

ОБОБЩЕННЫЕ ОДНОМЕРНЫЕ КЛЕТОЧНЫЕ АВТОМАТЫ И ДИСКРЕТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Е. Д. Франжева

Одесский национальный политехнический университет

Аннотация. Рассматривается проблема представления клеточных автоматов в виде разностных уравнений. Для этого строится система типа Диффузия-Реакция. При этом, уравнение Реакции представляется как отображение сумм функций «тент». Такое представление позволяет рассматривать клеточные автоматы с произвольным конечным или бесконечным числом состояний. Построена модель линейных клеточных автоматов, действующих по правилам кода Вольфрама [1]. Приведены примеры.

Ключевые слова: клеточные автоматы, дискретные динамические системы, контроль, периодические решения.

Введение

Клеточным автоматам (КА) посвящено множество работ, они имеют широкое применение во многих областях естествознания, ими удобно моделировать различные процессы, явления (реакция Белоусова-Жаботинского [2], турбулентность [3], распространение эпидемий [4], динамика популяций [5], электоральные процессы [6] и др.). В компьютерных науках широко распространено правило 30 кода Вольфрама для создания псевдослучайных последовательностей целых чисел, например, в пакете Mathematica [1].

Как известно [5], КА – это динамическая система. В задачах построения алгоритмов исследования и управления клеточными автоматами зачастую выглядит громоздко их построение по логическим правилам. В особенности, в программной реализации, так как гораздо легче написать алгоритм через аналитическое представление, а не огромное количество циклов и условных операторов.

Цель работы – представить динамическую систему, задающую клеточные автоматы, в виде разностных уравнений, что позволит использовать имеющиеся разработанные методы анализа и синтеза нелинейных динамических систем. Кроме того, это даст возможность обобщить КА так, что каждая клетка сможет принимать любое число состояний, это в дальнейшем позволит применять известные методы управления динамическими системами, используя информацию о предшествующих состояниях системы [7, 8]. А также появится возможность рассматривать КА шире и обнаруживать новые свойства этих систем, регулярные структуры, периодические или

структуры, близкие к периодическим.

Данный подход к исследованию КА даст возможность продвинуться в исследованиях конкретных систем различной природы (физических, биологических, технических, информационных, социальных и т.п.), в частности – решать проблемы локализации эпидемий [4], регуляризации турбулентных режимов путем их разрушения [3] и т.п.

1. Построение динамической системы, описывающей КА

Простейшие одномерные КА представляются в виде последовательности клеток принимающих всего два значения 1 и 0 (состояние клетки). В таблице 1 представлен КА, состояния клеток которого заданы в графическом и цифровом виде: черным клеткам соответствуют единицы, белым клеткам – нули.

Таблица 1

Простейший одномерный КА, представленный в графическом и цифровом виде

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Существует два способа задания динамической системы, которая описывает клеточный автомат. Первый способ – задавать логические правила перехода от одного состояния к другому. Второй способ – это представление КА в аналитической форме через систему разностных уравнений.

Согласно первому способу, клетка на каждом шаге меняет свое значение, по некоторым правилам, которые зависят от ее состояния и состояния ее соседей. Если клетка находится с краю и ей не хватает соседей, то необходимо ввести учет фиктивных соседей. Для этого мож-

но использовать периодическое продолжение или краевые условия. Также можно замкнуть КА в тор.

В дальнейшем, в статье разрабатываемые методы будут применяться к исследованию КА, задаваемых кодом Вольфрама. В правилах кода Вольфрама учитываются всего два ближайших соседа. Тогда существует 256 правила для построения КА. Если в КА берется больше соседей, правил перехода становится соответственно больше. Например, правило кода Вольфрама 150 (10010110₂=150₁₀) выглядит так:

Таблица 2

Правило Вольфрама 150

| | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 111 | 110 | 101 | 100 | 011 | 010 | 001 | 000 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |

Такой клеточный автомат называется одномерным, в отличие от многомерных КА, где соседи рассматриваются в пространстве R^m , $m > 1$.

Обобщение КА связано, во-первых, с учетом большего числа соседей, а во-вторых, можно рассматривать автомат, клетки которого принимают любое конечное число состояний и даже бесконечное.

Второй способ задания динамической системы – в виде разностных уравнений [9]. В данной работе развивается этот подход так, чтобы можно было моделировать КА в пространствах любой размерности, клетки которого могут принимать любое количество состояний, что в дальнейшем будет проиллюстрировано на примерах линейных КА.

Пусть КА содержит конечное число клеток K , которые принимают m различных состояний. Для определенности будем учитывать, что на последующее состояние клетки влияет ее текущее состояние и состояние двух ее соседей (достаточно просто распространить рассматриваемую ситуацию на большее число соседей).

Обозначим состояние i -й клетки через x_i , $i = \overline{1, K}$. Каждое x_i является элементом некоторого множества α . Например:

$$\alpha = \{0, 1\}; \alpha = [0, 1];$$

$$\alpha = \left\{ 0, \frac{1}{m-1}, \frac{2}{m-1}, \dots, 1 \right\}. \quad (1)$$

В первом случае клетка может находиться в двух состояниях, во втором – в бесконечном числе состояний, в третьем – в m состояний. Вектор

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_K \end{pmatrix}$ назовем состоянием КА. Пусть A –

множество всех состояний КА. В первом случае это множество состоит из 2^K векторов различных состояний. Во втором случае множество бесконечно и его можно представить K -мерным параллелепипедом. В третьем – множество A конечно и содержит m^K векторов состояний.

Правило перехода КА позволяет задавать смену состояния $X_n \rightarrow X_{n+1}$, где $n = 0, 1, 2, \dots$ – номер шага. Таким образом, КА на каждом шаге полностью определяется состоянием КА на начальном шаге (нулевым). Как уже было упомянуто выше, наша цель – представление логических правил перехода КА в виде системы разностных уравнений:

$$X_{n+1} = F(X_n) \quad (2)$$

Систему (2) будем задавать в виде суперпозиции преобразований, а именно – линейного, называемого Диффузией и нелинейного, называемого Реакцией. Терминология Диффузия-Реакция берется из [9], где моделируется реакция Белоусова-Жаботинского. Для того чтобы понять как использовать уравнения Реакции и Диффузии, рассмотрим пример КА Вольфрама по правилу 150 (таблица 2).

Каждой из троек возможных состояний текущей клетки и соседних ставим в соответствие число. Обозначим эту тройку на n -ом шаге и переход на $n+1$ -ый шаг следующим образом $\{x_{i-1}(0), x_i(0), x_{i+1}(0)\} \rightarrow x_i(1)$. В КА Вольфрама правило перехода задается в виде таблицы (см. табл. 2).

Задача состоит в том, чтобы на первом этапе задать тройку весовых коэффициентов, рассчитать сумму произведения весовых коэффициентов на числовые значения клеток. На втором этапе каждому такому значению необходимо сопоставить в точности либо 0, либо 1.

Если, весовые коэффициенты равны $\{2, 2, 1\}$ (далее будем называть такой набор коэффициентов внутренним кодом), то соответствующая сумма произведений запишется следующим образом (третья строка таблицы):

Таблица 3

Применение внутреннего кода к правилу 150 кода Вольфрама

| | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 111 | 110 | 101 | 100 | 011 | 010 | 001 | 000 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 5 | 4 | 3 | 2 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| 5→1 | 4→0 | 3→0 | 2→1 | 3→0 | 2→1 | 1→1 | 0→0 |

Получили множество $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ и каждому числу из этого множества ставим в соответствие либо 0, либо 1. Заметим, что в данном

примере это возможно благодаря конкретному выбору коэффициентов. Поэтому в каждом конкретном примере необходимо выбирать весовые коэффициенты подходящим образом. Множество прообразов $\{I\}$ обозначим J и будем называть его внешним кодом.

Для отображения конечного множества в множество $\{0, I\}$ можно использовать функции, определенные только на дискретном множестве, например:

$$\hat{\varphi}_i(t) = \begin{cases} 1, & t=i \\ 0, & t \neq i \end{cases} \quad (3)$$

Тогда, допустим, правилу 150 будет соответствовать функция:

$$\varphi(t) = \hat{\varphi}_1(t) + \hat{\varphi}_2(t) + \hat{\varphi}_5(t) = \begin{cases} 1, & t=1, t=2, t=5 \\ 0, & t=0, t=3, t=4 \end{cases}$$

Здесь $J = \{1, 2, 5\}$.

Таким образом, состояние клетки на следующем шаге можно определить как:

$$\begin{cases} x_i(1) = \varphi\{2x_{i-1}(0) + 2x_i(0) + x_{i+1}(0)\} \\ i = \overline{1, K}, \\ x_0 = x_K, x_{K+1} = x_1 \end{cases}$$

В качестве набора для функций перехода $\hat{\varphi}_i$ можно использовать достаточно широкий класс функций, определенных на отрезке, например, тенты, ступенчатые функции и т. д.

Перейдем к более общему случаю, когда имеются и слева, и справа по r активных соседей.

Для этого рассмотрим уравнение Диффузии:

$$\begin{cases} y_i = \sum_{s=-r}^r \delta_s x_{i+s} \\ i = \overline{1, K} \end{cases} \quad (4)$$

где δ_s – неотрицательные целочисленные весовые коэффициенты, δ_0 соответствует x_i , δ_s ($s \neq 0$) соответствует соседним элементам.

Соотношение (4) можно задать в матричной форме:

$$Y_n = DX_n$$

Например, при $r = 1$ матрица D имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \delta_0 & \delta_1 & 0 & \dots & 0 & \delta_{-1} \\ \delta_{-1} & \delta_0 & \delta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \delta_{-1} & \delta_0 & \delta_1 & \dots & 0 \\ & & & \dots & & \\ \delta_1 & 0 & \dots & 0 & \delta_{-1} & \delta_0 \end{pmatrix}$$

Тогда (2) можно записать как:

$$X_{n+1} = \Phi(DX_n) \quad (5)$$

где $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \dots \\ \varphi_K \end{pmatrix}$, $i = \overline{1, K}$. Еще раз отметим, что

элементами матрицы D служат числа δ_s , $-r \leq s \leq r$ и нули. Эти числа составляют внутренний код $\{\delta_{-r}, \dots, \delta_r\}$.

В формуле (4) $i + s$ может оказаться больше K , а $i - s$ меньше 1. В этом случае нужно определить необходимые значения клеток x_i , $i > K$, $i < 1$. Как уже было упомянуто выше, определять их можно различными способами [9]: зеркально симметрично относительно крайних клеток, с помощью краевых условий, наиболее часто применяется замыкание КА в окружность, то есть в этом случае считаем, что $x_{K+i} = x_i$ или $x_{1-i} = x_{K-i+1}$, $i = 1, 2, \dots$.

$$\text{Обозначим } p = \sum_{s=-r}^r \delta_s + 1.$$

Рассмотрим набор функций, определенных на $t \in [0, p]$, так чтобы:

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_i(t) = \begin{cases} 1, & t=i \\ 0, & t \neq i, \end{cases} \\ t = [0, p], i = 0, 1, \dots, p, \\ \hat{\varphi}_{p+1}(t) = \hat{\varphi}_0(t) \end{cases}$$

Эти функции могут быть непрерывными, например:

$$\begin{cases} \hat{\varphi}_j(t) = \begin{cases} t - j + 1, & j - 1 < t \leq j \\ -t + j + 1, & j < t \leq j + 1 \end{cases} \\ \hat{\varphi}_0(t) = \begin{cases} t - p, & p < t \leq p + 1 \\ -t + 1, & 0 < t \leq 1 \end{cases} \\ j = \overline{1, p} \end{cases} \quad (6)$$

Будем считать, что функции $\varphi_1, \dots, \varphi_K$ равны между собой и равны сумме функций из множества (6). Функции этого множества называются «тентами». Кроме «тентов» удобно пользоваться и ступенчатыми функциями:

$$\hat{\varphi}_j(t) = \begin{cases} 1, & j - \frac{1}{2} < t < j + \frac{1}{2} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}, \hat{\varphi}_0(t) = \begin{cases} 1, & 6.5 \leq t \leq 7 \\ 1, & 0 \leq t \leq 0.5 \end{cases} \quad (7)$$

Например, если $p = 6$, тогда графики функций из множества (6) $\hat{\varphi}_0(t)$, $\hat{\varphi}_2(t)$, $\hat{\varphi}_2(t) + \hat{\varphi}_3(t)$ имеют вид (рис. 1, 2, 3):

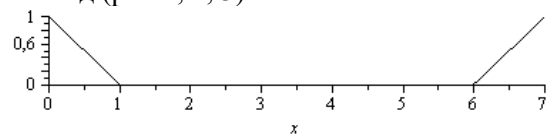


Рис. 1. Функция $\hat{\varphi}_0(t)$

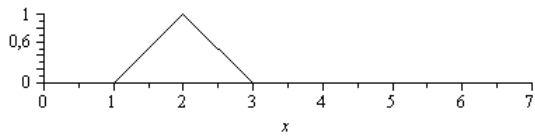


Рис. 2. Функция $\hat{\phi}_2(t)$

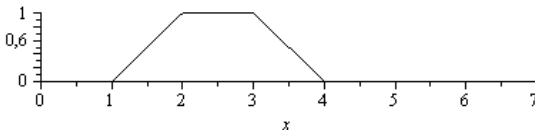


Рис. 3. Функция $\hat{\phi}_2(t) + \hat{\phi}_3(t)$

Графики ступенчатых функций (7) $\hat{\phi}_0(t)$, $\hat{\phi}_3(t)$, $\hat{\phi}_0(t) + \hat{\phi}_3(t) + \hat{\phi}_5(t) + \hat{\phi}_6(t)$ имеют вид (рис.4, 5):

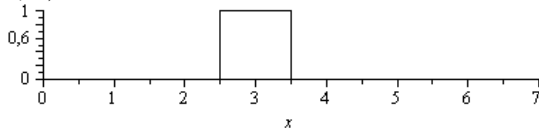


Рис. 4. Функция $\hat{\phi}_3(t)$

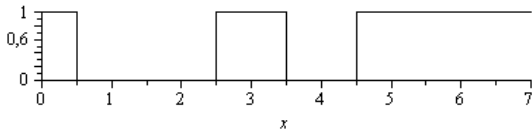


Рис. 5. Функция $\hat{\phi}_0(t) + \hat{\phi}_3(t) + \hat{\phi}_5(t) + \hat{\phi}_6(t)$

Так как ступенчатая функция разрывная, то в некоторых задачах это свойство может быть негативным. Система, в которой применяется отображение «тент», может быть использована для моделирования клеточных автоматов с произвольным числом состояний. Набор функций (3) – частный случай набора (6). Если клетка принимает два состояния, достаточно использовать (3), но гораздо удобнее использовать непрерывную функцию, заданную на интервале $[0, p]$.

Важно, что для построенной динамической системы (5) множество всех состояний КА A будет инвариантным, то есть если $X_0 \in A$, то $F(X_0) \in A$. Проверим инвариантность для случаев (1).

Случай 2 из (1) очевиден, поэтому покажем инвариантность в третьем случае из (1).

Теорема 1. Пусть i -ая клетка принимает m значений, которые представим как множество:

$$\alpha = \left\{ 0, \frac{1}{m-1}, \frac{2}{m-1}, \dots, 1 \right\}$$

Тогда $A = \alpha \times \dots \times \alpha$ (это декартово произведение K одинаковых множеств элементов α) – инвариантное множество динамической системы (5).

Доказательство. Пусть $x_i = \frac{\tau_i}{m-1}$, где τ_i – некоторое целое число из множества $\{0, 1, \dots, m-1\}$. Тогда

$$y_i = \frac{1}{m-1} \sum_{s=-r}^r \delta_s \tau_{i+s}$$

Причем, так как δ_s – целое число, то $\sum_{s=-r}^r \delta_s \tau_{i+s}$ – целое число. Тогда $y_i = q_i + \frac{\hat{q}_i}{m-1}$, где $q_i < p-1$ – целое число, $\hat{q}_i \leq m-1$ – целое число. Функция, являющаяся суммой тентов, переводит это число или в 0, или 1, или в $\frac{\hat{q}}{m-1}$, то есть:

$$\varphi(y_i) \in \left\{ 0, \frac{\hat{q}}{m-1}, 1 \right\}$$

В любом случае $\varphi(y_i) \in \alpha$, то есть множество A инвариантно. Аналогично для ступенчатых функций (7).

Отметим, что первый случай получается из третьего при $m = 2$. Теорема доказана.

2. Линейный одномерный клеточный автомат Вольфрама

В КА Вольфрама в формуле (5) $r = 1$, это значит, что используется всего три весовых коэффициента $\{\delta_{-1}, \delta_0, \delta_1\}$ – упорядоченное множество, которое, как упоминалось выше, называется внутренним кодом. При применении внутреннего кода, получим значения из упорядоченного множества $\{0, 1, \dots, p\}$ (см. табл. 3). Напомним, что подмножество множества $\{0, 1, \dots, p\}$, которое отображает элементы этого множества в 1, обозначается $J : \{0, 1, \dots, p\} \rightarrow \{0, 1\}$, $\{J\} \rightarrow \{1\}$.

Множество J называется внешним кодом.

Рассмотрим систему Диффузия-Реакция (5), в которой:

$$\delta_{i-1} \in \{1, 2, 3\}, \delta_i \in \{1, 2, 3\}, \delta_{i+1} \in \{1, 2, 3\}$$

$$\varphi = \sum_{j=J} \hat{\phi}_j$$

Таким образом, мы рассматриваем систему, где внутренний код состоит из трех элементов. Покажем, что внешний код состоит не более, чем из семи элементов. Причем, вообще говоря, это число уменьшить нельзя.

Теорема 2. Любой из 256 КА Вольфрама можно представить в виде (5), причем $p = \sum_{-1}^1 \delta_s \leq 6$ и, вообще говоря, оценка в последнем неравенстве точна.

Доказательство. Пусть $\delta_{-1}, \delta_0, \delta_1$ – различные числа, тогда возможны 6 комбинаций: $\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 2\}, \{2, 1, 3\}, \{3, 1, 2\}, \{2, 3, 1\}, \{3, 2, 1\}$. Рассмотрим результаты применения уравнения Диффузии в этом случае и занесем их в таблицу:

Таблиця 4

Всевозможные варианты внешних кодов при применении 6 комбинаций внутреннего кода из множества $\{1,2,3\}$

| $x_{i-1}(0), x_i(0), x_{i+1}(0)$ | 111 | 110 | 101 | 100 | 011 | 010 | 001 | 000 | $\{\delta_{-1}, \delta_0, \delta_1\}$ |
|----------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---------------------------------------|
| $y_i(0)$ | 6 | 3 | 4 | 1 | 5 | 2 | 3 | 0 | $\{1,2,3\}$ |
| | 6 | 4 | 3 | 1 | 5 | 3 | 2 | 0 | $\{1,3,2\}$ |
| | 6 | 3 | 5 | 2 | 4 | 1 | 3 | 0 | $\{2,1,3\}$ |
| | 6 | 4 | 5 | 3 | 3 | 1 | 2 | 0 | $\{3,1,2\}$ |
| | 6 | 5 | 3 | 2 | 4 | 3 | 1 | 0 | $\{2,3,1\}$ |
| | 6 | 5 | 4 | 3 | 3 | 2 | 1 | 0 | $\{3,2,1\}$ |

Для того чтобы мы могли закодировать КА, все тройки, которые повторяются в каждой строчке, должны переходить либо в 0, либо в 1.

Таким образом, мы не сможем закодировать следующие автоматы:

| | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 111 | 000 | 011 | 001 | 101 | 010 | 100 | 110 |
| ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ | ↓ |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

Рассмотрим пары: (111, 000), (011, 001), (101, 010), (100, 110) и их образы (a, b), где $a \in \{0,1\}, b \in \{0,1\}$.

Если хотя бы для одной из пар $a=b$, то мы можем использовать соответствующий внутренний код, состоящий из элементов множества $\{1,2,3\}$, иначе мы не сможем закодировать соответствующее правило кодом из элементов множества

Таблиця 5

Пример невозможности применения внутреннего кода из множества $\{1,2,3\}$ для правила 00001111

| $x_{i-1}(0), x_i(0), x_{i+1}(0)$ | 111 | 110 | 101 | 100 | 011 | 010 | 001 | 000 | $\{\delta_{-1}, \delta_0, \delta_1\}$ |
|----------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---------------------------------------|
| $x_i(1)$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| $y_i(0) \rightarrow x_i(1)$ | 5→0 | 3→0 | 3→0 | 1→0 | 4→1 | 2→1 | 2→1 | 0→1 | $\{1,2,2\}$ |
| | 6→0 | 3→0 | 4→0 | 1→0 | 5→1 | 2→1 | 3→1 | 0→1 | $\{1,2,3\}$ |
| | 6→0 | 4→0 | 3→0 | 1→0 | 5→1 | 3→1 | 2→1 | 0→1 | $\{1,3,2\}$ |
| | 6→0 | 3→0 | 5→0 | 2→0 | 4→1 | 1→1 | 3→1 | 0→1 | $\{2,1,3\}$ |
| | 6→0 | 5→0 | 3→0 | 2→0 | 4→1 | 3→1 | 1→1 | 0→1 | $\{2,3,1\}$ |
| | 6→0 | 4→0 | 5→0 | 3→0 | 3→1 | 1→1 | 2→1 | 0→1 | $\{3,1,2\}$ |
| | 6→0 | 5→0 | 4→0 | 3→0 | 3→1 | 2→1 | 1→1 | 0→1 | $\{3,2,1\}$ |

Как видно из таблицы 5, при применении весовых коэффициентов из множества $\{1,2,3\}$ для правила 00001111, получаем противоречия во всех 6 комбинациях: 3 переходит в 0 и одновременно 3 переходит в 1.

Аналогично можем показать, что мы не сможем закодировать следующие 32 правила, используя элементы множества $\{1,2,3\}$ (табл. 6).

Однако не сложно проверить, что для каждого из этих правил можно использовать какой-то из этих вариантов внутренних кодов: $\{1,2,2\}, \{1,1,1\}, \{2,2,1\}, \{2,1,2\}$, в табл. 6.

Таблиця 6

Правила кода Вольфрама, которые нельзя закодировать внутренним кодом $\{1,2,3\}$

| Правила кода Вольфрама | Внутренний код |
|--|----------------|
| 01110000 11110001 01110001 11110000 00001110 10001111 00001111 10001110 | $\{1,2,2\}$ |

Продолжение таблицы 6
Правила кода Вольфрама, которые нельзя закодировать внутренним кодом $\{1,2,3\}$

| Правила кода Вольфрама | Внутренний код |
|--|--|
| 01010100 11010101 01010101 11010100 00101010 10101011 00101011 10101010 | $\{2,2,1\}$ |
| 01001100 11001101 01001101 11001100 00110010 10110011 00110011 10110010 | $\{2,1,2\}$ |
| 01101000 11101001 01101001 11101000 00010110 10010111 00010111 10010110 | $\{1,2,2\}, \{1,1,1\},$ $\{2,2,1\},$ $\{2,1,2\}$ |

Для доказательства второй части теоремы покажем, что мы не можем обойтись для $\delta_{-1}, \delta_0, \delta_1$ только элементами множества $\{1,2\}$. А именно рассмотрим код Вольфрама 28 (табл.7).

В первой строке находится элемент КА, состоящий из трех соседних клеток $x_{i-1}(0), x_i(0), x_{i+1}(0), x_i(0)$ – значение состояния i -й клетки на нулевом шаге. Во второй строке

$x_i(1)$ – значение центральной клетки после динамического перехода.

Таблица 7

Правило 28 кода Вольфрама

| | | | | | | | | |
|--------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $x_{i-1}(0)$ | | | | | | | | |
| $x_i(0)$ | 111 | 110 | 101 | 100 | 011 | 010 | 001 | 000 |
| $x_{i+1}(0)$ | | | | | | | | |
| $x_i(1)$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

Пусть $\delta_{-1} = 1, \delta_0 = 1, \delta_1 = 1$, тогда:

Таблица 8

Применение внутреннего кода $\{1,1,1\}$ к правилу 28 кода Вольфрама

| | | | | | | | | |
|--------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| $x_{i-1}(0)$ | | | | | | | | |
| $x_i(0)$ | 111 | 110 | 101 | 100 | 011 | 010 | 001 | 000 |
| $x_{i+1}(0)$ | | | | | | | | |
| $y_i(0)$ | 3 | 2 | 2 | 1 | 2 | 1 | 1 | 0 |
| $x_i(1)$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

Таким образом, мы получили противоречие, так как одному прообразу соответствует два образа: $101 \rightarrow 2 \rightarrow 0$ и $011 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.

Снова попытаемся прийти к противоречию, выбирая $\delta_{-1}, \delta_0, \delta_1$ из множества $\{1,2\}$.

Рассмотрим всевозможные комбинации кодов в таблице 9. Очевидно, что при любом переборе имеется как минимум одно парное несовпадение. Следовательно, необходимо добавить еще одно значение, которое могут принимать весовые коэффициенты. Рассмотрим множество $\{1,2,3\}$ и покажем, что, во-первых, этого набора достаточно, а во-вторых, 3 может встречаться не более одного раза (табл. 10).

Таблица 9

Проверка существования противоречий при применении коэффициентов $\delta_{-1}, \delta_0, \delta_1 \in \{1,2\}$ для правила 28 кода Вольфрама

| $x_{i-1}(0), x_i(0), x_{i+1}(0)$ | 111 | 110 | 101 | 100 | 011 | 010 | 001 | 000 | $\{\delta_{-1}, \delta_0, \delta_1\}$ |
|----------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---------------------------------------|
| $x_i(1)$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| $y_i(0) \rightarrow x_i(1)$ | 4→0 | 2→0 | 3→0 | 1→1 | 3→1 | 1→1 | 2→0 | 0 | $\{1,1,2\}$ |
| | 4→0 | 3→0 | 2→0 | 1→1 | 3→1 | 2→1 | 1→0 | 0 | $\{1,2,1\}$ |
| | 4→0 | 3→0 | 3→0 | 2→1 | 2→1 | 1→1 | 1→0 | 0 | $\{2,1,1\}$ |
| | 5→0 | 3→0 | 3→0 | 1→1 | 4→1 | 2→1 | 2→0 | 0 | $\{1,2,2\}$ |
| | 5→0 | 3→0 | 4→0 | 2→1 | 3→1 | 2→1 | 2→0 | 0 | $\{2,1,2\}$ |
| | 5→0 | 4→0 | 3→0 | 2→1 | 3→1 | 2→1 | 1→0 | 0 | $\{2,2,1\}$ |

Проверка существования противоречий при применении коэффициентов $\delta_{-1}, \delta_0, \delta_1 \in \{1,2\}$ для правила 28 кода Вольфрама

| | | | | | | | | | |
|----------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---------------------------------------|
| $x_{i-1}(0), x_i(0), x_{i+1}(0)$ | 111 | 110 | 101 | 100 | 011 | 010 | 001 | 000 | $\{\delta_{-1}, \delta_0, \delta_1\}$ |
| $x_i(1)$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| $y_i(0) \rightarrow x_i(1)$ | 6→0 | 4→0 | 4→0 | 2→1 | 4→1 | 2→1 | 2→0 | 0 | $\{2,2,2\}$ |

Таблица 10

Применение внутреннего кода из множества $\{1,2,3\}$ для правила 28 кода Вольфрама

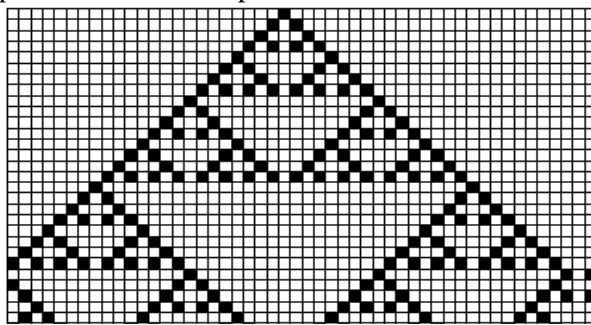
| | | | | | | | | | |
|----------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|---------------------------------------|
| $x_{i-1}(0), x_i(0), x_{i+1}(0)$ | 111 | 110 | 101 | 100 | 011 | 010 | 001 | 000 | $\{\delta_{-1}, \delta_0, \delta_1\}$ |
| $x_i(1)$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | |
| $y_i(0) \rightarrow x_i(1)$ | 6→0 | 3→0 | 4→0 | 1→1 | 5→1 | 2→1 | 3→0 | 0 | $\{1,2,3\}$ |
| | 6→0 | 4→0 | 3→0 | 1→1 | 5→1 | 3→1 | 2→0 | 0 | $\{1,3,2\}$ |
| | 6→0 | 3→0 | 5→0 | 2→1 | 4→1 | 1→1 | 3→0 | 0 | $\{2,1,3\}$ |
| | 6→0 | 4→0 | 5→0 | 3→1 | 3→1 | 1→1 | 2→0 | 0 | $\{3,1,2\}$ |
| | 6→0 | 5→0 | 3→0 | 2→1 | 4→1 | 3→1 | 1→0 | 0 | $\{2,3,1\}$ |
| | 6→0 | 5→0 | 4→0 | 3→1 | 3→1 | 2→1 | 1→0 | 0 | $\{3,2,1\}$ |

Появилось четыре комбинации, при использовании которых, имеются совпадения при переходе, а значит, мы можем их использовать в построении динамической системы по правилу 28.

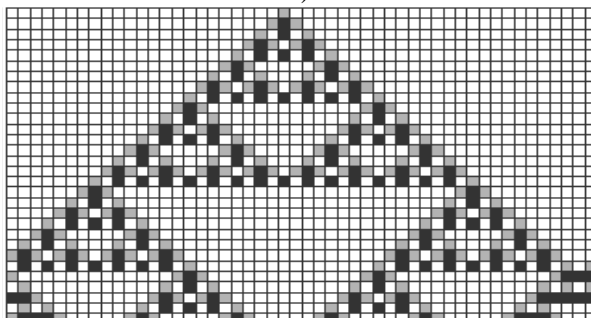
Теорема доказана полностью.

3. Примеры

Для визуализации построения простейших клеточных автоматов был использован программный пакет Maple.



а)

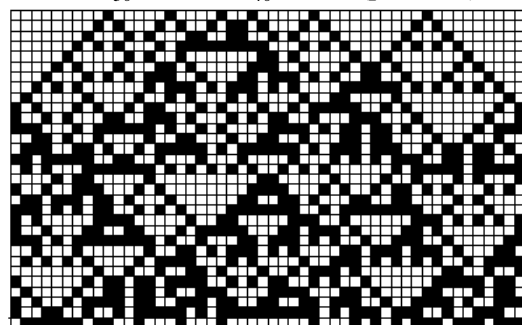


б)

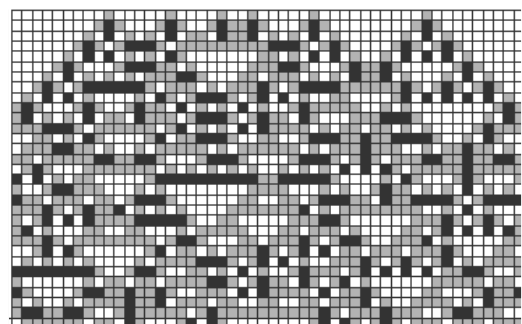
Рис. 6. Правило 90, ковер Серпинского

В качестве первого примера рассмотрим КА Вольфрама – правило 90, также известный, как ковер Серпинского, $x_{24}(0) = 1$ (рис. 6, а), $x_{24}(0) = 0.5$ (рис. 6, б) состояние остальных начальных клеток равно 0, примем длину автомата $K=50$.

Зададим другие начальные значения состояний КА: $x_{10}(0) = 1, x_{16}(0) = 1, x_{21}(0) = 1, x_{24}(0) = 1, x_{30}(0) = 1, x_{40}(0) = 1$ (рис. 7, а)



а)



б)

Рис. 7. Правило 90

Рассмотрим поведение автомата, когда его начальные значения находятся в интервале $[0, 1]$. Зададим тем же клеткам начальное состояние, значение которого равно 0,5 (рис. 7, б). Отметим интересное поведение автомата: когда мы меняем значение начальных клеток с 1 на 0,5, структура, состоящая из черных клеток становится серой, а структура белого цвета начинает менять состояние некоторых клеток на черный цвет, остальные остаются белого цвета. Другими словами, если в «цветном» КА поменять серый цвет на черный, а черный на белый, то его структура совпадет с черно-белым КА.

Уравнение Реакции (внешний код $J = \{1, 3\}$) имеет следующий вид (рис. 8):

$$\varphi(t) = \hat{\varphi}_1(t) + \hat{\varphi}_3(t),$$

где $\hat{\varphi}_1(t), \hat{\varphi}_3(t)$ – функции «тент». В уравнении Диффузии внутренний код следующий: $\delta_1 = 1, \delta_2 = 2, \delta_3 = 1$.

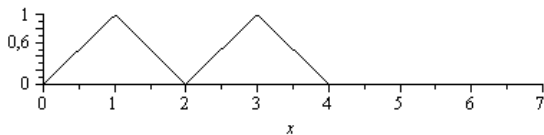


Рис. 8. График для внешнего кода правила 90

Следующим примером рассмотрим правило 185 (рис. 9). По классификации Вольфрама [1] оно относится ко второму классу – КА, состояния клеток которого быстро стабилизируются или возникают периодические колебания. Зададим начальное значение $x_{10}(0) = 1$, состояние остальных клеток равно 0, длина автомата $K=20$.

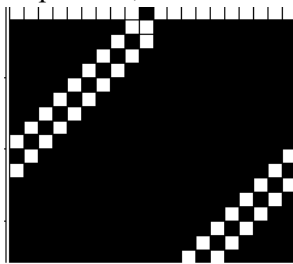


Рис. 9. Правило 185

На рис. 10 изображено правило 185, когда несколько клеток принимают состояние 1 в качестве начальных значений.

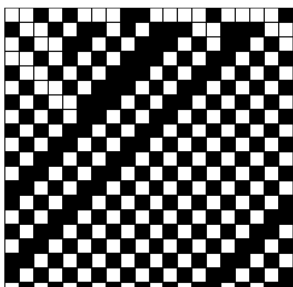


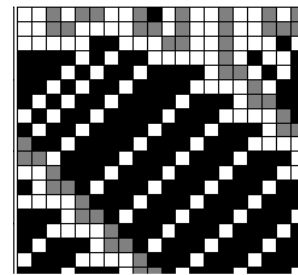
Рис. 10. Правило 185

Зададим нескольким клеткам состояние 0,5 (рис. 11, а, б). Отметим, что при выборе данных начальных значений, сохраняется регулярная структура, то есть автомат можно отнести ко второму классу. Но если начальные значения берутся совершенно произвольно из интервала $[0, 1]$, то регулярная структура этого автомата разрушается и превращается в хаос (рис. 11, в), скорее всего такой автомат можно отнести к третьему классу.

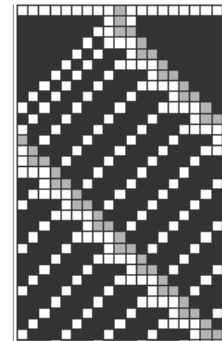
Уравнение Реакции (внешний код $J = \{0, 3, 5, 6\}$) имеет следующий вид (рис. 12):

$$\varphi(t) = \hat{\varphi}_0(t) + \hat{\varphi}_3(t) + \hat{\varphi}_5(t) + \hat{\varphi}_6(t),$$

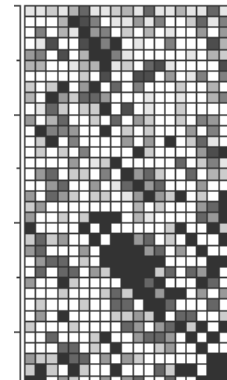
где $\hat{\varphi}_0(t), \hat{\varphi}_3(t), \hat{\varphi}_5(t), \hat{\varphi}_6(t)$ – функции «тент». В уравнении Диффузии внутренний код следующий: $\delta_1 = 3, \delta_2 = 1, \delta_3 = 2$.



а)



б)



в)

Рис. 11. Правило 185

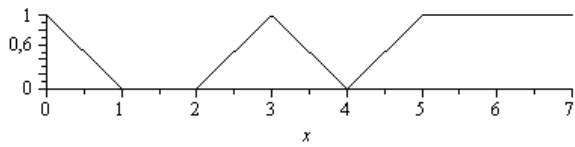


Рис. 12. График для внешнего кода правила 185

Построим правило 184, которое моделирует транспортные потоки (рис. 13, а). Зададим $x_{25}(0) = 1$, состояние остальных клеток равно 0, длина автомата $K=50$. Это правило также относится ко второму классу. На рис. 13, б изображено правило 184, когда несколько клеток принимают состояние 1 в качестве начальных значений.

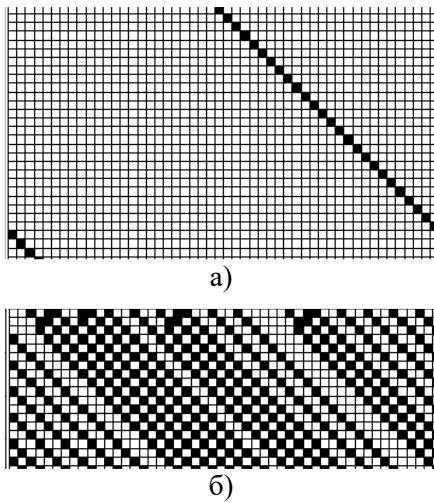


Рис. 13. Правило 184

Заменим начальное значение клеток на 0.5 (рис. 14, а, б), то есть поменяем черные клетки на серые.

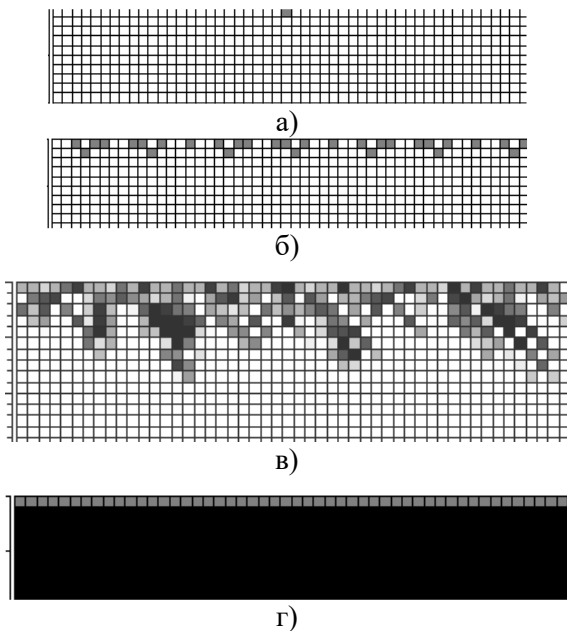


Рис. 14. Правило 184

Зададим, произвольные значения начальным состояниям клеток из интервала $[0, 1]$ (рис. 14, в) и когда все начальные значения принимают состояние 0,5 (рис. 14, г). Феномен этого автомата заключается в том, что, в зависимости от начальных данных, он может переходить из второго класса в первый – быстрая стабилизация состояний, то есть все клетки принимают значения только 1 или только 0, как это показано на примере правила 184 (рис. 14).

Зададим начальное состояние $x_{25}(0) = 1$, состояние остальных клеток равно 0.5 (рис. 15, а).

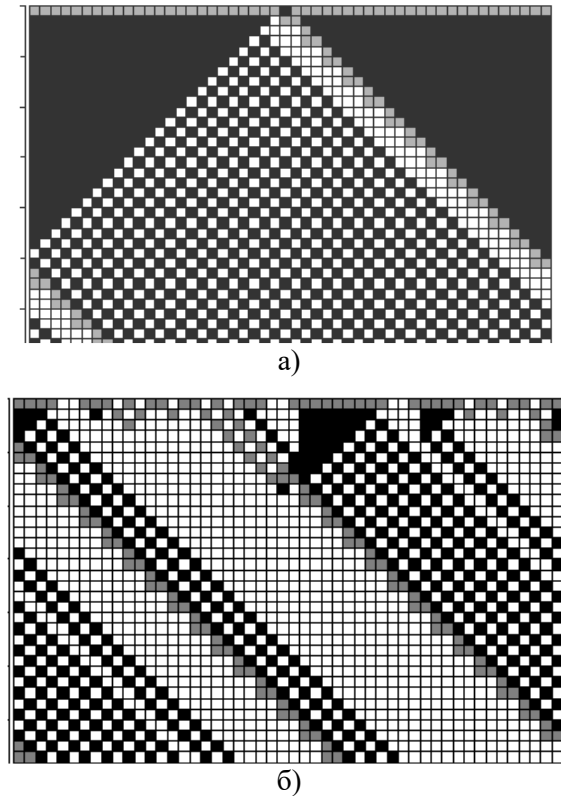


Рис. 15. Правило 184

На рис. 15 показано, что автомат сохраняет свою регулярную структуру и остается во втором классе. Таким образом, видно, что структура автомата сильно зависит от заданных начальных значений.

Уравнение Реакции (внешний код $J = \{3, 5, 6\}$) имеет следующий вид (рис. 16):

$$\varphi(t) = \hat{\varphi}_3(t) + \hat{\varphi}_5(t) + \hat{\varphi}_6(t),$$

где $\hat{\varphi}_3(t), \hat{\varphi}_5(t), \hat{\varphi}_6(t)$ – функции «тент». В уравнении Диффузии внутренний код следующий: $\delta_1 = 3, \delta_2 = 1, \delta_3 = 2$.

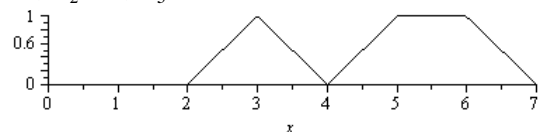


Рис. 16. График для внешнего кода правила 184

Построим правило 30 (рис. 17, а), которое относится к третьему классу – хаотические, непериодические структуры, порождающие псевдослучайные последовательности. Благодаря этому свойству, правило 30 применяется в пакете Mathematica для генерации псевдослучайных последовательностей чисел. Зададим значение начальных клеток $x_{25}(0) = 1$, состояние остальных клеток равно 0. На рис. 17, б изображено правило 30, когда несколько клеток принимают состояние 1 в качестве начальных значений.

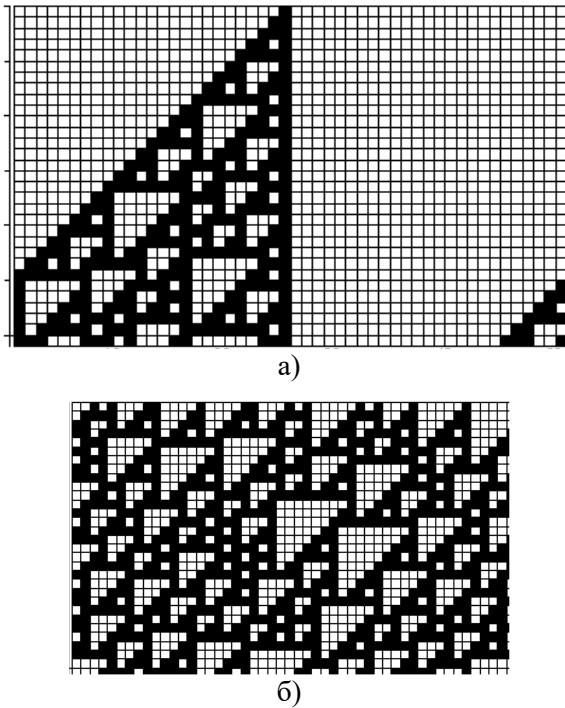


Рис. 17. Правило 30

Зададим нескольким клеткам произвольное значение состояний из интервала $[0, 1]$ (рис. 18):

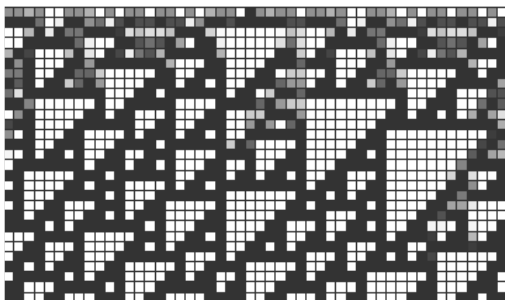


Рис. 18. Правило 30

Уравнение Реакции (внешний код $J = \{2, 3, 4\}$) имеет следующий вид (рис. 19):

$$\varphi(t) = \hat{\varphi}_2(t) + \hat{\varphi}_3(t) + \hat{\varphi}_4(t),$$

где $\hat{\varphi}_2(t), \hat{\varphi}_3(t), \hat{\varphi}_4(t)$ – функции «тент». В уравнении Диффузии внутренний код следующий: $\delta_1 = 1, \delta_2 = 2, \delta_3 = 2$.

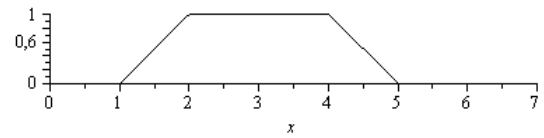


Рис. 19. График для внешнего кода правила 30

Этот автомат тоже содержит интересный феномен. Мы моделировали его с различными начальными данными и заметили, что все клетки достаточно быстро переходят либо в 0, либо в 1.

В приведенных примерах (правила 90, 185, 184, 30) показано, как существенно меняется поведение автомата, если значение клетки задается не только 0 и 1. Интересно установить, все ли КА будут иметь новые феномены, если задавать начальные значения произвольным образом из отрезка $[0, 1]$.

Выводы

В статье развивается известный метод представления КА в виде дискретной динамической системы. Эта система представляется в виде суперпозиции отображений – линейного, которое называется Диффузией, и нелинейного, называемого Реакцией. При этом обосновывается выбор этих отображений в специальном виде.

Это один из простых способов аналитического представления КА в виде дискретной динамической системы. Кроме того, этот способ позволяет представить КА в пространствах любой размерности и учитывать любое возможное количество состояний клетки.

В данной работе этот подход был применен к линейным КА, которые кодируются кодом Вольфрама. Построенные дискретные динамические системы оставляют инвариантными достаточно широкий класс множеств. Мы показали, что эти автоматы можно кодировать по-другому, используя внутренний и внешний код.

Направление дальнейших исследований связано с задачами управления КА; поиском стационарных или квазистационарных структур, в том числе и для КА, заданных на плоскости (например, игра «Жизнь» Конвея) и в пространствах любой размерности.

Список использованной литературы

1. Wolfram Stephen A New Kind of Science / S. Wolfram [Text]. – Wolfram Media, Champaign, IL, 2002. – 1197 p.
2. Guirao Juan Luis Garcia Chaos of a coupled lattice system related with the Belusov–Zhabotinskii reaction / J.G. Guirao, M. Lampart [Text]. – Journal of Mathematical Chemistry, 2010. – Volume 48, Issue 1. – pp. 159–164.

3. Crutchfield James Pattern Bases for Cellular Automata / J. P. Crutchfield, J. E. Hanson [Text]. – *Physica D: Nonlinear Phenomena*. – Volume 69, 1993. – pp. 279–301.

4. Махмуд, Б. М. Комбинированная имитационная модель пространственного распространения эпидемических заболеваний по холере на основе вероятностного клеточного автомата / Б.М. Махмуд, Б.И. Масленников, А.В. Скворцов [Текст]. – (ИГУПИТ) Интернет-журнал «НАУКОВЕДЕНИЕ» №3, 2013. – С. 1–8.

5. Тоффоли, Т. Машины клеточных автоматов / Т. Тоффоли, Н. Марголюс [Текст]. – Москва: «МИР» 1991 г. – 278 с.

6. Ландэ, Д. В. Моделирование электоральных процессов на основе концепции клеточных автоматов / Д.В. Ландэ, В.Н. Фурашев [Текст]. – Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии, Харьков: НАКУ. – 2007. – С. 123–128.

7. Dmitrishin Dmitriy Generalization of nonlinear control for nonlinear discrete systems / D. Dmitrishin, A. Stokolos, I. Skrynnik, E. Franzheva [Electronic resours]. – 2017. – Access Mode <https://arxiv.org/abs/1709.10410>

8. Dmitrishin, D. Optimal search for nonlinear discrete systems cycles / D. Dmitrishin, E. Franzheva, I. Iakob, A. Stokolos [Text]. – *Communications in Applied Analysis*, 2018. – 22, No. 4. – pp. 663–694.

9. Лобанов, А. И. Модели клеточных автоматов / А.И. Лобанов [Текст]. – КОМПЬЮТЕРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ, Москва, 2010. – Т. 2 № 3. – С. 273–293.

References

1. Wolfram, S. (2002). *A New Kind of Science*. Champaign: Wolfram Media, p. 1197.

2. Guirao, J.G., Lampart, M. (2010). Chaos of a coupled lattice system related with the Belusov–Zhabotinskii reaction. *Journal of Mathematical Chemistry*, Volume 48, Issue 1, pp. 159–164.

3. Crutchfield, J. P., Hanson, J. E. (1993) Pattern Bases for Cellular Automata. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Volume 69, pp. 279–301.

4. Makhmud, B. M., Maslennikov, B. I., Skvortsov, A. V. (2013). Combined simulation model of the spatial distribution of epidemic diseases [Kombinirovannaya imitatsionnaya model prostanstvennogo rasprostraneniya epidemicheskikh zabolevaniy po holere na osnove veroyatnostnogo kletochnogo avtomata]. (*IGUPIT*) *Internet-journal "NAUKOVEDENIE"* №3, pp. 1–8.

5. Toffoli, T., Margolus, N. (1991) *Cellular Automata Machines* [Mashiny kletochnyih avtomatov]. Moskow: MIR, p. 278.

6. Lande, D. V., Furashev, V. N. (2007). Modeling electoral processes based on the concept of cellular automata [Modelirovanie elektoralnyih protsessov na osnove kontseptsii kletochnyih avtomatov]. *Open information and computer integrated technologies*, Kharkiv: NAKU, pp. 123–128.

7. Dmitrishin, D., Stokolos, A., Skrynnik, I., Franzheva, E. (2017) *Generalization of nonlinear control for nonlinear discrete systems*, available at: <https://arxiv.org/abs/1709.10410>

8. Dmitrishin, D., Franzheva, E., Iakob, I., Stokolos, A., (2018). Optimal search for nonlinear discrete systems cycles. *Communications in Applied Analysis*, 22, No. 4, pp. 663–694.

9. Lobanov, A. I. (2010) *Cellular Automata Models* [Modeli kletochnyih avtomatov]. *COMPUTER RESEARCH AND MODELING*, V. 2, № 3, pp. 273–293.

GENERALIZED ONE-DIMENSIONAL CELLULAR AUTOMATA AND DISCRETE DYNAMIC SYSTEMS

O. D. Franzheva

Odessa National Polytechnic University

Abstract. Cellular automata (CA) are a research subject of plethora of works. CA are applied in many areas of natural science and suitable for modeling of difference processes, phenomenon (Belousov-Zhabotinskii's Reaction [2], the turbulence [3], epidemic spread [4], population dynamic [5], electoral processes [6], etc.). The 30th rule of Wolfram's Code [1] is widely spread in computer sciences for creating of pseudorandom sequences of integers. As known, the CA is a dynamic system. Usually CA set by logical operations, set of rules. It is quite cumbersome for program realization and impact on debugging time. The easier way is creation of the algorithm by analytic representation and don't use enormous amount of loops. Object of this work is representation of CA as a system of difference equations. It allows us to generalize CA, thus we could model it in spaces of any dimensions and it cells could take an arbitrary finite or infinite number of states. Further we would apply famous control methods of dynamical systems using the information of

previous states of the system. Besides, this approach helps us to consider CA wider and find new features of these systems, regular structures, periodic structures or structures that are close to periodic ones. In this work we use the superposition of linear and nonlinear maps that calls as Diffusion and Reaction accordingly. This approach is applied on CA that work as Wolfram Code [1] respectively. Examples of suggested approach applying are illustrated in the last section. All in all we have represented CA in form of a system of difference equations. In further study it would allow to research phenomenon connected with CA construction or we could control CA due to method represented in [7, 8].

Keywords: cellular automata, discrete dynamic systems, control, periodic solutions.

УЗАГАЛЬНЕНІ ОДНОМІРНІ КЛІТИННІ АВТОМАТИ ТА ДИСКРЕТНІ ДИНАМІЧНІ СИСТЕМИ

О. Д. Франжева

Одеський національний політехнічний університет

Анотація. В роботі розглядається проблема подання клітинних автоматів (КА) у вигляді різницевих рівнянь. КА присвячено безліч робіт, вони широко застосовуються в багатьох сферах природознавства, ними зручно моделювати різні процеси та явища (реакція Білоусова-Жаботинського [2], турбулентність [3], розширення епідемій [4], динаміка популяцій [5], електоральні процеси [6] та ін.). В комп'ютерних науках використовується правило 30 коду Вольфрама для створення псевдовипадкових послідовностей цілих чисел [1], наприклад в пакеті Mathematica. Як відомо, КА – це динамічна система. Будування алгоритмів дослідження та керування КА виглядає доволі громіздко через використання безлічі логічних операцій. Тому набагато легше представляти КА через аналітичний вигляд, наприклад, через систему різницевих рівнянь. Для цього будується система типу «Дифузія-Реакція». При цьому, рівняння Реакції задається як відображення сум функцій «тент». Таке подання дозволяє розглядати клітинні автомати з довільним кінцевим або нескінченним числом станів на основі рівнянь Дифузії та Реакції. Крім того, з'являється можливість в подальшому застосовувати відомі методи керування динамічними системами, використовуючи інформацію про попередні стани системи, розглядати ці системи ширше та відстежувати нові властивості КА, регулярні структури, періодичні структури, а також структури, близькі до періодичних. Даний підхід до дослідження КА дає можливість просунути в дослідженнях конкретних систем різноманітної природи (фізичних, біологічних, технічних, інформаційних, соціальних і т.п.), наприклад, вирішувати проблеми локалізації епідемій, регуляризації турбулентних режимів, шляхом їх руйнування. Також побудована модель лінійних клітинних автоматів, діючих за правилами коду Вольфрама [1]. Приведені приклади.

Ключові слова: клітинні автомати, дискретні динамічні системи, контроль, періодичні рішення.

Получено 27.12.2018



Франжева Елена Дмитриевна, аспирант кафедры прикладной математики и информационных технологий Одесского национального политехнического университета. Просп. Шевченко, 1, Одесса, Украина, E-mail: franzheva.helen@opu.ua

Olena Franzheva, PhD student of the Department of Applied Math and International Technologies, Odessa National Polytechnic University, Shevchenko ave., 1, Odessa, Ukraine, E-mail: franzheva.helen@opu.ua

ORCID ID: 0000-0003-2639-4012