МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
Кафедра вищої математики та моделювання систем

Методичні вказівки
для проведення практичних занять та самостійної роботи здобувачів

«Вища математика»
Розділ «Диференціальне числення»

Для здобувачів вищої освіти за освітнім ступенем бакалавра за спеціальностями:
– 281 Публічне управління та адміністрування,
– 073 Менеджмент.
Інституту бізнесу, економіки та інформаційних технологій (ІБЕІТ)

Одеса 2022

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ "ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА"
Кафедра вищої математики та моделювання систем

Методичні вказівки
для проведення практичних занять та самостійної роботи здобувачів

«Вища математика»
Розділ «Диференціальне числення»

Для здобувачів вищої освіти за освітнім ступенем бакалавра за спеціальностями:
– 281 Публічне управління та адміністрування,
– 073 Менеджмент.
Інституту бізнесу, економіки та інформаційних технологій (ІБЕІТ)

Затверджено на засіданні
кафедри вищої математики
та моделювання систем
Протокол № 9 від 21.04.22 р.

Одеса 2022

Методичні вказівки для проведення практичних занять та самостійної роботи здобувачів. «Вища математика». Розділ «Диференціальне числення» Для здобувачів вищої освіти за освітнім ступенем бакалавра за спеціальностями: – 281 Публічне управління та адміністрування, – 073 Менеджмент. Інституту бізнесу, економіки та інформаційних технологій (ІБЕІТ) / Укладач: О.В. Жарова. – Одеса: НУ "ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА", 2022 - 32 с.

Укладачі: О.В. Жарова, канд. фіз.-мат. наук, доц.

ЗМІСТ

Одеса 2022

Мета практичних занять – організація детального розгляду окремих теоретичних положень дисципліни; формування вмінь та навичок їх практичного застосування шляхом виконання здобувачами індивідуальних завдань.

В ході практичних занять відбувається розширення, поглиблення й деталізація наукових знань, отриманих здобувачами на лекціях та в процесі самостійної роботи і спрямованих на підвищення рівня засвоєння навчального матеріалу, прищеплення умінь і навичок, розвиток наукового мислення та усного мовлення здобувачів.

В результаті проведення практичних занять здобувач повинен:

- оволодівати необхідним математичним апаратом, його основними положеннями, прийомами, методами (технікою виконання матричних операцій; аналітичними методами розв'язання задач; операцією диференціювання);
- вміти дати математичний опис (моделювати) економічних процесів з умови задачі, починаючи від простого моделювання у вигляді нескладних функціональних залежностей і кінчаючи функціональними рівняннями, аналізувати отриману математичну модель, з'ясовувати реальний зміст параметрів, з якими припущеннями математична модель описує реальний процес, аналізувати отриманий результат).

Самостійна робота є основним засобом засвоєння здобувачем навчального матеріалу в час, вільний від обов'язкових навчальних занять.

Співвідношення обсягів аудиторних занять і самостійної роботи здобувачів визначається навчальним планом підготовки бакалаврів спеціальності 281 «Публічне управління та адміністрування», з урахуванням специфіки та змісту дисципліни, її місця, значення і дидактичної мети в реалізації освітньо-професійної програми.

– РОЗПОДІЛ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ ЗДОБУВАЧА

– 1 семестр

№ зп	Зміст роботи	Кількість годин
1	Самостійне опрацювання теоретичного матеріалу	34
2	Підготовка до практичних занять	27
3	Підготовка до екзамену	30
	Разом	91

Розділ 4

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Похідна функції

1. **Приклад.** Користуючись означенням похідної, знайти похідну функції $y = 2x^3 + 5x^2 - 7x - 4$.
Надамо x приросту Δx, тоді y набуде приросту Δy:

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = \left(2(x+\Delta x)^3 + 5(x+\Delta x)^2 - 7(x+\Delta x) - 4\right) -$$
$$-\left(2x^3 + 5x^2 - 7x - 4\right) = 6x^2\Delta x + 6x\Delta x^2 + 2\Delta x^3 + 10x\Delta x + 5\Delta x^2 - 7\Delta x.$$

За означенням похідної маємо:

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(6x^2 + 6x\Delta x + 2\Delta x^2 + 10x + 5\Delta x - 7\right) = 6x^2 + 10x - 7.$$

2. **Приклад.** Користуючись означенням похідної, знайти похідну функції $y = -\mathrm{ctg}x - x$.
Використовуючи формулу $\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{ctg}\beta = \dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}$, знаходимо приріст функції:

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = -\mathrm{ctg}(x+\Delta x) - (x+\Delta x) + \mathrm{ctg}x + x =$$
$$= \mathrm{ctg}x - \mathrm{ctg}(x+\Delta x) - \Delta x = \frac{\sin\Delta x}{\sin x\sin(x+\Delta x)} - \Delta x.$$

Звідки

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}}{\sin x\cdot\sin(x+\Delta x)} - 1\right) = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

3. **Приклад.** Який кут утворює з віссю Ox дотична до кривої $y = \frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{9}x^3$, проведена в точці з абсцисою $x = 1$?

Знаходимо похідну $y' = \frac{10}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^2$; при $x = 1$, $y' = 3$, таким чином $\mathrm{tg}\alpha = 3$, звідки $\alpha = \mathrm{arctg}3 \approx 71^\circ 34'$.

Застосовуючи формули та правила диференціювання, знайти похідні таких функцій:

4. **Приклад.** $y = x\sqrt{x}(3\ln x - 2)$.

$$y' = \left(x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2)\right)' = x^{\frac{3}{2}}\cdot\frac{3}{x} + \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}(3\ln x - 2) =$$
$$= 3x^{\frac{1}{2}} + \frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}}\cdot\ln x - 3x^{\frac{1}{2}} = \frac{9}{2}\sqrt{x}\ln x.$$

5. **Приклад.** $y = \sin(2x+3)$.

$$y' = \cos(2x+3)\cdot(2x+3)' = 2\cos(2x+3).$$

6. **Приклад.** $y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)' =$$
$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

7. **Приклад.** $y = \frac{1}{2}\mathrm{tg}^2\sqrt{x} + \ln\cos\sqrt{x}$.

$$y' = \mathrm{tg}\sqrt{x}\,\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\cos\sqrt{x}}\left(-\sin\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}} =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{tg}\sqrt{x}\left(\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} - 1\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{tg}^3\sqrt{x}.$$

8. **Приклад.** $y = x^{x^2}$.

Логарифмуючи функцію, дістаємо $\ln y = x^2 \ln x$.

Звідки: $(\ln y)' = \frac{1}{y}\cdot y'$,

$$\frac{y'}{y} = x^2\cdot\frac{1}{x} + 2x\ln x,\quad \frac{y'}{y} = x(1+2\ln x),$$

$$y' = xy(1+2\ln x) = xx^{x^2}(1+2\ln x) = x^{x^2+1}(1+2\ln x).$$

9. **Приклад.** $y = (\sin x)^{\mathrm{tg}x}$.

Маємо: $\ln y = \mathrm{tg}x \ln\sin x,\quad \frac{y'}{y} = \mathrm{tg}x\frac{1}{\sin x}\cos x +$

$$+\frac{1}{\cos^2 x}\ln\sin x = 1 + \frac{1}{\cos^2 x}\ln\sin x,$$

$$y' = y\left(1 + \frac{1}{\cos^2 x}\ln\sin x\right) = (\sin x)^{\mathrm{tg}x}\left(1 + \frac{1}{\cos^2 x}\ln\sin x\right).$$

10. **Приклад.** Знайти похідну y'_x з рівняння $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$.

Продиференціювавши за x обидві частини рівняння, дістанемо $3x^2 + \frac{y'}{y} - x^2 e^y\cdot y' - 2xe^y = 0$.

Звідки $y' = \frac{\left(2xye^y - 3x^2\right)y}{1 - x^2 ye^y}$.

11. **Приклад.** Скласти рівняння дотичної та нормалі до кривої $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ у точці M_0 (1, – 1).

З рівняння кривої знайдемо похідну:

$2x + 2y^2 + 4xyy' + 12y^3y' = 0$, тобто $y' = -\frac{x^2 + y^2}{2xy + 6y^3}$.

Таким чином, $y'(1) = f'(1) = -\frac{1+(-1)^2}{2\cdot 1\cdot(-1) + 6(-1)^3} = \frac{1}{4}$.

Рівняння дотичної буде

$$y + 1 = \frac{1}{4}(x-1),\ \text{або}\ x - 4y - 5 = 0.$$

Рівняння нормалі

$$y + 1 = -4(x-1),\ \text{або}\ 4x + y - 3 = 0.$$

12. **Приклад.** Задано функцію $y = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x + 7$. Знайти $y', y'', y''', \ldots$.

Маємо: $y' = 5x^4 + 8x^3 - 9x^2 - 2x - \frac{1}{2}$,

$y'' = 20x^3 + 24x^2 - 18x - 2,\quad y''' = 60x^2 + 48x - 18$,

$y^{(4)} = 120x + 48,\quad y^{(5)} = 120,\quad y^{(6)} = y^{(7)} = \ldots = 0$.

13. **Приклад.** $y = \ln x$. Знайти $y^{(n)}$.

Маємо: $y'=\dfrac{1}{x}=x^{-1}$, $y''=-1\cdot x^{-2}$, $y'''=1\cdot 2x^{-3}$, $y^{(4)}=-1\cdot 2\cdot 3x^{-4}$, ..,
$y^{(n)}=1\cdot 2\cdot 3..(n-1)(-1)^{n-1}\cdot x^{-n}=(-1)^{n-1}(n-1)!\,x^{-n}$.

14. **Приклад.** Знайти y'_x, якщо

$$\begin{cases} x=t^3+3t+1, \\ y=3t^5+5t^3+1. \end{cases}$$

Знайдемо $x'_t=3t^2+3=3(t^2+1)$, $y'_t=15t^2(t^2+1)\Rightarrow y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}==\dfrac{15t^2(t^2+1)}{3(t^2+1)}=5t^2$.

15. **Приклад.** Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до циклоїди

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$$

в довільній точці $t\in[-\pi,\pi]$.

Кутовий коефіцієнт дотичної в кожній точці дорівнює значенню похідної y'_x у цій точці:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right).$$

$\Rightarrow$ кутовий коефіцієнт дотичної до циклоїди в кожній точці дорівнює $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{t}{2}\right)$, де t — значення параметра, який відповідає цій точці.

Оскільки кутовий коефіцієнт дорівнює тангенсу кута φ нахилу дотичної до осі Ox, то

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\right)\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}.$$

Завдання для перевірки знань

Використовуючи означення похідної, знайти похідні функцій:

1. $y=\dfrac{1}{x^2}$. *Відповідь.* $y'=-\dfrac{2}{x^3}$.

2. $y=\sqrt[3]{x^2}$. *Відповідь.* $y'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

3. $y=5\sin x+3\cos x$. *Відповідь.* $y'=5\cos x-3\sin x$.

4. $y=5(\operatorname{tg}x-x)$. *Відповідь.* $y'=5\operatorname{tg}^2 x$.

5. $y=\dfrac{1}{e^x+1}$. *Відповідь.* $y'=-\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$.

6. $y=2^{x^2}$. *Відповідь.* $y'=2^{x^2}\cdot 2x\cdot\ln 2$.

Застосовуючи формули та правила диференціювання, знайти похідні таких функцій:

7. $y=\dfrac{2}{7}x^3\sqrt{x}-\dfrac{4}{11}x^5\sqrt{x}+\dfrac{2}{15}x^7\sqrt{x}$. *Відповідь.* $y'=x^2\sqrt{x}(1-x^2)^2$.

8. $y=3x^3\cdot\ln x-x^3$. *Відповідь.* $y'=9x^2\cdot\ln x$.

9. $y = 2^{3x} / 3^{2x}$. *Відповідь.* $y' = \left(\frac{8}{9}\right)^x \cdot \ln\frac{8}{9}$.

10. $y = x\arccos\frac{x}{2} - \sqrt{4 - x^2}$. *Відповідь.* $y' = \arccos\frac{x}{2}$.

11. $y = \ln\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$. *Відповідь.* $y' = \frac{1}{\cos x}$.

12. $y = \ln\left(3x^2 + \sqrt{9x^4 + 1}\right)$. *Відповідь.* $y' = \frac{6x}{\sqrt{9x^4 + 1}}$.

13. $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2(\sin x) + \ln\cos(\sin x)$. *Відповідь.* $y' = \operatorname{tg}^3(\sin x)\cdot\cos x$.

14. $y = \ln\frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x+1}$. *Відповідь.* $y' = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$.

15. $y = 2x\cdot\operatorname{tg}2x + \ln\cos 2x - 2x^2$. *Відповідь.* $y' = 4x\cdot\operatorname{tg}^2 2x$.

16. $y = \operatorname{arctg}\frac{3x - x^2}{1 - 3x^2}$. *Відповідь.* $y' = \frac{3}{1 + x^2}$.

17. $y = e^x\sqrt{1 - e^{2x}} - \arcsin e^x$. *Відповідь.* $y' = -\frac{2e^{3x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$.

18. $y = e^x \cdot 2^{5x} / 3^{4x}$. *Відповідь.* $y' = \frac{e^x \cdot 2^{5x}}{3^{4x}} \cdot \ln\frac{32e}{81}$.

19. $y = \frac{x+1}{x} - e^{-\ln\frac{x}{x+1}}$. *Відповідь.* $y' = 0$.

20. $y = \frac{x^2 \cdot e^{x^2}}{x^2 + 1}$. *Відповідь.* $y' = 2e^{x^2}\cdot x\cdot\frac{x^4 + x^2 + 1}{\left(x^2 + 1\right)^2}$.

21. $y = \frac{1}{4a}\ln\frac{x-a}{x+a} + \frac{1}{2a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$. *Відповідь.* $y' = \frac{x^2}{x^4 - a^4}$.

22. $y = \log_{x^2} 2$. *Відповідь.* $y' = -\frac{\ln 2}{2x\ln^2 x}$.

23. $y = x^{\arcsin x}$.

Відповідь. $y' = x^{\arcsin x}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{\arcsin x}{x}\right)$.

24. $y = \frac{x^x}{e^x}(x\ln x - x - 1)$.

Відповідь. $y' = x(\ln x - 1)\cdot\frac{x^x}{e^x}\ln x$.

25. $y = \log_{\cos x}\sin x$.

Відповідь. $y' = \frac{\operatorname{ctg}x\cdot\ln\cos x + \operatorname{tg}x\cdot\ln\sin x}{\ln^2\cos x}$.

26. $y = \ln\left(e^x\cos x + e^{-x}\sin x\right)$.

Відповідь. $\frac{(\cos x - \sin x)\left(e^x + e^{-x}\right)}{e^x\cos x + e^{-x}\sin x}$.

27. $y = e^x\sin x\cos^3 x$.

Відповідь. $e^x\sin x\cos^3 x(1 + \operatorname{ctg}x - 3\operatorname{tg}x)$.

28. $y=\frac{1}{\sqrt{x}}e^{x^2-\mathrm{arctg}x+\frac{1}{2}\ln x+1}$.

Відповідь. $\left(2x-\frac{1}{1+x^2}\right)\frac{e^{x^2-\mathrm{arctg}x+\frac{1}{2}\ln x+1}}{\sqrt{x}}$.

29. $y=\frac{\sin x}{4\cos^4 x}+\frac{3\sin x}{8\cos^2 x}+\frac{3}{8}\ln\frac{1+\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1-\mathrm{tg}\frac{x}{2}}$.

Відповідь. $\frac{1}{\cos^5 x}$.

30. $y=\sin^2 3x\cdot f\left(\cos^3 u\right)$, де $f(x)=2^x$, $u=7x$.

Відповідь. $2^{\cos^3 7x}\left(3\sin 6x-\frac{21}{2}\ln 2\sin^2 3x\cos 7x\sin 14x\right)$.

31. $y=\cos\sqrt{x}\cdot f\left(u^{-1}\right)$, де $f(x)=x^2$, $u=7x$.

Відповідь. $-\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}\,\mathrm{tg}7x+14\cos\sqrt{x}\cos^{-2}7x\right)/\,\mathrm{tg}^3 7x$.

32. $y=(\mathrm{tg}2x)^{\mathrm{ctg}\frac{x}{2}}$.

Відповідь. $(\mathrm{tg}2x)^{\mathrm{ctg}\frac{x}{2}}\left(\frac{4\mathrm{ctg}\frac{x}{2}}{\sin 4x}\frac{\ln\mathrm{tg}2x}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right)$.

Знайти похідну y'_x від неявно заданих функцій:

33. $x\sin y+y\sin x=0$. *Відповідь.* $y'=-\frac{y\cos x+\sin y}{x\cos y+\sin x}$.

34. $\frac{y}{x}+e^{y/x}-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}=0$. *Відповідь.* $y'=y/x$.

35. $x^{y^2}+y^2\cdot\ln x-4=0$. *Відповідь.* $y'=-\frac{y}{2x\ln x}$.

36. $y^2-2xy+b=0$. *Відповідь.* $\frac{y}{y-x}$.

37. $x^3+ax^2y+bxy^2+y^3=0$. *Відповідь.* $-\frac{3x^2+2axy+by^2}{ax^2+2bxy+3y^2}$.

38. $y=\cos(x+y)$. *Відповідь.* $-\frac{\sin(x+y)}{1+\sin(x+y)}$.

39. $y=1+xe^y$. *Відповідь.* $\frac{e^y}{2-y}$.

40. $y\sin x-\cos(x-y)=0$. *Відповідь.* $\frac{y\cos x+\sin(x-y)}{\sin(x-y)-\sin x}$.

41. $\mathrm{tg}\frac{y}{2}=\sqrt{\frac{1-K}{1+K}}\mathrm{tg}\frac{x}{2}$. *Відповідь.* $\frac{\sqrt{1-K^2}}{1+K\cos x}$.

42. $y=x+\mathrm{arctg}y$. *Відповідь.* $\frac{1+y^2}{y^2}$.

43. $\cos(xy)=x$. *Відповідь.* $-\frac{1+y\sin(xy)}{x\sin(xy)}$.

Знайти похідну y'_x від параметрично заданих функцій:

44. $x = 1 - t^2$, $y = t - t^3$. *Відповідь.* $\left(3t^2 - 1\right)/\left(2t\right)$.

45. $x = \dfrac{t+1}{t}$, $y = \dfrac{t-1}{t}$. *Відповідь.* -1.

46. $x = \ln\left(1 + t^2\right)$, $y = t - \operatorname{arctg} t$. *Відповідь.* $\dfrac{t}{2}$.

47. $x = \varphi(1 - \sin\varphi)$, $y = \varphi\cos\varphi$. *Відповідь.* $\dfrac{\cos\varphi - \varphi\sin\varphi}{1 - \sin\varphi - \varphi\cos\varphi}$.

48. $x = \dfrac{1+t^3}{t^2 - 1}$, $y = \dfrac{t}{t^2 - 1}$. *Відповідь.* $\dfrac{1+t^2}{t\left(2 + 3t - t^3\right)}$.

49. $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$. *Відповідь.* $\dfrac{1 - \operatorname{tg} t}{1 + \operatorname{tg} t}$.

50. $x = \dfrac{3at}{1+t^2}$, $y = \dfrac{3at^2}{1+t^2}$. *Відповідь.* $\dfrac{t\left(2 - t^3\right)}{1 - 2t^3}$.

Знайти похідні другого порядку від функцій:

51. $y = -\dfrac{22}{x+5}$. *Відповідь.* $y'' = -\dfrac{44}{(x+5)^3}$.

52. $y = \dfrac{1}{4}x^2(2\ln x - 3)$. *Відповідь.* $y'' = \ln x$.

53. $y = -\dfrac{1}{9}x\sin 3x - \dfrac{2}{27}\cos 3x$. *Відповідь.* $y'' = x \cdot \sin 3x$.

54. $y = x\ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) - \sqrt{x^2 + a^2}$. *Відповідь.* $y'' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

55. $y = xe^{x^2}$. *Відповідь.* $2e^{x^2}\left(3x + 2x^3\right)$.

56. $y = \dfrac{1}{1+x^3}$. *Відповідь.* $\dfrac{6x\left(2x^3 - 1\right)}{\left(x^3 + 1\right)^3}$.

57. $y = \left(1 + x^2\right)\operatorname{arctg} x$. *Відповідь.* $\dfrac{2x}{1+x^2} + 2\operatorname{arctg} x$.

58. $y = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$. *Відповідь.* $-\dfrac{x}{\sqrt{\left(1 + x^2\right)^3}}$.

59. $y = \dfrac{1}{a + \sqrt{x}}$. *Відповідь.* $\dfrac{a + 3\sqrt{x}}{4x\sqrt{x}\left(a + \sqrt{x}\right)^3}$.

60. $y = e^{\sqrt{x}}$. *Відповідь.* $\dfrac{e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 1\right)}{4x\sqrt{x}}$.

Знайти похідні третього порядку від функцій:

61. $y = ax^2 + bx + c$. *Відповідь.* $y''' = 0$.

62. $y = \mathrm{tg}x$. *Відповідь.* $y''' = 6\sec^4 x - 4\sin^2 x$.

63. $y = \ln \sin x$. *Відповідь.* $y''' = 2\mathrm{ctg}x \,\mathrm{cosec}^2 x$.

64. $y = \dfrac{x}{6(x+1)}$. *Відповідь.* $y''' = \dfrac{1}{(x+1)^4}$.

65. $y = \dfrac{1}{2}\ln^2 x$. *Відповідь.* $y''' = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$.

66. $y = (2x+3)^3\sqrt{2x+3}$. *Відповідь.* $y''' = 105\sqrt{2x+3}$.

67. $y = (x^2 + a^2)\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a}$. *Відповідь.* $y''' = \dfrac{4a^3}{(a^2 + x^2)^2}$.

Знайти похідні n-го порядку від функцій:

68. $y = x^n \cdot \sqrt{x}$.

Відповідь. $y^{(n)} = \dfrac{3\cdot 5\cdot 7 \ldots (2n+1)}{2^n}\sqrt{x}$.

69. $y = 5 - 3\cos^2 x$.

Відповідь. $y^{(n)} = -\dfrac{3}{2}\cdot 2^n \cdot \cos\left(2x + \dfrac{\pi n}{2}\right)$.

70. $y = 2^x + 2^{-x}$.

Відповідь. $y^{(n)} = \left(2^x + (-1)^n \cdot 2^{-x}\right)\ln^n 2$.

71. $y = a^x$. *Відповідь.* $y^{(n)} = (\ln a)^n a^x$.

72. $y = \ln(1+x)$. *Відповідь.* $y^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$.

73. $y = \dfrac{1-x}{1+x}$. *Відповідь.* $y^{(n)} = 2(-1)^n \dfrac{n!}{(1+x)^{n+1}}$.

74. $y = xe^x$. *Відповідь.* $y^{(n)} = e^x(x+n)$.

75. $y = x^{n-1}\ln x$. *Відповідь.* $y^{(n)} = \dfrac{(n-1)!}{x}$.

76. Скласти рівняння дотичної до гіперболи $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{8} = 1$, проведеної в точці гіперболи M (– 9, – 8).

Відповідь. $x - y + 1 = 0$.

77. Знайти кут між кривою $y = x - x^3$ та прямою $y = 5x$.

Відповідь. $\mathrm{tg}\,\varphi = \dfrac{2}{3}$.

78. Знайти кут між кривими $y = x^3$ та $y = \dfrac{1}{x^2}$.

Відповідь. $\dfrac{\pi}{4}$.

79. Знайти кут між кривими $x^2 + y^2 = 5, y^2 = 4x$.
Відповідь. $\mathrm{tg}\varphi_1 = 3, \mathrm{tg}\varphi_2 = -3$.

80. Знайти кут між кривими $y = \sqrt{2}\sin x, y = \sqrt{2}\cos x$.

Відповідь. $\dfrac{\pi}{2}$.

81. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $x = \cos t$, $y = \sin t$ в точці $x = -1/2$, $y = \sqrt{3}/2$. Зробити малюнок.

Відповідь. $1/\sqrt{3}$.

82. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної до кривої $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ при $t = \pi/4$.

Відповідь. -1.

ДИФЕРЕНЦІАЛ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

1. **Приклад.** Знайти диференціал функції $y = \mathrm{arctg}x$.

Маємо: $dy = (\mathrm{arctg}x)' dx = \dfrac{dx}{1+x^2}$.

2. **Приклад.** Знайти диференціал функції $s = e^{t^2}$.

Маємо: $ds = e^{t^2} \cdot 2t \cdot dt$.

3. **Приклад.** Обчислити наближено значення $\arcsin 0{,}51$.

Розглянемо функцію $y = \arcsin x$. Візьмемо x = 0,5, Δx = 0,01 та, застосовуючи формулу $\arcsin(x + \Delta x) \approx \arcsin x + (\arcsin x)' \Delta x$, одержимо

$$\arcsin 0{,}51 \approx \arcsin 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{1-(0{,}5)^2}} \cdot 0{,}01 = \frac{\pi}{6} + 0{,}011 = 0{,}513.$$

Завдання для перевірки знань

Знайти диференціали функцій:

1. $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{49-x^2} + \dfrac{49}{2}\arcsin\dfrac{x}{7}$. *Відповідь.* $dy = \sqrt{49-x^2}\,dx$.

2. $y = \dfrac{1}{12}\ln\dfrac{x-6}{x+6}$. *Відповідь.* $dy = \dfrac{dx}{x^2-36}$.

3. $y = \mathrm{arctg}e^{2x}$. *Відповідь.* $dy = \dfrac{2e^{2x}dx}{1+e^{4x}}$.

4. $y = e^{\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x} \cdot \cos x$.

Відповідь. $dy = e^{\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 x} \cdot \sin x \mathrm{tg}^2 x dx$.

5. Обчислити Δy та dy для функції $y = x^2 - 2x$ при $x = 3$ та $\Delta x = 0{,}01$.

Відповідь. $\Delta y = 0{,}0401$; $dy = 0{,}04$.

6. Знайти наближене значення $\mathrm{arctg}1{,}05$.

Відповідь. 0,811.

7. Знайти наближене значення об’єму кулі радіусом 2,01 м.

Відповідь 34,04 м^3.

8. Знайти наближене значення $\mathrm{tg}46^\circ$.

Відповідь. 1,035.

9. Знайти наближене значення $\sqrt[4]{15{,}8}$.

Відповідь. 1, 9938.

ЗАСТОСУВАННЯ ПОХІДНОЇ

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$.

Чисельник та знаменник дробу окремо прямують до нуля при $x\to 0$ (невизначеність вигляду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$).

Використовуючи правило Лопіталя, дістаємо

$$\lim_{x\to 1}\tfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x}=\frac{3}{e}.$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{xe^{x/2}}{x+e^x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Маємо:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{xe^{x/2}}{x+e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{x/2}\left(1+\frac{x}{2}\right)}{1+e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}e^{x/2}\left(2+\frac{x}{2}\right)}{e^x}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{x}{2}}{e^{x/2}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{1/2}{\frac{1}{2}e^{x/2}}=0.$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cdot\ln x\right)=[0\cdot\infty]$.

Подамо добуток функцій у вигляді дробу, а потім, діставши невизначеність вигляду $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^2\cdot\ln x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-2x^{-3}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}x^2=0.$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=[\infty-\infty]$.

Зведемо дроби до спільного знаменника. Маємо невизначеність вигляду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. До неї застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\left(e^x-1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{e^x(2+x)}=\frac{1}{2}.$$

Приклад. Знайти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\mathrm{tg}x)^{2\cos x}=\left[\infty^0\right]$.

Позначимо задану функцію через y: $(\mathrm{tg}x)^{2\cos x}=y$.

Прологарифмуємо її $\ln y=2\cos x\ln\mathrm{tg}x=\dfrac{2\ln\mathrm{tg}x}{1/\cos x}$.

Обчислимо границю знайденого виразу за допомогою правила Лопіталя (маємо невизначеність вигляду $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$):

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \ln y = 2\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \operatorname{tg}x}{\sec x} = 2\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x\cdot 1/\operatorname{tg}x}{\sec x\cdot \operatorname{tg}x} = 2\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec x}{\operatorname{tg}^2 x} =$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec x \operatorname{tg}x}{2\operatorname{tg}x\cdot \sec^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x = 0, \text{ тобто } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} y = e^0 = 1.$$

Приклад. Знайти $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\ln x} = \left[1^\infty\right]$.

Логарифмуючи та застосовуючи правило Лопіталя, маємо:

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\ln x\cdot\ln(1+x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{1/\ln x} = \lim_{x\to 0}\frac{1/(1+x)}{-1/\left(x\ln^2 x\right)} =$$
$$= -\lim_{x\to 0}\frac{x\ln^2 x}{x+1} = -\lim_{x\to 0}\frac{\ln^2 x}{1+\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x}\ln x}{-\frac{1}{x^2}} = 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Таким чином, $\lim_{x\to 0} y = e^0 = 1$.

Приклад. Знайти інтервали зростання та спадання функції

$$y = x\left(1+\sqrt{x}\right).$$

Знайдемо похідну $y' = 1+\frac{3}{2}\sqrt{x}$. Похідна додатна на проміжку $[0,+\infty)$. Таким чином, функція зростає на всій області означення.

Приклад. Дослідити на екстремум функцію $y = x\cdot\sqrt{1-x^2}$.

Функція визначена при $-1\le x\le 1$. Знайдемо першу похідну $y' = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$; $y' = 0$ при $1-2x^2 = 0$; звідси $x_1 = -1/\sqrt{2}$, $x_2 = 1/\sqrt{2}$ (стаціонарні точки); y' не існує $\left(y' = \infty\right)$ при $x = \pm 1$, тобто на межах області визначення функції.

Знайдемо другу похідну: $y'' = \frac{x\left(2x^2-3\right)}{\left(1-x^2\right)^{3/2}}$.

Обчислимо значення другої похідної в стаціонарних точках:

$$y''\left(1/\sqrt{2}\right) = \frac{1(1-3)}{\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3/2}} < 0, \quad y''\left(-1/\sqrt{2}\right) = -\frac{1(1-3)}{\sqrt{2\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3/2}}} > 0.$$

Отже, у точці $x = 1/\sqrt{2}$ функція має максимум

$$y_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2};$$

у точці $x = 1/\sqrt{2}$ — має мінімум:

$$y_{\min} = -\frac{1}{2}.$$

У критичних точках $x = \pm 1$ екстремуму немає, бо за означенням точками екстремуму можуть бути лише внутрішні точки області визначення функції.

Приклад. Знайти найбільше та найменше значення функції $f(x) = 3x - x^2$ на сегменті $[-2,3]$.

Знайдемо першу похідну $f'(x)=3-3x^2$ та стаціонарні точки: $3-3x^2=0$, тобто $x=\pm1$. Визначимо значення функції в стаціонарних точках та на кінцях сегмента: $f(1)=2$, $f(-1)=-2$; $f(-2)=2$, $f(3)=-18$.

З одержаних чотирьох значень вибираємо найбільше та найменше: $f_{\text{найб}}=f_{\max}(1)=2,\ f_{\text{найм}}=f(3)=-18$.

Приклад. Знайти асимптоти кривої $y=\sqrt{x^3/(x-2)}$.

Функція визначена на інтервалах $(-\infty,0)$ та $(2,+\infty)$. Із-за того, що $\lim\limits_{x\to2+0}\sqrt{x^3/(x-2)}=+\infty$, пряма $x=2$ є вертикальною асимптотою кривої.

Визначимо тепер існування похилих асимптот:

$$1)\ k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^3/(x-2)}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x/(x-2)}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1/\left(1-\frac{2}{x}\right)}=1,$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-k_1x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-2}\right)}{\sqrt{x-2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x-x+2)}{\sqrt{x-2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}\left(1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)}=1;$$

$$2)\ k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\frac{(-x)^3}{2-x}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{\frac{x}{x-2}}}{x}=$$

$$=-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{1}{1-\frac{2}{x}}}=-1,$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-k_2x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-2}}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{(-x)^3}{2-x}}+x\right)=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{-x}+x\sqrt{2-x}}{\sqrt{2-x}}=-\lim_{x\to-\infty}\frac{x(-x-2+x)}{\sqrt{2-x}\left(\sqrt{-x}+\sqrt{2-x}\right)}=-1.$$

Таким чином, існують права $y=x+1$ та ліва $y=-x-1$ похилі асимптоти кривої.

Приклад. Обчислити з точністю до 10^{-3} наближене значення $\sqrt[3]{29}$.

Запишемо задане число так: $\sqrt[3]{29}=\sqrt[3]{27+2}=3\left(1+\frac{2}{27}\right)^{1/3}$. Використаємо розклад:

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+R_n.$$

Звідси одержимо наближену рівність

$$(1+x)^m\approx1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n,$$

похибка якої

$$R_n=\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\Theta x)^{m-n-1}$$

може бути зроблена як завгодно малою при $|x|<1$ та при достатньо великому n.

Візьмемо $x=\frac{2}{27}$ та $m=\frac{1}{3}$, одержимо:

$$\sqrt[3]{29}\approx3\left(1+\frac{2}{81}-\frac{2\cdot2}{81\cdot81}+\frac{2\cdot2\cdot2\cdot5}{81^3}-\frac{2^5\cdot5}{81^4}+\ldots+R_n\right).$$

Оцінюючи величини послідовних похибок обчислення $3|R_n|$, знаходимо:

$$3|R_1| < \frac{3\cdot 2\cdot 2}{81^2} < 0{,}002,$$

$$3|R_2| < \frac{3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}{81^3} < 0{,}0003.$$

Звідси для обчислення з заданою точністю достатньо взяти три члени, які стоять у розкладі перед залишком R_2, тобто

$$\sqrt[3]{29} \approx 3(1 + 0{,}024 - 0{,}0006) = 3{,}072.$$

Завдання для перевірки знань

Знайти границі:

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2}{x^3 - 4x^2 + 3}$. *Відповідь.* $\dfrac{3}{5}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$. *Відповідь.* 2.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\alpha x} - \cos\alpha x}{e^{\beta x} - \cos\beta x}$. *Відповідь.* $\dfrac{\alpha}{\beta}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$. *Відповідь.* $\dfrac{1}{3}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}$. *Відповідь.* $-\dfrac{1}{2}$.

6. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^m - a^m}{x^n - a^n}$. *Відповідь.* $\dfrac{m}{n} a^{m-n}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$. *Відповідь.* –2.

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - в^x}{x\sqrt{1-x^2}}$. *Відповідь.* $\ln\dfrac{a}{в}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$. *Відповідь.* 2.

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{tg} x} - e^x}{\operatorname{tg} x - x}$. *Відповідь.* 1.

11. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{\pi - 2\operatorname{arctg} x}{e^{3/x} - 1}\right)$. *Відповідь.* $\dfrac{2}{3}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 - (e^x + e^{-x})\cos x}{x^4}$. *Відповідь.* $1/3$.

13. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$. *Відповідь.* 1.

14. $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^n e^{-x})$. *Відповідь.* 0.

15. $\lim\limits_{\varphi\to a} (a^2 - \varphi^2)\operatorname{tg}\dfrac{\pi\varphi}{2a}$. *Відповідь.* $\dfrac{4a^2}{\pi}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot \mathrm{ctg}\pi x\right)$. *Відповідь.* $\dfrac{1}{\pi}$.

17. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\arcsin x\cdot \mathrm{ctg}x\right)$. *Відповідь.* 1.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\cos x\right)\cdot \mathrm{ctg}x$. *Відповідь.* 0.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\mathrm{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)$. *Відповідь.* 0.

20. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\sqrt[3]{(a+x)(в+x)(c+x)}-x\right)$. *Відповідь.* $\dfrac{a+в+c}{3}$.

21. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\right)$. *Відповідь.* 1.

22. $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^{x}+x\right)^{\frac{1}{x}}$. *Відповідь.* e^2.

23. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$. *Відповідь.* $-\dfrac{1}{2}$.

24. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{p}{1-x^p}-\dfrac{q}{1-x^q}\right)$. *Відповідь.* $\dfrac{p-q}{2}$.

25. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\mathrm{ctg}^2 x\right)$. *Відповідь.* $\dfrac{2}{3}$.

26. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\pi-2x\right)^{\cos x}$. *Відповідь.* 1.

27. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos 2x\right)^{3/x^2}$. *Відповідь.* e^{-6}.

28. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x+2^x\right)^{1/x}$. *Відповідь.* 2.

29. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$. *Відповідь.* $e^{1/3}$.

30. Показати, що функція $y=2x^3+3x^2-12x+1$ спадає на інтервалі (–2, 1).

31. Показати, що коли функція $y=\sqrt{2x-x^2}$ зростає на інтервалі (0, 1), то вона спадає на інтервалі (1, 2). Побудувати графік цієї функції.

32. Показати, що функція $y=x^3+x$ скрізь зростає.

33. Показати, що функція $y=\mathrm{arctg}x-x$ скрізь спадає.

34. Показати, що функція $y=\dfrac{x^2-1}{x}$ зростає на будь-якому інтервалі, в який не входить точка $x = 0$.

35. Показати, що функція $y=\dfrac{\sin(x+a)}{\sin(x+в)}$ змінюється монотонно на будь-якому інтервалі, в який не входять точки розриву функції.

36. Знайти інтервали монотонності функції $y=x^3-3x^2-9x+14$ та побудувати за точками її графік на інтервалі (–2, 4).
Відповідь. $(-\infty,-1)$ — зростає; $(-1,3)$ — спадає; $(3,+\infty)$ — зростає.

Знайти інтервали монотонності функцій:

37. $y = x^4 - 2x^2 - 5.$
Відповідь. $(-\infty, -1)$ — спадає; $(-1,\ 0)$ — зростає; $(0,\ 1)$ — спадає; $(1,\ +\infty)$ — зростає.

38. $y = (x-2)^5(2x+1)^4.$
Відповідь. $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ — зростає; $\left(-\frac{1}{2}, \frac{11}{18}\right)$ — спадає; $\left(\frac{11}{18}, +\infty\right)$ — зростає.

39. $y = 2 - 3x + x^3$.
Відповідь. На інтервалах $(-\infty, -1)$ та $(1, +\infty)$ функція зростає; на інтервалі (– 1, 1) — спадає.

40. $y = \left(x^2 - 1\right)^{3/2}$.
Відповідь. При $x > 1$ зростає; при $x < -1$ спадає.

41. $y = xe^{-x}$.
Відповідь. При $x < 1$ зростає; при $x > 1$ спадає.

42. $y = (2-x)(x+1)^2$.
Відповідь. При $|x| > 1$ спадає; при $|x| < 1$ зростає.

43. $y = \sqrt[3]{(2x-a)(a-x)^2} \qquad (a > 0)$
Відповідь. $\left(-\infty, \frac{2}{3}a\right)$ — зростає; $\left(\frac{2}{3}a,\ a\right)$ — спадає; $(a,\ +\infty)$ — зростає.

44. $y = \dfrac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}.$
Відповідь. $(-\infty,\ -1)$ — зростає; $(-1,\ 1)$ — спадає; $(1,\ +\infty)$ — зростає.

45. $y = \dfrac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}.$
Відповідь. $(-\infty,\ 0)$ — спадає; $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ — спадає; $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ — зростає; $(1,\ +\infty)$ — спадає.

46. $y = x - e^x.$
Відповідь. $(-\infty,\ 0)$ — зростає; $(0,\ +\infty)$ — спадає.

47. $y = x^2e^{-x}.$
Відповідь. $(-\infty,\ 0)$ — спадає; $(0,\ 2)$ — зростає; $(2,\ +\infty)$ — спадає.

48. $y = \dfrac{x}{\ln x}.$
Відповідь. $(0, 1)$ — спадає; $(1,\ e)$ — спадає; $(e,\ +\infty)$ — зростає.

49. $y = 2x^2 - \ln x.$
Відповідь. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ — спадає; $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ — зростає.

50. $y = (x - 2\sin x) \quad (0 \le x \le 2\pi).$
Відповідь. $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ — спадає; $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$ — зростає; $\left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right)$ — спадає.

51. $y = 2\sin x + \cos 2x \quad (0 \le x \le 2\pi).$
Відповідь. $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ — зростає; $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$ — спадає; $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right)$ — зростає; $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right)$ — спадає; $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ — зростає.

52. $y = x + \cos x.$

Відповідь. монотонно зростає.

53. $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.
Відповідь. монотонно зростає.

54. $y=x\sqrt{ax-x^2}\quad (a>0)$.
Відповідь. $\left(0,\ \frac{3}{4}a\right)$ — зростає; $\left(\frac{3}{4}a,\ a\right)$ — спадає.
Знайти екстремуми функцій:

55. $y=2x^3-3x^2$.
Відповідь. $y_{\max}(0)=0,\ y_{\min}(1)=-1$.

56. $y=2x^3-6x^2-18x+7$.
Відповідь. $y_{\max}(-1)=17,\ y_{\min}(3)=-47$.

57. $y=\frac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$.
Відповідь. $y_{\max}(0)=4,\ y_{\min}(-2)=\frac{8}{3}$.

58. $y=\sqrt[3]{x^3-3x^2+8}$.
Відповідь. $y_{\max}(0)=2,\ y_{\min}(2)=\sqrt[3]{4}$.

59. $y=x^2\left(1-x\sqrt{x}\right)$.
Відповідь. $y_{\min}(0)=0,\ y_{\max}\left(2\sqrt[3]{2/49}\right)=\frac{12}{49}\sqrt[3]{\frac{4}{7}}$.

60. $y=x+\sqrt{3-x}$.
Відповідь. $y_{\max}\left(\frac{11}{4}\right)=\frac{13}{4}$.

61. $y=\ln\left(x^2+1\right)$.
Відповідь. $y_{\min}(0)=0$.

62. $y=(2x-1)\sqrt[3]{(x-3)^2}$.
Відповідь. $y_{\min}(3)=0,\ y_{\max}(2)=3$.

63. $y=-x^2\sqrt{x^2+2}$.
Відповідь. $y_{\max}(0)=0$.

64. $y=\frac{2}{3}x^2\sqrt[3]{6x-7}$.
Відповідь. $y_{\max}(0)=0,\ y_{\min}(1)=-\frac{2}{3}$.

65. $y=\frac{4\sqrt{3}}{9x\sqrt{1-x}}$.
Відповідь. $y_{\min}\left(\frac{2}{3}\right)=2$.

66. $y=\frac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$.
Відповідь. $y_{\max}\left(\frac{12}{5}\right)=\frac{\sqrt{205}}{10}$.

67. $y=\sqrt[3]{\left(x^2-a^2\right)^2}$.

Відповідь. $y_{\max}(0)=\sqrt[3]{a^4}$, $y_{\min}(\pm a)=0$.

68. $y=x-\ln(1+x)$.

Відповідь. $y_{\min}(0)=0$.

69. $y=x-\ln\left(1+x^2\right)$.

Відповідь. монотонно зростає.

70. $y=(x-5)^2\ \sqrt[3]{(x+1)^2}$.

Відповідь. $y_{\max}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{81}{8}\sqrt[3]{18}$, $y_{\min}(-1)=0$, $y_{\min}(5)=0$.

71. $y=\left(x^2-2x\right)\ln x-\frac{3}{2}x^2+4x$.

Відповідь. $y_{\max}(1)=2{,}5$; $y_{\min}(e)=\frac{e(4-e)}{2}\approx 1{,}76$.

72. $y=\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\operatorname{arctg}x-\frac{\pi}{8}x^2-\frac{x-1}{2}$.

Відповідь. $y_{\max}(0)=\frac{1}{2}$; $y_{\min}(1)=\frac{\pi}{8}$.

73. $y=\frac{1}{2}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)\arcsin x+\frac{1}{4}x\sqrt{1-x^2}-\frac{\pi}{12}x^2$.

Відповідь. $y_{\max}(0)=0$, $y_{\min}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}-2\pi}{48}$.

74. $y=\frac{x}{2}-\sin^2 x$.

Відповідь. $y_{\max}=\frac{\pi-12+6\sqrt{3}}{24}$, $y_{\min}=\frac{5\pi-12-6\sqrt{3}}{24}$.

75. $y=x\sin x+\cos x-\frac{1}{4}x^2\ \left(-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$.

Відповідь. $y_{\max}\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)=\frac{6\pi\sqrt{3}-\pi^2+18}{36}\approx 1{,}13$; $y_{\min}(0)=1$.

76. $y=\left(\frac{1}{2}-x\right)\cos x+\sin x-\frac{x^2-x}{4}\ \left(0\le x\le\frac{\pi}{2}\right)$.

Відповідь. $y_{\max}\left(\frac{1}{2}\right)=\sin\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$, $y_{\min}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{36\sqrt{3}-12\pi\sqrt{3}+72-\pi^2+6\pi}{144}$.

Знайти найменше та найбільше значення функції на зазначеному інтервалі:

77. $y=x^4-2x^3+3$; $[-3,\ 2]$. *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=2$, $y_{\text{найб}}=66$.

78. $y=x^4-2x^2+5$; $[-2,\ 2]$. *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=4$, $y_{\text{найб}}=13$.

79. $y=x+2\sqrt{x}$; $[0,\ 4]$. *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=0$, $y_{\text{найб}}=8$.

80. $y=x^5-5x^4+5x^3+1$; $[-1,\ 2]$. *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=-10$, $y_{\text{найб}}=2$.

81. $y=x^3-3x^2+6x-2$; $[-1,\ 1]$. *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=-12$, $y_{\text{найб}}=2$.

82. $y=\sqrt{100-x^2}$; $[-6,8]$. *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=6$, $y_{\text{найб}}=10$.

83. $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2}$; $[0,1]$. *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=\dfrac{3}{5}$, $y_{\text{найб}}=1$.

84. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$; $[0,4]$. *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=-1$, $y_{\text{найб}}=\dfrac{3}{5}$.

85. $y=\sin 2x-x$; $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$. *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=-\dfrac{\pi}{2}$, $y_{\text{найб}}=\dfrac{\pi}{2}$.

86. $y=\sqrt[3]{\left(x^2-2x\right)^2}$; $[0,3]$. *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=0$, $y_{\text{найб}}=\sqrt[3]{9}$.

87. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x}$, $[0,1]$. *Відповідь.* $y_{\text{найм}}=0$, $y_{\text{найб}}=\dfrac{\pi}{4}$.

88. Число 8 розбити на два такі доданки, щоб сума їх кубів була найменшою.
Відповідь. 4 та 4.

89. Число 36 розкласти на два такі множники, щоб сума їх квадратів була найменшою.
Відповідь. 6 та 6.

90. Об’єм правильної трикутної призми дорівнює V. Якою повинна бути сторона основи, щоб повна поверхня призми була найменшою?
Відповідь. $\sqrt[3]{4V}$.

91. Знайти співвідношення між радіусом R та висотою H циліндра, який при заданому об’ємі має найменшу повну поверхню.
Відповідь. $H=2R$.

92. Знайти найбільший об’єм конуса з твірною l.

Відповідь. $V=\dfrac{2\pi l^3\sqrt{3}}{27}$.

93. Знайти найбільший об’єм циліндра, повна поверхня якого дорівнює S.

Відповідь. $V=\dfrac{S}{3}\sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$.

За допомогою другої похідної знайти екстремуми функцій:

94. $y=x^3-2ax^2+a^2x \quad (a>0)$.

Відповідь. $y_{\max}\left(\dfrac{a}{3}\right)=\dfrac{4}{27}a^3$, $y_{\min}(a)=0$.

95. $y=x^2(a-x)^2$.

Відповідь. $y_{\max}\left(\dfrac{a}{2}\right)=\dfrac{a^4}{16}$, $y_{\min}(0)=0$, $y_{\min}(a)=0$.

96. $y=x+\dfrac{a^2}{x} \quad (a>0)$.
Відповідь. $y_{\max}(-a)=-2a$, $y_{\min}(a)=2a$.

97. $y=x+\sqrt{1-x}$.

Відповідь. $y_{\max}\left(\dfrac{3}{4}\right)=\dfrac{5}{4}$.

98. $y=x+\sqrt{2-x^2}$.
Відповідь. $y_{\max}(1)=1$, $y_{\min}(-1)=-1$.

99. $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

Відповідь. $y_{\min}(e) = e.$

100. При якому значенні a функція $f(x) = a\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$ має екстремум при $x = \frac{\pi}{3}$? Який це буде екстремум: максимум чи мінімум?
Відповідь. При $a = 2$ максимум.

101. Знайти значення a та b, при яких функція $y = a\ln x + bx^2 + x$ має екстремуми в точках $x_1 = 1$ та $x_2 = 2.$ Показати, що при цих значеннях a та b задана функція має мінімум у точці x_1 та максимум у точці x_2.

Відповідь. $a = -\frac{2}{3}$, $b = -\frac{1}{6}$.

102. З'ясувати, опукла чи вгнута крива $y = x^5 - 5x^3 - 15x^2 + 30$ в околі точок $P_1(1, 11)$ та $P_2(3, 3)$.
Відповідь. Опукла в околі точки P_1, вгнута в околі точки P_2.

103. З'ясувати, опукла чи вгнута крива $y = \operatorname{arctg} x$ в околі точок $P_1\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ та $P_2\left(-1, -\frac{\pi}{4}\right)$.

Відповідь. Опукла в околі точки P_1, вгнута в околі точки P_2.

104. З'ясувати, опукла чи вгнута крива $y = x^2 \ln x$ в околі точок $P_1(1, 0)$ та $P_2\left(\frac{1}{e^2}, -\frac{2}{e^4}\right)$.

Відповідь. Опукла в околі точки P_2, вгнута в околі точки P_1.

105. Показати, що графік функції $y = x\operatorname{arctg} x$ скрізь вгнутий.

106. Показати, що графік функції $y = \ln(x^2 - 1)$ скрізь опуклий.

107. Показати, що крива $y = \dfrac{x+1}{x^2+1}$ має три точки перегину, які лежать на одній прямій.

108. Показати, що точки перегину кривої $y = x\sin x$ лежать на кривій $y^2(4 + x^2) = 4x^2$.

109. Показати, що точки перегину кривої $y = \dfrac{\sin x}{x}$ лежать на кривій $y^2(4 + x^4) = 4.$

110. При яких значеннях a та b точка (1,3) є точкою перегину кривої $y = ax^3 + bx^2$?

Відповідь. $a = -\frac{3}{2}$, $b = \frac{9}{2}$.

Знайти точки перегину кривих:

111. $y = (x-4)^5 + 4x + 4$.
Відповідь. P (4; 20).

112. $y = (x-1)\sqrt[7]{(x-1)^6}$.
Відповідь. P (1; 0).

113. $y = x^4 - 8x^3 + 24x^2$.
Відповідь. Крива точок перегину не має.

Знайти точки перегину, інтервали вгнутості та опуклості графіків функцій.

114. $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5.$

Відповідь. Точка перегину $\left(\frac{5}{3}, -\frac{250}{27}\right)$. Інтервали: опуклості — $\left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$, угнутості — $\left(\frac{5}{3}, +\infty\right)$.

115. $y = (x+1)^4 + e^x$.
Відповідь. Точок перегину не існує, графік функції вгнутий.

116. $y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4$.
Відповідь. Точки перегину (– 3,294) та (2,114). Інтервали: опуклості — $(-\infty, -3)$, угнутості — $(-3, 2)$, опуклості — $(2, +\infty)$.

117. $y=3x^5-5x^4+3x-2$.

Відповідь. Точка перегину $(1,-1)$. Інтервали: опуклості — $(-\infty, 1)$, угнутості — $(1, +\infty)$.

118. $y=\dfrac{x^3}{x^2+3a^2}$ $(a>0)$.

Відповідь. Точки перегину $\left(-3a, -\dfrac{9a}{4}\right)$, $(0,\ 0)$, $\left(3a, \dfrac{9a}{4}\right)$. Інтервали: вгнутості — $(-\infty, 3a)$, опуклості — $(-3a, 0)$, угнутості — $(0, 3a)$, опуклості — $(3a, +\infty)$.

119. $y=a-\sqrt[3]{x-b}$.

Відповідь. Точка перегину (b, a). Інтервали: опуклості — $(-\infty, b)$, вгнутості — $(b, +\infty)$.

120. $y=e^{\sin x}\left(-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Відповідь. Точка перегину $\left(\arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}, e^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$. Інтервали: угнутості — $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, опуклості — $\left(\arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

121. $y=\ln\left(1+x^2\right)$.

Відповідь. Точки перегину $(\pm 1, \ln 2)$. Інтервали: опуклості — $(-\infty, -1)$, угнутості — $(-1, 1)$, опуклості — $(1, +\infty)$.

122. $y=\dfrac{a}{x}\ln\dfrac{x}{a}$ $(a>0)$.

Відповідь. Точка перегину $\left(a\,e^{\frac{3}{2}}, \dfrac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}}\right)$. Інтервали: опуклості — $\left(0, a\,e^{\frac{3}{2}}\right)$, угнутості — $\left(a\,e^{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$.

123. $y=a-\sqrt[5]{(x-b)^2}$.

Відповідь. Точок перегину не існує. Графік угнутий.

Знайти асимптоти кривих:

124. $y=\dfrac{1}{x^2-4x+5}$. *Відповідь.* $y=0$.

125. $y=2x-\dfrac{\cos x}{x}$. *Відповідь.* $x=0$; $y=2x$.

126. $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}-3x$. *Відповідь.* $x=0$; $y=-3x$.

127. $y=\dfrac{1}{2}x+\operatorname{arctg}x$. *Відповідь.* $y=\dfrac{1}{2}x+\pi$; $y=\dfrac{1}{2}x$.

128. $y=c+\dfrac{a^3}{(x-b)^2}$. *Відповідь.* $x=b$, $y=c$.

129. $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$. *Відповідь.* $x=-\dfrac{1}{e}$, $y=x+\dfrac{1}{e}$.

130. $y=xe^{\frac{2}{x}}+1$. *Відповідь.* $x=0$, $y=x+3$.

131. $y=2x+\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$. *Відповідь.* $y=2x\pm\dfrac{\pi}{2}$.

Дослідити функції та побудувати їх графіки:

132. $y = \dfrac{x}{1+x^2}$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty < x < +\infty)$. Графік симетричний відносно початку координат. $y_{\max}(1) = \dfrac{1}{2}$, $y_{\min}(-1) = -\dfrac{1}{2}$. Точки перегину $\left(-\sqrt{3},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0,\ 0)$, $\left(\sqrt{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$. Асимптота $y = 0$.

133. $y = \dfrac{x^2}{x^2-1}$.

Відповідь. Не визначена при $x = \pm 1$. Графік симетричний відносно осі ординат. $y_{\max}(0) = 0$. При $x < -1$ зростає, при $x > 1$ спадає. Графік не має точок перегину. Асимптоти $x = \pm 1$, $y = 1$.

134. $y(x-1)(x-2)(x-3) = 1$.

Відповідь. Визначена скрізь, крім значень $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$. $y_{\max} \approx -2{,}6$ при $x \approx 2{,}58$, $y_{\min} \approx 2{,}6$ при $x \approx 1{,}42$. Точок перегину немає. Асимптоти $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $y = 0$.

135. $y = \left(x^2-1\right)^3$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty, +\infty)$. Графік симетричний відносно осі ординат. $y_{\min}(0) = -1$; $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $\left(\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}, -\dfrac{64}{125}\right)$ — точки перегину. Асимптот немає.

136. $y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$.

Відповідь. Асимптоти $x = \pm 2$, $y = x$. Функція непарна. Графік проходить через початок координат. На інтервалі (– 2; 2) функція монотонно спадає. Екстремуми:

$$y_{\min}\left(2\sqrt{3}\right) = 3\sqrt{3},\ y_{\max}\left(-2\sqrt{3}\right) = -3\sqrt{3},$$

точка перегину (0; 0). На інтервалах $(-\infty, -2)$ та (0, 2) графік функції опуклий, на інтервалах (–2, 0) та $(2, +\infty)$ — угнутий.

137. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Відповідь. $y_{\max}\left(e^2\right) = \dfrac{2}{e}$. Асимптота $y = 0$.

138. $y = 16x(x-1)^3$.

Відповідь. $y_{\min}\left(\dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{27}{16}$, $y_{\text{т.пер}}.(1) = 0$, $y_{\text{т.пер}}\left(\dfrac{1}{2}\right) = -1$. Асимптот немає.

139. $y = \dfrac{1}{x} + 4x^2$.

Відповідь. Визначена скрізь, крім $x = 0$. $y_{\min}\left(\dfrac{1}{2}\right) = 3$. Точка перегину $\left(-\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2},\ 0\right)$. Асимптота x = 0.

140. $y = \dfrac{x^3}{3-x^2}$.

Відповідь. Визначена скрізь, крім $x = \pm\sqrt{3}$. Функція непарна. $y_{\max}(3) = -4{,}5$; $y_{\min}(-3) = 4{,}5$. Точка перегину $(0,\ 0)$. Асимптоти $x = \pm\sqrt{3}$ та $x + y = 0$.

141. $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

Відповідь. Визначена скрізь, крім $x=-1$. $y_{\min}(-3)=-3\frac{3}{8}$. Точка перегину $(0,\ 0)$. Асимптоти $x=-1$ та $y=\frac{1}{2}x-1$.

142. $y(x^3-1)=x^4$.

Відповідь. Визначена скрізь, крім $x=1$. $y_{\max}(0)=0$, $y_{\min}(\sqrt[3]{4})=\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$. Точка перегину $\left(-\sqrt[3]{2},\ -\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}\right)$. Асимптоти $x=1$ та $y=x$.

143. $y=\dfrac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$.

Відповідь. Визначена скрізь, крім $x=0$. $y_{\max}(1)=\frac{7}{2}$, $y_{\max}(-3)=-\frac{11}{6}$, $y_{\min}(2)=\frac{27}{8}$. Абсциса точки перегину графіка функції $x=\frac{9}{7}$. Асимптоти $x=0$ та $y=\frac{1}{2}x+1$.

144. $(y-x)x^4+8=0$.

Відповідь. Визначена скрізь, крім $x=0$. $y_{\max}(-2)=-2{,}5$. Графік точок перегину немає. Асимптоти $x=0$ та $y=x$.

145. $y=x^2e^{-x}$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty,\ +\infty)$. $y_{\max}(2)=\frac{4}{e^2}$, $y_{\min}(0)=0$. Абсциса точки перегину графіка функції $x=2\pm\sqrt{2}$. Асимптота $y=0$.

146. $y=x-\ln(x+1)$.

Відповідь. Область визначення $(-1,\ +\infty)$. $y_{\min}(0)=0$. Графік не має точок перегину. Асимптота $x=-1$.

147. $y=x^2e^{-x^2}$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty,+\infty)$. Функція парна $y_{\max}(\pm1)=\frac{1}{e}$, $y_{\min}(0)=0$. Абсциси точок перегину графіка функції $x=\pm\dfrac{\sqrt{5\pm\sqrt{17}}}{2}$. Асимптота $y=0$.

148. $y=x^3e^{-x}$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty,\ +\infty)$. $y_{\max}(3)=\frac{27}{e^3}$. Абсциси точок перегину $x=0$, $x=3\pm\sqrt{3}$. Асимптота $y=0$.

149. $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty,\ -1)\cup(0,\ +\infty)$. На інтервалі $(-\infty,\ -1)$ функція зростає від e до ∞; на інтервалі $(0,\ +\infty)$ зростає від 1 до e. Графік складається з двох окремих віток. Асимптоти $y=e$ та $x=-1$.

150. $y=x+\sin x$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty,\ +\infty)$. Екстремумів та асимптот не має. Функція непарна. Точки перегину $(k\pi,\ k\pi)$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ ...)$; в точках перегину графік перетинає пряму $y=x$.

151. $y=x\cdot\sin x$.

Відповідь. Область визначення $(-\infty,\ +\infty)$. Функція парна. Абсциси точок екстремуму задовольняють рівняння $\operatorname{tg}x=-x$. Абсциси точок перегину задовольняють рівняння $x\operatorname{tg}x=2$. Асимптот не має.

152. $y=\cos x-\ln\cos x$.

Відповідь. Функція визначена на інтервалах $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$, де $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ ...$. Період

$T = 2\pi.$ Функція парна. $y_{\min}(2k\pi) = 1.$ Графік не має точок перегину. Асимптоти $x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$

153. $y = x - 2\,\mathrm{arctg}\,x.$

Відповідь. Область визначення $(-\infty, +\infty).$ Функція непарна. $y_{\max}(-1) = \frac{\pi}{2} - 1,$ $y_{\min}(1) = 1 - \frac{\pi}{2}.$ Точка перегину (0, 0). Асимптоти $y = x \pm \pi.$

154. $y = e^{\frac{1}{x^2 - 4x + 3}}.$

Відповідь. Визначена скрізь, крім $x = 1,$ $x = 3.$ $y_{\max}(2) = e^{-1}.$ Графік не має точок перегину. Асимптоти $x = 1,$ $x = 3,$ $y = 1.$

155. $y = \sqrt[3]{x^2} - x.$

Відповідь. Область визначення $(-\infty, +\infty).$ $y_{\max}\left(\frac{8}{27}\right) = \frac{4}{27},$ $y_{\min}(0) = 0.$ Графік не має точок перегину та асимптот.

156. $y^3 = x^2\left(x^2 - 4\right)^3.$

Відповідь. Область визначення $(-\infty, +\infty).$ Функція парна. $y_{\max}(0) = 0,$ $y_{\min}(\pm 1) = -3.$ Графік не має точок перегину та асимптот.

157. $(3y + x)^3 = 27x.$

Відповідь. Область визначення $(-\infty, +\infty).$ Функція непарна. $y_{\max}(1) = \frac{2}{3},$ $y_{\min}(-1) = -\frac{2}{3}.$ Точка перегину (0, 0). Асимптот не має.

158. $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2} + 1.$

Відповідь. Область визначення $(-\infty, +\infty).$ $y_{\max}(0) = 2,$ $y_{\min}(-1) = 0.$ Точка перегину $\left(-\frac{1}{2}, 1\right).$ Асимптота $y = 1.$

159. $(y - x)^2 = x^5.$

Відповідь. Область визначення $[0, +\infty).$ Функція двозначна. Функція $y = x + \sqrt{x^5}$ (верхня вітка графіка) монотонно зростає. Функція $y = x - \sqrt{x^5}$ (нижня вітка графіка) має максимум при $x = \frac{\sqrt[3]{20}}{5}.$ Графік точок перегину та асимптот не має.

160. $y^2 = x^3 + 1.$

Відповідь. Визначена при $x \geq -1,$ двозначна. Екстремумів не має. Графік симетричний відносно осі абсцис, має точки перегину (0, 1) та (0, –1). Асимптот не має.

161. $y = e^{\frac{1}{x}} - x.$

Відповідь. Визначена скрізь, крім $x = 0.$ Екстремумів не має. Точка перегину $\left(-\frac{1}{2}, e^{-2} + \frac{1}{2}\right).$ Асимптоти $x = 0,$ $x + y = 1.$

162. Залежність між витратами виробництва у (грош. од.) та обсягом продукції, що виробляється x (од.), виражається функцією $y = 10x - 0{,}04x^3$. Визначити середні та граничні витрати, якщо обсяг продукції становить 5 од.

Відповідь. 9 грош. од.; 7 грош. од.

163. Функції попиту q та пропозиції s від ціни p виражаються відповідно рівняннями $q = 7 - p$ та $s = p + 1$.

Знайти: а) ціну рівноваги; б) еластичність попиту та пропозиції для цієї ціни; в) зміну прибутку (у відсотках) при збільшенні ціни на 5% від рівноважної.

Відповідь. а) 3 грош. од.; б) $E_p(q) = -0{,}75;$ $E_p(s) = 1;$ в) + 1,25%.

164. Обчислити $\sqrt{e}$ з точністю до 0,0001.
Відповідь. 1,6487.

165. Обчислити cos 41° з точністю до 10^{-3}.
Відповідь. 0,754.

166. Обчислити $\sqrt[3]{121}$ з точністю до 10^{-3}.
Відповідь. 4,946.

Обчислити з точністю до 10^{-3}.

167. $\sqrt[3]{e}$. *Відповідь.* 1,395.

168. $\sqrt[7]{129}$. *Відповідь.* 2,002.

169. $\sin 36°$. *Відповідь.* 0,587.

ІНДИВІДУАЛЬНІ ДОМАШНІ ЗАВДАННЯ

Задача 23. Знайти похідну першого порядку заданої функції.

1	$y=\sin^2 3x$, $y=\ln\dfrac{x^2}{x+1}$	$y=(\sin x)^{\ln x}$	$y\sin x=\cos(x-y)$
2	$y=\cos^2 5x$, $y=\ln\sqrt{(1-\sin x)/(1+\sin x)}$	$y=(\mathrm{tg}\, x)^x$	$x^3+y^3=3xy$
3	$y=\sqrt{1-x^2}$, $y=x^2+x\arcsin x$	$y=(\ln x)^{\arcsin x}$	$x^4+y^4=x^2y^2$
4	$y=2\sqrt{2x+1}$, $y=3\ln(2+\sin x)$	$y=(\sin x)^{\sqrt{x+1}}$	$3^x+3^y=3^{x-y}$
5	$y=(x+1)e^{-x}$, $y=x^3(3\ln x-1)$	$y=(x^2+1)^{\mathrm{ch}\, x}$	$y-1-xe^y=0$
6	$y=e^x(x-1)$, $y=\ln\dfrac{x+1}{x}$	$y=(x-3)^{e^{2x}}$	$(e^x-1)(e^y+1)=1$
7	$y=2\sqrt{5x+4}$, $y=\mathrm{arctg}^2\sqrt{x}$	$y=x^{5\ln\sin x}$	$y=x+\mathrm{arctg}\, y$
8	$y=x2^{3x-7}$, $y=\sin\sqrt{3}+\dfrac{\sin^2 3x}{3\cos 6x}$	$y=(\ln \mathrm{ctg}\, x)^{\sqrt{2x-1}}$	$xy+\ln y=2\ln x$
9	$y=\sin^3 x$, $y=\sqrt{x}\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})$	$y=(3x^5+4)^{x+7}$	$x\sin y+y\cos x=5$
10	$y=e^{5x}(5x-1)$, $y=\dfrac{2\ln x+1}{x^2}$	$y=(3x+7)^{2^x}$	$\mathrm{tg}(y/x)=5x$
11	$y=\ln(\mathrm{ch}\, x)$, $y=e^{2x}(\sin 2x+\cos 2x)$	$y=(\cos 2x)^{\sin x}$	$y^2-2xy+9=0$
12	$y=\cos^{-2} x$, $y=\ln\dfrac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}$	$y=(\mathrm{ctg}\, x)^{\ln x}$	$x^3+x^2y+y^2=0$
13	$y=2\sqrt{e^x+1}$, $y=\ln\dfrac{1-2^x}{1+2^x}$	$y=(\ln x)^{\arccos x}$	$\cos^2(x+y)=4$
14	$y=\sqrt{1+x^2}$, $y=\dfrac{x}{2}\mathrm{arctg}\dfrac{e^x-3}{2}$	$y=(\cos x)^{\sqrt{2x+1}}$	$2^x+2^y=2^{x+y}$
15	$y=\ln^2 x$, $y=2\,\mathrm{arctg}\sqrt{2^x-1}$	$y=(x^3-1)^{\mathrm{sh}\, x}$	$\sin(xy)=y$
16	$y=\arccos e^x$, $y=3\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$	$y=(2x+3)^{2e^x}$	$xy=\mathrm{arctg}(x/y)$
17	$y=\ln x^2$, $y=\ln\sqrt{1-9x^4}$	$y=x^{\ln\cos 3x}$	$y^2x=e^{y/x}$

18	$y=\sqrt{1-e^{2x}}$, $y=2\dfrac{\cos x}{\sin^4 x}$	$y=(\ln\cos x)^{\sqrt{x+1}}$	$2^x+2^y=2^{x+y}$
19	$y=\arcsin e^x$, $y=\ln\ln^2\ln^3 x$	$y=(3x^2+2)^x$	$e^x\sin y=e^y\cos x$
20	$y=\operatorname{ch}^3 2x$, $y=\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$	$y=(4-x)^{3^x}$	$e^{x+y}=xy$
21	$y=\operatorname{sh}^2 2x$, $y=\arcsin(\sqrt{x}-2)/(5x)$	$y=(\ln x)^{\cos 4x}$	$y=x+e^y\operatorname{arctg} x$
22	$y=2\sqrt{2^x-1}$, $y=e^{2x}(2x-1)$	$y=(\cos x)^{\operatorname{tg} x}$	$x\sin y-y\cos x=0$
23	$y=\ln(\operatorname{sh} x)$, $y=\cos\sqrt{3}+\dfrac{\cos 4x}{4\sin^2 2x}$	$y=(\operatorname{arctg} x)^{\ln x}$	$e^{xy}-x^2+y^2=0$
24	$y=\sqrt{\cos x}$, $y=\dfrac{4+x^4}{x^3}\operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{2}$	$y=(\arcsin x)^{\sqrt{1-x}}$	$\cos(xy)=x$
25	$y=\sqrt{\sin x}$, $y=2\sqrt{x}-4\ln(2+\sqrt{x})$	$y=(5x-4)^{e^{x+1}}$	$y\ln x=x\ln y$
26	$y=\dfrac{1}{x}\sqrt{1-x^2}$, $y=\dfrac{\arccos x}{2x^2}$	$y=(x^2+2x)^{\operatorname{th} x}$	$y^3=(x-y)/(x+y)$
27	$y=\operatorname{arctg}\sqrt{x}$, $y=e^{x^3}/(1+x^3)$	$y=x^{\ln\operatorname{tg} x}$	$xy^3+2y-1=0$
28	$y=\cos^2(3x+2)$, $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$	$y=(\ln\sin x)^{\sqrt{x}}$	$\sin^2(x+y)-2=0$
29	$y=\sqrt{1+e^{2x}}$, $y=\ln\operatorname{tg}(\pi/4+x/2)$	$y=(1-2x^3)^{1-x}$	$x\cos y=\sin(x+y)$
30	$y=\ln^3 x$, $y=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}}$	$y=(3x-8)^{5^x}$	$x+y+\operatorname{arctg} xy=0$

Задача 24. Знайти похідні та диференціали 1-го та 2-го порядків заданої функції.

1	$y=x\arcsin(1/x)+\ln(x+\sqrt{x^2-1})$	16	$y=\operatorname{tg}(2\arccos\sqrt{1-2x^2})$
2	$y=\sqrt{1+2x}-\ln(x+\sqrt{1+2x})$	17	$y=x^2\operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-1}$
3	$y=\arccos(1/\sqrt{1+2x^2})$	18	$y=x\ln(x+\sqrt{x^2+3})-\sqrt{x^2+3}$
4	$y=\dfrac{\ln x}{1+x^2}-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2}{1+x^2}$	19	$y=\ln(x^2-1)-\dfrac{1}{x^2-1}$
5	$y=\ln(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x})$	20	$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg} x$
6	$y=\sqrt{\operatorname{ctg} x}-\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}/3$	21	$y=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}(x/2)+1\right)$
7	$y=\ln(\mathrm{e}^x+\sqrt{\mathrm{e}^{2x}-1})+\arcsin\mathrm{e}^x$	22	$y=x\sqrt{4-x^2}+a\arcsin\left(x/2\right)$
8	$y=\ln\operatorname{tg}(x/2)-x/\sin x$	23	$y=2x+\ln(\sin x+2\cos x)$
9	$y=\operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x)+\operatorname{sh} x\ \ln\operatorname{ch} x$	24	$y=\cos x\ln\operatorname{tg} x-\ln\operatorname{tg}(x/2)$
10	$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\ln(2x)$	25	$y=\sqrt[3]{(x+2)/(x-2)}$
11	$y=\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x}$	26	$y=\arccos\dfrac{x^2-1}{\sqrt{2}x^2}$
12	$y=\ln(2x+2\sqrt{x^2+x}+1)$	27	$y=(\sqrt{x-1}-1/2)\,\mathrm{e}^{2\sqrt{x-1}}$
13	$y=\mathrm{e}^x\left(\cos 2x+2\sin 2x\right)$	28	$y=x\left(\sin\ln x-\cos\ln x\right)$
14	$y=\ln\cos\sqrt{x}+\sqrt{x}\operatorname{tg}\sqrt{x}$	29	$y=\sqrt{x}-\left(1+x\right)\operatorname{arctg}\sqrt{x}$
15	$y=x\operatorname{arctg} x-\ln\sqrt{1+x^2}$	30	$y=x\sqrt{x^2-1}+\ln(x+\sqrt{x^2-1})$

Задача 25. Скласти рівняння дотичної до кривої у точці з абсцисою x_0.

1	$y=(4x-x^2)/4, \quad x_0=2$	16	$y=(x^2-3x+6)/x^2, \quad x_0=3$
2	$y=2x^2+3x-1, \quad x_0=-2$	17	$y=x-x^3, \quad x_0=-1$
3	$y=\sqrt[3]{x^2}-20, \quad x_0=-8$	18	$y=x+\sqrt{x^3}, \quad x_0=1$
4	$y=x^2+8\sqrt{x}-32, \quad x_0=4$	19	$y=\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}, \quad x_0=64$
5	$y=2x^2-3x+1, \quad x_0=1$	20	$y=(x^3+2)/(x^3-2), \ x_0=2$
6	$y=8\sqrt[4]{x}-70, \quad x_0=16$	21	$y=(1+\sqrt{x})/(1-\sqrt{x}), \ x_0=4$
7	$y=2x^2+3, \quad x_0=-1$	22	$y=1/(3x+2), \quad x_0=2$
8	$y=(x^{29}+6)/(x^4+1), \ x_0=1$	23	$y=2x+1/x, \quad x_0=1$
9	$y=(x^5+1)/(x^4+1), \ x_0=1$	24	$y=(x^{16}+9)/(1-5x^2), \ x_0=1$
10	$y=3(\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}), \quad x_0=1$	25	$y=-2(\sqrt[3]{x}+3\sqrt{x}), \quad x_0=1$
11	$y=(x^2-3x+3)/3, \quad x_0=3$	26	$y=x/(x^2+1), \quad x_0=-2$
12	$y=2x/(x^2+1), \quad x_0=1$	27	$y=(3x-2x^3)/3, \quad x_0=1$
13	$y=14\sqrt{x}-15\sqrt[3]{x}+2, \quad x_0=1$	28	$y=3\sqrt[4]{x}-\sqrt{x}, \quad x_0=1$
14	$y=x^2/10+3, \quad x_0=2$	29	$y=(x^2-2x-3)/4, \quad x_0=4$
15	$y=(1+3x^2)/(3+x^2), \ x_0=1$	30	$y=-2(x^8+2)/(3(x^4+1)), \ x_0=1$

Задача 26. Скласти рівняння дотичної до кривої у точці t_0.

1	$\begin{cases} x=\ln t, \\ y=t-1, \end{cases} t_0=1$	11	$\begin{cases} x=t+\sin t, \\ y=2-\cos t, \end{cases} t_0=\frac{\pi}{2}$	21	$\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=2-\cos t, \end{cases} t_0=\frac{\pi}{2}$
2	$\begin{cases} x=1/t^2, \\ y=1/(t^2+1), \end{cases} t_0=1$	12	$\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2}, \\ y=\operatorname{tg}\sqrt{1+t} \end{cases} t_0=0$	22	$\begin{cases} x=\sqrt{t-3}, \\ y=\ln(t-2), \end{cases} t_0=4$
3	$\begin{cases} x=\cos 2t, \\ y=2/\cos^2 t, \end{cases} t_0=\frac{\pi}{4}$	13	$\begin{cases} x=\sin t-t\cos t, \\ y=\cos t+t\sin t \end{cases}$	23	$\begin{cases} x=\operatorname{ctg}(2e^t), \\ y=\ln\operatorname{tg}e^t, \end{cases} t_0=0$
4	$\begin{cases} x=e^t\cos t, \\ y=e^t\sin t, \end{cases} t_0=0$	14	$\begin{cases} x=e^t, \\ y=\arcsin t, \end{cases} t_0=0$	24	$\begin{cases} x=\cos^2 t, \\ y=\operatorname{tg}^2 t, \end{cases} t_0=\frac{\pi}{4}$
5	$\begin{cases} x=1/t, \\ y=1/(1+t^2), \end{cases} t_0=1$	15	$\begin{cases} x=\sin^2 t, \\ y=\cos^2 t, \end{cases} t_0=\frac{\pi}{4}$	25	$\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin^4(t/2), \end{cases} t_0=\frac{\pi}{2}$
6	$\begin{cases} x=\ln t, \\ y=1/t, \end{cases} t_0=1$	16	$\begin{cases} x=\ln t, \\ y=\operatorname{arctg} t, \end{cases} t_0=1$	26	$\begin{cases} x=t+\sin t, \\ y=2+\cos t, \end{cases} t_0=\frac{\pi}{2}$
7	$\begin{cases} x=\operatorname{tg} t, \\ y=1/\sin 2t, \end{cases} t_0=\frac{\pi}{4}$	17	$\begin{cases} x=\sin t, \\ y=\ln\cos t, \end{cases} t_0=\frac{\pi}{4}$	27	$\begin{cases} x=\operatorname{arctg} t, \\ y=t^2/2, \end{cases} t_0=1$
8	$\begin{cases} x=\sqrt{t-1}, \\ y=\ln t, \end{cases} t_0=2$	18	$\begin{cases} x=\sqrt{t}, \\ y=1/\sqrt{1-t}, \end{cases} t_0=\frac{1}{4}$	28	$\begin{cases} x=\arcsin t, \\ y=\sqrt{1+t}, \end{cases} t_0=0$
9	$\begin{cases} x=\sqrt{t-1}, \\ y=t/\sqrt{t-1}, \end{cases} t_0=2$	19	$\begin{cases} x=\sqrt{t-1}, \\ y=1/\sqrt{t}, \end{cases} t_0=2$	29	$\begin{cases} x=\sqrt{1-t}, \\ y=t/\sqrt{1-t}, \end{cases} t_0=0$

10	$\begin{cases} x=\sin t, \\ y=1/\cos t, \end{cases} \quad t_0=\dfrac{\pi}{4}$	20	$\begin{cases} x=\cos t+\sin t, \\ y=\sin 2t, \end{cases} \quad t_0=\dfrac{\pi}{2}$	30	$\begin{cases} x=\ln \operatorname{tg} t, \\ y=1/\sin^2 t, \end{cases} \quad t_0=\dfrac{\pi}{4}$

Задача 27. Обчислити границі функцій, користуючись, коли це можливо, правилом Лопіталя.

1	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$	$\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x-1/x)$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\cos x}$
2	$\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$	$\lim\limits_{x\to 0}x^2 e^{1/x^2}$	$\lim\limits_{x\to +0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{3+2x}$
3	$\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln\sin 4x}{\ln\sin x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}-\dfrac{1}{x}\right)$	$\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{1/x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$
4	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x\operatorname{arctg} x}$	$\lim\limits_{x\to +0}(1-\cos x)\ln x$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{\sqrt{1+x^2}}$
5	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{\sin^3 x}$	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$	$\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x^2+5}$
6	$\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln x}{1+2\ln\sin x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\sin(x/3)\operatorname{ctg} x$	$\lim\limits_{x\to +\infty}(x+2^x)^{1/x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x+\sin x}$
7	$\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})}{x^3}$	$\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{3/x^2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin x^{-1}}{\sin x}$
8	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{\sin 3x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x+\sin x}$
9	$\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{\ln(4x-1)}{\ln\sin\pi x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}-\dfrac{\pi}{2x}\right)$	$\lim\limits_{x\to +0}(\operatorname{arctg} x)^x$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{3x-7}$
10	$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^{2x}}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to +0}\sin x\ln x$	$\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)^{1/x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{x+\sin x}$
11	$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\ln\sin 2x}{\ln\sin 4x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x+\cos x}$
12	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\sin^2 x}$	$\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$	$\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{1-x}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\cos x}{\sqrt{9+x^2}}$
13	$\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{1/x^2}$	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin x^{-1}}{2\cos x}$
14	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x-\sin x}$	$\lim\limits_{x\to 0}x^2\ln^2 x$	$\lim\limits_{x\to +0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{3x^2+4}$
15	$\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln(1+\sin^2\sqrt{x})}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$	$\lim\limits_{x\to +0}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{x^2}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{\sqrt[3]{x^3+8}}$
16	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin\pi x}$	$\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x^2)\operatorname{ctg} x$	$\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{1/x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x^2}$
17	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x-\sin x}$	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x-\cos x}$
18	$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x-2)}{\ln(e^{x-2}-1)}$	$\lim\limits_{x\to +0}\operatorname{tg} x\ln x$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}(2\sin x)^{\operatorname{ctg} 6x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x-\sin x}$

19	$\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{1-x}$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\operatorname{tg}x-\frac{1}{1-\sin x}\right)$	$\lim\limits_{x\to1-0}(1-x)^{\frac{1}{\ln(1-x)}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\cos x}{x+\cos x}$
20	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 2x}$	$\lim\limits_{x\to0}\sqrt[3]{x}\ln^2 x$	$\lim\limits_{x\to+0}(2^{1/x}-1)^x$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\cos x}{x^2}$
21	$\lim\limits_{x\to1}\frac{2^{\ln x}-1}{\ln x}$	$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)$	$\lim\limits_{x\to+0}(\ln x)^{\sin x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-\sin x}{4x+\cos x}$
22	$\lim\limits_{x\to2}\frac{\arcsin(2-x)}{\sqrt{x^2-3x+2}}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-2x}\ln x$	$\lim\limits_{x\to1}(2^{\ln x}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x^2\cos x^{-1}}$
23	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\ln\operatorname{tg}x}$	$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2+x}-\frac{1+x}{x^2}\right)$	$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\ln(e^x-1)}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+\cos x}$
24	$\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\ln\cos2x}{\ln\cos4x}$	$\lim\limits_{x\to4-0}\ln\left(1-\frac{x}{4}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{4}$	$\lim\limits_{x\to0}(2-2^x)^{1/x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\cos x}{4x+5}$
25	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(\ln x)}{x}$	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x}{\operatorname{ctg}x}-\frac{\pi}{2\cos x}\right)$	$\lim\limits_{x\to+0}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x+\sin x}$
26	$\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln(\operatorname{arctg}x)}{\ln x}$	$\lim\limits_{x\to+\infty}(2^{1/x}-1)x$	$\lim\limits_{x\to+0}(1+\sin x)^{1/x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+\sin x}{4x+\cos x}$
27	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\ln x}{e^{2x}}$	$\lim\limits_{x\to\pi-0}\left(\operatorname{ctg}x-\frac{1}{x-\pi}\right)$	$\lim\limits_{x\to2}\left(\ln\frac{1}{x-2}\right)^{x-2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{9x^2+1}}{x+\sin x}$
28	$\lim\limits_{x\to1}\frac{e^x-e}{\sin(x^2-1)}$	$\lim\limits_{x\to+0}\operatorname{arctg}x\ln^2 x$	$\lim\limits_{x\to2}(3-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}}$	$\lim\limits_{x\to0}\frac{x\sin x^{-1}}{\sin^2 x}$
29	$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{x^2}$	$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$	$\lim\limits_{x\to+0}(\operatorname{ctg}x)^{1/\ln x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\cos x}{5x^2-9}$
30	$\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{\sqrt{x-e}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}(\pi-2\operatorname{arctg}x)\ln x$	$\lim\limits_{x\to1-0}x^{\ln(1-x)}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+8}}{x+\sin x}$

Задача 28. Знайти найбільше і найменше значення функції на відрізку.

1	$y=\sqrt[3]{2(x-1)^2(x-4)},\quad [0;4]$	16	$y=\sqrt[3]{2x^2(x-6)},\quad [-2;4]$
2	$y=x^2+\frac{16}{x}-16,\quad [1;4]$	17	$y=4-x-\frac{4}{x^2},\quad [1;4]$
3	$y=x^3-6x^2+9,\quad [-1;2]$	18	$y=2x^3+3x^2-120x+100, [-4;5]$
4	$y=2\sqrt{x}-x,\quad [0;4]$	19	$y=x-4\sqrt{x}+5,\quad [1;9]$
5	$y=x-2\ln x,\quad [1,5;e]$	20	$y=x\ln(x/5),\quad [1;5]$
6	$y=\sqrt[3]{2(x-2)^2(5-x)},\quad [1;5]$	21	$y=1+\sqrt[3]{2(x-1)^2(x-7)},\quad [-1;8]$
7	$y=-x^2/2+8/x+8,\quad [-4;-1]$	22	$y=2x^2+108/x-59,\quad [2;4]$
8	$y=10x/(1+x^2),\quad [0;3]$	23	$y=4x/(4+x^2),\quad [-4;2]$
9	$y=2\sqrt{x-1}-x+2,\quad [1;5]$	24	$y=x-4\sqrt{x+2}+8,\quad [-1;7]$
10	$y=\frac{2(x^2+3)}{x^2-2x+5},\quad [-3;3]$	25	$y=\frac{-2x(2x+3)}{x^2+4x+5},\quad [-2;1]$
11	$y=3+\sqrt[3]{2(x+2)^2(x-4)}, [-4;2]$	26	$y=\sqrt[3]{2(x+1)^2(x-2)},\quad [-2;5]$

12	$y=x^2-2x+\dfrac{16}{x-1}-13,\quad [2;5]$	27	$y=-\dfrac{x^2}{2}+2x+\dfrac{8}{x-2}+5,\quad [-2;1]$
13	$y=\dfrac{2(-x^2+7x-7)}{x^2-2x+2},\quad [1;4]$	28	$y=\dfrac{10(x+1)}{x^2+2x+2},\quad [-1;2]$
14	$y=2\sin x+\cos 2x,\quad [0;2\pi]$	29	$y=2\sin x+\sin 2x,\quad [0;3\pi/2]$
15	$y=3-x-4/(x+2)^2,\quad [-1;2]$	30	$y=x^2+4x+16/(x+2)-9, [-1;2]$

Задача 29. Побудувати графік функції за допомогою похідної першого порядку.

1	$y=x(12-x^2)/8$	11	$y=3x-x^3$	21	$y=2x^3-9x^2+12x-9$
2	$y=16x^3-12x^2-4$	12	$y=x^2(x-2)^2$	22	$y=(16-6x^2-x^3)/8$
3	$y=-(x^2-4)^2/16$	13	$y=2-2x^2-x^3$	23	$y=16x^3+12x^2-5$
4	$y=x^2(x-4)^2/16$	14	$y=6x-8x^3$	24	$y=(x-2)^2(x-6)^2/16$
5	$y=6x-2x^3$	15	$y=2x^3+3x^2-5$	25	$y=(x-1)^2(x-3)^2$
6	$y=16x^2(x+1)^2$	16	$y=16x^2(x-1)^2$	26	$y=x^3+3x^2-9x-9$
7	$y=4x^3-6x^2+1$	17	$y=2x^3-3x^2-4$	27	$y=(x+1)^2(x-1)^2$
8	$y=(x^3+3x^2)/4-5$	18	$y=2-12x^2-8x^3$	28	$y=(2x+1)^2(2x-1)^2$
9	$y=x(x^2-12)/4$	19	$y=2x^3+9x^2+12x$	29	$y=12x^2-8x^3-2$
10	$y=2x^3+3x^2-1$	20	$y=(2x-1)^2(2x-3)^2$	30	$y=27(x^3-x^2)/4-4$

Задача 30. Провести повне дослідження функції та побудувати графік.

1	$y=\dfrac{x^2+2x-7}{x^2+2x-3}$	11	$y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$	21	$y=\dfrac{-3x^2+6x+9}{x^2-2x+13}$
2	$y=\dfrac{e^{2x+2}}{2(x+1)}$	12	$y=\dfrac{e^{x+3}}{x+3}$	22	$y=-\dfrac{e^{-x-2}}{x+2}$
3	$y=\dfrac{2}{x^2+2x}$	13	$y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$	23	$y=\dfrac{4}{-x^2+2x+3}$
4	$y=(2x+3)e^{-2(x+1)}$	14	$y=-(x+1)e^{x+2}$	24	$y=(x-2)^2e^x$
5	$y=\ln(x^2+1)$	15	$y=x/\ln x$	25	$y=\ln x/x$
6	$y=\ln\dfrac{x+6}{x}-1$	16	$y=3\ln\dfrac{x}{x-3}-1$	26	$y=3-3\ln\dfrac{x}{x+4}$
7	$y=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$	17	$y=-\dfrac{8x}{x^2+4}$	27	$y=\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$
8	$y=\dfrac{4-x^3}{x^2}$	18	$y=\dfrac{x^2}{(x-1)^2}$	28	$y=\dfrac{x^3-32}{x^2}$
9	$y=\ln\dfrac{x-5}{x}+2$	19	$y=x-\ln(x-1)$	29	$y=2\ln\dfrac{x}{x-4}-3$
10	$y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$	20	$y=\dfrac{x^2-4x+1}{x-4}$	30	$y=\dfrac{2x^3+1}{x^2}$