac{r^2 f_1''(r) + rf_1'(r) \pm k^2r^2 f_1(r)}{f_1(r)} = -\frac{f_2''(\varepsilon)}{f_2(\varepsilon)}. \tag{3}$$

Так как левая часть (3) зависит только от r, а правая — только от ε, уравнение (3) распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\frac{r^2 f_1''(r) + rf_1'(r) \pm k^2r^2 f_1(r)}{f_1(r)} = n^2\,, \tag{4}$$

$$-\frac{f_2''(\varepsilon)}{f_2(\varepsilon)} = n^2\,, \tag{5}$$

где n^2 — некоторая постоянная.

Из (5) следует

$$f_2(\varepsilon) = \sin(n\varepsilon + \varepsilon_0)\,.$$

Добавление к ε угла, кратного 2π, не должно изменить значение функции $f_2(\varepsilon)$, следовательно, n может быть только целым числом.

Тогда из (4) следует, что

$$r^2 f_1''(r) + rf_1'(r) \pm k^2r^2 f_1(r) = n^2 f_1(r)\,,$$

или, в других обозначениях,

$$r^2\frac{d^2f_1}{dr^2} + r\frac{df_1}{dr} \pm k^2r^2 f_1 = n^2 f_1.$$

Переходя к безразмерной переменной $\bar r = kr$, можно избавиться от множителя k^2 в левой части

$$\frac{df_1}{dr} = k\frac{df_1}{d\bar r}\,,\qquad \frac{d^2f_1}{dr^2} = k^2\frac{d^2f_1}{d\bar r^2}\,,$$

$$\bar r^2\frac{d^2f_1}{d\bar r^2} + \bar r\frac{df_1}{d\bar r} - (n^2 \pm \bar r^2)f_1 = 0\,.$$

Это дифференциальное уравнение Бесселя. В общем случае его решение

$$f_1(\bar r) = C_1J_n(\bar r) + C_2N_n(\bar r) + C_3I_n(\bar r) + C_4K_n(\bar r)\,, \tag{6}$$

где $J_n(\bar r)$ — функции Бесселя первого рода;

$N_n(\bar{r})$ — функции Неймана (функции Бесселя второго рода);

$I_n(\bar{r})$ и $K_n(\bar{r})$ — функции Бесселя от комплексного аргумента (модифицированные функции Бесселя);

C_1, C_2, C_3, C_4 — постоянные.

Поскольку бесконечные значения ψ не имеют физического смысла, в решении (6) остается только первое слагаемое. Таким образом, окончательное решение имеет вид

$$\psi = C_1 J_n(kr)\sin(n\varepsilon + \varepsilon_0), \tag{7}$$

где C_1 — амплитудное значение функции тока, м²/с;

ε_0 — начальный угол, рад.

Без ущерба для дальнейшего анализа можно принять $\varepsilon_0 = 0$. Кроме того, можно использовать безразмерную переменную

$$\bar{\psi} = \frac{\psi}{C_1},$$

и выражение (7) принимает вид

$$\bar{\psi} = J_n(\bar{r})\sin(n\varepsilon). \tag{8}$$

В ходе гидромеханического анализа решений (8) при различных значениях n определялись следующие параметры (в полярных координатах):

— проекции скорости

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varepsilon}, \tag{9}$$

$$u_\varepsilon = -\frac{\partial\psi}{\partial r}; \tag{10}$$

— скорость угловой деформации жидких частиц относительно продольной оси

$$\theta_x = \frac{1}{2r}\left[\frac{\partial(ru_z)}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial\varepsilon}\right], \tag{11}$$

— завихренность потока относительно продольной оси

$$\Omega_x = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(ru_z)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial\varepsilon}\right]. \tag{12}$$

Для упрощения выкладок использовались безразмерные переменные

$$\bar{u}_r = \frac{u_r}{C_1 k}, \quad \bar{u}_\varepsilon = \frac{u_\varepsilon}{C_1 k}, \quad \bar{\Omega}_x = \frac{\Omega_x}{C_1 k^2}, \quad \bar{\theta}_x = \frac{\theta_x}{C_1 k^2}.$$

Во всех рассмотренных случаях из (12) вытекает

$$\bar{\Omega}_x = \bar{\psi}.$$

Этот результат позволяет утверждать, что полученные решения удовлетворяют уравнению (1). Выражения для параметров определены по формулам (9) — (11) (см. таблицу).

Основные параметры вторичных течений при $n = 0 \ldots 3$

n	$\bar{u}_r$	$\bar{u}_\varepsilon$	$\bar{\theta}_x$
0	0	$J_1(\bar{r})$	$\frac{1}{2}J_0(\bar{r})$
1	$\frac{1}{\bar{r}}J_1(\bar{r})\cos\varepsilon$	$\left[\frac{1}{\bar{r}}J_1(\bar{r}) - J_0(\bar{r})\right]\sin\varepsilon$	$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\bar{r}^2}\right)J_1(\bar{r})\sin\varepsilon$
2	$\frac{2}{\bar{r}}J_2(\bar{r})\cos 2\varepsilon$	$\left[\frac{2}{\bar{r}}J_2(\bar{r}) - J_1(\bar{r})\right]\sin 2\varepsilon$	$\left[\left(\frac{1}{\bar{r}} - \frac{8}{\bar{r}^3}\right)J_1(\bar{r}) + \left(\frac{4}{\bar{r}^2} - \frac{1}{2}\right)J_0(\bar{r})\right]\sin 2\varepsilon$
3	$\frac{3}{\bar{r}}J_3(\bar{r})\cos 3\varepsilon$	$\left[\frac{3}{\bar{r}}J_3(\bar{r}) - J_2(\bar{r})\right]\sin 3\varepsilon$	$\left[\left(-\frac{72}{\bar{r}^4} + \frac{13}{\bar{r}^2} - \frac{1}{2}\right)J_1(\bar{r}) + \left(\frac{36}{\bar{r}^3} - \frac{2}{\bar{r}}\right)J_0(\bar{r})\right]\sin 3\varepsilon$

Методика построения линий тока ($\psi = \text{const}$) для течений жидкости описана ранее [2]. При построении значение ψ изменялось с постоянным шагом $\Delta\psi$. Особенность компьютерных расчетов в данном случае состояла в том, что функции $J_0(\overline{r})$ и $J_1(\overline{r})$ вычислялись с помощью дробно-рациональных приближений [4], а функции последующих порядков выражались через них с помощью формул приведения

$$J_2(\overline{r}) = \frac{2}{\overline{r}} J_1(\overline{r}) - J_0(\overline{r}),$$

$$J_3(\overline{r}) = \left(\frac{8}{\overline{r}^2} - 1\right) J_1(\overline{r}) - \frac{4}{\overline{r}} J_0(\overline{r}),$$

и т.д.

Линии тока для случаев $n = 1 \ldots 3$, а также эпюры скоростей отображают вторичные течения (см. рисунки 1, 2, 3). Для наглядности вместо эпюр u_r построены эпюры проекции скорости на ось y

$$u_y = \begin{cases} u_r, & r \geq 0, \\ -u_r, & r < 0. \end{cases}$$

Из рисунков видно, что каждому решению уравнения (8) соответствует вторичное течение с $2n$ вихревыми ячейками, имеющими форму сектора круга.

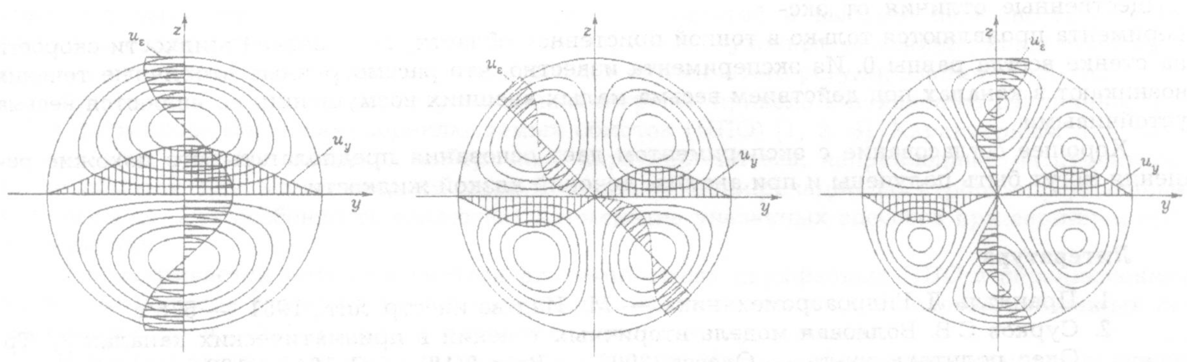

Рис. 1. Картина течения, описываемого уравнением (8), при $n = 1$ и $\Delta\overline{\psi} = 0{,}1$

Рис. 2. Картина течения, описываемого уравнением (8), при $n = 2$ и $\Delta\overline{\psi} = 0{,}1$

Рис. 3. Картина течения, описываемого уравнением (8), при $n = 3$ и $\Delta\overline{\psi} = 0{,}1$

Экспериментально наиболее исследовано течение, возникающее в изогнутой трубе под действием центробежной силы. Полученное решение (см. рисунок 1) отличается от эксперимента только в тонком пристенном слое, т.к. в вязкой жидкости скорость на стенке равна нулю.

Другие течения могут иметь место в каналах с поперечным сечением в форме сектора круга (см. рисунки 2 и 3). Кроме того, такие течения, видимо, появляются при переходе от ламинарного режима к турбулентному в круглой трубе. При переходе к турбулентности через каскад бифуркаций в потоке должны возникать все более сложные структуры [5], и, возможно, найденные решения соответствуют этим структурам.

Во всех рассмотренных течениях границы вихревых ячеек позволяют легко определить положение границ канала. Линии тока, ограничивающие секторы круга, проходят через начало координат, где $\psi = 0$. Следовательно, на стенке канала функция Бесселя соответствующего порядка обращается в ноль, т.е.

$$J_n(\overline{r}) = 0. \tag{13}$$

Таким образом, безразмерные радиусы канала в рассмотренных случаях являются первыми корнями функций Бесселя соответствующего порядка.

В случае $n = 0$ функция тока ψ не зависит от ε, и линии тока представляют собой семейство концентрических окружностей (рис. 4). Поэтому выбор граничных условий не столь очевиден. По аналогии условие (13) можно применить и для этого случая.

Картина течения при $n = 0$ соответствует граничному условию (v=0). Данное решение может служить моделью известного вихря, возникающего при стоке воды из ванны: такой вихрь возникает под действием малых внешних возмущений и является чрезвычайно устойчивым.

Если рассмотреть течения в области между первым и вторым корнем функции Бесселя соответствующего порядка, можно получить картины течения в кольцевых каналах. Линии тока и распределения скоростей для течения, описываемого выражением (8) при $n = 3$ (рис. 5), — это внешняя область вокруг течения, представленного на рисунке 3.

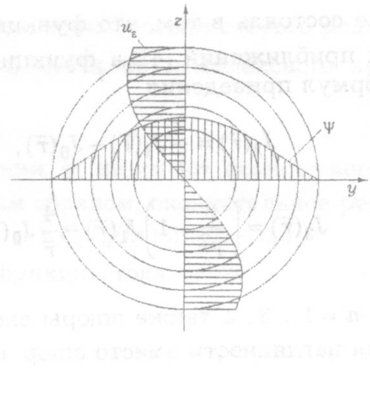

Рис. 4. Картина течения в круглой трубе, описываемого уравнением (8), при $n = 0$ *и* $\Delta\overline{\psi} = 0{,}1$

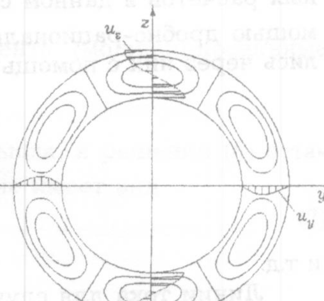

Рис. 5. Картина течения в кольцевом канале, описываемого уравнением (8), при $n = 3$ *и* $\Delta\overline{\psi} = 0{,}1$

Результаты экспериментов говорят о том, что в кольцевых трубах возможны и “многослойные” вихревые структуры, соответствующие нескольким корням функций Бесселя [5].

Таким образом, уравнение (1), которое успешно использовалось для вторичных течений в призматических каналах [2], дает удовлетворительные решения и для круглых труб. Существенные отличия от эксперимента проявляются только в тонкой пристенной области, т.к. в вязкой жидкости скорости на стенке всегда равны 0. Из эксперимента известно, что рассмотренные вторичные течения возникают в каналах под действием весьма малых внешних возмущений, но являются весьма устойчивыми.

Хорошее согласование с экспериментом дает основания предполагать, что похожие решения могут быть получены и при анализе течений вязкой жидкости.

Литература

1. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. — М.: Изд-во иностр. лит., 1951. — 576 с.
2. Сурков С.В. Волновая модель вторичных течений в призматических каналах // Тр. Одес. политехн. ун-та. — Одесса, 2002. — Вып. 2(18). — С. 184 — 188.
3. Коренев Б.Г. Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях. — М.: Физматгиз, 1960. — 460 с.
4. Попов Б.А., Теслер Г.С. Вычисление функций на ЭВМ. Справ. — К.: Наук. думка, 1984. — 600 с.
5. Джозеф Д. Устойчивость движений жидкости. — М.: Мир, 1981. — 640 с.

Поступила в редакцию 5 ноября 2002 г.