Міністерство освіти і науки України

Національний університет «Одеська політехніка»

Кафедра програмних і комп’ютерно-інтегрованих технологій

Методичні вказівки з дисципліни Числові методи. (Теретична частина)

Для студентів інституту штучного інтелекту та робототехніки

Рівень підготовки – бакалавр

Галузь знань: 15 Автоматизація та приладобудування

Напрям підготовки: 151 Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології

Одеса 2022

Міністерство освіти і науки України

Національний університет «Одеська політехніка»

Кафедра програмних і комп'ютерно-інтегрованих технологій

Методичні вказівки з дисципліни Числові методи. (Теретична частина)

Для студентів інституту штучного інтелекту та робототехніки

Рівень підготовки – бакалавр

Галузь знань: 15 Автоматизація та приладобудування

Напрям підготовки: 151 Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології

Затверджено на засіданні
кафедри програмних і комп'ютерно-інтегрованих технологій
Протокол № 7 від 26.01.2022 р.

Одеса 2022

Методичні вказівки з дисципліни Числові методи. (Теретична частина): для студ. напряму 151 «Автоматизація та комп’ютерно-інтегровані технології» денної та заочної форм навчань./ Укл. Лисюк Г.П. – Одеса: ОП, 2022. – 77 с.

Зміст

Вступ

Інженерів математика цікавить як засіб розв’язання прикладних завдань.

Один із засобів розв’язання яких є експеримент. Як заправило, він неможливий, небезпечний, дорогий і складний. Тому інженери використовують таку інформаційну технологію, як чисельний експеримент.

Технологія обчислювального експерименту містить кілька етапів.

Постановка завдання. Цей етап полягає у змістовній постановці завдання і визначенні кінцевих цілей рішення.

Побудова математичної моделі (математичне формулювання завдання). Модель повинна правильно (адекватно) описувати основні закони фізичного процесу. Побудова, або вибір вже існуючої математичної моделі, вимагає глибокого розуміння проблеми і знання відповідних розділів фізики і математики.

Математична модель - спрощений опис реального об'єкта процесу за допомогою математичних понять.

Основна вимога до математичної моделі, - адекватність розглянутому явищу, тобто вона повинна досить повно (в рамках припустимих похибок) відображати характерні риси явища. Разом з тим вона має бути порівняно простою і доступною.

При побудові математичних моделей отримують певні математичні співвідношення, найчастіше, у формі алгебраїчних, диференціальних рівнянь і алгоритмів функціонування складних систем.

За допомогою математичного моделювання розв’язання науково-технічної задачі перетворюється на математичну задачу. Математичні задачі розв’язуються такими методами: графічними, аналітичними та чисельними.

Графічні методи дозволяють, у певних випадках, оцінити порядок шуканої величини. Основна ідея цих методів полягає в тому, що розв’язок знаходиться шляхом геометричних побудов. Наприклад, для пошуку коренів рівняння f(x)=0 будується графік функції f(x)=0 ,точки перетину якого з віссю абсцис і будуть шуканими коренями.

При використанні **аналітичних методів,** розв’язок задачі можна виразити за допомогою формул. Наприклад, якщо завдання полягає у вирішенні найпростіших алгебраїчних, тригонометричних, диференціальних та інших рівнянь, то використання відомих з курсу математики прийомів відразу дозволяє досягнути мети. Перевага аналітичних методів: в результаті застосування аналітичних методів одразу отримуємо точну відповідь.

Основним інструментом для розв’язання складних математичних задач в даний час є **чисельні методи**, що дозволяють перетворити розв’язання задачі на виконання кінцевого числа арифметичних дій над числами; при цьому результати отримуємо у вигляді числових значень.

З появою ЕОМ почався період бурхливого розвитку чисельних методів і їхнього впровадження в практику. Тільки обчислювальна машина здатна виконати за порівняно короткий час обсяг обчислень в мільйони, мільярди і більше операцій, необхідних для розв’язання багатьох сучасних завдань.

Чисельний метод мусить не тільки дозволити нам отримати результат за прийнятний час, але й не вносити в обчислювальний процес значних похибок; а для цього потрібно визначити точність обчислювального експерименту.

Кожен чисельний метод можна характеризувати похибкою, стійкістю, коректністю і збіжність. Похибка чисельного методу залежить від похибки вихідних даних (їх неможливо уникнути), похибки алгоритму реалізації методу (може бути зменшена до розумної межі), похибки обчислень на ЕОМ.

Чисельний метод вважають стійким, якщо малі похибки в початкових даних призводять до малих похибок в результатах розрахунків.

Завдання, яке розв’язує ЧМ, вважається коректним, якщо для будь-яких значень вихідних даних з деякого класу її рішення існує, є єдиним і остаточним. Під збіжністю чисельного методу традиційно розуміємо близькість чисельного рішення до справжнього результату.

1 Чисельні методи розв'язання нелінійних рівнянь.

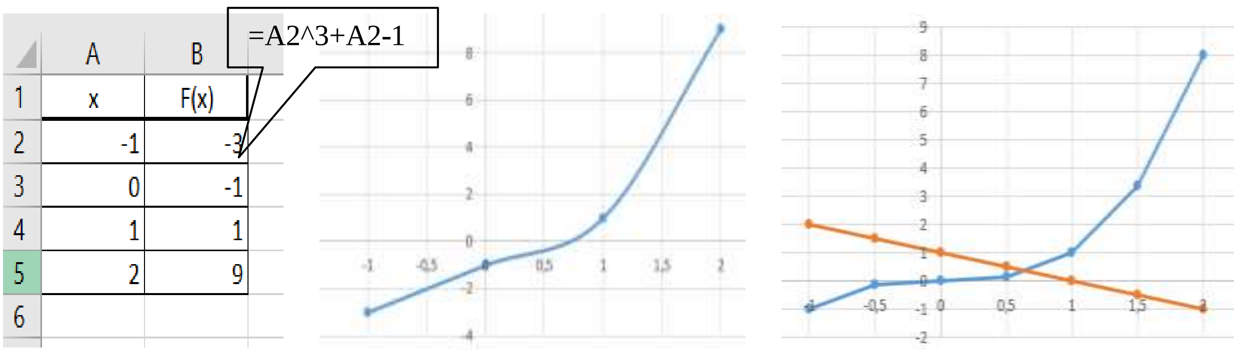
Нелінійні рівняння можна розділити на два класи: алгебраїчні і трансцендентні. Алгебраїчні рівняння — це рівняння, що містять тільки алгебраїчні функції. Рівняння, що містять інші функції (тригонометричні, показникові, логарифмічні і ін.), називаються трансцендентними.

Методи розв’язання рівнянь поділяються на прямі та ітераційні. Прямі методи дозволяють записати корені у вигляді певного кінцевого співвідношення. Якщо не вдається розв'язати рівняння прямими методами, то для їх розв'язання використовуються ітераційні методи, тобто методи послідовних наближень.
Алгоритм пошуку кореня рівняння з допомогою ітераційного методу складається з двох етапів:

1. відділення коренів, тобто пошук інтервалів з області визначення функції F(x), в кожна з яких містить тільки один корінь рівняння;
2. уточнення значення до певної міри точності.

Відділення коренів можна проводити графічно та аналітично. Для того щоб графічно відокремити корені рівняння $F(x) = 0$, необхідно побудувати графік функції $y = F(x)$. Абсциси точок його перетину з віссю Ox є дійсними коренями рівняння (рис. 1.1).На практиці буває зручніше замінити рівняння $F(x) = 0$ рівносильним йому рівнянням f1(x) = f2(x), де f1(x) і f2(x) - більш прості функції, ніж $F(x)$.

Абсциси точок перетину графіків функцій $y_1 = f_1(x)\,, y_2 = f_2(x)$ дають коріння рівняння $f_1(x) = f_2(x)$, та, відповідно, і вихідного рівняння $F(x) = 0$ (рис. 1.1). При пошуку наближеного значення кореня знаходять дві близько розташовані точки a і b, в яких безперервна функція $F(x)$ приймає значення різних знаків, тобто $F(a)F(b) < 0$. У цьому випадку між точками a і b є, принаймні, одна точка, в якій $F(x) = 0$ (рис.1.1).



$y=x^3+x-1$

y1=x3 ; y2=1-x

а) табличний метод

б) графічний метод

Рис.1.1 Пошук наближеного значення кореня або відрізка, що його містить (в Excel)

Аналітичне відділення коренів засноване на наступних теоремах:

Теорема 1. Якщо функція $F(x)$ безперервна на відрізку [a; b] і набуває на кінцях відрізка значення різних знаків, тобто $F(a)F(b) < 0$, тоді цей відрізок містить принаймні один корінь рівняння.

Теорема 2. Якщо функція F(x) безперервна і монотонна на відрізку $[a;\ b]$ і набуває на кінцях відрізка значення різних знаків, то відрізок $[a;\ b]$ містить корінь рівняння $F(x) = 0$ і цей корінь - єдиний.

Теорема 3. Якщо функція $F(x)$ безперервна і набуває на кінцях відрізка $[a;\ b]$ значення різних знаків, а похідна $F'(x)$ зберігає знак всередині відрізка $[a;\ b]$, то в на відрізку є єдиний корінь рівняння $F(x) = 0$.

Уточнення коренів до заданої точності полягає в звуженні інтервалу ізоляції кореня і виконується одним із спеціальних методів.

Ітераційний процес полягає в послідовному уточненні x_0. Кожен такий крок називається ітерацією. В результаті ітерацій знаходяться послідовності наближених значень кореня x_0 , x_1 , …, x_k. Якщо ця послідовність з ростом значення k наближається до справжнього значення кореня, то ітераційний процес збігається. Ітераційний процес продовжуємо, доки значення функції $F(x)$ після k-й ітерації не стане меншим за модулем він певного заданого малого числа ε, тобто $|F(x_k)| < ε$, і (або) за умовою близькості двох останніх наближень: $|x_{k+1}-x_k| < ε$.

1.1 Метод поділу відрізка навпіл.

Припустимо, що ми знайшли відрізок [a; b], в якому розташоване шукане значення кореня.

В цьому випадку $F(a) > 0$, $F(b) < 0$ або $F(a) < 0$, $F(b) > 0$ (рис. 1.1). Як початкове наближення кореня x_0 беремо середина цього відрізка, тобто $x_0 = \frac{a+b}{2}$ Далі досліджуємо значення функції $F(x)$ на кінцях відрізків $[a;\ x_0]$ і $[x_0; b]$. Той з них, на кінцях якого $F(x)$ має значення різних знаків, містить шуканий корінь. Тому його приймаємо як новий відрізок. Другу половину відрізка $[a;\ b]$ відкидаємо. У якості першої ітерації кореня приймаємо середину нового відрізка і т. д.

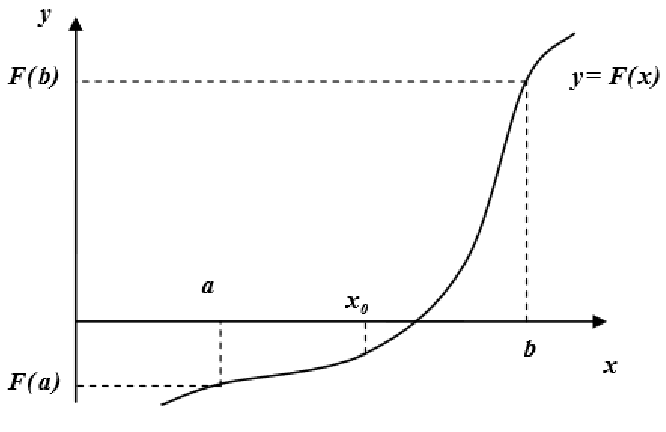
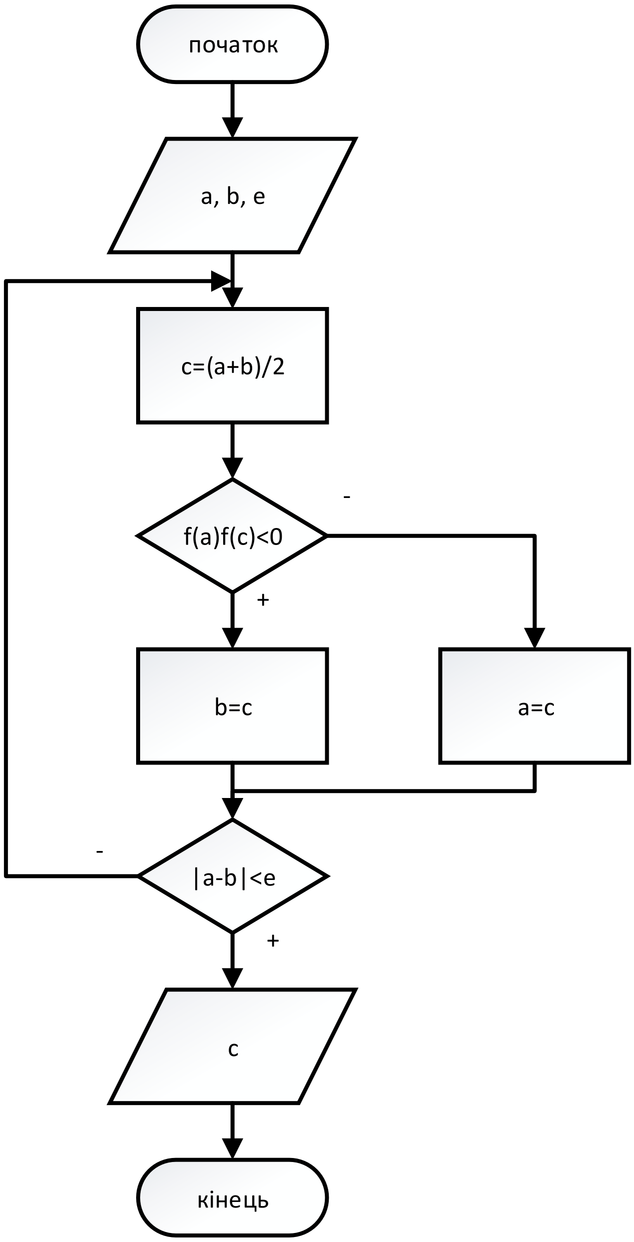


Рис.1.2 Метод половинного поділу

Таким чином, після кожної ітерації відрізок, на якому розташований корінь, зменшується вдвічі. Якщо довжина отриманого відрізка стає менше припустимої похибки, тобто $|b-a| < ε$, розрахунок припиняється.

Алгоритм розв'язання рівняння методом половинного поділу:

1. Исходные данные:
   a – начало отрезка;
   b – конец отрезка;
   e – допустимая погрешность вычислений.
2. Вычисляем середину отрезка [a, b]. $x_0 = \frac{a+b}{2}$
3. Досліджуємо значення функції $F(x)$ на кінцях відрізків $[a;\ x_0]$ і $[x_0; b]$.
4. Той з них, на кінцях якого $F(x)$ має значення різних знаків, містить шуканий корінь. Тому його приймаємо як новий відрізок. Другу половину відрізка $[a;\ b]$ відкидаємо.
5. Проверяем $|a - b| < \varepsilon$. Если условие не выполняется, Возвращаемся к пункту 2. Если выполняется - выводим значение середины отрезка, которое является решением .



__Приклад 1.1.__ Знайти розв'язання рівняння $x^3 + x - 1 = 0$ с точністю ε = 0,01 методом розподілу відрізка навпіл. В результаті пошук наближеного значення кореня або відрізка, що його містить (рис.1.1) отримали, що шуканий корінь перебуває в інтервалі [0; 1].

Розв’язання рівняння методом половинного поділу за допомогою програми Excel.

=ЕСЛИ(G2>0;C2;A2) =ЕСЛИ(G2>0;B2;C2) =(A2+B2)/2

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	a	b	x	F(a)	F(b)	F(x)	F(a)F(x)	|b-a|
2	0		0,5	-1	1	-0,375	0,375	1
3	0,5	1	0,75	-0,375	1	0,171875	-0,06445	0,5
4	0,5	0,75	0,625	-0,375	0,171875	-0,13086	0,049072	0,25
5	0,625	0,75	0,6875	-0,13086	0,171875	0,012451	-0,00163	0,125
6	0,625	0,6875	0,65625	-0,13086	0,012451	-0,06113	0,007999	0,0625
7	0,65625	0,6875	0,671875	-0,06113	0,012451	-0,02483	0,001518	0,03125
8	0,671875	0,6875	0,679688	-0,02483	0,012451	-0,00631	0,000157	0,015625
9	0,679688	0,6875	**0,683594**	-0,00631	0,012451	0,003037	-1,9E-05	**0,007813**
10								

1.2 Метод дотичних (метод Ньютона).

Геометричний сенс цього методу полягає в тому, що дугу кривої y = F(x) замінюємо на дотичну до цієї кривої та шукаємо точку перетину дотичної з віссю абсцис (рис. 1.3).

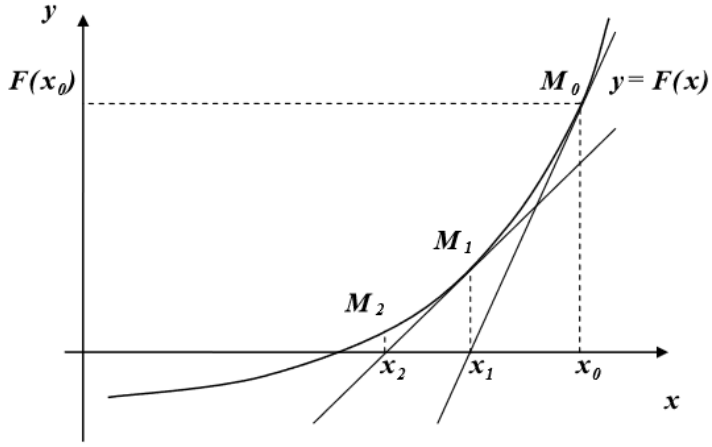


Рис.1.3 Метод дотичних

При виборі початкового наближення кореня необхідно керуватися таким правилом: дотична проводиться з того кінця відрізка [a; b], в якому знак функції збігається зі знаком другої похідної. Тобто F(a) F''(a)> 0 або F(b) F''(b)> 0. Нехай в нашому випадку це буде точка M_0 (рис.1.3).

Рівняння дотичної, проведеної до кривої y = F(x) в точці M_0 з координатами x_0 і $F(x_0)$, має вигляд:

$$y = F'(x_0)(x_1 - x_0) + F(x_0)$$

Перше наближення кореня - точка x_1. Оскільки y = 0, то рівняння набуває вигляду:

$$F'(x_0)(x_1 - x_0) + F(x_0) = 0$$

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}.$$

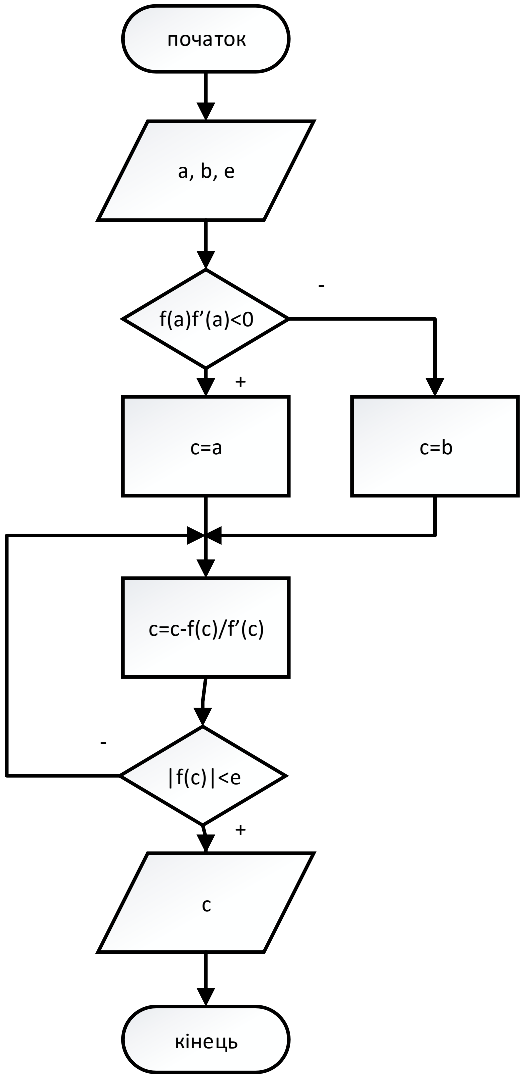
Аналогічно можуть бути знайдені і наступні наближення. Формула для *k+1* наближення має вигляд:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)}.$$

Для завершення ітераційного процесу можна використовувати умови

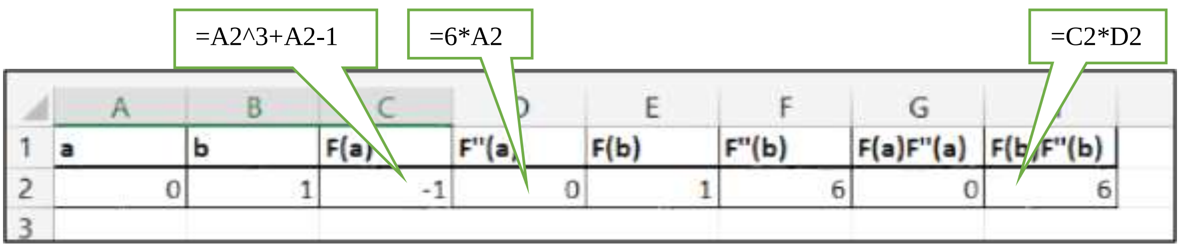
$|F(x_k)| < \varepsilon$ или $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$.

Алгоритм розв'язання рівняння методом Ньютона:



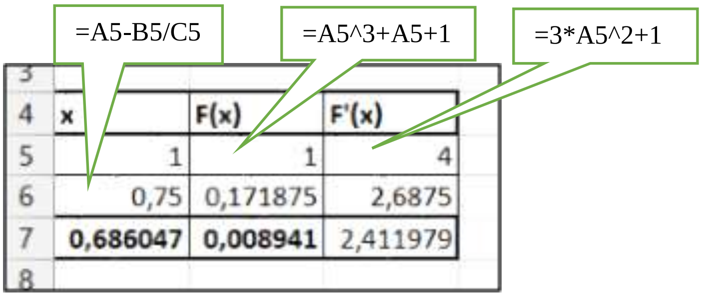
Приклад 1.2. Знайти розв'язання рівняння $x^3 + x - 1 = 0$ с точністю ε = 0,01 методом дотичних.

В результаті пошуку наближеного значення кореня або відрізка, що його містить (рис.1.1) отримали, що шуканий корінь перебуває в інтервалі [0; 1]. Розв'язання рівняння методом половинного поділу за допомогою програми Excel. Визначаємо початкову точку, через яку проведемо дотичну.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	a	b	F(a)	F''(a)	F(b)	F''(b)	F(a)F''(a)	F(b)F''(b)
2	0	1	-1	0	1	6	0	6
3								

Отримуємо, що F(b) F''(b)> 0. Отже x_0 = 1.Знаходимо подальші наближення:



	x	F(x)	F'(x)
3			
4	x	F(x)	F'(x)
5	1	1	4
6	0,75	0,171875	2,6875
7	0,686047	0,008941	2,411979
8			

1.3 Метод хорд

Геометричний сенс цього методу полягає в тому, що дугу кривої y =F(x) замінюємо на хорду та шукаємо точку перетину хорди з віссю абсцис (рис. 1.3). В аналітичній геометрії виводиться формула, що задає рівняння прямої, що проходить через дві точки з координатами (x1; y1) і (x2; y2):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Обчислюємо значення функції f (x) на кінцях відрізка в точках a і b, тобто f(a) і f(b). Після цього будуємо рівняння хорди, що становить пряму y(x), що проходить через ці дві точки. Ця хорда описується співвідношенням

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)}.$$

В даному методі процес ітерацій полягає в тому, що в якості наближень до кореня рівняння y = F(x) приймаємо значення точок перетину хорди AB з віссю абсцис (рис.1.4).

За допомогою хорди на відрізку [a, b] треба обрати точку x_c, де $y(x_c) = 0$. Отримаємо ітераційну формулу методу хорд:

$$x_c = a - f(a)\frac{b - a}{f(b) - f(a)}(b - a).$$

Точка x_c ділить відрізок [a, b] на дві частини. Так само як і в методі половинного поділу з двох частин вибирається та, що в неї на кінцях функція f(x) має протилежні знаки. Ітераційний процес продовжується, доки не буде виявлено, що $|F(x_k)|<\varepsilon$ або $|x_{k+1}-x_k|<\varepsilon$.

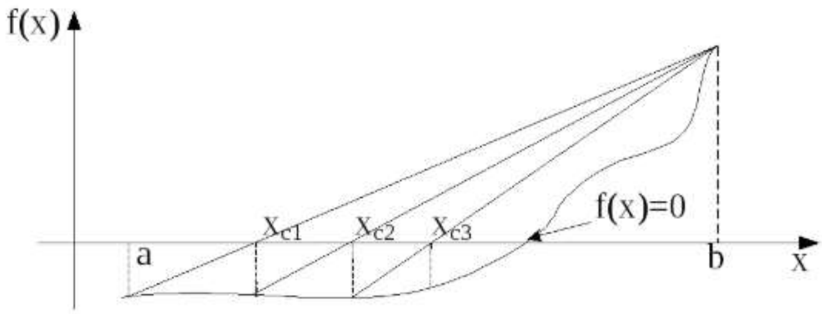
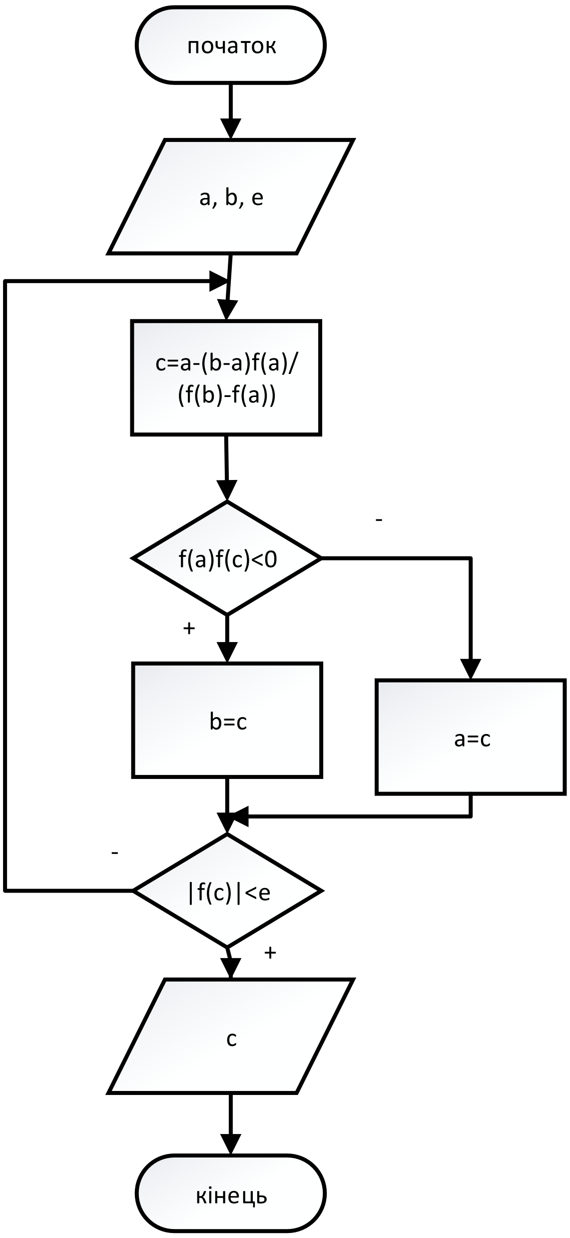


Рис. 1.4 Метод хорд

Метод хорд вимагає, щоб один кінець відрізка, що на ньому йде пошук кореня, був нерухомий. В якості нерухомого кінця x0 вибираємо той кінець відрізка, що для нього знак F(x) збігається зі знаком другої похідної F''(x).

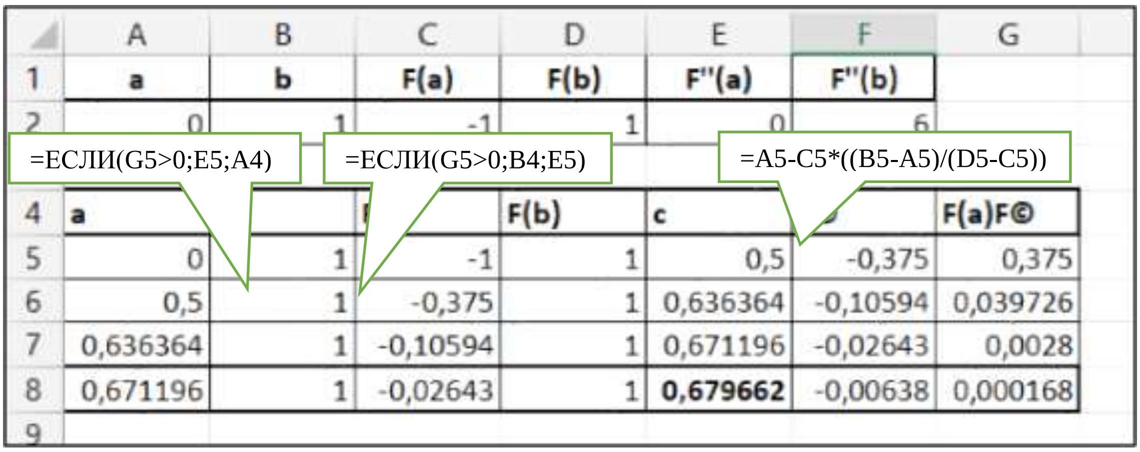
Алгоритм розв’язання рівняння методом хорд:



<u>Приклад 1.3</u>. Розв'язати рівняння $x^3 + x - 1 = 0$ с точністю ε = 0,01 методом хорд.

В результаті пошуку наближеного значення кореня або відрізка, що його містить (рис.1.1) отримали, що шуканий корінь перебуває в інтервалі [0; 1].

Розв'язання рівняння методом хорд за допомогою програми Excel.



	A	B	C	D	E	F	G
1	a	b	F(a)	F(b)	F''(a)	F''(b)	
2	0	1	-1	1	0	6	
4	a			F(b)	c		F(a)F©
5	0	1	-1	1	0,5	-0,375	0,375
6	0,5	1	-0,375	1	0,636364	-0,10594	0,039726
7	0,636364	1	-0,10594	1	0,671196	-0,02643	0,0028
8	0,671196	1	-0,02643	1	**0,679662**	-0,00638	0,000168
9							

1.4 Метод ітерацій

Геометрична інтерпретація методу ітерацій. Нехай задано рівняння F(x) = 0, (F(x) - безперервна функція). Приведемо це рівняння до виду x = q(x) Побудуємо графіки функцій y = x і y = q(x). Коренем рівняння x = q(x) є абсциса перетину кривої y = q(x) з прямою y = x (рис. 1.5).

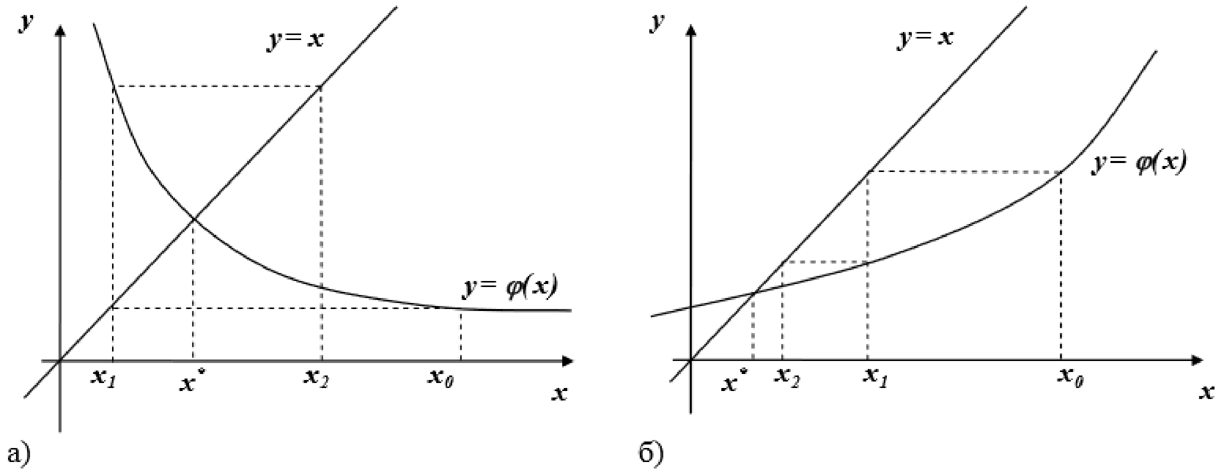


Рис.1.5 Геометрична інтерпретація методу ітерацій.

Якщо відомо початкове наближення кореня $x=x_0$, то, якщо підставити це значення в праву частину рівняння x = q(x), отримаємо нове наближення $x_1 = q(x_0)$. Далі підставляючи щоразу нове значення кореня в рівняння x = q(x), отримуємо послідовність значень:

$$x_2=q(x_1),\ x_3=q(x_2),\ \dots\ x_{k+1}=q(x_k), \quad k = 1,2,...,n.$$

Ітераційний процес припиняється, якщо результати двох послідовних ітерацій близькі, тобто $|x_{k+1}-x_k|<\varepsilon$.

При розв'язанні задачі даним методом можуть зустрітися два випадки:

1.Послідовність x_0, x_1, $\dots x_k$ збігається, тобто має границю, і тоді ця границя буде коренем рівняння F (x) = 0;

2.Послідовність x_0, x_1, $\dots x_k$ розбігається, тобто не має границі.

Наведемо без доведення теорему, що виражає умову, за якої ітераційний процес збігається.

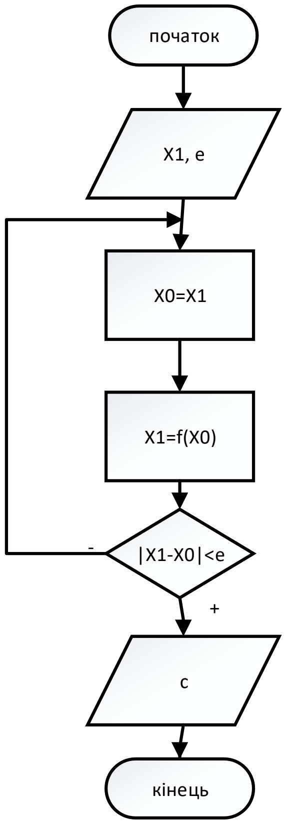
Теорема. Нехай на відрізку [a; b] є єдиний корінь рівняння x = q (x) і у всіх точках цього відрізка похідна задовольняє нерівності | q '(x) | <1. Якщо при цьому виконується і умова $a \le q(x) \le b$, то ітераційний процес збігається, а за нульове наближення x_0 можна взяти будь-яке число з відрізка [a; b].

Чим менше | q'(x) |, тим краще збіжність ітераційного процесу.

Як q(x) можна прийняти функцію q(x) = x-F(x)/K.

K - слід вибирати таким чином, щоб | K | > Q / 2, де Q = max| F'(x) | на відрізку [a, b] і знак K збігався б із знаком F'(x) на [a, b].

Алгоритм розв'язання рівняння методом ітерацій:



<u>Приклад 1.4.</u> Знайти розв’язання рівняння $x^3 + x - 1 = 0$ с точністю ε = 0,01 методом ітерацій.

В результаті пошуку наближеного значення кореня або відрізка, що його містить (рис.1.1) отримали, що шуканий корінь перебуває в інтервалі [0; 1].

Розв’язання рівняння методом ітерацій з допомогою програми Excel.

	A	B	C	D	E	F
1	a	b	F'(a)	F'(b)	Q=|max(F'(x))|	K=Q/2
2	0	1	1	4	4	2
3						
4	x	q(x)=x-F(x)/K	|Xk+1-Xk|			
5	0	0,5				
6	0,5	0,6875	0,5			
7	0,6875	0,681274414	0,1875			
8	0,681274	**0,682535616**	0,006226			
9						

=A5-(A5^3+A5-1)/2

Контрольні питання:

1. Поясніть етапи пошуку кореня рівняння з допомогою ітераційного методу.
2. Поясніть графічний метод відділення коренів.
3. Поясніть геометричну інтерпретацію методу ділення відрізка навпіл.
4. Поясніть геометричну інтерпретацію методу дотичних.
5. Поясніть правило вибору кінця відрізка, через який проводяться дотичні.
6. Поясніть геометричну інтерпретацію методу хорд.
7. Поясніть геометричну інтерпретацію методу ітерацій.
8. Поясніть умова збіжності методу ітерацій.

2 Методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

До розв'язання систем лінійних рівнянь зводяться чисельні практичні завдання, розв'язання лінійних систем є однією з найпоширеніших і важливих завдань обчислювальної математики. Запишемо систему n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Систему рівнянь можна записати у векторно-матричному вигляді, де A - матриця коефіцієнтів системи, x і b - вектор-стовпець невідомих і вектор-стовпець правих частин відповідно:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ \vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Визначником (детермінантом) матриці A порядку n називається число D, рівне:

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^k a_{1\alpha} a_{2\beta} \ldots a_{n\varpi}$$

Необхідною і достатньою умовою існування єдиного розв'язку системи лінійних рівнянь є умова $D \neq 0$. У випадку рівності нулю визначника системи матриця називається виродженою; при цьому система лінійних рівнянь або не має розв’язку, або має їх безліч. Системи рівнянь для яких $D \approx 0$ називаються погано зумовленими.

Методи розв'язання систем рівнянь діляться на точні (прямі) і наближені (ітераційні). Прямі методи розв'язання лінійних систем називають точними, оскільки розв’язок виражений точними формулами через коефіцієнти системи. Прямі методи дозволяють, за умови відсутності помилок округлення, отримати точний розв’язок задачі за кінцеву кількість арифметичних дій.

Ітераційні методи - це методи послідовних наближень. У них необхідно задати якийсь наближений розв’язок - початкове наближення. Після цього за допомогою певного алгоритму проводиться один цикл обчислень, званий ітерацією. В результаті ітерації знаходять нове наближення. Ітерації проводяться до отримання розв’язку з необхідною точністю.

2.1 Прямі методи

2.1.1 Метод Крамера

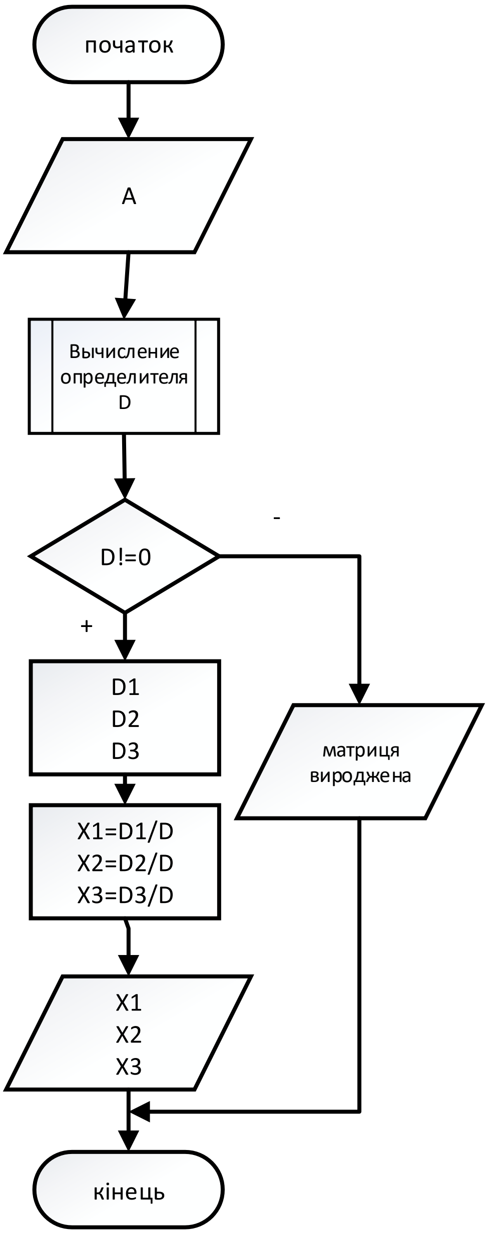
Одним із способів розв'язання системи лінійних рівнянь є правило Крамера, згідно з яким кожне невідоме представляємо у вигляді співвідношення визначників. Запишемо його для системи

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

тоді: $x_1 = \frac{D_1}{D}$, $x_2 = \frac{D_2}{D}$.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} a_{12} \\ a_{21} a_{22} \end{vmatrix}, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 a_{12} \\ b_2 a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} b_1 \\ a_{21} b_2 \end{vmatrix}$$

Алгоритм розв’язання методом Крамера:



<u>Приклад 2.1</u> Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера

$$\begin{cases} 2{,}7x_1 + 14{,}9x_2 + 1{,}3x_3 = 2{,}1 \\ 1{,}3x_1 + 2{,}8x_2 - 9{,}3x_3 = 1{,}7 \\ 15{,}8x_1 + 4{,}1x_2 - 1{,}7x_3 = 0{,}8 \end{cases}$$

Розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера за допомогою програми Excel.

	A	B	C	D	E	F	G
1	2,7	14,9	1,3		2,1		
2	1,3	2,8	-9,3		1,7		
3	15,8	4,1	-1,7		0,8		
4							
5					d=	-2116,96	
6							
7	2,1	14,9	1,3				
8	1,7	2,8	-9,3		d1=	8,431	
9	0,8	4,1	-1,7		x1=	**-0,00398**	
10							
11	2,7	2,1	1,3				
12	1,3	1,7	-9,3		d2=	-325,214	
13	15,8	0,8	-1,7		x2=	**0,153623**	
14							
15	2,7	14,9	2,1				
16	1,3	2,8	1,7		d3=	290,236	
17	15,8	4,1	0,8		x3=	**-0,1371**	
18							

=МОПРЕД(A1:C3)

=МОПРЕД(A7:C9

=F8/F5

=МОПРЕД(A11:C13)

=F12/F5

=МОПРЕД(A15:C17)

=F16/F5

2.1.2 Метод Гауса

Метод (виключення) Гауса заснований на приведенні матриці системи до трикутного вигляду. Це досягається послідовним виключенням невідомих з рівнянь системи. Спочатку за допомогою першого рівняння виключається x1 з усіх подальших рівнянь системи. Потім за допомогою другого рівняння виключаємо x2 з третього і всіх наступних рівнянь. Цей процес, так званий прямий хід методу Гауса, продовжується, доки в лівій частині останнього (n-го) рівняння не залишиться один член з невідомим xn, т. е. матриця системи буде приведена до трикутного вигляду.

Вихідна матриця:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I}: & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \mathrm{II}: & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ \mathrm{III}: & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{array}$$

Отримана матриця трикутного вигляду:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{I}: & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ \mathrm{II}': & a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ \mathrm{III}'': & a''_{33}x_3 = b''_3 \end{array}$$

Зворотний хід методу Гауса полягає в послідовному обчисленні шуканих невідомих: по розв'язанні останнього рівняння, знаходимо єдине в цьому рівнянні невідоме x_n. Далі, використовуючи це значення з попереднього рівняння обчислюємо x_{n-1} і т.д.. Останнім знайдемо x_1 з першого рівняння.

Для реалізації прямого і зворотного ходів використовують такі правила:

- будь-яке рівняння системи можна множити на сталий коефіцієнт;

-можна складати рівняння системи і результат записувати замість одного з цих рівнянь.

Прямий хід виключення: Виключаємо x_1 з рівнянь (II) і (III) системи. Для цього множимо рівняння (I) на $d_1=-a'_{21}/a'_{11}$ і додаємо до другого, потім множимо на $d_2=-a'_{31}/a'_{11}$ і додаємо до третього. В результаті отримуємо наступну систему:

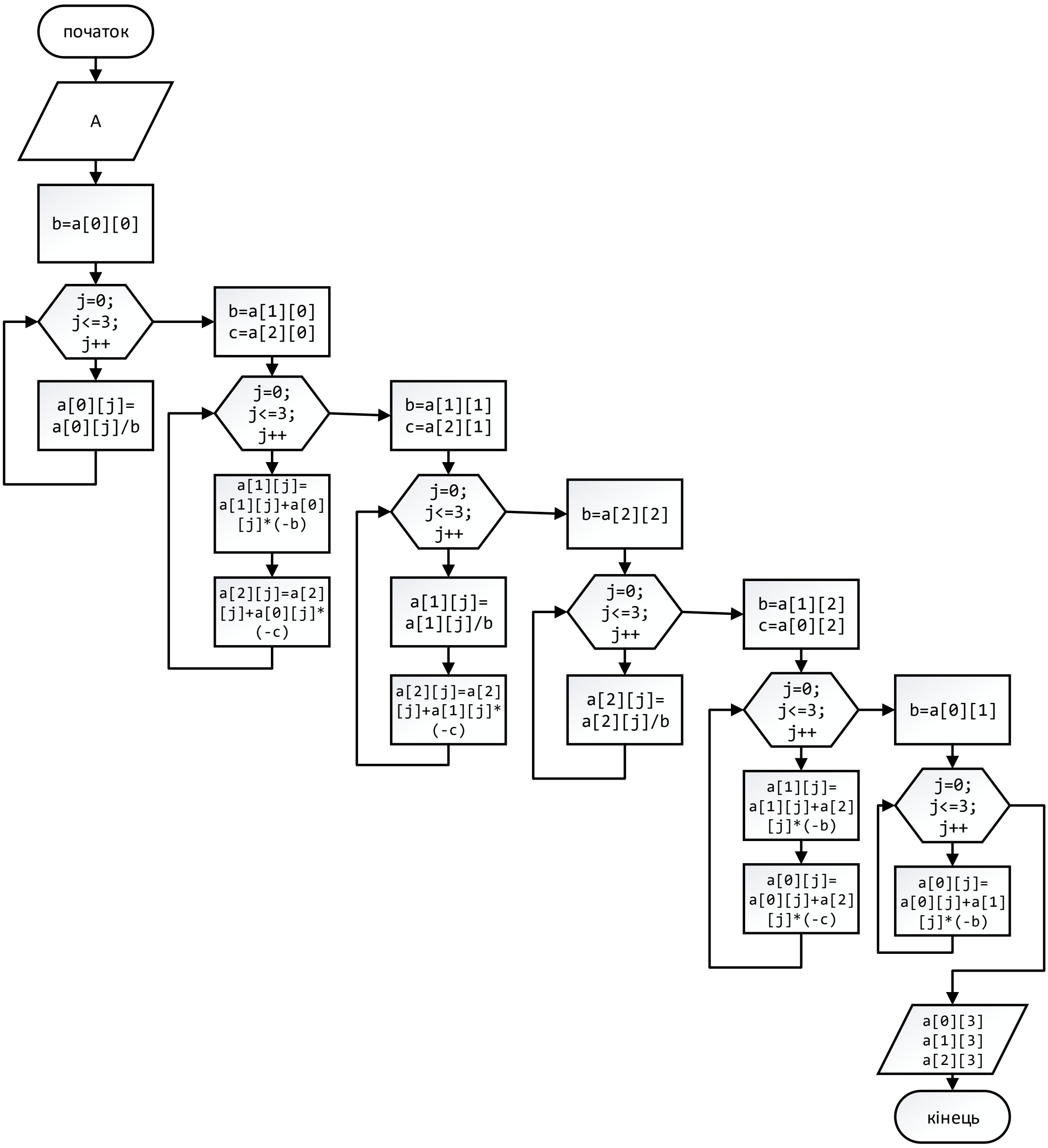
$$\begin{array}{ll} \mathrm{II}': & a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2 \\ \mathrm{III}': & a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 = b'_3 \end{array}$$

З отриманої системи виключаємо x_2. Для цього, помножимо нове рівняння на $d_3=-a'_{32}/a'_{22}$ і додаемо це до другого рівняння, тоді отримаємо рівняння:

$$\mathrm{III}'': \quad a''_{33}x_3 = b''_3$$

Зворотний хід: З рівняння (III '') знаходимо $x_3=b''_3/a''_{33}$. З рівняння (II '') знаходимо $x_2=b'_2-a'_{23}x_3$. З рівняння (I) знаходимо $x_1=b_1-a_{12}x_2-a_{13}x_3$.

Алгоритм розв'язання методом Гауса:

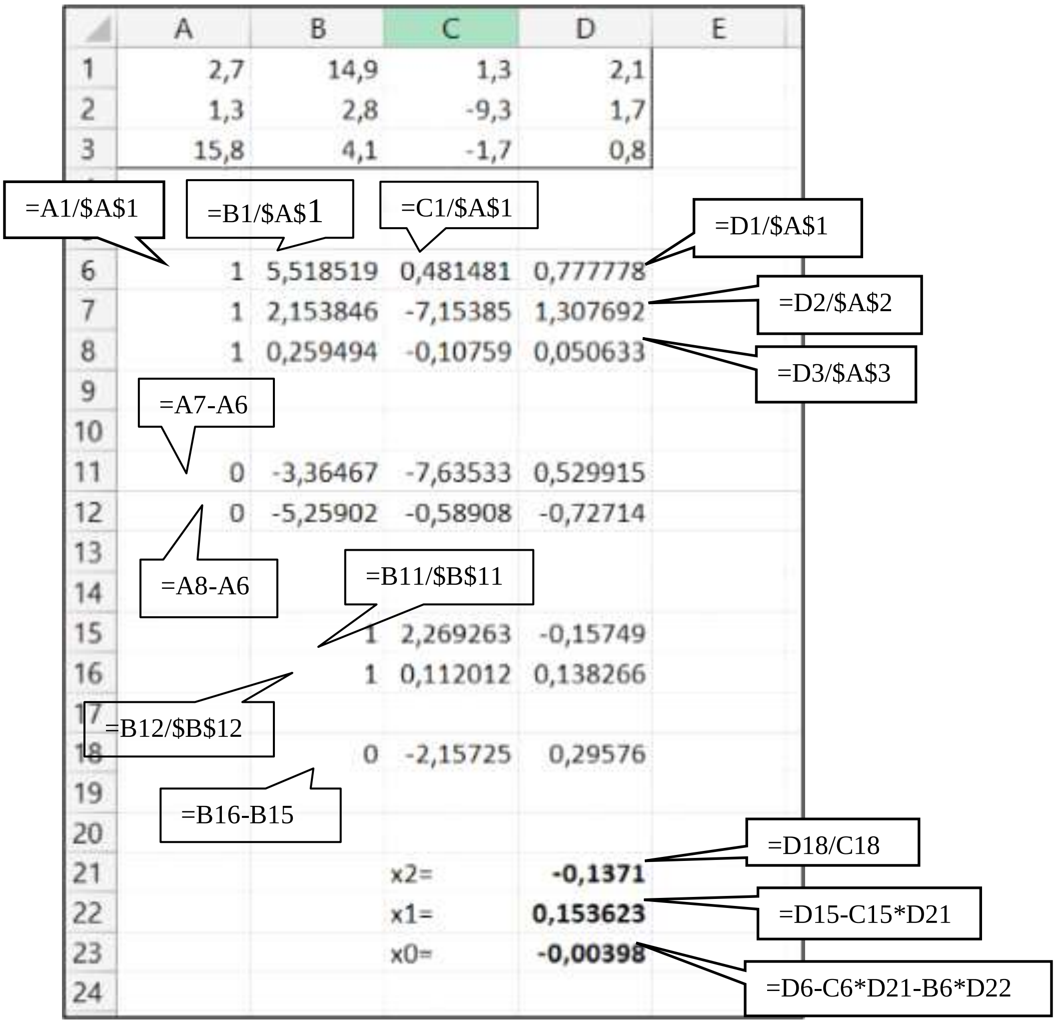


<u>Приклад 2.2</u> Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса

$$\begin{cases} 2{,}7x_1 + 14{,}9x_2 + 1{,}3x_3 = 2{,}1 \\ 1{,}3x_1 + 2{,}8x_2 - 9{,}3x_3 = 1{,}7 \\ 15{,}8x_1 + 4{,}1x_2 - 1{,}7x_3 = 0{,}8 \end{cases}$$

1.Розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса за допомогою програми Excel.

Використовуються абсолютні посилання ($A$1). Щоб переходити між абсолютними і відносними посиланнями існує функціональна клавіша F4.



	A	B	C	D	E
1	2,7	14,9	1,3	2,1	
2	1,3	2,8	-9,3	1,7	
3	15,8	4,1	-1,7	0,8	
6	1	5,518519	0,481481	0,777778	
7	1	2,153846	-7,15385	1,307692	
8	1	0,259494	-0,10759	0,050633	
9					
10					
11	0	-3,36467	-7,63533	0,529915	
12	0	-5,25902	-0,58908	-0,72714	
13					
14					
15		1	2,269263	-0,15749	
16		1	0,112012	0,138266	
17					
18		0	-2,15725	0,29576	
19					
20					
21			x2=	**-0,1371**	
22			x1=	**0,153623**	
23			x0=	**-0,00398**	
24					

Контрольні питання:

1. Назвіть прямі методи розв'язання лінійних систем
2. У чому полягає прямий і зворотний хід у схемі Гаусса?
3. Поясніть правило Крамера для розв'язання систем лінійних рівнянь.

2.2 Наближені методи

2.2.1 Ітераційний метод

Проілюструємо цей метод на прикладі розв'язання системи трьох лінійних рівнянь:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

Збіжність методу простої ітерації забезпечується при виконанні умови переважання діагональних елементів матриці А:

$$\sum_{i \neq j} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \qquad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

Інакше можна переставити рівняння.

Висловимо невідомі x_1, x_2 і x_3 відповідно з першого, другого і третього рівнянь системи

$$x_1 = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)$$
$$x_2 = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3)$$
$$x_3 = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2)$$

Задамо деякі початкові (нульові) наближення значень невідомих: $x_1 = x_1^{(0)}$, $x_2 = x_2^{(0)}$, $x_3 = x_3^{(0}$. Коли підставимо ці значення в праву частину виразу, отримуємо нове (перше) наближення:

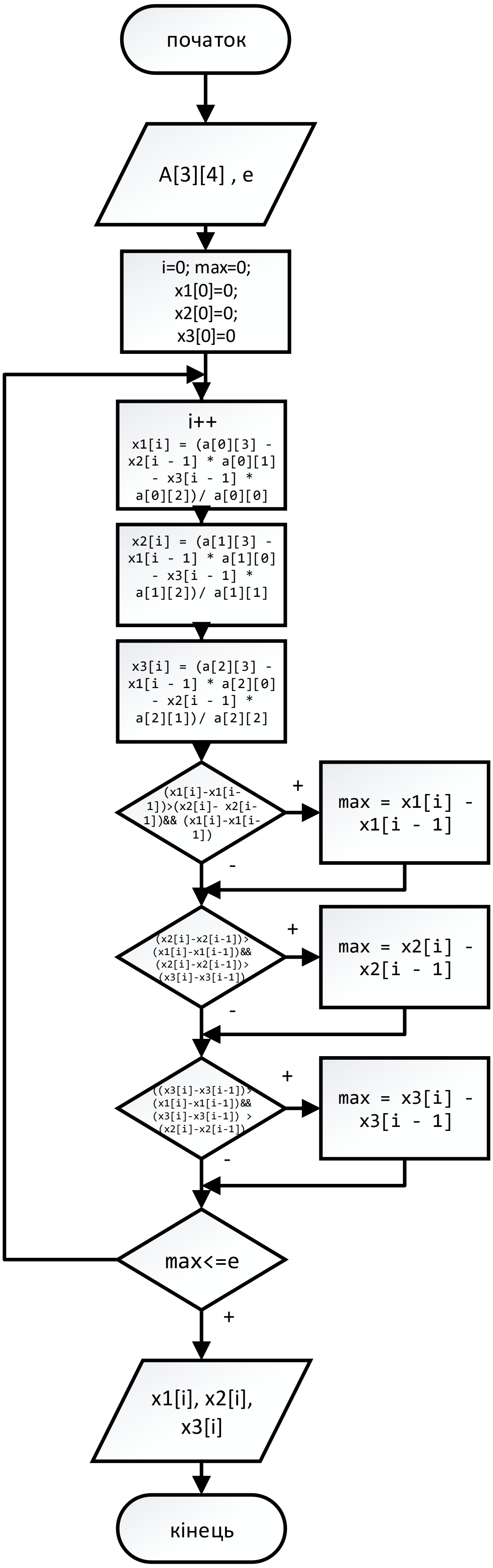
$$x_1^{(1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(0)} - a_{13}x_3^{(0)})$$
$$x_2^{(1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(0)} - a_{23}x_3^{(0)})$$
$$x_3^{(1)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(0)} - a_{32}x_2^{(0)})$$

Тепер, за допомогою значень $x_1^{(1)}$, $x2^{(1)}$, $x3^{(1)}$, можна так само провести другу ітерацію, в результаті якої будуть знайдені другі наближення. Наближення з номером k можна обчислити, знаючи наближення з номером (k -1):

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)})$$
$$x_2^{(k)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(k-1)} - a_{23}x_3^{(k-1)})$$
$$x_3^{(k)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k-1)} - a_{32}x_2^{(k-1)})$$

Ітераційний процес продовжується, доки значення $x_1^{(k)}$, $x_2^{(k)}$, $x_3^{(k)}$ не стануть близькими із заданою похибкою до значень $x_1^{(k-1)}$, $x_2^{(k-1)}$, $x_3^{(k-1)}$.

Алгоритм розв’язання ітераційним методом:



<u>Приклад 2.3</u> Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом ітерацій.

1.Розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом ітерацій з допомогою програми Excel.

$$\begin{cases} 2{,}7x_1 + 14{,}9x_2 + 1{,}3x_3 = 2{,}1 \\ 1{,}3x_1 + 2{,}8x_2 - 9{,}3x_3 = 1{,}7 \\ 15{,}8x_1 + 4{,}1x_2 - 1{,}7x_3 = 0{,}8 \end{cases}$$

Умова збіжності не виконується. Тому переставляємо рівняння і отримуємо систему з переважанням діагональних елементів:

$$\begin{cases} 15{,}8x_1 + 4{,}1x_2 - 1{,}7x_3 = 0{,}8 \\ 2{,}7x_1 + 14{,}9x_2 + 1{,}3x_3 = 2{,}1 \\ 1{,}3x_1 + 2{,}8x_2 - 9{,}3x_3 = 1{,}7 \end{cases}$$

=(0,8-4,1*C2+1,7*D2)/15,8

=(2,1-2,7*B2-1,3*D2)/(14,9)

=(1,7-1,3*B2-2,8*C2)/(-9,3)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	№	X1	X2	X3	d1	d2	d3	maxd	
2	0	0	0	0					
3	1	0,050633	0,14094	-0,1828	0,050633	0,14094	0,182796	0,182796	
4	2	-0,00561	0,147713	-0,13328	0,056241	0,006774	0,049511	0,056241	
5	3	**-0,00204**	**0,153585**	**-0,13911**	0,003569	0,005872	0,005822	**0,005872**	
6									

=ABS(B4-B3)

=ABS(C4-C3)

=ABS(D4-D3)

2.2.2 Метод Зейделя

Метод Зейделя є модифікацією методу ітерацій. Наближення *k*-й ітерації обчислюється за формулою:

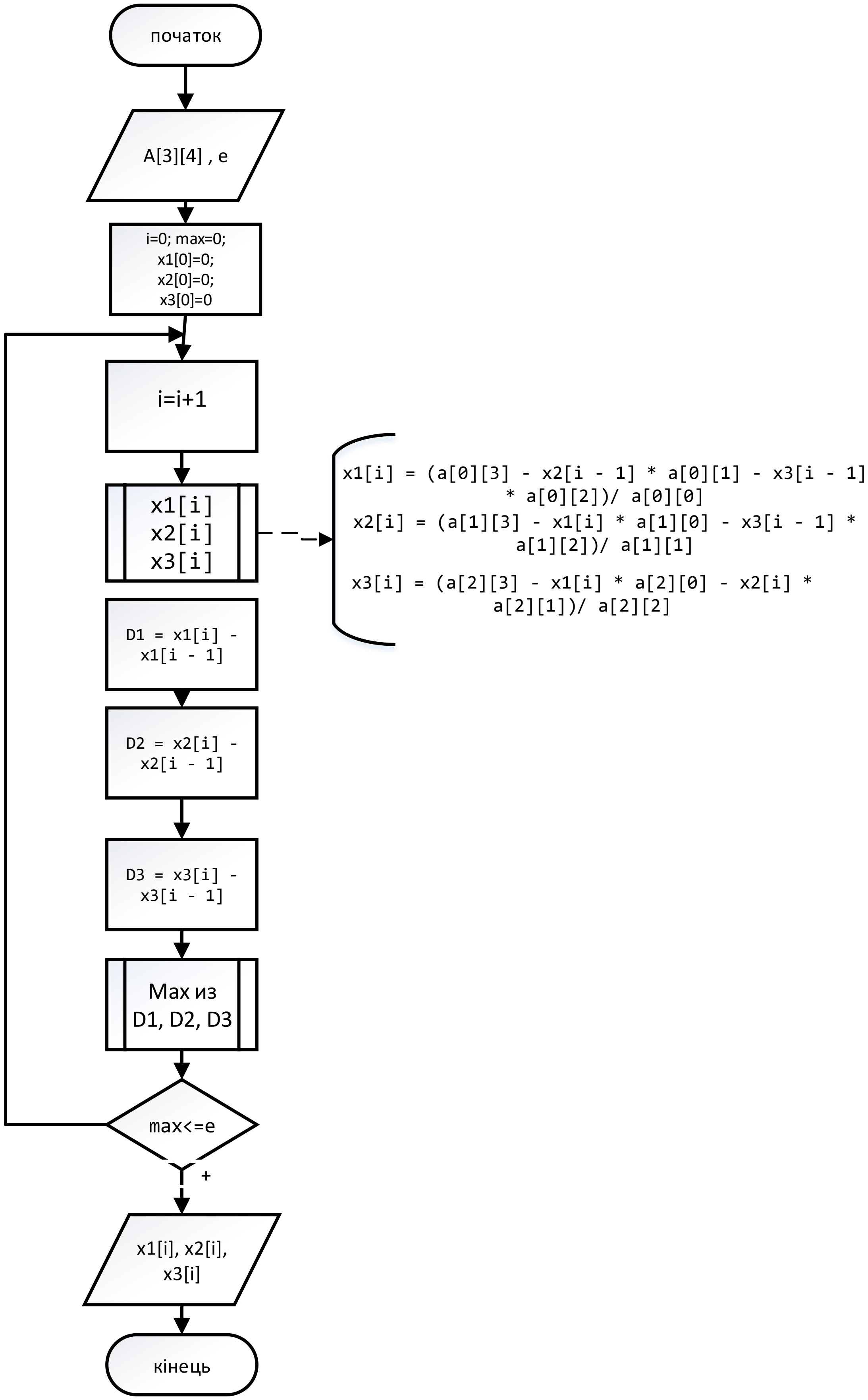
$$x_1^{(k)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)})$$

$$x_2^{(k)} = \frac{1}{a_{22}}\left(b_2 - a_{21}x_1^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)}\right)$$

$$x_3^{(k)} = \frac{1}{a_{33}}(b_3 - a_{31}x_1^{(k)} - a_{32}x_2^{(k)})$$

Цей метод дозволяє значно зменшити кількість ітерацій, необхідних для отримання бажаного результату. Умови збіжності і зупинки процесу розв'язання аналогічні тим, що використовувалися в методі простих ітерацій.

Алгоритм розв’язання методом Зейделя:



<u>Приклад 2.4</u> Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Зейделя.

$$\begin{cases} 15,8x_1 + 4,1x_2 - 1,7x_3 = 0,8 \\ 2,7x_1 + 14,9x_2 + 1,3x_3 = 2,1 \\ 1,3x_1 + 2,8x_2 - 9,3x_3 = 1,7 \end{cases}$$

Розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Зейделя за допомогою програми Excel.

=(0,8-4,1*C2+1,7*D2)/15,8

=(2,1-2,7*B3-1,3*D2)/(14,9)

=(2,1-2,7*B3-1,3*D3)/(14,9)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	№	X1	X2	X3	d1	d2	d3	maxd
2	0	0	0	0				
3	1	0,050633	0,131765	-0,13605	0,050633	0,131765	0,136047	0,136047
4	2	0,001803	0,152483	-0,13663	0,04883	0,020718	0,000588	0,04883
5	3	**-0,00364**	**0,152534**	**-0,13738**	0,00544	5,13E-05	0,000745	**0,00544**
6								

Контрольні питання:

1. Опишіть метод ітерацій для розв'язання систем лінійних рівнянь.
2. Сформулюйте умову збіжності ітераційних методів для розв'язання систем лінійних рівнянь.
3. Опишіть метод Зейделя.

3 Чисельне інтегрування

Якщо функція f (x) безперервна на відрізку [a, b], то визначений інтеграл від цієї функції в межах від a до b існує і має вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Де F(x) - первісна від f(x).

Існує багато функцій, первісні яких не можна виразити через елементарні функції. Формула Ньютона-Лейбніца не дозволяє обчислювати інтеграли від функцій, які задані графіком або таблицею. Це призводить до необхідності заміни інтегрування чисельними методами, які дозволяють підрахувати інтеграли безпосередньо за значеннями підінтегральної функції f(x) і не залежать від способу її завдання. Відповідні формули зазвичай називають формулами чисельного інтегрування або квадратурними формулами (тобто формулами обчислення площ).

3.1 Метод прямокутників

Потрібно обчислити визначений інтеграл:

$$J = \int_a^b f(x)dx$$

Виберемо на відрізку інтегрування [a, b] n різних вузлів

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Тобто відрізок [a, b] розбитий на n однакових частин довжин

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Якщо в якості точок вибрати ліві кінці відповідних відрізків: $x_{0,}\, x_1, \ldots, x_{n-1}$ то отримаємо формулу «лівих» прямокутників:

$$J \approx (f(a) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}))\frac{b-a}{n}.$$

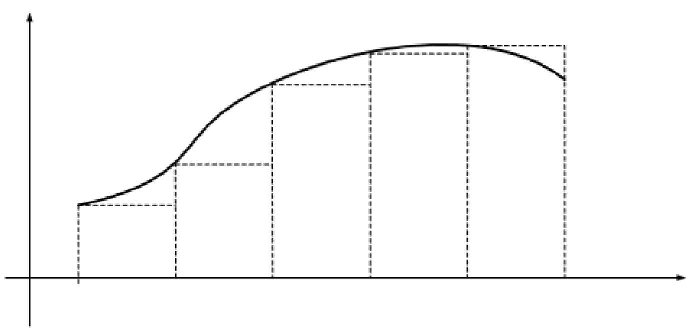


Рис.3.1 Геометрична інтерпретація формули «лівих» прямокутників

Якщо в якості точок вибрати праві кінці відповідних відрізків: $x_{1,}\, x_2, \ldots, x_n$, то отримаємо формулу «правих» прямокутників:

$$J \approx (f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + f(b))\frac{b-a}{n}.$$

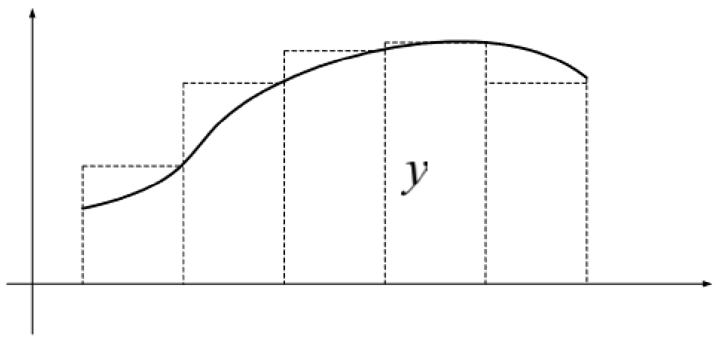


Рис.3.2 Геометрична інтерпретація формули «правих» прямокутників

У разі монотонно зростаючої функції f(x) перша з цих формул буде давати наближення інтеграла з нестачею, а друга - з надлишком (у разі монотонно спадної функції - навпаки). Тому найчастіше використовують формулу «середніх» прямокутників, в якій в якості точок x_i беруть середні точки відрізків розбиття

$$J \approx (f(0{,}5(x_0 + x_1)) + f(0{,}5(x_1 + x_2)) + \ldots + f(0{,}5(x_{n-1} + x_n)))\frac{b-a}{n}.$$

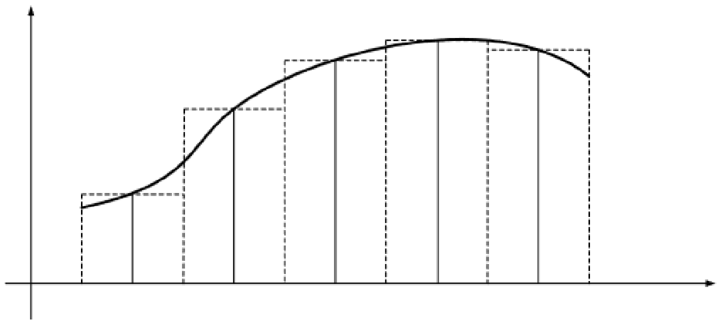


Рис.3.3 Геометрична інтерпретація формули «середніх» прямокутників

3.2 Метод трапецій

Формула трапецій наближено представляє площу криволінійної трапеції, що відповідає інтегралу, J у вигляді суми площ звичайних трапецій:

$$J = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}$$

$$J \approx (\tfrac{1}{2}f(a) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1}) + \tfrac{1}{2}f(b))\frac{b-a}{n}.$$

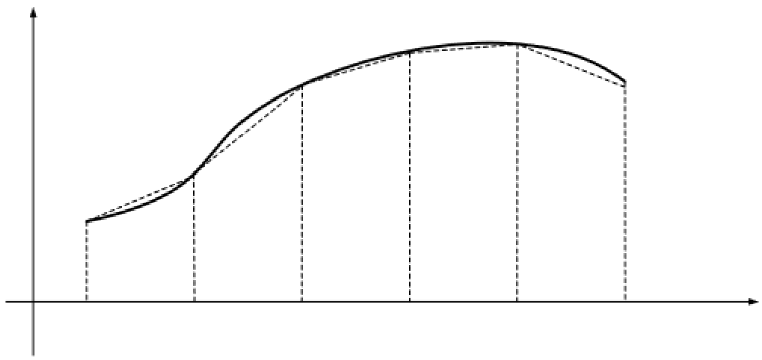
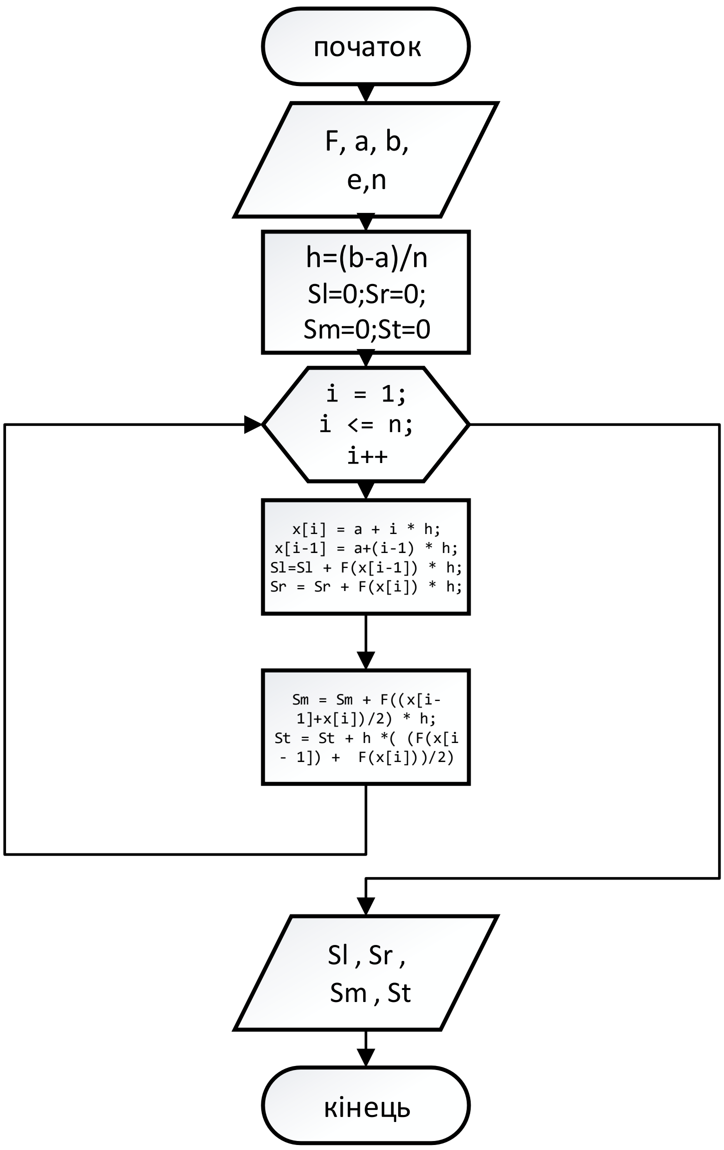


Рис.3.4 Геометрична інтерпретація формули трапецій

Алгоритм розв’язання методами прямокутників та трапецій:



3.3 Метод парабол (Сімпсона)

Значення підвищеної точності дає метод парабол (Сімпсона). Ідея полягає в тому, що на елементарному відрізку дуга параболи тісніше прилягає до кривої y=f(x), ніж хорда. Тому площі трапецій, що обмежені зверху дугами парабол, є більш близькими до значення площі відповідних криволінійних трапецій, що обмежені зверху дугою кривої y =f(x), ніж значення площі відповідних прямокутних трапецій.

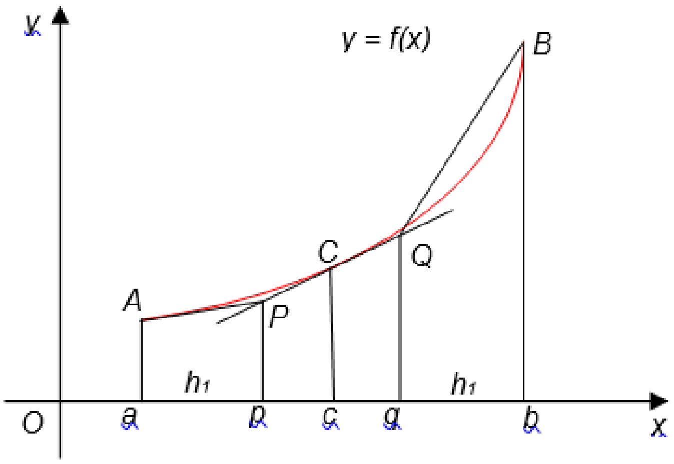


Рис.3.5 Геометрична інтерпретація метода парабол

Розглянемо функцію y = f(x). Вважаймо, що на відрізку [a; b] вона додатна та безперервна. Знайдімо площу криволінійної трапеції aABb (рис. 3.5).

Для цього поділімо відрізок [a, b] точкою $c = \frac{a+b}{2}$ навпіл та в точці C(c, f(c)) проведемо дотичну до лінії y = f(x). Після цього розділимо [a, b] точками p та q на три рівні частини та проведемо через них прямі x = p .та x = q. Нехай P та Q — точки перетину цих прямих з дотичною. З'єднаймо A з P та B з Q, та отримаємо три прямолінійні трапеції aAPp, pPQq, qQBb. Тоді площу трапеції aABb можна наближено обчислити за наступною формулою

$$I \approx \frac{aA+pP}{2} \cdot h_1 + \frac{pP+qQ}{2} \cdot h_1 + \frac{qQ+bB}{2} \cdot h_1,$$

$$\text{де } h_1 = \frac{b-a}{3}.$$

Звідки отримуємо

$$I \approx \frac{b-a}{6} \cdot (aA + 2(pP + qQ) + bB).$$

Зауважимо, що aA = f(a), bB = f(b), pP + qQ = 2f(c) (як середня лінія трапеції), таким чином отримуємо малу формулу Сімпсона

$$I \approx \frac{b-a}{6} \cdot \left(f(a) + 4f(c) + f(b)\right)$$

У даному випадку дуга ACB замінюється на параболу, що проходить через точки A, P, Q, B.

Мала формула Сімпсона дає інтеграл з хорошою точністю, коли графік підінтегральної функції мало вигнутий; у випадках, коли задана більш складна функція, малу формулу Сімпсона використовувати недоцільно.

Тоді, щоб обчислити інтеграл заданої функції потрібно розбити відрізок[a, b] на n частин та до кожного з відрізків застосувати цю формулу.

Обов'язковою вимогою, що витікає з геометричного змісту метода парабол, є те, що n повинно бути парним. Нехай $h = \frac{b-a}{n}$, точки будуть $x_0=a$, x_1, x_2, …x_{n-2}, x_{n-1}, $x_n=b$, а y_0, y_1, …y_n –значення підінтегральної функції на відрізку [a, b]. Тоді, застосувавши малу формулу Сімпсона до кожної пари отриманих відрізків, маємо

$$I_1 \approx \frac{x_2 - x_0}{6}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\big);$$
$$I_2 \approx \frac{x_4 - x_2}{6}\big(f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\big);$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$I_{\frac{n}{2}} \approx \frac{x_n - x_{n-2}}{6}\big(f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\big).$$

Тоді

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \approx I_1 + I_2 + \dots + I_{\frac{n}{2}}.$$

Зауважимо, що у всіх виразах $I_1,\ I_2,\ I_{\frac{n}{2}}$ перший множник $\frac{h}{3}$:

$$\frac{x_2 - x_0}{6} = \frac{2h}{6} = \frac{h}{3};$$
$$\frac{x_4 - x_2}{6} = \frac{2h}{6} = \frac{h}{3};$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{x_n - x_{n-2}}{6} = \frac{2h}{6} = \frac{h}{3}.$$

Зробивши заміну за цими формулами, отримаємо:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx \approx I_1 + I_2 + \dots + I_{\frac{n}{2}} =$$
$$\frac{h}{3}\big(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4) + \dots + f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\big)$$
$$=$$

групуючи доданки

$$\frac{h}{3}\big[f(x_0) + 4\big(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1})\big) + 2\big(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{n-2})\big) + f(x_n)\big].$$

Таким чином, отримуємо «велику» формулу Сімпсона, яка має вид:

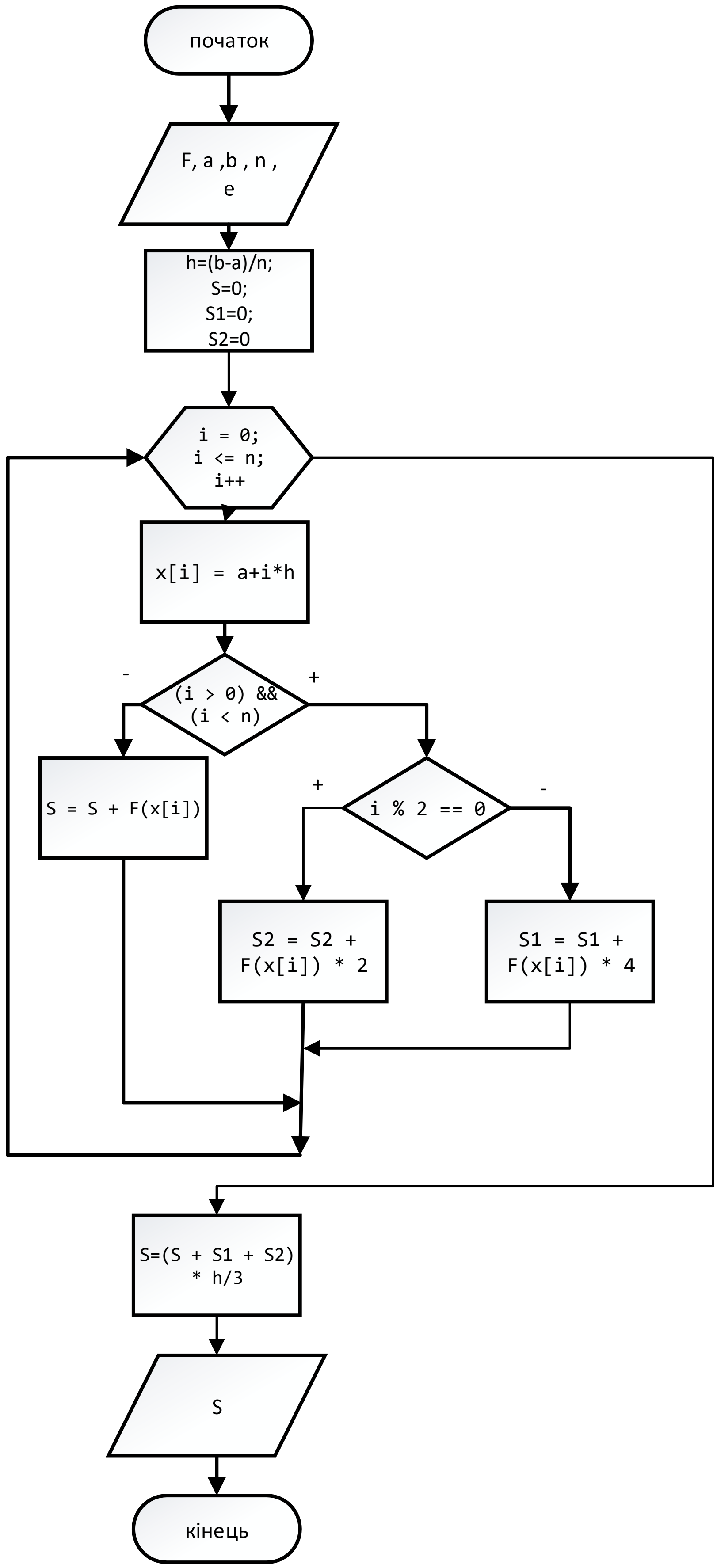
$$\int_a^b f(x)\,dx \frac{h}{3}\big[f(x_0) + 4\big(f(x_1) + f(x_3) + \dots + f(x_{n-1})\big) + 2\big(f(x_2) + f(x_4) + \dots + f(x_{n-2})\big) + f(x_n)\big]$$

або

$$\int_a^b f(x)\,dx \frac{h}{3}\big(Y_{кр} + 4Y_{неч} + 2Y_{чет}\big)$$

де $Y_{кр} = y_0 + y_n$, $Y_{неч} = y_1 + y_3 + \dots + y_{n-1}$, $Y_{чет} = y_2 + y_4 + \dots + y_{n-2}$, а $h = \frac{b-a}{n}$.

Алгоритм розв’язання методом парабол (Сімпсона):



3.4.Оцінка точності обчислення певного інтеграла.

В кожній конкретній задачі необхідно визначити кількість точок поділу n, необхідну для обчислення інтегралу з потрібною точністю ε. Для визначення n можна застосувати наступне правило Рунге. Нехай ε – задана точність обчислення інтегралу, тоді крок h повинен задовольняти умові

$$h \le \sqrt[4]{\varepsilon}$$

За цим значенням h з співвідношення $h = \dfrac{b-a}{n}$ визначається n. При цьому для метода Сімпсона у якості n береться найближче парне ціле число, більше за $\dfrac{b-a}{h}$, а для методі прямокутників та трапецій – найближче ціле, більше за $\dfrac{b-a}{h}$.

Оцінку похибки можна провести також наступним методом Рунге.

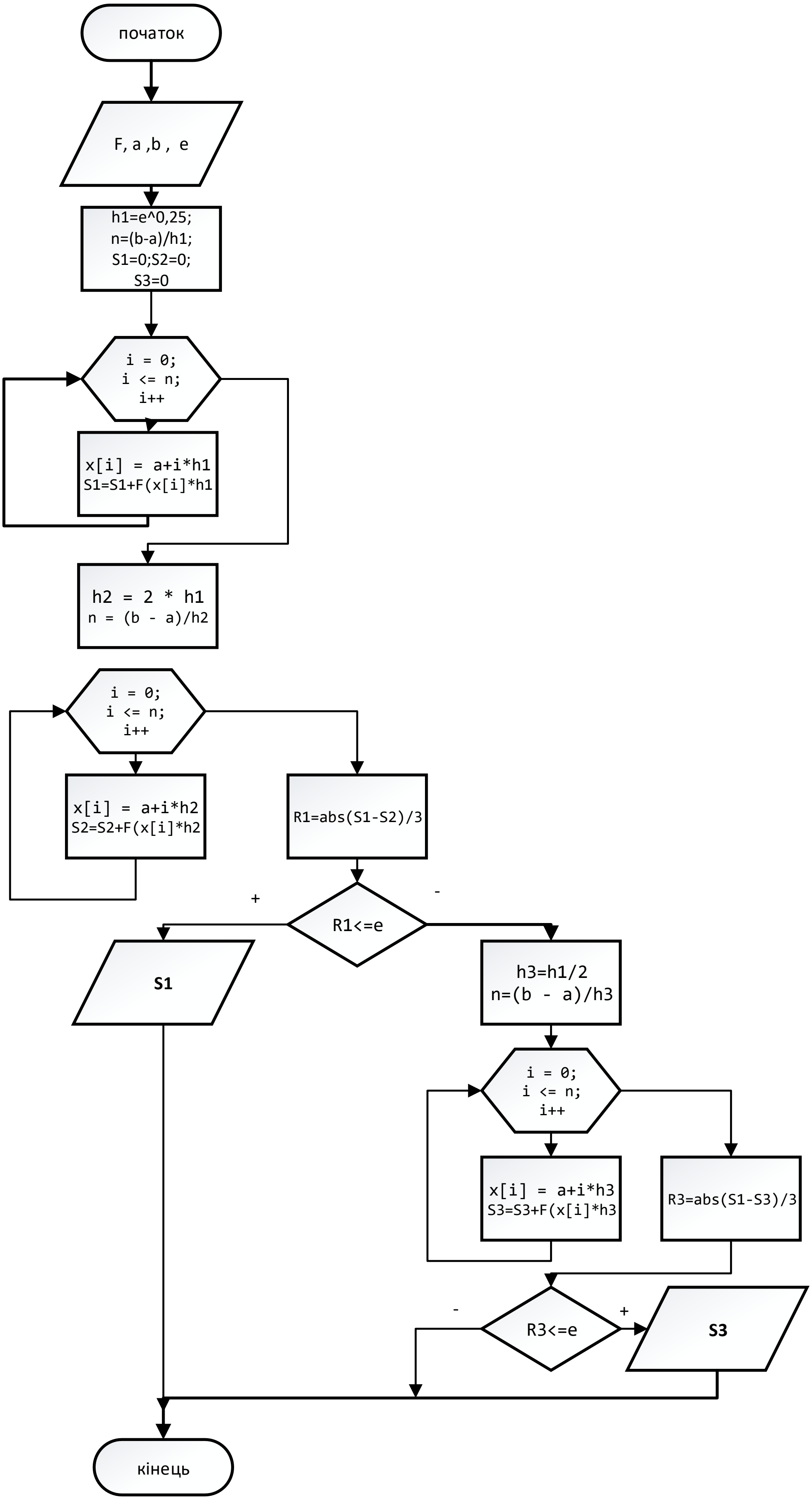
Нехай I_h - наближене значення інтегралу, обчислене з кроком h, а I_{2h} - значення цього інтегралу, обчислене з кроком 2h. Зауважимо, що чим менше крок h (а, тим самим більше n), тим точніше отримуємо наближене значення інтегралу.

Якщо $\dfrac{|I_h - I_{2h}|}{15} < \varepsilon$, де I_h та I_{2h} обчислені за методом Сімпсона,

або $\dfrac{|I_h - I_{2h}|}{3} < \varepsilon$, де I_h та I_{2h} обчислені методом прямокутників або трапецій, то в якості наближеного значення інтегралу беруть значення I_h .

Якщо нерівність для відповідного метода не виконується, то знайдене значення інтегралу не задовольняє заданій точності. Тоді проводять нові обчислення з кроком $\dfrac{h}{2}$ та знову перевіряють виконання нерівності. Ця дія багатократного зменшення кроку повторюється до тих пір, поки відповідна нерівність не стане вірною.

Алгоритм оцінки точності обчислення певного інтеграла:



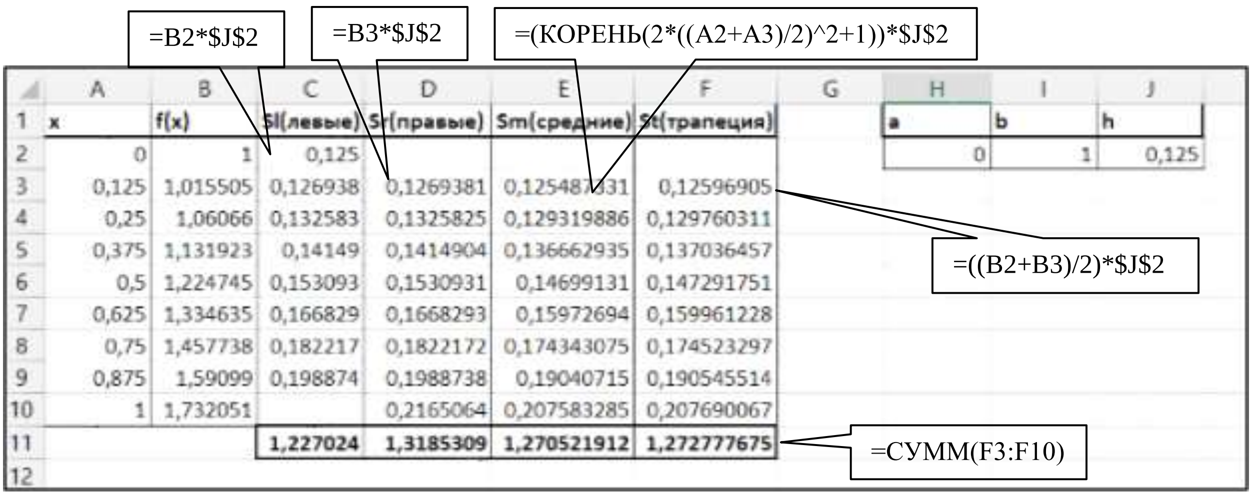
<u>Приклад 3.1</u> Обчислити за допомогою програми Excel певний інтеграл методом прямокутників, трапецій:

$$I = \int_0^1 \sqrt{2x^2 + 1}dx.$$

Виберемо на відрізку інтегрування [0,1] 8 різних вузлів:

$$x_0 = a, \;\; x_{i+1} = x_i + h$$

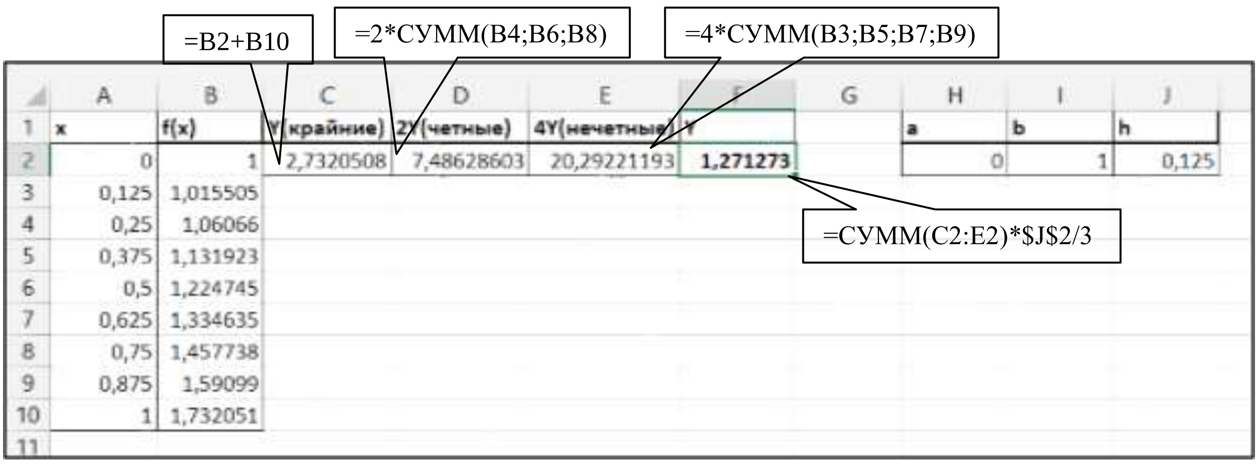
$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{8} = 0{,}125$$



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x	f(x)	Sl(левые)	Sr(правые)	Sm(средние)	St(трапеция)		a	b	h
2	0	1	0,125					0	1	0,125
3	0,125	1,015505	0,126938	0,1269381	0,125487331	0,12596905				
4	0,25	1,06066	0,132583	0,1325825	0,129319886	0,129760311				
5	0,375	1,131923	0,14149	0,1414904	0,136662935	0,137036457				
6	0,5	1,224745	0,153093	0,1530931	0,14699131	0,147291751				
7	0,625	1,334635	0,166829	0,1668293	0,15972694	0,159961228				
8	0,75	1,457738	0,182217	0,1822172	0,174343075	0,174523297				
9	0,875	1,59099	0,198874	0,1988738	0,19040715	0,190545514				
10	1	1,732051		0,2165064	0,207583285	0,207690067				
11			**1,227024**	**1,3185309**	**1,270521912**	**1,272777675**				
12										

<u>Приклад 3.2</u> Обчислити за допомогою програми Excel певний інтеграл методом Симпсона.

Варіант розв'язання 1:



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x	f(x)	Y(крайние)	2Y(четные)	4Y(нечетные)	Y		a	b	h
2	0	1	2,7320508	7,48628603	20,29221193	**1,271273**		0	1	0,125
3	0,125	1,015505								
4	0,25	1,06066								
5	0,375	1,131923								
6	0,5	1,224745								
7	0,625	1,334635								
8	0,75	1,457738								
9	0,875	1,59099								
10	1	1,732051								
11										

Варіант розв'язання 2:

Введемо додаткову змінну FL = 1 для непарних вузлів і FL = 0 для парних вузлів

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	f(x)	FL			a	b	h
2	0	1		0,041667		0	1	0,125
3	0,125	1,015505	1	0,169251				
4	0,25	1,06066	0	0,088388				
5	0,375	1,131923	1	0,188654				
6	0,5	1,224745	0	0,102062				
7	0,625	1,334635	1	0,222439				
8	0,75	1,457738	0	0,121478				
9	0,875	1,59099	1	0,265165				
10	1	1,732051		0,072169				
11				**1,271275**				
12								

=B2*$H$2/3

=ЕСЛИ(C3=1;4*B3*$H$2/3;2*B3*$H$2/3)

=B10*$H$2/3

=СУММ(D2:D10)

<u>Приклад 3.3</u> Виконати за допомогою програми Excel оцінку точності обчислення певного інтеграла методом Рунге (на прикладі інтеграла, обчисленого методом лівих прямокутників). ε= 0,01 - задана похибка обчислення

Виходячи з того, що $h \le \sqrt[4]{\varepsilon}$ = 0,316228, вибираємо h = 0,25.

Кількість ітерацій з кроком h = 0,25: n1 = $\frac{b-a}{h}$ = 4

Кількість ітерацій з кроком 2h = 0,5: n2 = $\frac{b-a}{2h}$ = 2.

Оцінка похибки: $\frac{|Sl1-Sl2|}{3}$| = 0,024471> 0,01

Отже, для отримання необхідної точності обчислень, обраний крок h = 0,25 зменшуємо вдвічі (h = 0,125) і проводимо оцінку повторно, до отримання потрібного результату.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	x	f(x)	Sl1			e	h	n1	a	b	2h	n2
2	0	1	0,25			0,01	0,25	4	0	1	0,5	2
3	0,25	1,06066	0,265165				0,316228					
4	0,5	1,224745	0,306186									
5	0,75	1,457738	0,364434									
6	1											
7			1,185786									
8												
9	x	f(x)	Sl2									
10	0	1	0,5									
11	0,5	1,224745	0,612372									
12	1											
13			1,112372		|Sl1-Sl2|/3=	0,024471						
14												
15												
16	x	f(x)	Sl3			h/2	n3					
17	0	1	0,125			0,125	8					
18	0,125	1,015505	0,126938									
19	0,25	1,06066	0,132583		|Sl3-Sl1|/3=	0,013746						
20	0,375	1,131923	0,14149									
21	0,5	1,224745	0,153093									
22	0,625	1,334635	0,166829									
23	0,75	1,457738	0,182217									
24	0,875	1,59099	0,198874									
25	1											
26			1,227024									
27												

=СТЕПЕНЬ(F2;(1/4))

=ABS(C7-C13)/3

=ABS(C26-C7)/3

Контрольні питання:

1. Поняття визначеного інтеграла та його геометричний зміст.
2. У чому полягає суть методів числового інтегрування функцій?
3. Опишіть формули прямокутників (лівих, середніх, правих) та надайте їх геометричну інтерпретацію.
4. Опишіть формулу трапецій та надайте їх геометричну інтерпретацію.
5. Опишіть формулу Сімпсона.
6. Як оцінюється похибки наближеного обчислення інтегралів за методом Рунге?
7. Як знайти величину кроку числового інтегрування при заданій точності обчислень?

4 Апроксимація функцій

Часто в практичній роботі виникає необхідність знайти в явному вигляді функціональну залежність (формулу) y = f(x) між величинами x і y, які задані окремими парами значень x_i, y_i (таблицею), наприклад, отриманими в результаті вимірювань. Завдання відновлення аналітичної функції по окремим значенням називається апроксимацією.

Для отримання єдиного розв’язку задачі апроксимації необхідно:

1. Поставити загальний вигляд апроксимуючої функції, що включає невідомі параметри (коефіцієнти). Вид функції задається, виходячи з форми розподілу апроксимується значень (розташування точок на графіку), з передбачуваної функціональної залежності, або просто у вигляді полінома деякій мірі;

2. Визначити значення параметрів на основі заданого критерію близькості. Тут існує два основних підходи - інтерполяція і згладжування.

Інтерполяцією називають такий різновид апроксимації, при якій крива побудованої функції проходить точно через наявні точки даних.

Існує також близька до інтерполяції задача, яка полягає в апроксимації будь-якої складної функції іншою, більш простою функцією.

4.1 Інтерполяція

Нехай функція f(x) задана таблицею своїх значень x_i , y_i на інтервалі [a, b]:

$$y_i = f(x_i),\ \ i = 0,1,\dots,n\ \ a \le x_i \le b$$

Задача інтерполяції - знайти функцію F(x), що приймає в точках x_i ті ж значення y_i.

Умова інтерполяції: $F(x_i) = y_i$.

При цьому передбачається, що серед значень x_i немає однакових. Точки x_i називають вузлами інтерполяції. Функція F(x) називається інтерполюючою функцією. Найчастіше інтерполюючу функцію шукають у вигляді многочлена. Многочленом (або поліномом) n-го ступеня від невідомого x називається функція виду:

$$F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m, \qquad i = 0,1,\dots,m$$

Кількість коефіцієнтів многочлена на одиницю більше його порядку. Многочлен другого ступеня - це квадратний тричлен. Многочлен першого ступеня - лінійна функція. Многочлен нульового ступеня - це константа. Два многочлена рівні, тобто такі, що їхні значення збігаються при будь-яких значеннях аргументу, якщо попарно рівні всі їхні коефіцієнти за рівних ступенів.

Інтерполяційним многочленом будемо називати многочлен, коефіцієнти якого обрані таким чином, аби значення многочлена в вузлах таблиці в точності збігалися зі значеннями табличної функції.

Якщо шукаємо F(x) тільки на відрізку [a, b] - це задача *інтерполяції*, а якщо за межами первісного відрізка, то це задача *екстраполяції*.

Інтерполяція - визначення проміжних значень функції за відомим дискретним набором значень функції.

Екстраполяція - визначення значень функції за межами спочатку відомого інтервалу.

Апроксимація - визначення в явному вигляді параметрів функції, що описує розподіл точок.

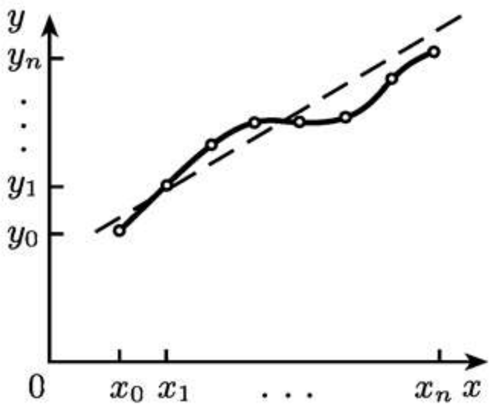


Рис. 4.1. Геометричне уявлення інтерполяції та апроксимації функції

Задача пошуку інтерполяційної функції F(x) має багато рішень, позаяк через задані точки x_i , y_i можна провести нескінченно багато кривих, кожна з яких буде графіком функції, для якої виконуються всі умови інтерполяції (рис 4.2).

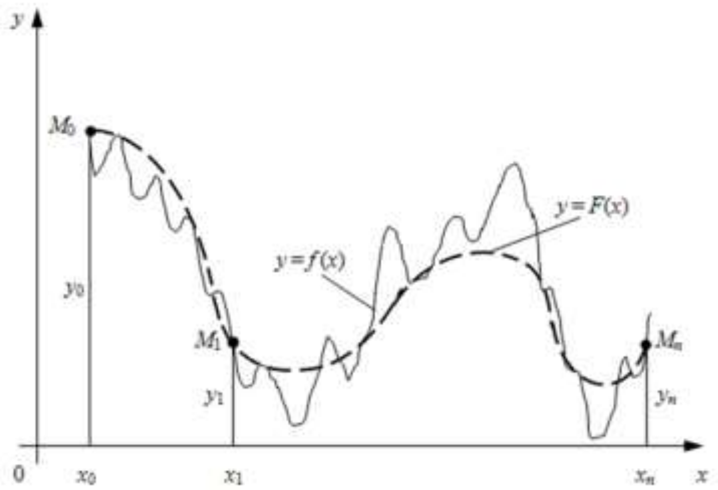


Рис. 4.2. Геометрическое представление интерполяции функции

4.1.1 Локальна інтерполяція

Інтерполююча функція може будуватися відразу для всього розглянутого інтервалу вимірювання x або окремо для різних частин цього інтервалу. У першому випадку говорять про глобальну інтерполяцію, в другому - про кускову (або локальну) інтерполяцію.

4.1.1.1 Кусково-лінійна інтерполяція

Лінійна інтерполяція полягає в тому, що задані точки таблиці з'єднуються прямими лініями, і вихідна функція наближається на заданому інтервалі до ламаної, з вершинами у вузлах інтерполяції (рис.4.3).

Для кожного відрізка ламаної можна написати рівняння прямої.

Найпростішим видом локальної інтерполяції, що використовується найбільше, є лінійна (або кусково-лінійна) інтерполяція. Вона полягає в тому, що вузлові точки з'єднуються відрізками прямих (рис.4.3), тобто через кожні дві точки (x_i, y_i) і (x_{i+1},y_{i+1}) проводиться поліном першого ступеня:

$$F(x) = a_0 + a_1 x, \qquad x_{i-1} \le x \le x_i$$

Коефіцієнти a_0 і a_1 різні на кожному інтервалі $[x_i, x_{i+1}]$ і знаходяться з виконання умов інтерполяції на кінцях відрізка:

$$\begin{cases} f_{i-1} = a_0 + a_1 x_{i-1} \\ f_i = a_0 + a_1 x_i \end{cases}$$

З системи рівнянь можна знайти коефіцієнти:

$$a_0 = f(x_{i-1}) - a_1 x_{i-1},$$

$$a_1 = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

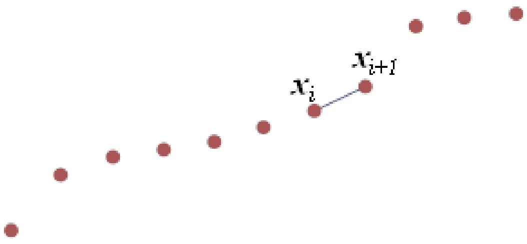


Рис. 4.3 Кусково-лінійна інтерполяція

4.1.1.2 Кусково-квадратична інтерполяція

У разі квадратичної інтерполяції, для кожних трьох вузлових точок (x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}), будується рівняння параболи:

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2\,,\ \ x_{i-1} \le x \le x_i$$

Тут коефіцієнти a_0, a_1, a_2різні на кожному інтервалі $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ і визначаються розв'язанням системи рівнянь для умови проходження параболи через три точки:

$$\begin{cases} f_{i-1} = a_0 + a_1 x_{i-1} + a_2 x_{i-1}^2 \\ f_i = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 \\ f_{i+1} = a_0 + a_1 x_{i+1} + a_2 x_{i+1}^2 \end{cases}$$

З системи рівнянь можна знайти коефіцієнти:

$$a_0 = f(x_{i-1}) - a_1 x_{i-1} - a_2 x_{i-1}^2$$

$$a_1 = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} - a_2(x_i + x_{i-1})$$

$$a_2 = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)} - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)}$$

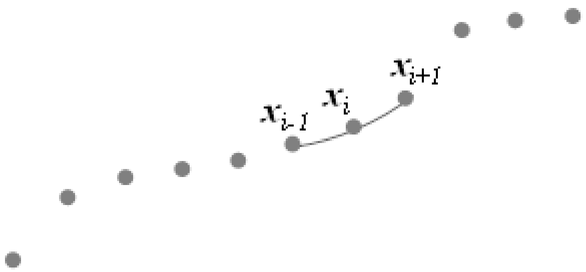


Рис.4.4 Кусково-квадратична інтерполяція

4.1.2 Глобальна інтерполяція.Многочлен Лагранжа

При глобальній інтерполяції на всьому інтервалі [a, b] будується єдиний многочлен. Однією з форм запису інтерполяційного многочлена для глобальної інтерполяції є многочлен Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot l_i(x)$$

де $l_i(x)$– базисні многочлени ступені n:

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n)}$$

Тобто многочлен Лагранжа:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Многочлен $l_i(x)$ задовольняє умову:

$$l_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

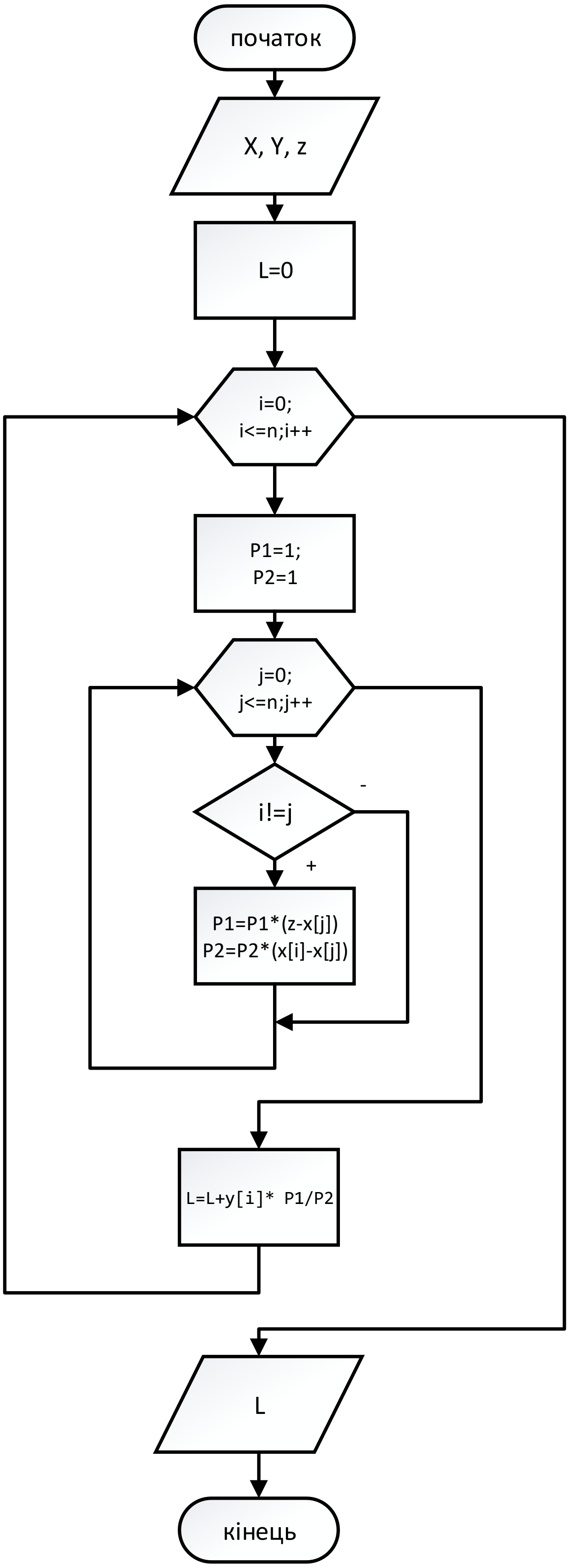
Ця умова означає, що многочлен дорівнює нулю для кожного x_j крім x_i, тобто x_0, x_1, $\dots x_{i-1}$, $x_{i+1}, \dots x_n$ - корені цього многочлена. Таким чином, ступінь многочлена $L_n(x)$ дорівнює n і при $x \neq x_i$ в сумі дорівнюють нулю всі доданки, крім доданка з номером i = j, що дорівнює y_i.

Многочлен Лагранжа застосовується як для рівновіддалених, так і для не рівновіддалених вузлів. Поліном Лагранжа має малу похибку при невеликих значеннях n (n <20). При великих n похибка починає зростати, що свідчить про те, що метод Лагранжа не збігається (тобто його похибка не зменшується з ростом n).

Многочлен Лагранжа в явному вигляді містить значення функцій у вузлах інтерполяції, тому він зручний, коли значення функцій змінюються, а вузли інтерполяції незмінні. Кількість арифметичних операцій, необхідних для побудови многочлена Лагранжа, пропорційна і є найменшою для всіх форм запису. До недоліків цієї форми запису можна віднести те, що зі зміною кількості вузлів доводиться всі обчислення робити спочатку.

Кусково-лінійна і кусково-квадратична локальні інтерполяції є окремими випадками інтерполяції многочленом Лагранжа.

Алгоритм знаходження інтерполяційного многочлена Лагранжа:



Приклад 4.1 Побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа для функції, заданої таблицею:

x	1	3	4
y	2	4	3

Кількість вузлів дорівнює трьом, отже многочлен Лагранжа буде другого ступеня.

$$l_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 3)(x - 4)}{(1 - 3)(1 - 4)}$$

$$l_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 1)(x - 4)}{(3 - 1)(3 - 4)}$$

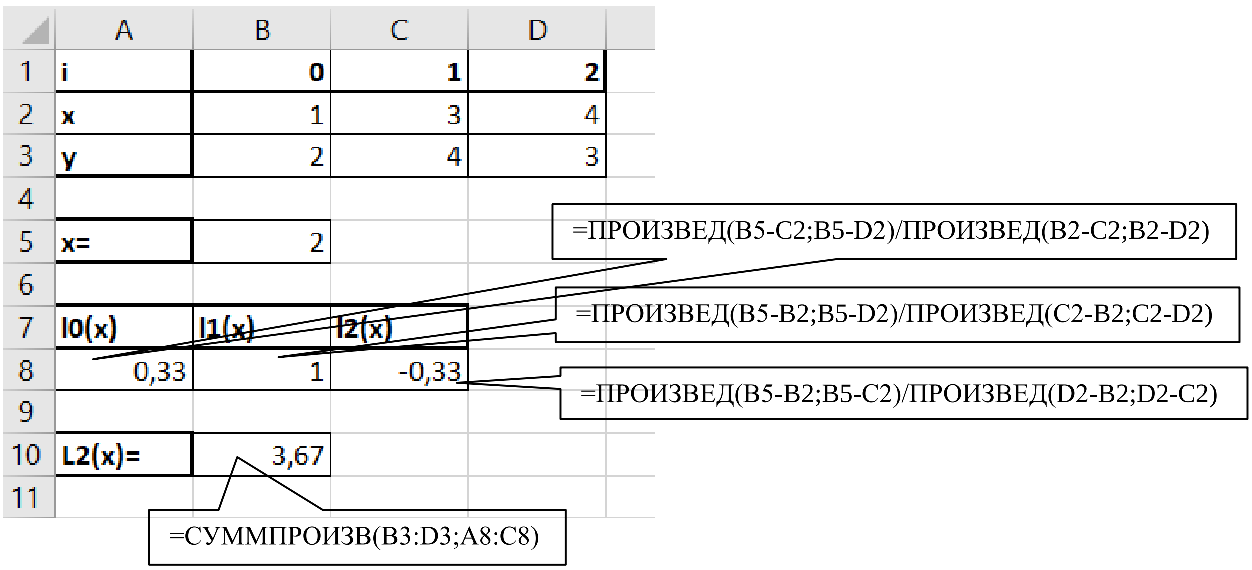
$$l_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 1)(x - 3)}{(4 - 1)(4 - 3)}$$

$$L_2(x) = 2 \cdot \frac{(x - 3)(x - 4)}{(1 - 3)(1 - 4)} + 4 \cdot \frac{(x - 1)(x - 4)}{(3 - 1)(3 - 4)} + 3 \cdot \frac{(x - 1)(x - 3)}{(4 - 1)(4 - 3)}$$

Після перетворень отримуємо остаточний вид многочлена:

$$L_2(x) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{11}{3}x - 1$$

Використовуючи многочлен Лагранжа знайдемо значення функції в точці x=2 Розв’яжемо цю задачу за допомогою програми Excel:



4.2 Згладжування. Метод найменших квадратів

Задача апроксимації функції може ставитися, коли вихідні дані містять похибки, повтори або дуже велику кількість точок. У цих випадках апроксимація на основі інтерполяції не має сенсу або неможлива.

Нехай в результаті спостережень деякого процесу або при проведенні експерименту отримана таблиця значень двох величин x і y.

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

Потрібно підібрати формулу, яка описує наближено функціональну залежність y = y(x), задану цією таблицею. Метод інтерполяції, що вимагає, щоб значення функції збігалися з таблицею у вузлах не пасує для наближення при великій кількості вузлів Будемо будувати таку апроксимуючу функцію, яка не обов'язково збігається з табличними значеннями в вузлах, але, в деякому сенсі, «недалеко відхиляється» від табличних значень . До того ж, її аналітична формула повинна містити невелику кількість параметрів, а їхня кількість не повинна залежати від кількості табличних точок. Функція, відповідна сформульованим вимогам, називається емпіричною формулою.

Завдання побудови емпіричної формули для табличній функції складається з трьох етапів:

1. Структурна ідентифікація емпіричної формули (тобто визначення конкретного виду формули).

2. Параметрична ідентифікація емпіричної формули (тобто визначення числових значень параметрів, що входять в формулу).

3. Оцінка точності емпіричної формули (тобто оцінка розбіжності між значеннями емпіричної формули і результатами експерименту).

На першому етапі побудови емпіричної формули визначають, в класі яких функцій слід шукати наближення. З цією метою пари значень аргументу і функції з таблиці зображують точками в деякій системі координат. Порівняння точкового графіка з різними кривими, графіки яких відомі, нерідко дає вказівку на можливий тип формули.

Розглянемо другу частину завдання про побудову емпіричної формули - визначення числових значень що входять в формулу параметрів. Ці параметри можна визначати виходячи з різних міркувань. Один з найпоширеніших методів вибору параметрів - метод найменших квадратів. Він полягає в такому виборі коефіцієнтів емпіричної функції, при якому сума квадратів всіх ухилень значень функції від досвідчених даних мінімальна. Нехай емпірична формула має вигляд:

$$y = f(x, a_0, a_1, \dots, a_m), \;\; m < n,$$

де m - кількість параметрів емпіричної формули, n - кількість експериментальних точок. Величина

$$\varepsilon_i = \; f(x_i, a_0, a_1, \dots, a_m) - y_i$$

задає ухилення за всіх можливих значень xi, які взяті з таблиці. Найкращими параметрами вважаються ті, для яких сума

$$S(a_0, \dots, a_m) = \sum_{i=1}^{n} {\varepsilon_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i, a_0, a_1, \dots, a_m) - y_i]^2$$

буде мінімальною. Умовою мінімуму функції S(a_0,…, a_m) є те, що її часткові похідні дорівнюють нулю за параметрами a_0,…, a_m. З цієї умови виходить система рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}\left[f(x_i, a_0, \dots, a_m) - y_i\right] \cdot \dfrac{\partial f}{\partial a_0} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_m} = 2\sum\limits_{i=1}^{m}\left[f(x_i, a_0, \dots, a_m) - y_i\right] \cdot \dfrac{\partial f}{\partial a_m} = 0. \end{cases}$$

Найпростіший вид система має у випадку лінійної залежності

$$y = a_0 + a_1 x$$

Вона має два параметри, отже, в системі буде два рівняння:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum_{i=1}^{n}(a_0 + a_1x_i - y_i) = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum_{i=1}^{n}(a_0 + a_1x_i - y_i) \cdot x_i = 0. \end{cases}$$

Після перетворень виходить наступна система лінійних щодо параметрів a_0 і a_1 рівнянь:

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{cases}$$

Відомо, що визначник такої системи відмінний від нуля, тому коефіцієнти a_0 і a_1 обчислюються однозначно.
Якщо емпірична формула має вигляд $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$, то параметри a_0, a_1, a_2 знаходять з наступної системи рівнянь

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a_0 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=1}^{n} x_i^4 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i. \end{cases}$$

Для оцінки точності емпіричної формули використовують поняття середньоквадратичного відхилення. Ця величина задається виразом

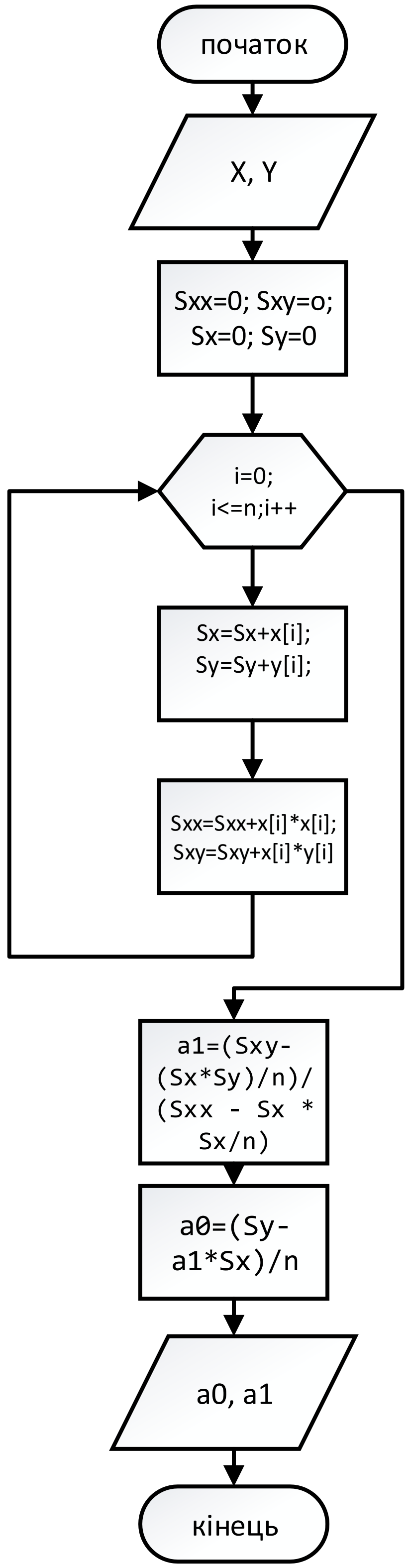
$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}$$

де ε_i визначаються за формулою

$$\varepsilon_i = f(x_i, a_0, a_1, \ldots, a_m) - y_i \quad .$$

Середньоквадратичне відхилення показує середню величину відхилення досвідчених значень досліджуваної залежності від розрахункових, отриманих за емпіричною формулою.

Алгоритм розв’язання методом найменших квадратів:



4.2.1 Апроксимація лінеаризацією

Різні нелінійні функції, що залежать від двох параметрів, можна лінеаризувати шляхом заміни змінних. Для цього необхідно підібрати таке перетворення вихідної залежності $y(x) = f(x, a, b)$, в результаті якого вона набуває лінійний вигляд

Y = AX+B. Далі розв’язуємо задачу лінійної апроксимації для нової залежності, а обчислені коефіцієнти A і B перераховуються в a, b.

Таблиця заміни мінливих для методу лінеаризації даних

№	Функция	Линеаризованная форма $Y = AX + B$	Замена переменных и констант			
			X	Y	a	b
1.	$y = \frac{a}{x} + b$	$y = a\frac{1}{x} + b$	$\frac{1}{x}$	y	A	B
2.	$y = \frac{a}{x+b}$	$y = \frac{-1}{b}(xy) + \frac{a}{b}$	xy	y	$-\frac{B}{A}$	$-\frac{1}{A}$
3.	$y = \frac{x}{ax+b}$	$\frac{1}{y} = b\frac{1}{x} + a$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{y}$	B	A
4.	$y = a\ln x + b$	$y = a\ln x + b$	$\ln x$	y	A	B
5.	$y = be^{ax}$	$\ln y = ax + \ln b$	x	$\ln y$	A	e^B
6.	$y = bx^a$	$\ln y = a\ln x + \ln b$	$\ln x$	$\ln y$	A	e^B

Приклад 4.2 За допомогою МНК побудувати функцію вигляду $y = a_0 + a_1 x$, що апроксимує подальші табличні значення.

Вихідні дані:

i	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***
x	1	3	4	6	7
y	0,5	2	4,5	7	9

	A	B	C	D	E	F	G
1	i	x	y	x^2	xy	f(x)	f(x)-y
2	1	1	0,5	1	0,5	-0,01754	0,267852
3	2	3	2	9	6	2,868421	0,754155
4	3	4	4,5	16	18	4,311404	0,035569
5	4	6	7	36	42	7,197368	0,038954
6	5	7	9	49	63	8,640351	0,129347
7		**21**	**23**	**111**	**129,5**		**1,225877**
8							
9	Получаем систему:						
10	5**a0**+21**a1**=23						
11	21**a0**+111**a1**=129,5						
12							
13	Решаем методом Крамера:						
14							
15	5	21	d=	114			
16	21	111					
17							
18	23	21	d1=	-166,5			
19	129,5	111	**a0=**	**-1,46053**			
20							
21	5	23	d2=	164,5			
22	21	129,5	**a1=**	**1,442982**			
23							
24	Эмпирическая формула:			**f(x)=1,443x-1,4605**			
25	Среднеквадратическое отклонение:			**0,495152**			
26							

=СУММ(G2:G6)

=КОРЕНЬ(G7/5)

Швидко і наочно можна побудувати апроксимацію безпосередньо на діаграмі. На основі вихідних даних побудувати точкову діаграму (рис 4.5).

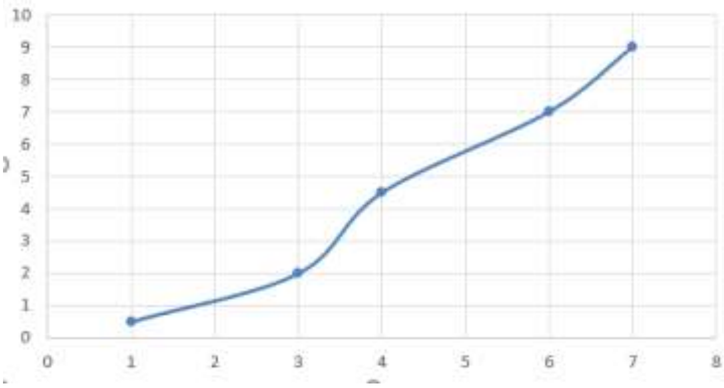


Рис 4.5 Точкова діаграма

Натиснути на будь-якій точці діаграми правою кнопкою миші, викликати контекстне меню і вибрати пункт: додати лінію тренда. У діалозі можна вибрати тип і параметри лінії (рис. 4.5).

У діалоговому вікні, крім прапорця «показувати рівняння на діаграмі», треба позначити також «помістити значення достовірності апроксимації R2». Що ближче це значення до 1, тим вірогідніше апроксимація.

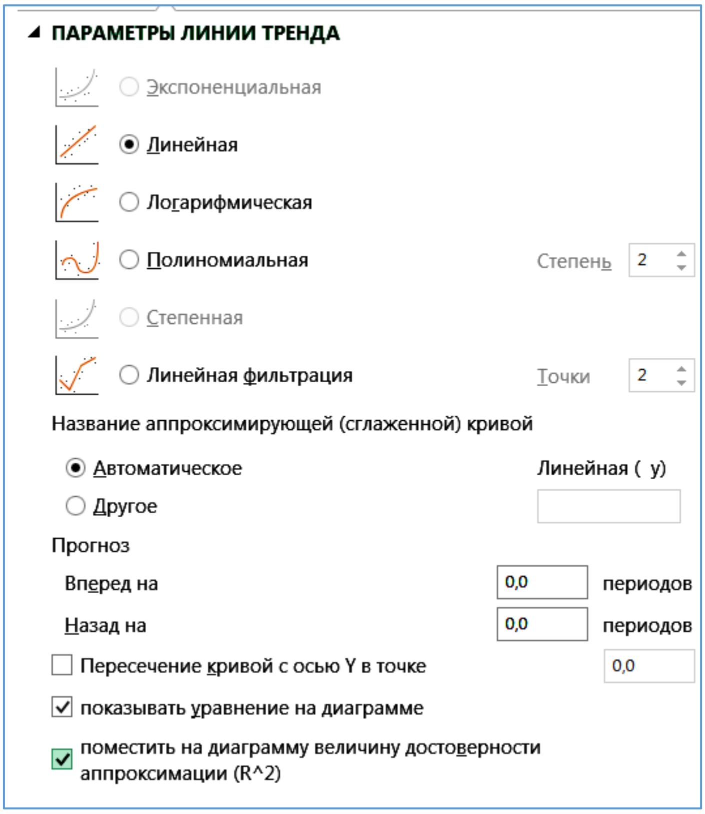


Рис.4.6 Параметри лінії тренду

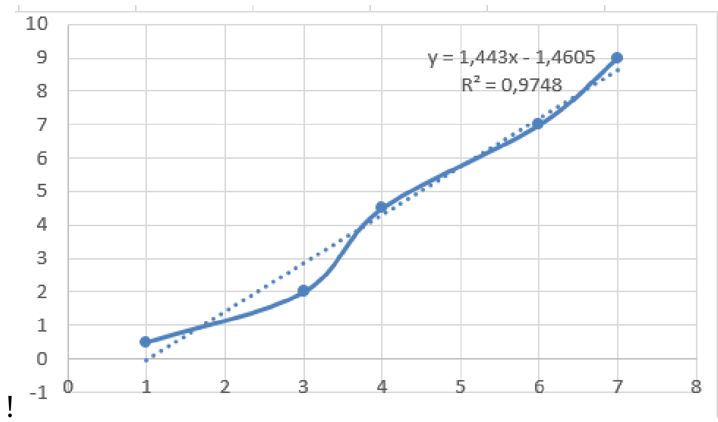


Рис 4.7 Точкова діаграма з лінією тренда

<u>Приклад 4.3</u> За допомогою МНК, побудувати функцію виду $y = a_0 x^{a1}$, апроксимуючу наступні табличні значення.

i	*1*	*2*	*3*	*4*
x	1,5	2,5	3,3	4
y	9	31	66	108

Щоб отримати лінійну залежність, прологарифуймо вихідну емпіричну формулу : $log10y = log10a_0 + a_1 log10x$.

Зробимо заміну: $Y = log10y,\ A_0 = log10a_0,\ X = log10x$.

Отримаємо лінеаризовану форму: $Y = A_0 + a_1 X$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	i	x	y	X=log10x	Y=log10y	X^2	XY	f(x)	f(x)-y	
2	1	1,5	9	0,176091	0,954243	0,031008	0,168034	8,773459	0,051321	
3	2	2,5	31	0,39794	1,491362	0,158356	0,593472	32,4684	2,156197	
4	3	3,3	66	0,518514	1,819544	0,268857	0,943459	66,1187	0,014089	
5	4	4	108	0,60206	2,033424	0,362476	1,224243	108,2273	0,051651	
6	5	4,5	150	0,653213	2,176091	0,426687	1,42145	146,3422	13,37964	
7				**2,347818**	**8,474663**	**1,247384**	**4,350658**		**15,6529**	
8										
9	Получаем систему:									
10	5***a0**+2,34***a1**=8,47									
11	2,34***a0**+1,24***a1**=4,35									
12										
13	Решаем методом Крамера:									
14										
15	5	2,347818	d=	0,724671						
16	2,347818	1,247384								
17										
18	8,474663	2,347818	d1=	0,356606						
19	4,350658	1,247384	A0=	0,492094		**a0=**	**3,10523**			
20										
21	5	8,474663	d2=	1,856324						
22	2,347818	4,350658	**a1=**	**2,56161**						
23										
24	Эмпирическая формула:				**f(x)=3,1052*x^2,5616**					
25	Среднеквадратическое отклонение:				1,769345					
26										

=$G$19*(B6^$D$22)

=10^(D19)

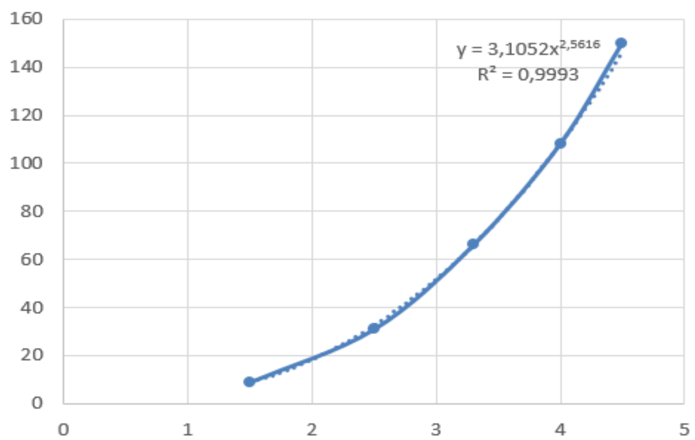


Рис4.8 Точкова діаграма з лінією тренда

Контрольні питання:

1. Яку функцію називають апроксимуючої?
2. Сформулюйте постановку задачі інтерполювання функцій та її геометричний зміст, назвіть області її застосування.
3. Опишіть інтерполяційну формулу Лагранжа.
4. Що таке емпірична формула? Які її види існують?
5. За якими рекомендаціями слід знаходити емпіричну формулу.
6. Опишіть метод найменших квадратів.

5 Чисельне розв'язання звичайних диференціальних рівнянь

Диференціальними називаються рівняння, в яких невідомими є функції, які входять в рівняння разом зі своїми похідними.

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

Якщо рівняння містить невідому функцію тільки однієї змінної, таке рівняння називається звичайним. Якщо кількох - рівнянням у часткових похідних. Порядком диференціального рівняння називають найвищий порядок похідної, що є у рівнянні.

Розв’язати диференціальне рівняння — це знайти таку функцію $y = y(x)$, щоб, якщо підставити її у рівняння, це перетворить його на тотожність. Щоб з рівняння n-го порядку отримати функцію, необхідно виконати n інтегрувань, що дає n довільних констант. Розв’язок, що виражає функцію в явному вигляді, називається загальним розв’язком.

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

Частинним розв’язком диференціального рівняння називається загальний розв’язок, для якого вказані конкретні значення довільних констант. Для визначення довільних констант необхідно задати стільки умов, скільки констант, тобто який порядок рівняння.

Залежно від способу завдання додаткових умов існують два різних типи завдань: задача Коші і крайова задача. Якщо додаткові умови задаються в одній точці, то таке завдання називається задачею Коші. Додаткові умови в задачі Коші називаються початковими умовами. Якщо ж додаткові умови задаються в більш ніж одній точці, тобто при різних значеннях незалежної змінної, то таке завдання називається крайової. Самі додаткові умови називаються крайовими або граничними.

Звичайне диференціальне рівняння першого порядку (ОДР-1) має вигляд:

$$F(x, y, y') = 0$$

Якщо це рівняння вдається розв'язати відносно похідної, то його записують у вигляді:

$$y' = f(x, y)$$

Загальним розв’язком ОДР-1 називається функція $y = \varphi(x, C)$, яка задовольняє рівняння при будь-яких значеннях константи інтегрування С.

5.1 розв'язання задачі Коші.

Умова, що при $x = x_0$ функція у повинна дорівнювати заданому числу y_0, називається початковою умовою, тобто $y_0 = y(x_0)$.

Завдання пошуку частинного розв’язку ОДР-1, що відповідає заданій початковій умові — це задача Коші для диференціального рівняння першого порядку; що має такий формат запису :

$$y' = f(x, y),\ y_0 = y(x_0)$$

на відрізку [a, b].

Завдання чисельного диференціювання полягає у наближеному обчисленні похідної функції $f'(x)$ по значеннях функції $f(x)$, заданих у кінцевій кількості точок.

За визначенням, похідною функції $f(x)$ в точці $x*$ називається границя:

$$f'(x^*) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x^* + \Delta x) - f(x^*)}{\Delta x}$$

Наближене значення похідної може бути отримано:

$$f'(x^*) \approx \frac{f(x^* + \Delta x) - f(x^*)}{\Delta x}$$

Як наближене значення функції $y_i' = f'(x_i)$ можна взяти будь-який з наступних різницевих співвідношень:

$$y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad y_i' \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{x_{i+1} - x_{i-1}}$$

Другу похідну в точці і х в цьому випадку можна замінити відношенням:

$$y_i'' = f''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}.$$

Заміна похідної тим чи іншим різницевим співвідношенням лежить в основі більшості чисельних методів розв'язання звичайних диференціальних рівнянь з початковими умовами (задача Коші).

5.1.1 Метод Ейлера.

Одним з найпростіших різницевих методів розв’язання звичайного диференціального рівняння є метод Ейлера.

Нехай потрібно вирішити задачу Коші для рівняння першого порядку:

$$y' = f(x, y), \; y_0 = y(x_0)$$

на відрізку [a, b].

На даному відрізку вибираємо деяку сукупність точок:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b, \; x_{i+1} - x_i = h$$

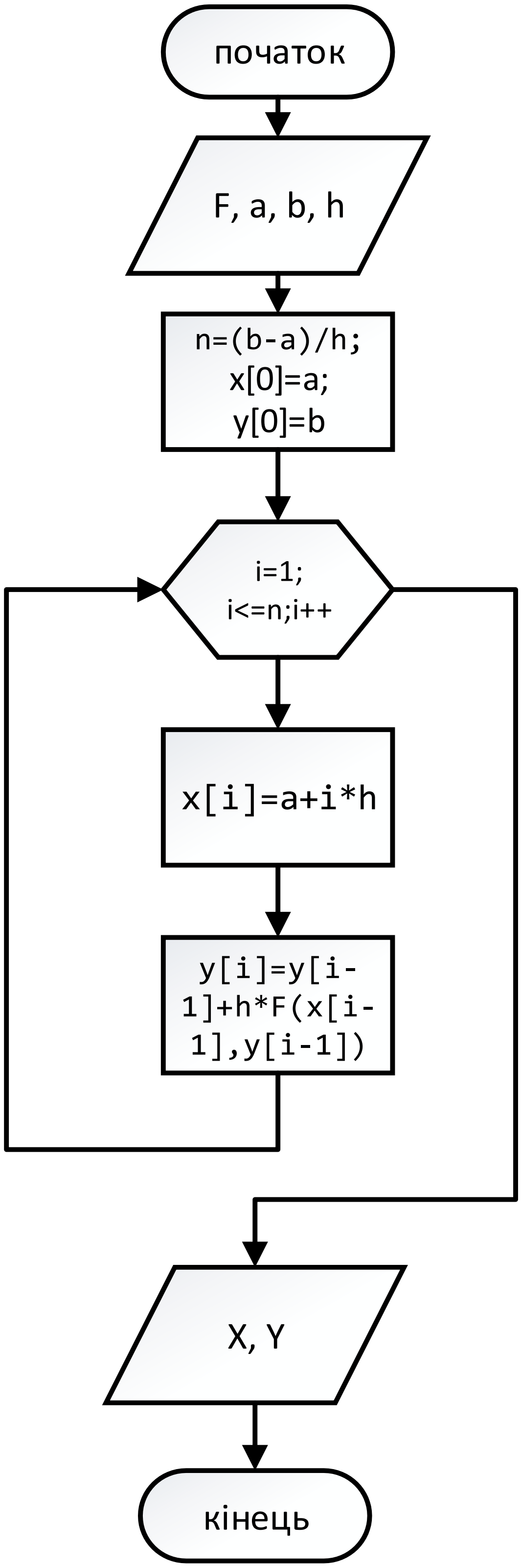
Будемо будувати розв'язання цієї задачі у вигляді табличній функції з кроком h. Замінимо рівняння $y' = f(x, y)$ різницевим рівнянням

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(x_i, y_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, \qquad y_0 = y(x_0)$$

Розв'язання цього рівняння знаходимо явно рекурентною формулою:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \qquad i = 0, 1, \ldots, \qquad y_0 = y(x_0).$$

Алгоритм розв’язання методом Ейлера:



<u>Приклад 5.1</u> Побудувати методом Ейлера чисельне розв'язання задачі Коші:

$y' = \sqrt{xy}$, $y(1) = 2$ на відрізку [1,2] з кроком $h = 0{,}1$.

=C2+$F$2*D2

=КОРЕНЬ(B2*C2)

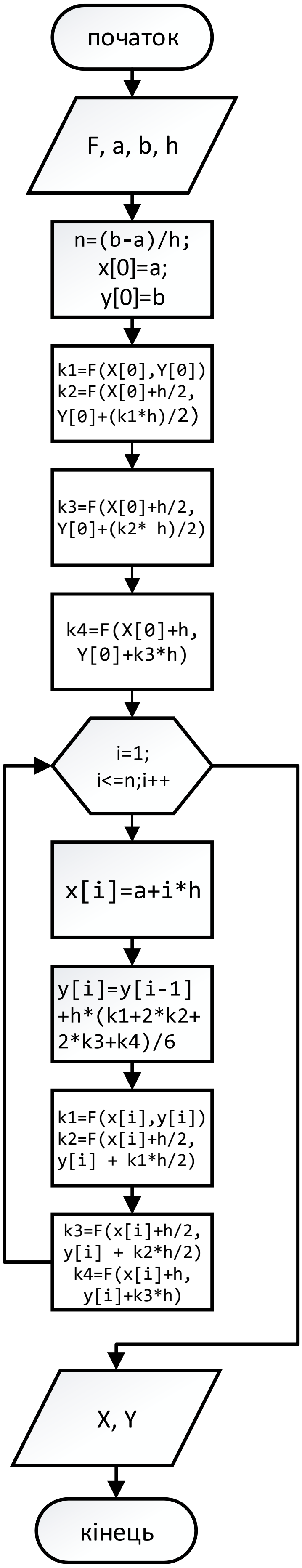
	A	B	C	D	E	F
1	i	x	y	f(x,y)		h
2	0	1	2	1,414214		0,1
3	1	1,1	2,141421	1,534785		
4	2	1,2	2,2949	1,659482		
5	3	1,3	2,460848	1,788603		
6	4	1,4	2,639708	1,922392		
7	5	1,5	2,831948	2,061049		
8	6	1,6	3,038052	2,204741		
9	7	1,7	3,258527	2,353613		
10	8	1,8	3,493888	2,507787		
11	9	1,9	3,744667	2,667371		
12	10	2	4,011404	2,832456		
13						

5.1.2 Метод Рунге-Кутта.

Порядок точності можна підвищити шляхом ускладнення різницевої схеми. Найбільш широке застосування знайшов метод Рунге-Кутта четвертого порядку:

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_i, y_i),\\
k_2 &= f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_1}{2}),\\
k_3 &= f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{hk_2}{2}),\\
k_4 &= f(x_i + h, y_i + hk_3),\\
y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).
\end{aligned}
$$

Алгоритм розв'язання методом Рунге-Кутта:



<u>Приклад 5.2</u> Побудувати методом Рунге-Кутта чисельне розв'язання задачі Коші:

$y' = \sqrt{xy}$, $y(1) = 2$ на відрізку [1,2] з кроком $h = 0{,}1$

=C2+$J$2*(E2+2*F2+2*G2+H2)/6

=КОРЕНЬ((B2+$J$2)*(C2+G2*$J$2))

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	i	x	y	f(x,y)	k1	k2	k3	k4		h
2	0	1	2	1,414214	1,414214	1,474533	1,475606	1,536983		0,1
3	1	1,1	2,147525	1,53697	1,53697	1,599384	1,600505	1,664058		
4	2	1,2	2,307538	1,664045	1,664045	1,728706	1,729875	1,79574		
5	3	1,3	2,480487	1,795726	1,795726	1,862758	1,863973	1,932262		
6	4	1,4	2,666845	1,932248	1,932248	2,001752	2,003011	2,073817		
7	5	1,5	2,867105	2,073802	2,073802	2,145864	2,147165	2,220566		
8	6	1,6	3,081778	2,220551	2,220551	2,295241	2,296583	2,372645		
9	7	1,7	3,311392	2,372629	2,372629	2,450008	2,45139	2,530169		
10	8	1,8	3,556486	2,530153	2,530153	2,610275	2,611695	2,693241		
11	9	1,9	3,817608	2,693224	2,693224	2,776135	2,77759	2,861946		
12	10	2	4,095318	2,861929	2,861929	2,947669	2,949159	3,036362		
13										

Контрольні питання:

1. Поняття диференціального рівняння (геометричний зміст, типи, частинне і загальне рішення).
2. Сформулюйте задачу Коші для диференціального рівняння 1-го порядку.
3. У чому полягає суть чисельних методів розв'язання звичайних диференціальних рівнянь?
4. У якій формі виходить наближене рішення диференціального рівняння за числовими методами?
5. Опишіть метод Ейлера.
6. Опишіть метод Рунге-Кутта 4-го порядку.

6 Розв'язання диференціальних рівнянь в часткових похідних методом скінченних різниць.

Лінійне рівняння в часткових похідних другого порядку --це співвідношення між функцією $u(x,t)$ і її частковими похідними виду:

$$L(u) = A(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + D(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} + E(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + G(x,t)u(x,t) = F(x,t)$$

де А, В, С- коефіцієнти, що залежать від змінних x , t.

У разі, коли всі коефіцієнти А, В, С - сталі, рівняння має один і той же тип у всіх точках площини змінних x , t. У випадку, якщо коефіцієнти А, В, С безперервно залежать від x , t, множина точок, в яких дане рівняння відноситься до гіперболічного (еліптичного) типу, утворює на площині відкриту область, звану гіперболічною (еліптичною), а множина точок, в яких рівняння відноситься до параболічного типу, замкнена. Рівняння називається змішаного типу, якщо в деяких точках площини воно гіперболічне, а в деяких - еліптичне.

Якщо $B^2-4AC<0$, то рівняння відноситься до класу *еліптичних рівнянь*, якщо $B^2-4AC>0$, то це - *гіперболічне рівняння*, якщо B^2-4AC - *параболічне рівняння*. У разі, коли B^2-4AC, не має сталого знака то це рівняння змішаного типу.

Для пошуку єдиного розв’язку диференціального рівняння в часткових похідних необхідно задати початкові і граничні умови. Початковими умовами прийнято називати умови, задані в початковий момент часу t. Граничні умови задаються при різних значеннях просторових змінних.

Кількість початкових і крайових умов і їх вигляд залежать від типів рівнянь математичної фізики, серед яких, як уже зазначено вище, розрізняють рівняння параболічного, гіперболічного та еліптичного типу.

Одним з найбільш поширених чисельних методів розв'язання рівнянь є *метод кінцевих різниць або метод сіток*. У методі сіток область Ω, в якій необхідно знайти розв’язок рівняння, розіб’ємо прямими, що паралельні вісям $t = t_j$ і $x = x_i$, на прямокутні області, де

$$x_i = x_0 + i \cdot h, \quad h = \frac{x_n - x_0}{n}, \quad i = 0,1,2, \dots n$$

$$t_j = t_0 + j \cdot \tau, \quad \tau = \frac{t_k - t_0}{k}, \quad j = 0,1,2, \dots, k$$

Точки які лежать на кордоні області Ω, називаються *зовнішніми*, інші точки -- *внутрішніми*. Сукупність усіх точок називається сіткою. Величини h і τ -- кроками сітки по осі x і t відповідно.

Ідея методу сіток полягає в тому що замість будь-якої безперервної функції $w(x,t)$ будемо розглядати дискретну функцію $w_i = w(x_i, t_j)$, яка визначена у вузлах сітки (рис 6.1). Замість похідних функції будемо розглядати їх найпростіші різницеві апроксимації у вузлах сітки. Таким чином, замість системи диференціальних рівнянь в часткових похідних. отримаємо систему алгебраїчних рівнянь. Вирішуючи отриману систему кінцево-різницевих рівнянь алгебри, отримаємо значення шуканої функції у вузлах сітки, тобто наближений чисельний розв’язок крайової задачі. Що менше значення h і τ, то точніше алгебраїчні рівняння, що ми їх отримали, моделюють вихідне диференціальне рівняння в часткових похідних.

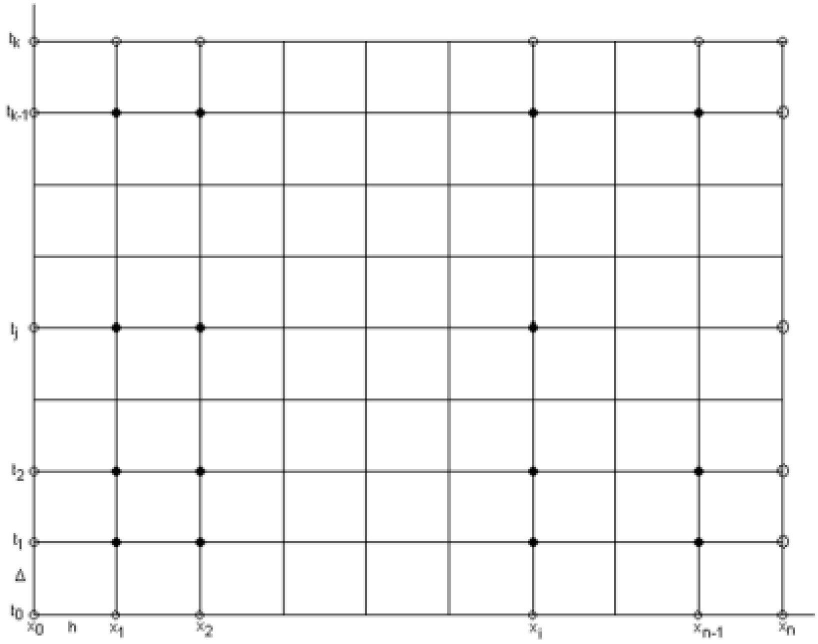


Рис 6.1 Сітка для області рішень.

Розглянемо апроксимацію часткових похідних. Нехай задана функція двох змінних $u(x,t)$. Область розв’язання замінена сіткою, що її вузли мають координати x_i, t_j

У кожному вузлі (x_i, t_j) часткові похідні замінюються різницевими співвідношеннями:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{\tau};\ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{\tau};\ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_{i,j+1}-u_{i,j-1}}{2\tau}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h};\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j}-u_{ij}}{h};\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2h}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{\tau^2};\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}$$

Де в формулах $u_{i,j}$ - це значення функції в точці (x_i, t_j).

$u_{i+1,j}$, - це значення функції в точці (x_{i+1}, t_j).

$u_{i-1,j}$, - це значення функції в точці (x_{i-1}, t_j) .

$u_{i,j+1}$, - це значення функції в точці (x_i, t_{j+1}) .

$u_{i,j-1}$, - це значення функції в точці (x_i, t_{j-1}) .

При апроксимації часткових похідних розглядають певний окіл вузла, звану шаблоном. Вибір шаблону зазвичай визначається конкретним завданням і певними вимогами до розв'язання. Найбільш популярний шаблон - так званий «хрест» (рис.6.2) і різні його підмножини:

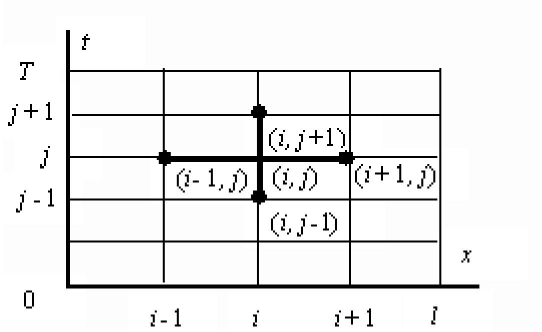


Рис.6.2 Шаблон типу «хрест».

6.1 Використання методу сіток для розв'язання параболічних рівнянь в часткових похідних.

Розглянемо різницеві схеми розв'язання параболічних рівнянь.

До класичних параболічних рівнянь відноситься рівняння теплопровідності:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

де $a^2 = \frac{\lambda}{\rho C}$ - коефіцієнт температуропровідності.

с - питома теплоємність;

ρ - щільність;

λ - коефіцієнт теплопровідності.

$0 \le x \le L, \ \ 0 \le t \le T$

Початкова умова: $u(x, 0) = \varphi(x)$.

Граничні умови: : $u(0, t) = \mu(t), \ \ u(L, t) = g(t)$.

Для отримання сіткового рівняння замінимо похідну $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ наближеною різницевою формулою:

$$\frac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^2} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\mathrm{h}^2}$$

Щоб замінити $\frac{\partial u}{\partial t}$ можна скористатися однією з наближених різницевих формул:

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\tau}; \ \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}} = \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{\tau};$$

$$a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\mathrm{h}^2} = \frac{u_{i,j+1} - u_{ij}}{\tau}$$

В результаті перетворень отримаємо обчислювальну схему для розрахунку функції в вузлах сітки:

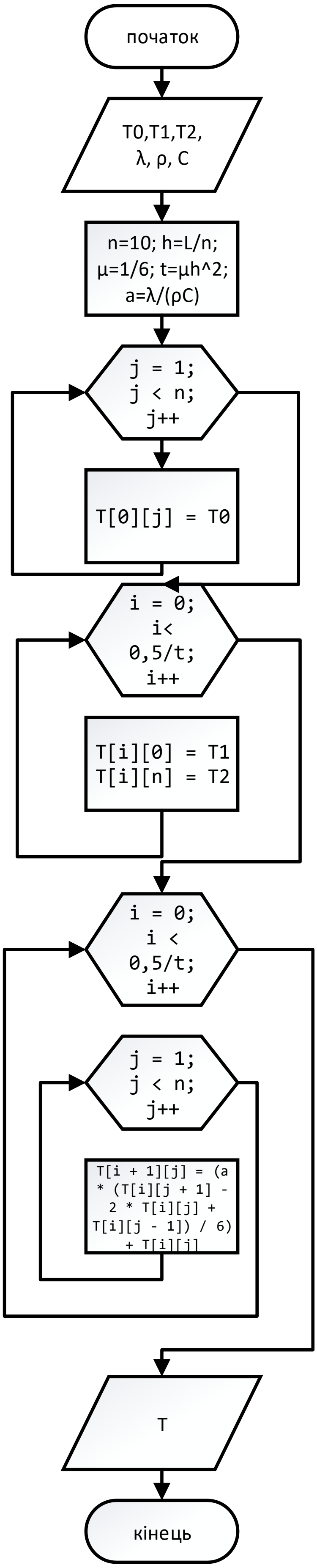
$$u_{i,j+1} = \frac{a^2 \tau}{h^2}\left(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right) + u_{i,j}$$

Взаємозв'язок між h і τ здійснюється співвідношенням: $\tau = \mu h^2$,

де μ - додатковий числовий множник, менший за одиницю.

Приймемо $\mu = \frac{1}{6}$. $\quad u_{i,j+1} = \frac{a^2}{6}\left(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}\right) + u_{i,j}$

Алгоритм розв’язання методом сіток для розв'язання параболічних рівнянь в часткових похідних:



<u>Приклад 6.1</u> Визначити температуру в центрі пластини товщиною 0.3 м через 0,5 секунд нагріву, якщо в початковий момент часу $t = 0$ температура всередині пластини $T_0 = 10$ºС, одного боку пластини температура $T_1 = 250$ºС, з іншого боку пластини $T_2 = 300$ºС. Коефіцієнт теплопровідності $\lambda = 59$ Вт / (м К), $\rho = 7849$ кг / м3, С = 460 Дж / (кг К).

	A	B	C
1	n=	**10**	
2	L=	**0,3**	м
3	h=L/n	**0,03**	м
4	μ=1/6		
5	t=μh^2	**0,00015**	
6	T0=	**10**	°C
7	T1=	**250**	°C
8	T2=	**300**	°C
9	λ=	**59**	Вт/(м К)
10	ρ=	**7849**	кг/м3
11	C=	**460**	Дж/(кг К)
12	a=λ/(ρC)	**1,6341E-05**	м2/с
13			

=($B$12*(D16-2*C16+B16)/6)+C16

13												
14		x0	x1	x2	x3	x3	x5	x6	x7	x8	x9	x10
15	t	0	0,03	0,06	0,09	0,12	0,15	0,18	0,21	0,24	0,27	0,3
16	0	**250**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**300**
17	0,00015	**250**	10,00065	10	10	10	10	10	10	10	10,00079	**300**
18	0,0003	**250**	10,00131	10	10	10	10	10	10	10	10,00158	**300**
19	0,00045	**250**	10,00196	10	10	10	10	10	10	10	10,00237	**300**
20	0,0006	**250**	10,00261	10	10	10	10	10	10	10	10,00316	**300**
21	0,00075	**250**	10,00327	10	10	10	10	10	10	10	10,00395	**300**
22	0,0009	**250**	10,00392	10	10	10	10	10	10	10	10,00474	**300**
23	0,00105	**250**	10,00458	10	10	10	10	10	10	10	10,00553	**300**
24	0,0012	**250**	10,00523	10	10	10	10	10	10	10	10,00632	**300**
25	0,00135	**250**	10,00588	10	10	10	10	10	10	10	10,00711	**300**
26	0,0015	**250**	10,00654	10	10	10	10	10	10	10	10,0079	**300**
27	0,00165	**250**	10,00719	10	10	10	10	10	10	10	10,00869	**300**
28	0,0018	**250**	10,00784	10	10	10	10	10	10	10	10,00948	**300**
29	0,00195	**250**	10,0085	10	10	10	10	10	10	10	10,01027	**300**
30	0,0021	**250**	10,00915	10	10	10	10	10	10	10	10,01106	**300**
31	0,00225	**250**	10,0098	10	10	10	10	10	10	10	10,01185	**300**

3390	0,5061	**250**	12,18528	10,01001	10,0000306	10	10	10	10,00004	10,01209	12,64055	**300**
3391	0,50625	**250**	12,18592	10,01001	10,0000306	10	10	10	10,00004	10,0121	12,64132	**300**
3392	0,5064	**250**	12,18657	10,01002	10,0000306	10	10	10	10,00004	10,01211	12,6421	**300**
3393	0,50655	**250**	12,18721	10,01002	10,0000307	10	10	10	10,00004	10,01211	12,64288	**300**
3394	0,5067	**250**	12,18785	10,01003	10,0000307	10	10	10	10,00004	10,01212	12,64365	**300**
3395	0,50685	**250**	12,18849	10,01004	10,0000307	10	10	10	10,00004	10,01213	12,64443	**300**
3396	0,507	**250**	12,18913	10,01004	10,0000307	10	10	10	10,00004	10,01213	12,6452	**300**
3397	0,50715	**250**	12,18977	10,01005	10,0000308	10	10	10	10,00004	10,01214	12,64598	**300**
3398	0,5073	**250**	12,19042	10,01005	10,0000308	10	10	10	10,00004	10,01215	12,64675	**300**

Контрольні питання:

1. Опишіть рівняння теплопровідності, що описує лінійний розподіл температури стрижню за відсутністю зовнішнього підводу енергії та поясніть фізичну сутність початкових умов та крайових умов.
2. В чому полягає ідея метода кінцевих різниць при розвязанні диференціальних рівнянь в частинних похідних.

3. У якій формі знаходять наближене рішення диференціального рівняння в частинних похідних за числовими методами?
4. Опишіть кінцево різницеве рівнянням, що відповідає рівнянню теплопроводності.
5. Як потрібно обирати кроки h та τ, щоб отримати необхідну точність обчислень.

7 Методи оптимізації

Оптимізація - вибір найкращого варіанту з усіх можливих.

Розв'язання завдання оптимізації зводиться до пошуку *проектних параметрів*, що визначають задачу, що їхня кількість $x_1, x_2, \dots, x_n$ характеризує розмірність задачі оптимізації.

Пошук оптимального розв'язку проводиться за допомогою функції, що визначається проектними параметрами, і має назву «*цільова функція»* .

У загальному вигляді задача оптимізації має вигляд: $F(x) \to min$.

$F(x)$ - цільова функція n-мірного векторного аргументу $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

На самі змінні x_j, $j = 1,2, \dots, n$, і деякі функції від цих змінних $g_i(x), h_i(x)$, що характеризують якісні властивості об'єкта, системи, процесу, можуть бути накладені обмеження (умови) виду a≤x≤b, де вектор x обмежується відповідними векторами констант, а крім того може бути встановлено обмеження у вигляді рівності або нерівностей

$$g_i(x) = 0, \ \ i = 1, \dots, n,$$

$$h_i(x) = 0, \ \ i = 1, \dots, n.$$

Таку задачу називають задачею *умовної оптимізації*. При відсутності обмежень має місце задача *безумовної оптимізації*.

У разі одного проектного параметра цільова функція є функцією однієї змінної, і її графік - крива на площині. У разі двох проектних параметрів, цільова функція - функція двох змінних, і її графік - поверхня в тривимірному просторі.

Чисельні методи пошуку базуються на обчисленні цільової функції в окремих точках і виборі серед них найбільшого або найменшого значень.

7.1 Одновимірна оптимізація

Одновимірна задача оптимізації:

Знайти найменше (або найбільше) значення цільової функції $y = f(x)$, заданої на відрізку $[a, \ b]$ і визначити значення проектного параметра $x \in [a, \ b]$, за якого цільова функція приймає екстремальне значення.

Будемо вважати, що функція унімодальна, себто на даному відрізку має тільки один мінімум.

Похибка наближення розв’язку задачі визначається різницею між оптимальним значенням x проектного параметра і наближеного до нього x^*.

$$|x - x^*| < \varepsilon,$$

де ε - задана припустима похибка.

7.1.1 Метод послідовного перебору.

Метод перебору є найпростішим з прямих методів мінімізації. Нехай функція $f(x)$ унімодальне на відрізку $[a, \ b]$ і потрібно знайти яку-небудь з точок мінімуму x_{min} функції $f(x)$ на відрізку $[a, \ b]$ з абсолютною похибкою ε> 0.

Відрізок $[a, \ b]$ розбивається на n рівних частин:

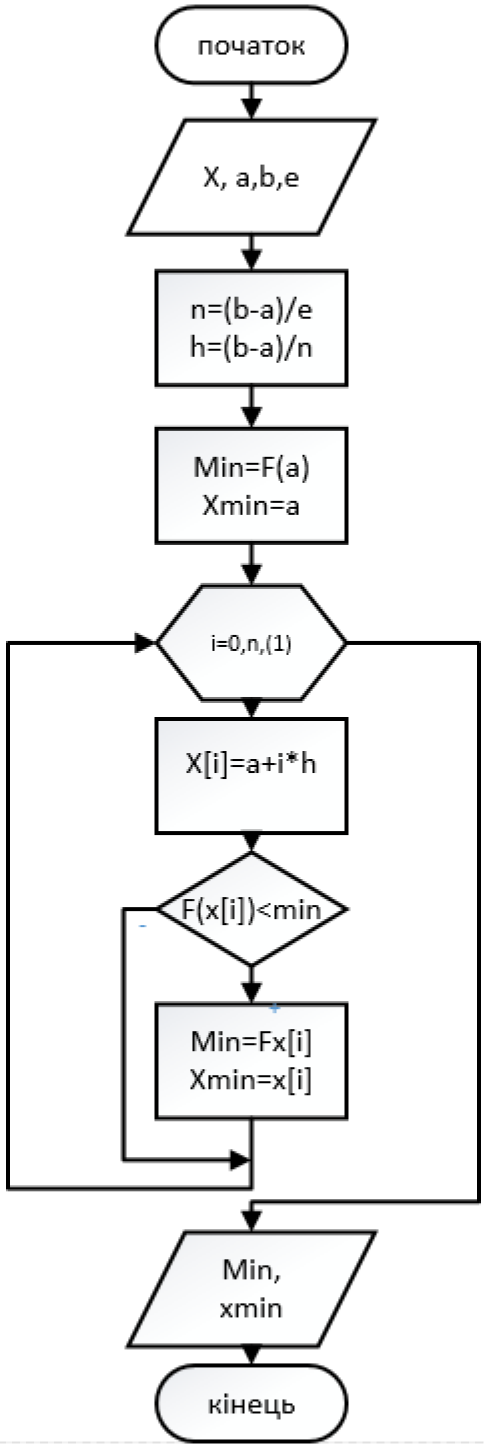
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

точками поділу $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, $i = 0,1,2, \dots, n$, де $n \geq \frac{b-a}{\varepsilon}$

Обчислюються значення функції $f(x)$ в цих точках. Шляхом порівняння визначається точка x_{min}, для якої функція приймає найменше значення.

$$f(x_{min}) = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$$

Алгоритм розв'язання методом послідовного перебору:



<u>Приклад 7.1</u> Знайти мінімальне значення $f(x_{min})$ і точку мінімуму x_{min} функції $f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x$ на відрізку [1.5, 2] використовуючи метод послідовного перебору. Крапку x_{min} знайти з похибкою ε = 0,05.

=B2+$K$2 =ЕСЛИ(C3<E2;B3;D2) =ЕСЛИ(C3<E2;C3;E2) =(I2-H2)/J2

	A	B	C	D	E
1	i	x	f(x)	Xmin	f(Xmin)
2	0	1,5	-89,4375	1,5	-89,4375
3	1	1,55	-90,452	1,55	-90,452
4	2	1,6	-91,2384	1,6	-91,2384
5	3	1,65	-91,786	1,65	-91,786
6	4	1,7	-92,0839	1,7	-92,0839
7	5	1,75	-92,1211	1,75	-92,1211
8	6	1,8	-91,8864	1,75	-92,1211
9	7	1,85	-91,3685	1,75	-92,1211
10	8	1,9	-90,5559	1,75	-92,1211
11	9	1,95	-89,437	1,75	-92,1211
12	10	2	-88	1,75	-92,1211
13					

	G	H	I	J	K
1	e	a	b	n	h
2	0,05	1,5	2	10	0,05

7.1.2 Метод золотого перетину.

Метод золотого перетину також є послідовним методом мінімізації. Спираючись на властивості золотого перетину відрізка, цей метод використовує знайдені значення $f(x)$, яка є унімодальною, більш раціонально, ніж метод послідовного перебору.

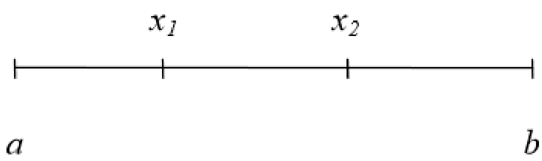
Метод заснований на поділі поточного відрізка $[a;\ b]$, де міститься шуканий екстремум, на дві нерівні частини, що підкоряються правилу золотого перетину, для визначення наступного відрізка, що містить мінімум (або максимум).

У методі золотого перетину дві внутрішні точки, які використовуються для скорочення відрізка пошуку, вибираються так, щоб одна з них використовувалася з тією ж метою і на наступному, вже скороченому відрізку. Це правило вибору точок призводить до того, що кількість обчислень функції скорочується вдвічі, і одна ітерація вимагає розрахунку тільки одного нового значення функції. Такими властивостями володіють точки, звані точками золотого перетину.

Правило золотого перетину: точка робить золотий перетин відрізка, якщо відношення довжини всього відрізка до довжини більшої частини дорівнює відношенню довжин більшої частини до меншої.

Розглянемо наступну задачу.

Візьмемо відрізок $[a;b]$, знайдемо всередині цього відрізка $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, що утворюють золотий перетин.



Обчислюємо значення цільової функції в цих точках. Якщо $f(x_1) < f(x_2)$, то очевидно, що мінімум розташований на одному з відрізків, прилеглих до x_1: $[a, x_1]$ або

$[x_{1,}, x_2]$. Тому інтервал $[x_2, b]$ можна відкинути, звузивши тим самим інтервал невизначеності.

Другий крок аналогічний першому, але на інтервалі $[a_1, b_1]$,где $a_1=a$, $b_1=x_2$.

Процес оптимізації повторюється, доки довжина чергового відрізка $[a_k, b_k]$ не стане менше заданої величини 2ε.

Розглянемо спосіб розміщення точок на кожному відрізку $[a_k, b_k]$. Нехай довжина інтервалу невизначеності дорівнює L. Точка поділу розбиває інтервал на частини L_1 , L_2, где $L_1>L_2$ и $L=L_1+L_2$.

На основі правила золотого перетину отримуємо співвідношення:

$$\frac{L_1}{L} = \frac{L_2}{L_1}$$

З цього співвідношення знайдемо точку поділу:

$$\alpha = \frac{L_1}{L} = \frac{x_2 - a}{b - a}, \qquad \beta = \frac{L_2}{\mathrm{L}} = \frac{x_1 - a}{b - a}$$

Для цього перетворимо співвідношення, отримане на основі правила золотого перетину:

$$L_1^2 = L_2 L, \qquad L_1^2 = L(L - L_1), \qquad L_1^2 + L_1 L - L^2 = 0$$

$$(\frac{L_1}{L})^2 + \frac{L_1}{L} \text{-1=0}, \qquad \alpha^2 + \alpha - 1 = 0\ , \qquad \alpha = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Нам необхідний додатний розв’язок, тому:

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0{,}618, \qquad \beta = 1 - \alpha \approx 0{,}382$$

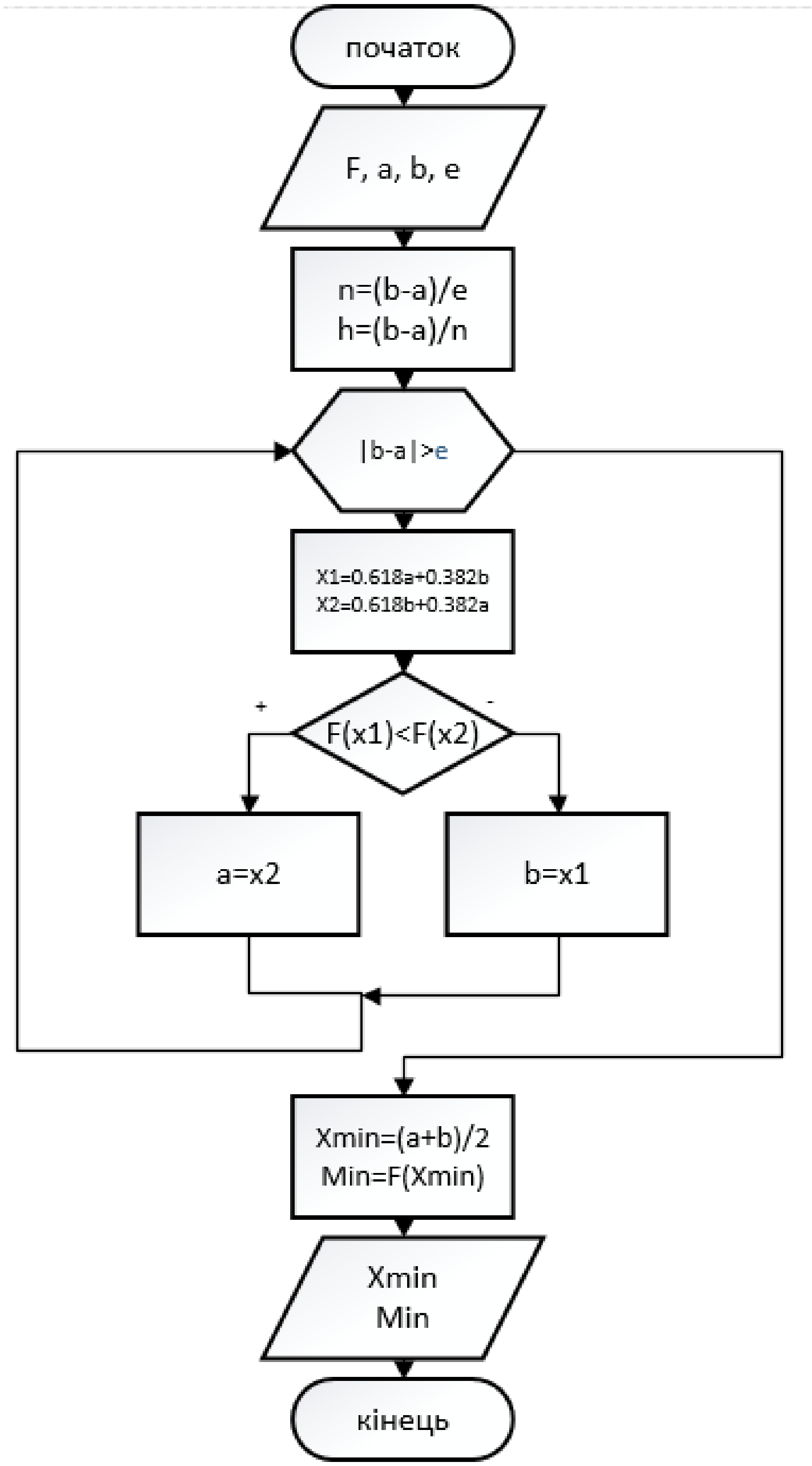
$$\beta = \frac{L_2}{L} = \frac{x_1 - a}{b - a}, \quad x_1 - a = \beta(b - a),\ x_1 = (1 - \beta)a + \beta b$$

$$x_1 = \alpha a + \beta b$$

$$\alpha = \frac{L_1}{L} = \frac{x_2 - a}{b - a}, \quad x_2 - a = \alpha(b - a),\ x_2 = (1 - \alpha)a + \alpha b$$

$$x_2 = \beta a + \alpha b$$

Алгоритм розв’язання методом золотого перетину:



<u>Приклад 7.2</u> Знайти мінімальне значення $f(x_{min})$ і точку мінімуму x_{min} функції $f(x) = x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 72x$ на відрізку [1.5; 2] використовуючи метод золотого перетину. Крапку x_{min} знайти з похибкою ε = 0,05.

=ЕСЛИ(E2<F2;A2;C2)

=ЕСЛИ(E2<F2;D2;B2)

=СРЗНАЧ(A7:B7)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	a	b	x1	x2	f(x1)	f(x2)	|b-a|		Xmin	f(Xmin)
2	1,5	2	1,691	1,809	-92,0492	-91,8144	0,5		1,741382	-92,1338
3	1,5	1,809	1,618038	1,690962	-91,4641	-92,049	0,309			
4	1,618038	1,809	1,690985	1,736053	-92,0491	-92,1376	0,190962			
5	1,690985	1,809	1,736067	1,763918	-92,1376	-92,0836	0,118015			
6	1,690985	1,763918	1,718846	1,736058	-92,1291	-92,1376	0,072933			
7	1,718846	1,763918	1,736064	1,746701	-92,1376	-92,1269	0,045073			
8										

Контрольні питання:

1. Основні поняття (поняття оптимізації, керований параметр, цільова функція, типи задач оптимізації).
2. Чому в багатьох випадках при розв'язанні задачі одномірної оптимізації застосовують числові методи?
3. Опишіть метод рівномірного перебору.
4. Опишіть метод золотого перетину.

7.2 Оптимізація функцій двох змінних

Математична постановка багатовимірних задач оптимізації аналогічна їх постановці в одновимірному випадку: треба знайти найменше (найбільше) значення цільової функції, що задана на певній множині припустимих значень параметрів оптимізації.

Методи спуску розв'язання задачі безумовної мінімізації відрізняються чи то вибором напрямку спуска, чи то способом руху вздовж напрямку спуску. Це дозволяє написати загальну схему розв'язання.

Методи спуску полягають у процедурі побудови послідовності $\{x_k\}$. В якості початкового наближення вибирається будь-яка точка x_0. Послідовні наближення x_1, x_2, будуються за такою схемою:

1. в точці x_k вибирають напрямок спуску - S_k ;
2. знаходять (k + 1) -е наближення за формулою $x_{k+1} = x_k - h_k S_k$.

Напрямок S_k вибирають таким чином, щоб забезпечити нерівність

$f(x_{k+1}) < f(x_k)$ принаймні для малих значень h_k.

Число h_k визначає відстань від точки x_k до точки x_{k+1}. Це число називається довжиною кроку або просто кроком. Основне завдання при виборі величини h_k це забезпечити виконання нерівності $f(x_{k+1}) < f(x_k)$.

7.2.1 Метод покоординатного спуску.

Нехай потрібно знайти найменше значення цільової

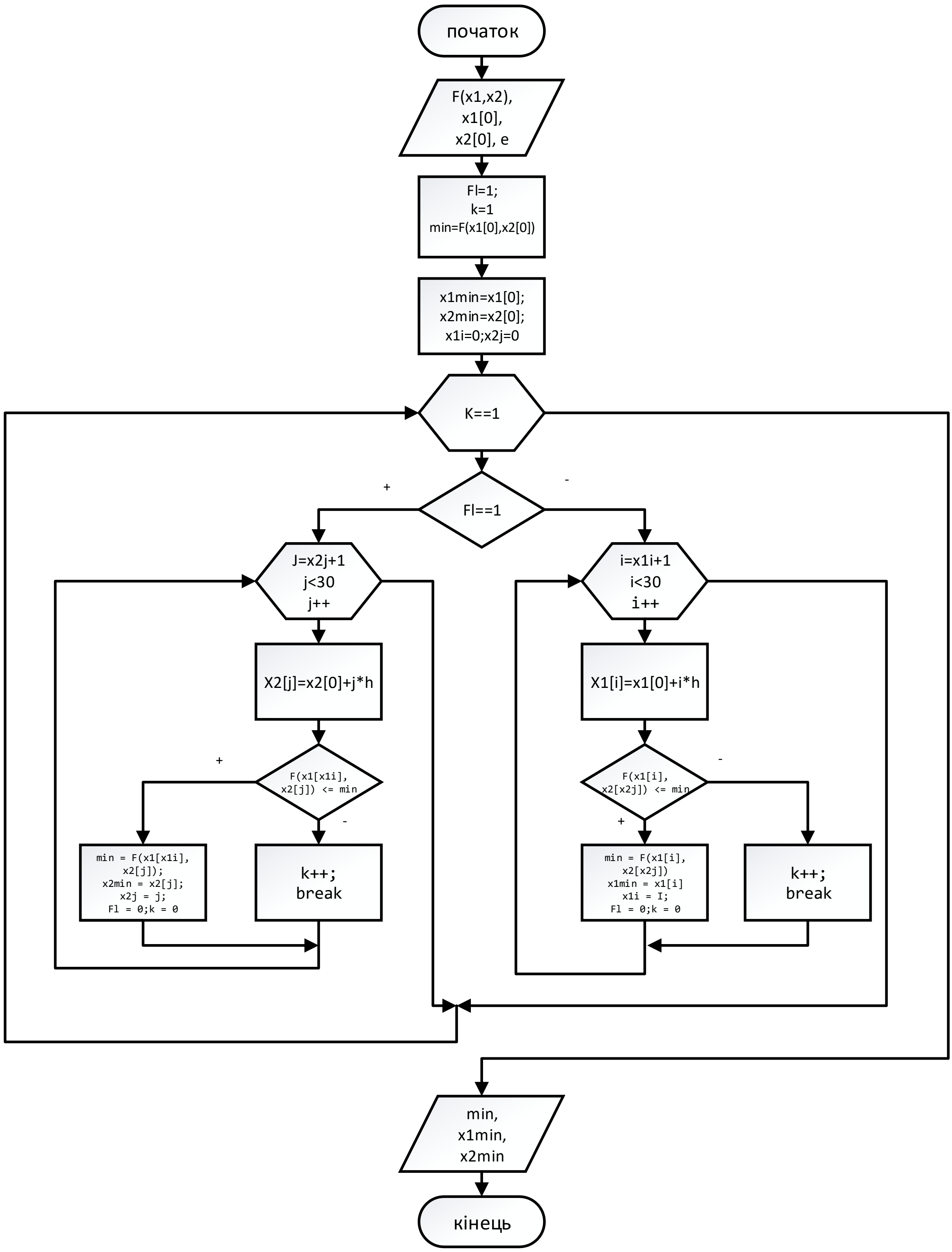
$u = f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Тут через M позначена точка n-мірного простору з координатами $x_1, x_2, \dots, x_n$: М= $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Виберемо яку-небудь початкову точку $M_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ і розглянемо функцію f за фіксованих значень всіх змінних, крім першої: $f(x_1, x_2^0, x_3^0 \dots, x_n^0)$. Тоді вона перетвориться на функцію однієї змінної x_1. Змінюючи цю змінну, будемо рухатися від початкової точки $x_1=x_1^0$ в бік зменшення функції, доки не дійдемо до її мінімуму за $x_1=x_1^1$, що після нього вона починає зростати. Крапку з координатами (x_1^1, x_2^0,x_3^0, . . . ,x_n^0) позначимо через M_1, де $f(M_0) >= f(M_1)$.

Фіксуємо тепер змінні: $x_1=x_1^1$, $x_3= x_3^0$, . . . ,$x_n=x_n^0$ і розглянемо функцію f як функцію однієї змінної x_2: $f(x_1^1, x_2^2, x_3^0 \dots, x_n^0)$. Змінюючи x_2, будемо знову рухатися від початкового значення $x_2=x_2^0$ в бік зменшення функції, доки не досягнемо мінімуму за $x_2=x_2^1$.Точку з координатами (x_1^1, x_2^1, x_3^0 . . . x_n^0) позначимо через M_2, при цьому $f(M_1) >=f(M_2)$.

Проведемо таку ж мінімізацію цільової функції за змінними x_3,x_4, . . . ,x_n. Дійшовши до змінної x_n, знову повернемося до x_1 і продовжимо процес. Ця процедура цілком виправдовує назву методу. З її допомогою ми побудуємо послідовність точок M_0,M_1,M_2, . . . , Якій відповідає монотонна послідовність значень функції $f(M_0)>= f(M_1)>= f(M_2)>=$ обриваючи її на певному етапі k можна наближено прийняти значення функції $f(M_k)$ за її найменше значення в даній області.

Цей метод зводить задачу пошуку найменшого значення функції кількох змінних до багаторазового розв’язання одновимірних задач оптимізації.

Алгоритм розв’язання методом покоординатного спуску:

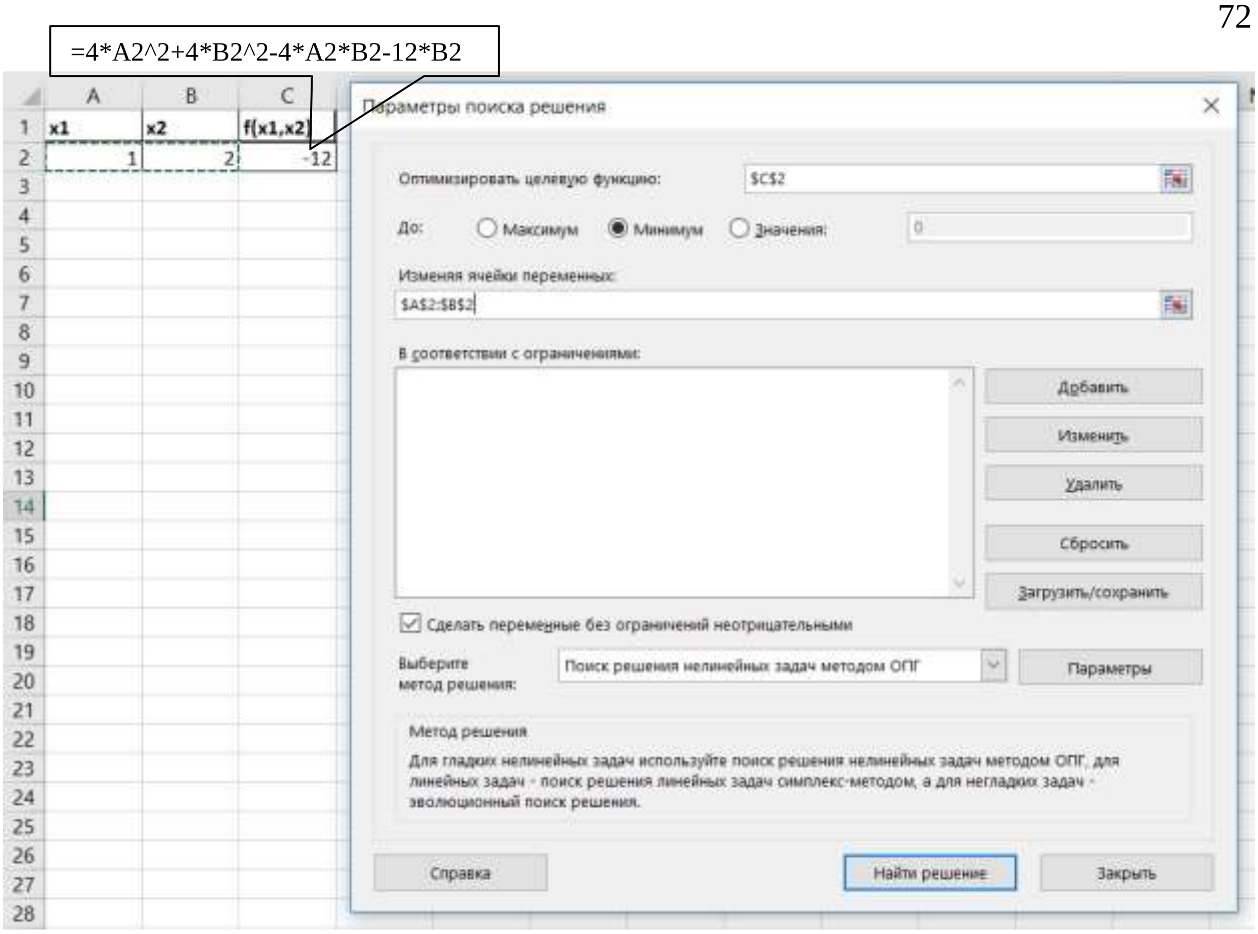


Приклад 7.3 Використовуючи метод покоординатного спуску знайти мінімальне значення функції $f(x) = 4x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 - 12x_2$ при $x^0 = (0{,}0)$, $\varepsilon = 0{,}01$. Приймемо крок зміни змінних $x_{1,}$ x_2 $h = 0{,}2$.

Рішення задачі за допомогою Excel.

	A	B	C	D
1	x1	x2	f(x1,x2)	
2	0	0	0	Фиксируем переменную x1=0
3	0	0,2	-2,24	
4	0	0,4	-4,16	
5	0	0,6	-5,76	
6	0	0,8	-7,04	
7	0	1	-8	
8	0	1,2	-8,64	
9	0	1,4	-8,96	
10	**0**	**1,6**	**-8,96**	Минимальное значение функции при x1=0 и x2=1,6
11	0	1,8	-8,64	
12	0	1,6	-8,96	Фиксируем переменную x2=1,6
13	0,2	1,6	-10,08	
14	0,4	1,6	-10,88	
15	0,6	1,6	-11,36	
16	**0,8**	**1,6**	**-11,52**	Миниимальное значение функции при x2=1,6 и x1=0,8
17	1	1,6	-11,36	
18	0,8	1,6	-11,52	Фиксируем переменную x1=0,8
19	0,8	1,8	-11,84	
20	**0,8**	**2**	**-11,84**	Миниимальное значение функции при x1=0,8 и x2=2
21	0,8	2,2	-11,52	
22	0,8	2	-11,84	Фиксируем переменную x2=2
23	**1**	**2**	**-12**	Миниимальное значение функции при x2=2 и x1=1
24	1,2	2	-11,84	
25	**1**	**2**	**-12**	Фиксируем переменную x1=1
26	1	2,2	-11,84	Изменяя x2, убеждаемся, что минимума достигли при x1=1 и x2=2
27				

Використовуючи надбудову Excel «Пошук розв’язку» переконуємося, що завдання розв’язане вірно.



7.2.2 Градієнтні методи.

Розглянемо функцію f. Будемо вважати для визначеності, що вона залежить від трьох змінних x, y, z. Обчислимо її часткові похідні $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ і утворимо за їх допомоги вектор, що його називають градієнтом функції:

$$grad\ f(x,y,z) = \nabla f(x,y,z) = \partial f(x,y,z)/\partial x \cdot i + \partial f(x,y,z)/\partial y \cdot j + \partial f(x,y,z)/\partial z \cdot k$$

Тут i, j, k - одиничні вектори, паралельні координатним вісям. Часткові похідні характеризують зміну функції f за кожною незалежною змінною окремо. Утворений з їх допомогою вектор градієнта дає загальне уявлення про поведінку функції в околі точки (*x, y, z*). Напрямок цього вектора є напрямком найбільш швидкого зростання функції в даній точці. Протилежний йому напрямок, який часто називають антіградієнтним, являє собою напрямок найбільш швидкого спадання функції. модуль градієнта

$$|grad\ f(x,y,z)| = \sqrt{(\partial f(x,y,z)/\partial x)^2 + (\partial f(x,y,z)/\partial y)^2 + (\partial f(x,y,z)/\partial z)^2}$$

визначає швидкість зростання і спадання функції в напрямку градієнта і антиградієнта. Для всіх інших напрямків швидкість зміни функції в точці *(x, y, z)* менше модуля градієнта. При переході від однієї точки до інших, і напрямок градієнта, і його модуль змінюються. Поняття градієнта природним чином переноситься на функції будь-якої кількості змінних. Основна ідея методу градієнтного спуску полягає в тому, щоб рухатися до мінімуму в напрямку найбільш швидкого спадання функції, яке визначається антиградієнтом.

Градієнтні методи базуються на наступній ітераційній процедурі: Вибираємо початкову точку $x^{(0)}$, обчислюємо в ній градієнт даної функції З початкової точки $x^{(k)}$ переходимо в точку $x^{(1)}$, що лежить в напрямку антиградієнта -

найшвидшого убування функції.На k-ой ітерації з точки $x^{(k))}$ переходимо в точку $x^{(k+1)}$, що лежить на напрямку антиградієнта - $\nabla f\left(x^{(k)}\right)$;

Ітераційний процес має вигляд:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - h_k \nabla f\left(x^{(k)}\right),\ \ h_k > 0,\ \ k = 0{,}1{,}2\ \dots$$

У координатної формі цей процес записується в такий спосіб:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - h_k \left(\frac{\partial f\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_i}\right), \quad i = 1, \dots, n; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Як критерій зупинки ітераційного процесу використовують або виконання умови:

малості приросту аргументу $\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right| \leq \varepsilon_1$;

малості приросту функції $\left|f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)})\right| \leq \varepsilon_2$;

і (або) малості градієнта $\left|\nabla f(x^{(k+1)})\right| \leq \varepsilon_3$ ||.

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ - задані малі величини.

Можливий і комбінований критерій, що полягає в одночасному виконанні зазначених умов.

Градієнтні методи відрізняються один від одного способами вибору значення кроку h_k.

7.2.2.1 Метод якнайшвидшого спуску.

При використанні методу якнайшвидшого спуску на кожній ітерації значення кроку h_k вибирається як таке значення, що забезпечує мінімум функції $f(x)$ в напрямку спуску, тобто

$$f(x^{(k)} - h_k \nabla f\left(x^{(k)}\right)) = min_{h \geq 0} f(x^{(k)} - h \nabla f\left(x^{(k)}\right)).$$

Тобто на кожній ітерації необхідно вирішувати задачу одновимірної мінімізації за h функції

$$\varphi(h) = f\left(x^{(k)} - h \nabla f\left(x^{(k)}\right)\right)$$

яка в основному розв'язується чисельно.

Алгоритм методу найшвидшого спуску полягає в наступному:

1. Задаються координати початкової точки $x^{(0)}, k = 0$ (номер ітерації).

2. У точці $x^{(k)}$ обчислюється значення градієнта $\nabla f\left(x^{(k)}\right)$.

3. Визначається величина кроку h_K шляхом одновимірної мінімізації за h функції $\varphi(h) = f\left(x^{(k)} - h \nabla f\left(x^{(k)}\right)\right)$.

4. Визначаються координати точки $x^{(k+1)}$:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} - h_k \left(\frac{\partial f\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_i}\right), \quad i = 1, \dots, n; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

5. Перевіряються умови зупинки ітераційного процесу:

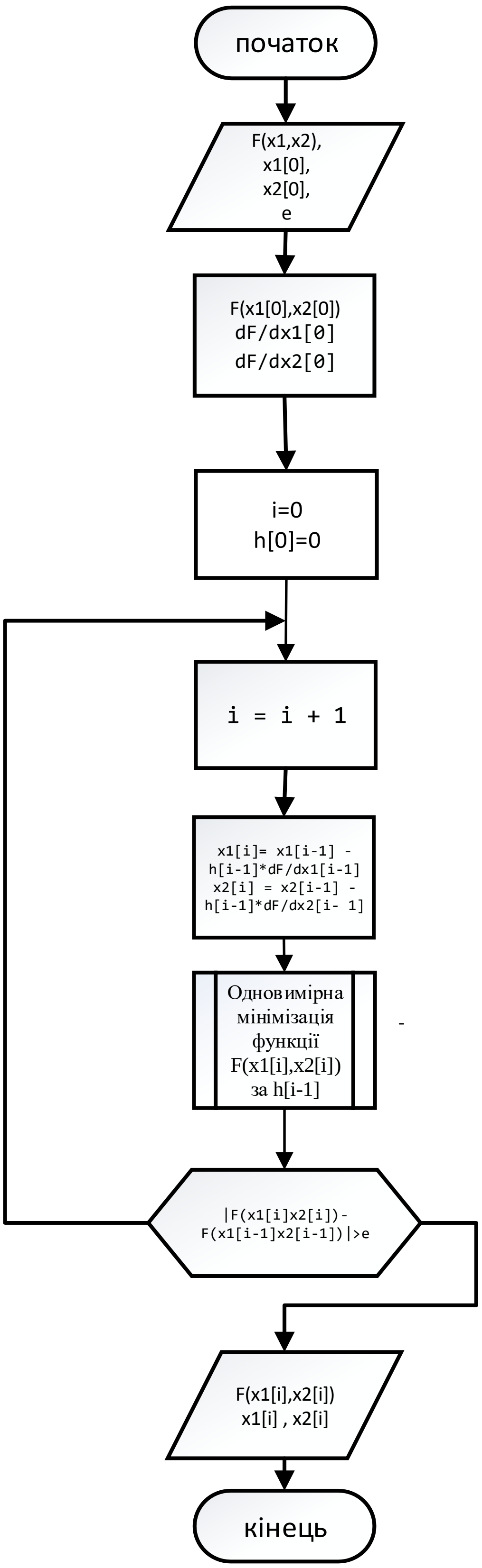
малості приросту аргументу $\left|x^{(k+1)} - x^{(k)}\right| \leq \varepsilon_1$;

малості приросту функції $\left|f(x^{(k+1)}) - f(x^{(k)})\right| \leq \varepsilon_2$;

і (або) малості градієнта $\left|\nabla f(x^{(k+1)})\right| \leq \varepsilon_3$.

де ε_1, ε_2, ε_3 - задані малі величини. Якщо вони виконуються, то обчислення припиняються і вважають $x_{min} = x^{(k+1)}$. В іншому випадку $k = k + 1$ і перехід до п.2.

Алгоритм розв’язання методом якнайшвидшого спуску:



<u>Приклад 7.4</u> Використовуючи градієнтний метод як найшвидшого спуску знайти мінімальне значення функції $f(x) = 4x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 - 12x_2$.

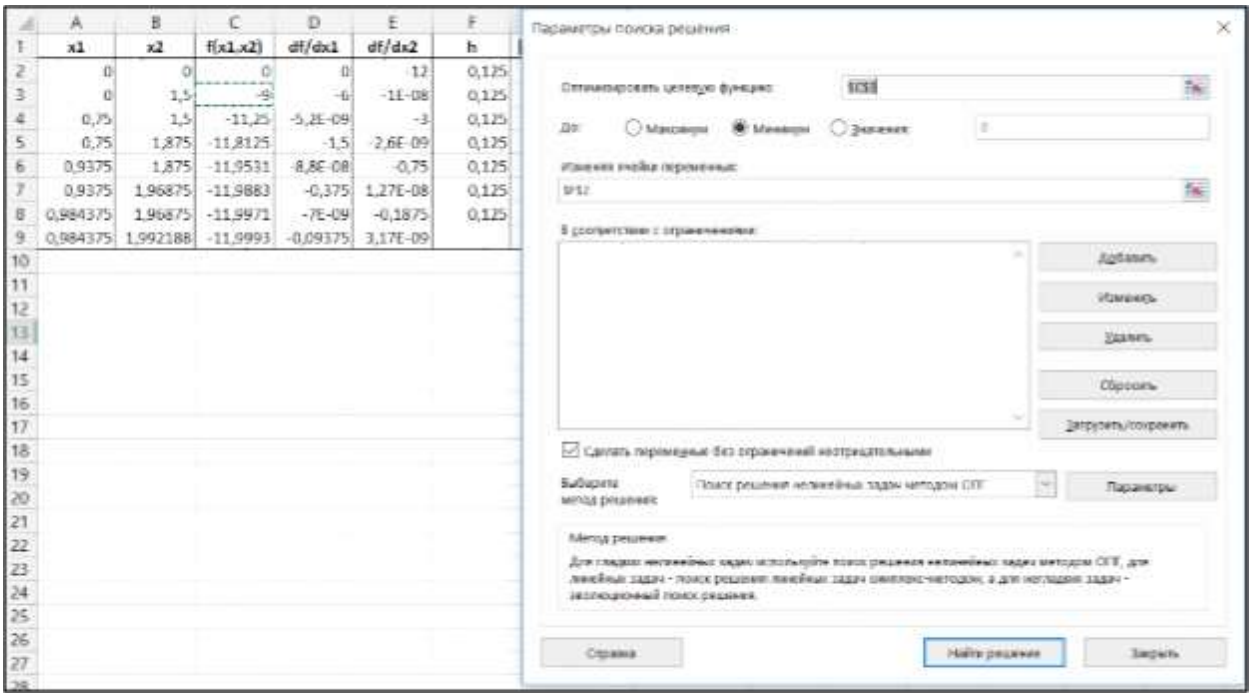
$$x^{(0)} = (0{,}0), \qquad \varepsilon = 0{,}01.$$

Рішення задачі за допомогою Excel.

=A2-F2*D2 =B2-F2*E2 =8*A2-4*B2 =8*B2-4*A2-12

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	x1	x2	f(x1,x2)	df/dx1	df/dx2	h	|f(Xk+1)-f(Xk)|	|grad f(Xk+1)|		e
2	0	0	0	0	-12	0,125				0,01
3	0	1,5	-9	-6	-1E-08	0,125	9	5,999999995		
4	0,75	1,5	-11,25	-5,2E-09	-3	0,125	2,25	2,999999997		
5	0,75	1,875	-11,8125	-1,5	-2,6E-09	0,125	0,5625	1,499999999		
6	0,9375	1,875	-11,9531	-8,8E-08	-0,75	0,125	0,140625	0,749999956		
7	0,9375	1,96875	-11,9883	-0,375	1,27E-08	0,125	0,03515625	0,375000006		
8	0,984375	1,96875	-11,9971	-7E-09	-0,1875	0,125	0,008789062	0,187499997		
9	0,984375	1,992188	-11,9993	-0,09375	3,17E-09		0,002197266	0,093750002		
10										

Для визначення мінімального кроку h на кожній ітерації використовується надбудова «Пошук розв'язку».



Проілюструємо цю задачу графічно :

Для пошуку екстремуму заданої функції на множині $\{x_1 \in [0;2], x_2 \in [0;2{,}4]\}$ необхідно:

1.протабулювати цю функцію;

2.побудувати діаграму двовимірної поверхні;

3.локалізувати точку мінімуму.

Із застосуванням процедури «Пошук рішення» можна уточнити координати точки, що відповідає мінімальному значенню функції.

Табуляція функції. Таблиця значень аналізованої функції наведена для інтервалів $\{x_1 \in [0;2], x_2 \in [0;2,4]\}$ з кроком $h = 0,2$. При побудові такої таблиці необхідно використовувати змішану адресацію в формулі. Змішана адресація є комбінацією відносної і абсолютної адресацій, коли одна зі складових імені поля залишається незмінною при копіюванні. Приклади такої адресації: $B3, C$2. Для того, щоб значення аргументу x_2 завжди вибиралися з другого рядка, рядок фіксується знаком $ (C$2). Щоб значення аргументу x_1 вибиралися зі шпальти B, він фіксується знаком $ ($B3).

=4*$B3^2+4*C$2^2-4*$B3*C$2-12*C$2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1		x1													
2	x2		0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4
3		0	0	-2,24	-4,16	-5,76	-7,04	-8	-8,64	-8,96	-8,96	-8,64	-8	-7,04	-5,76
4		0,2	0,16	-2,24	-4,32	-6,08	-7,52	-8,64	-9,44	-9,92	-10,08	-9,92	-9,44	-8,64	-7,52
5		0,4	0,64	-1,92	-4,16	-6,08	-7,68	-8,96	-9,92	-10,56	-10,88	-10,88	-10,56	-9,92	-8,96
6		0,6	1,44	-1,28	-3,68	-5,76	-7,52	-8,96	-10,08	-10,88	-11,36	-11,52	-11,36	-10,88	-10,08
7		0,8	2,56	-0,32	-2,88	-5,12	-7,04	-8,64	-9,92	-10,88	-11,52	-11,84	-11,84	-11,52	-10,88
8		1	4	0,96	-1,76	-4,16	-6,24	-8	-9,44	-10,56	-11,36	-11,84	-12	-11,84	-11,36
9		1,2	5,76	2,56	-0,32	-2,88	-5,12	-7,04	-8,64	-9,92	-10,88	-11,52	-11,84	-11,84	-11,52
10		1,4	7,84	4,48	1,44	-1,28	-3,68	-5,76	-7,52	-8,96	-10,08	-10,88	-11,36	-11,52	-11,36
11		1,6	10,24	6,72	3,52	0,64	-1,92	-4,16	-6,08	-7,68	-8,96	-9,92	-10,56	-10,88	-10,88
12		1,8	12,96	9,28	5,92	2,88	0,16	-2,24	-4,32	-6,08	-7,52	-8,64	-9,44	-9,92	-10,08
13		2	16	12,16	8,64	5,44	2,56	0	-2,24	-4,16	-5,76	-7,04	-8	-8,64	-8,96
14															

Побудова діаграми (поверхні) і локалізація початкового наближення точки екстремуму. На основі отриманої таблиці побудуємо поверхню. При такому оформленні таблиці, як зазначено вище, досить виділити діапазон даних (B2:O13) і вибрати відповідний тип діаграми.

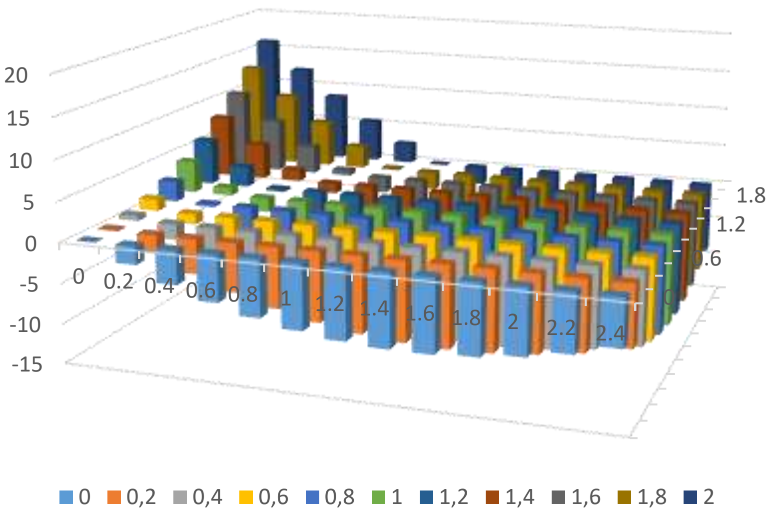


Рис.7 Діаграма (поверхню) з знайденим мінімумом

Контрольні питання:

1. Опишіть головну ідею методів спуску в задачах оптимізації функцій двох змінних.
2. Опишіть метод покоординатного спуску.
3. Опишіть головну ідею методів градієнтного спуску в задачах оптимізації функцій двох змінних.
4. Опишіть метод найскорішого спуску.

Література

1. Калiткiн Н.П. Чисельнi методи.-СПб.:БХВ-Петербург, 2011. - 592 с.
2. Калiткiн М.М. Чисельнi методи. Головна редакцiя фiзико-математичної лiтератури видавництва «Наука», м., 1978.- 511с.
3. Турчак Л. І., Плотнiков П.В. Основи чисельних методів: Навчальний посібник.- 2-е изд, перераб. і доп. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.-304 с.
4. Колдаев В.Д. Чисельнi методи та програмування: навчальний посiбник / За ред.проф.Л.Г.Гагарiной.-М .: ВД «ФОРУМ»: ИНФРА-М, 2009.-336 с.
5. Данiлiна Н.І., Дубровська Н.С., Кваша О.П., Смирнов Г.Л., Феклiсов Г.І. Чисельнi методи. М., "Вища школа» 1976.-368 с.