

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»
КАФЕДРА ДІНАМІКИ МАШИН ТА МЕХАНІЧНОЇ ІНЖЕНЕРІЇ

Вовк Вікторія Валентинівна

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК
з дисципліни:
«ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА»
РОЗДІЛ. ДИНАМІКА
Частина перша

ОДЕСА 2022

Рецензент: А.В.Конопльов, д-р тех. наук, проф.

Вовк В.В.

Теоретична механіка. Розділ. Динаміка. Перша частина : Навчальний посібник для здобувачів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти / Національний університет «Одеська політехніка» - Одеса, 2022 - 84с

Навчальний посібник служить задачі ефективнішого оволодіння матеріалу курсу під час виконання здобувачами самостійної роботи. В ньому наведено короткі теоретичні відомості, методику та приклади розв'язування задач, питання для самоконтролю, а також допоміжні і довідкові матеріали.

Рекомендовано до видання вченою радою Навчального наукового інституту цифрових технологій, дизайну та транспорту від 26.08.2022р. (протокол №5).

ЗМІСТ

ЧАСТИНА 1. ДИНАМІКА	4
Розділ 1. Динаміка матеріальної точки.	4
1.1. Диференціальні рівняння руху матеріальної точки	4
1.1.1. Короткі теоретичні відомості	4
1.1.2. Приклади розв'язування задач.	9
Розділ 2. Основні теореми динаміки.	24
2.1. Теорема про зміну кількості руху системи матеріальних точок.	24
2.1.1. Короткі теоретичні відомості.	24
2.1.2. Приклади розв'язування задач.	26
2.2. Теорема про рух центра мас механічної системи.	36
2.2.1. Короткі теоретичні відомості.	36
2.2.2. Приклади розв'язування задач.	38
2.3. Теорема Ейлера про рух рідини.	43
2.3.1. Короткі теоретичні відомості.	43
2.3.2. Приклади розв'язування задач.	44
2.4. Теорема про зміну кінетичної енергії.	47
2.4.1. Короткі теоретичні відомості.	47
2.4.2. Приклади розв'язування задач.	50
2.5. Теорема про зміну моменту кількості руху (кінетичного моменту).	61
2.5.1. Короткі теоретичні відомості.	61
2.5.2. Приклади розв'язування задач.	64
Розділ 3. Питання для самоконтролю.	74
Додатки	77
Список літератури	84

ДИНАМІКА

Розділ 1

ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

1.1. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

1.1.1. Короткі теоретичні відомості

Перший закон Ньютона (закон інерції). Ізольована матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху доти, доки вплив з боку інших тіл не виведе її з цього стану.

Другий закон Ньютона (основний закон динаміки). Швидкість зміни кількості руху матеріальної точки дорівнює силі, що діє на цю точку:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}, \quad (1.1)$$

де m - маса матеріальної точки; $m\vec{v}$ - кількість руху точки.

У випадку $m = \text{const}$ маємо основне рівняння динаміки матеріальної точки.

$$m\vec{w} = \vec{F}, \quad (1.2)$$

де $\vec{w} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ - прискорення точки.

Третій закон Ньютона (закон рівності дії і протидії). Сили взаємодії двох матеріальних точок або двох тіл (дія і протидія) рівні за величиною, протилежно напрямлені і мають спільну лінію дії.

Закон незалежності дії сил (принцип суперпозиції). Прискорення матеріальної точки, що виникає при одночасній дії на неї кількох сил, дорівнює векторній сумі прискорень, які надають точці окремі сили:

$$m\vec{w} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n, \quad (1.3)$$

де $\vec{w} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \dots + \vec{w}_n$; відповідно $\vec{w}_i = \frac{\vec{F}_i}{m}$ - прискорення точки, надане силою \vec{F}_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

Отже, напрям прискорення точки збігається з напрямом рівнодійної системи сил, прикладених до точки.

На підставі основного рівняння динаміки матеріальної точки (1.2) та принципу суперпозиції можна записати диференціальні рівняння руху точки.

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки у векторній формі

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \left(t, \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right), \quad (1.4)$$

де $\vec{r} = \vec{r}(t)$ – радіус-вектор точки; $\frac{d\vec{r}}{dt}$ – її швидкість; $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$ – її прискорення;

$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i$ – рівнодійна системи сил, прикладених до точки.

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки в координатній формі

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= \sum_{i=1}^n F_{ix} \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right), \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} &= \sum_{i=1}^n F_{iy} \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right), \\ m \frac{d^2 z}{dt^2} &= \sum_{i=1}^n F_{iz} \left(t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right), \end{aligned} \quad (1.5)$$

x, y, z – координати точки в нерухомій декартовій системі координат $Oxyz$; $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ – проекції швидкості точки; $\frac{d^2 x}{dt^2}, \frac{d^2 y}{dt^2}, \frac{d^2 z}{dt^2}$ – проекції прискорення точки; $\sum_{i=1}^n F_{ix}, \sum_{i=1}^n F_{iy}, \sum_{i=1}^n F_{iz}$ – суми проекцій рівнодійної сил, прикладених до точки, на осі системи координат, $Oxyz$.

Диференціальні рівняння руху матеріальної точки в натуральній формі

$$\begin{aligned} m \ddot{s} &= \sum_{i=1}^n F_{it} \left(t, s, \frac{ds}{dt} \right), \\ m \frac{\dot{s}^2}{\rho} &= \sum_{i=1}^n F_{in} \left(t, s, \frac{ds}{dt} \right), \\ \mathbf{0} &= \sum_{i=1}^n F_{ib} \left(t, s, \frac{ds}{dt} \right), \end{aligned} \quad (1.6)$$

де ρ – радіус кривини траєкторії; s – дугова координата; $\sum_{i=1}^n F_{i\tau}$, $\sum_{i=1}^n F_{in}$,

$\sum_{i=1}^n F_{ib}$ – проєкції рівнодійної сил на осі τ, n, b натуральної системи

координат, початок відліку якої знаходиться у рухомій точці.

Диференціальні рівняння плоского руху матеріальної точки в полярних координатах

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= \sum_{i=1}^n F_{ir}(t, r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}), \\ \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\varphi}) &= \sum_{i=1}^n F_{i\varphi}(t, r, \varphi, \dot{r}, \dot{\varphi}), \end{aligned} \quad (1.7)$$

де r – довжина радіуса – вектора точки; φ – полярний кут; $\sum_{i=1}^n F_{ir}$,

$\sum_{i=1}^n F_{i\varphi}$ – проєкції рівнодійної сил на радіальний і трансверсальний напрями.

Пряма (перша) основна задача динаміки матеріальної точки. За відомим кінематичним законом руху точки та її масою визначити рівнодійну сил, прикладених до точки.

При координатному способі задання руху матеріальної точки перша основна задача динаміки розв’язується на підставі рівнянь (1.5), тобто

$$F_x = m\ddot{x}, F_y = m\ddot{y}, F_z = m\ddot{z},$$

звідки

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}, \quad (1.8)$$

де F_x, F_y, F_z – проєкції рівнодійної; F – модуль рівнодійної. Напрямок вектора рівнодійної визначається напрямними косинусами

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{\vec{F}, Ox}) &= \frac{F_x}{F}, \quad \cos(\widehat{\vec{F}, Oy}) = \frac{F_y}{F}, \\ \cos(\widehat{\vec{F}, Oz}) &= \frac{F_z}{F}. \end{aligned}$$

При натуральній формі завдання руху матеріальної точки рівнодійну можна визначити, застосовуючи рівняння (1.6):

$$F_{\tau} = m\ddot{s}, F_n = m \frac{\dot{s}^2}{\rho},$$

$$\text{звідки } F = \sqrt{F_{\tau}^2 + F_n^2}.$$

Кут α між рівнодійною силою \vec{F} та напрямком нормалі до траєкторії точки визначають з виразу

$$\tan \alpha = \frac{F_{\tau}}{F_n} = \frac{\ddot{s}\rho}{\dot{s}^2} = \frac{\dot{v}\rho}{v^2}.$$

Якщо рух матеріальної точки заданий у полярній системі координат, то

$$F = \sqrt{F_r^2 + F_{\varphi}^2},$$

сили F_r , та F_{φ} визначають з відповідних рівнянь у формі (1.7).

Якщо рух матеріальної точки здійснюється в центральному полі сил, тобто в площині радіуса-вектора r і початкової швидкості, то рівнодійну такої системи сил визначають з виразу (*друга формула Біне*)

$$F_r = -\frac{4mv_c^2}{r^2} \left[\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] = -\frac{mC^2}{r^2} \left[\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right], \quad (1.9)$$

де $C = 2v_c = \text{const}$; $v_c = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi}$ – секторна швидкість.

Методика розв’язування першої задачі динаміки:

- 1) вибрати систему відліку;
- 2) зобразити поточне положення точки;
- 3) визначити за заданим законом руху проекції прискорення точки на координатні осі;
- 4) скласти рівняння руху точки відповідно до вибраної системи відліку;
- 5) визначити шукані сили з рівнянь руху.

Обернена (друга) основна задача динаміки матеріальної точки. За заданими силами та масою точки визначити її кінематичні рівняння руху. Розв’язання даної задачі полягає в інтегруванні відповідних диференціальних рівнянь руху точки з застосуванням відомих прийомів теорії звичайних диференціальних рівнянь.

При *координатному способі* задання руху точки (наприклад, у прямокутній декартовій системі відліку) шукані величини є функціями часу і шести сталих інтегрування C_i , $i = 1, 2, \dots, n$:

$$\begin{aligned} x &= x(t, C_1, \dots, C_6), \\ y &= y(t, C_1, \dots, C_6), \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}(t, \mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_6).$$

Визначення конкретного закону руху з усієї множини можливих законів руху проводиться з використанням *початкових умов, тобто значень координат та проєкцій швидкостей у початковий момент часу*:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0, & \mathbf{y}(t_0) &= \mathbf{y}_0, & \mathbf{z}(t_0) &= \mathbf{z}_0, \\ \dot{\mathbf{x}}(t_0) &= \dot{\mathbf{x}}_0, & \dot{\mathbf{y}}(t_0) &= \dot{\mathbf{y}}_0, & \dot{\mathbf{z}}(t_0) &= \dot{\mathbf{z}}_0. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Розв'язуючи систему рівнянь (розв'язок в явній формі не завжди існує)

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0, \mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_6), \\ \mathbf{y}_0 = \mathbf{y}(t_0, \mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_6), \\ \mathbf{z}_0 = \mathbf{z}(t_0, \mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_6), \\ \dot{\mathbf{x}}_0 = \dot{\mathbf{x}}(t_0, \mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_6), \\ \dot{\mathbf{y}}_0 = \dot{\mathbf{y}}(t_0, \mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_6), \\ \dot{\mathbf{z}}_0 = \dot{\mathbf{z}}(t_0, \mathbf{C}_1, \dots, \mathbf{C}_6) \end{cases} \quad (1.12)$$

відносно $\mathbf{C}_i = \mathbf{C}_i(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0, \mathbf{z}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, \dot{\mathbf{y}}_0, \dot{\mathbf{z}}_0)$, остаточно знайдемо шуканий закон руху $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t), \mathbf{y} = \mathbf{y}(t), \mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$.

При *натуральному способі* шуканий закон руху після інтегрування першого рівняння $m\ddot{\mathbf{s}} = \mathbf{F}_\tau$ системи (1.6), якщо це можливо, має вигляд $\mathbf{s} = \mathbf{s}(t_0, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2)$. Сталі інтегрування \mathbf{C}_1 і \mathbf{C}_2 визначаються з урахуванням початкових умов $\mathbf{s}(t_0) = \mathbf{s}_0, \mathbf{v}_\tau(t_0) = \dot{\mathbf{s}}_0$ з системи рівнянь

$$\begin{cases} \mathbf{s}_0 = \mathbf{s}(t_0, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2), \\ \dot{\mathbf{s}}_0 = \dot{\mathbf{s}}(t_0, \mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2). \end{cases} \quad (1.13)$$

Друге рівняння системи (1.6)

$$m \frac{\dot{\mathbf{s}}^2}{\rho} = F_n$$

дає змогу визначити радіус кривини траєкторії як функцію часу.

Розв'язання оберненої задачі динаміки, якщо рух описується *векторним способом*, проводиться аналогічно і вимагає задання початкових умов у формі

$$\vec{\mathbf{r}}(t_0) = \vec{\mathbf{r}}_0, \quad \dot{\vec{\mathbf{r}}}(t_0) = \dot{\vec{\mathbf{r}}}_0. \quad (1.14)$$

Методика розв'язування оберненої задачі динаміки:

- 1) визначаємо об'єкт дослідження і зображуємо його в поточному положенні;
- 2) вводимо систему відліку, осі якої зображуємо на рисунку;
- 3) визначаємо початкові умови руху точки;
- 4) зображуємо на рисунку активні сили та реакції в'язей (для невіЛЬНОї матеріальної точки);

- 5) складаємо диференціальні рівняння руху точки;
- 6) інтегруємо отримані рівняння руху. Використовуючи початкові умови і отриманий загальний розв'язок, визначаємо сталі інтегрування;
- 7) записуємо кінематичний закон руху матеріальної точки.

1.1.2. Приклади розв'язування задач.

Приклад 1.1. Матеріальна точка масою m рухається за законом $x = at$, $y = b - at^2$. Визначити силу \vec{F} , під дією якої відбувається рух, якщо ця сила залежить тільки від положення точки.

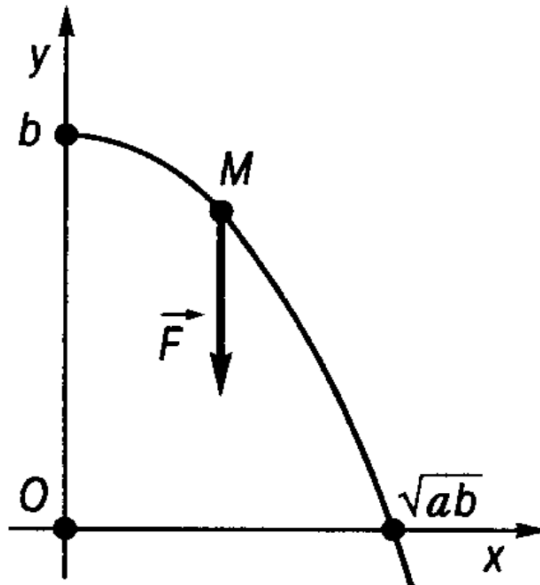


Рис. 1.1

Розв'язування. Рух точки здійснюється в прямокутній декартовій системі відліку Oxy . Траєкторія руху – парабола, рівняння якої після виключення часу t має вигляд $y = b - a^{-1}x^2$ (рис. 1.1).

Враховуючи, що дана задача є першою (прямою) задачею динаміки матеріальної точки, визначимо проєкції сили \vec{F} з диференціальних рівнянь (1.5).

Для проєкцій прискорення маємо $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = -2a$.

Тоді $F_x = 0$, $F_y = -2am$.

Модуль сили \vec{F} можна записати так:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = 2am .$$

Таким чином, точка рухається під дією сталої сили величиною $F = 2am$, яка паралельна осі Oy і протилежно напрямлена до неї.

Приклад 1.2. Локомотив вагою 200 кН рухається в низині з постійною швидкістю $v = 72 \text{ км/год}$. Визначити тиск локомотива на дно низини в

найнижчій точці, якщо радіус кривини траєкторії у цій точці 500 м . Опором знехтувати.

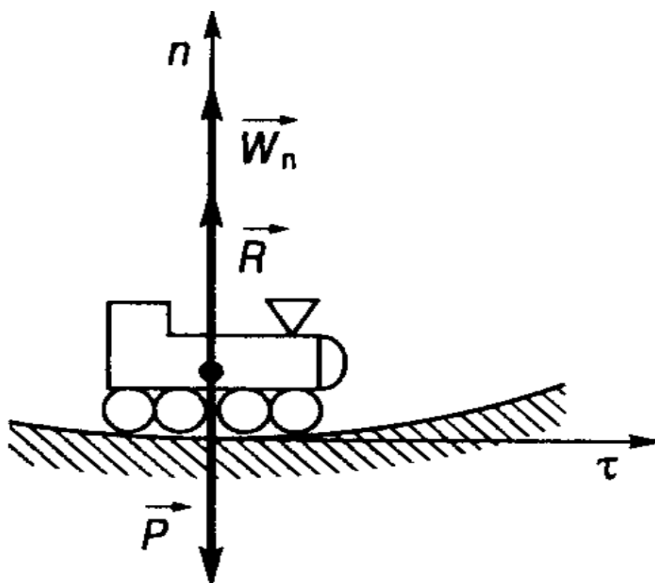


Рис.1.2

Розв'язування. За об'єкт дослідження візьмемо локомотив, який вважаємо матеріальною точкою. Введемо натуральну систему координат, початок відліку якої зв'яжемо з локомотивом, весь τ спрямуємо по дотичній до траєкторії вздовж вектора швидкості \vec{v} , вісь n – по вертикалі вгору (рис.1.2).

До локомотива прикладено дві сили: сила ваги локомотива \vec{P} і нормальна складова реакції ґрунту \vec{R} , яка напрямлена вздовж головної нормалі (вісь n). Шуканий тиск локомотива на ґрунт, за третім законом Ньютона, дорівнює невідомій реакції \vec{R} і протилежно напрямлений до неї. Таким чином, у даній задачі треба визначити спочатку реакцію \vec{R} , тобто розв'язати першу задачу динаміки точки.

За основним законом динаміки матеріальної точки у векторній формі маємо

$$m\vec{w} = \vec{P} + \vec{R},$$

де m – маса локомотива; \vec{w} – його прискорення.

Спроектуємо це рівняння на головну нормаль. Проекція прискорення локомотива на цей напрям дорівнює нормальній складовій прискорення, тому запишемо

$$m \frac{v^2}{\rho} = R - P, \text{ звідки } R = P + \frac{P v^2}{g \rho}.$$

Для рішення задачі потрібно швидкість з км/год перевести у м/с, а вагу локомотива з $\kappa\text{Н}$ у Н .

$$v = 72 \text{ км/год} = \frac{72 \cdot 10^3}{3600} = 20 \text{ м/с},$$

$$R = 200 \cdot 10^3 + \frac{200 \cdot 10^3}{9,81} \cdot \frac{20^2}{500} = 216 \text{ 310 Н}.$$

Після підстановки числових значень отримаємо $R = 216 \text{ 310 Н}$. Шуканий тиск локомотива на дно низини напрямлений протилежно до нормальної складової реакції ґрунту і рівний їй за величиною.

Приклад 1.3. Визначити максимальний натяг нерозтяжної невагомої нитки математичного маятника завдовжки l вагою Q , якщо кут відхилення маятника від вертикалі змінюється за законом $\varphi = \varphi_0 \sin \omega_0 t$, причому φ_0 та ω_0 – сталі величини.

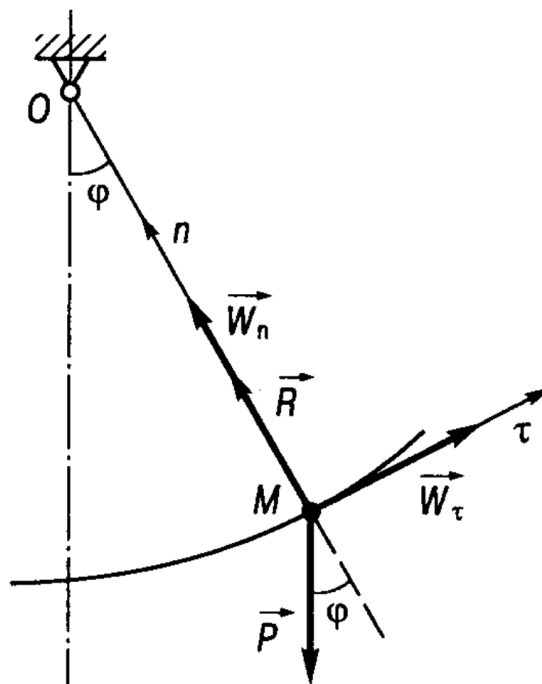


Рис. 1.3

Розв'язування. Дана задача відноситься до першої задачі динаміки матеріальної точки.

Покажемо маятник у поточному положенні, при якому $\varphi \neq 0$. Вводимо натуральну систему координат (рис. 1.3), вісь n - спрямуємо вздовж нитки, а вісь τ - перпендикулярно до n в бік зростання кута φ . До маятника прикладені сила $Q = mg$ і реакція нитки \vec{R} .

За основним законом динаміки матеріальної точки

$$m\vec{w} = \vec{Q} + \vec{R}.$$

Проекції на осі τ та n

$$mw_\tau = -Q \sin \varphi,$$

$$mw_n = R - Q \cos \varphi,$$

де $w_\tau = \dot{v}$ та $w_n = \frac{v^2}{l}$ – дотична та нормальна складові прискорення маятника.

Враховуючи, що $v = \dot{\varphi}l$, маємо

$$ml\ddot{\varphi} = -Q \sin \varphi ,$$

$$ml\dot{\varphi}^2 = R - Q \cos \varphi .$$

З останнього рівняння можна знайти

$$R = Q \cos \varphi + \frac{Q}{g} l \dot{\varphi}^2 = Q \left(\cos \varphi + \frac{l}{g} \dot{\varphi}^2 \right) .$$

Оскільки проекція сили ваги Q на вісь n і кутова швидкість $\dot{\varphi}$ максимальні в найнижчому положенні маятника, реакція нитки в цьому положенні також максимальна, тобто при $\cos \varphi = 1$. Розв'язок цього тригонометричного рівняння $\varphi = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Не обмежуючи загальності викладення, покладемо $k = 0$, тобто $\varphi = 0$. Тоді, з урахуванням умови $\varphi = \varphi_0 \sin \omega_0 t$, маємо $\sin \omega_0 t = 0$, звідки випливає, що $\cos \omega_0 t = \pm 1$ та $\dot{\varphi}^2 = \varphi_0^2 \omega_0^2 \cos^2 \omega_0 t = \varphi_0^2 \omega_0^2$.

Таким чином, максимальний натяг нитки за величиною дорівнює максимальній реакції $R_{max} = Q \left(1 + \frac{l\varphi_0^2 \omega_0^2}{g} \right)$.

Приклад 1.4. Матеріальна точка рухається під дією центральної сили по параболі, рівняння якої в полярних координатах має вигляд $r = \frac{\rho}{1 + \cos \varphi}$, де ρ – стала величина (рис. 1.4). Визначити закон зміни центральної сили.

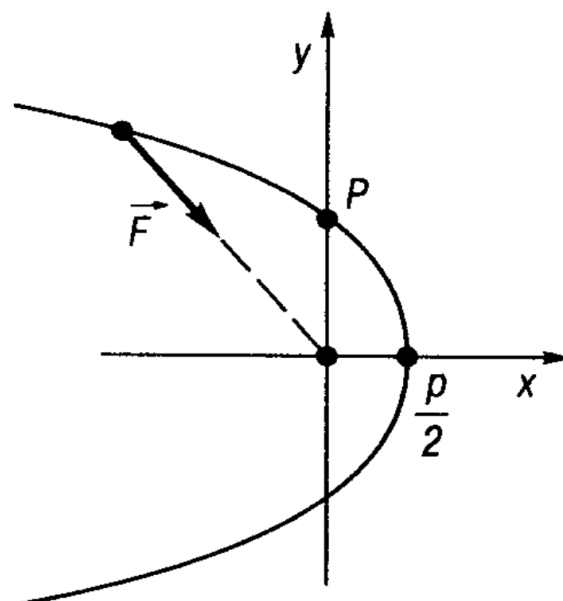


Рис. 1.4

Розв'язування. Скористаємося формулою Біне

$$F_r = -\frac{mC^2}{r^2} \left[\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right].$$

Рівняння параболи можна подати так:

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + \cos \varphi}{p}.$$

Друга похідна по φ має вигляд

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\cos \varphi}{p}.$$

Після підстановки отримаємо $F_r = -\frac{mC^2}{pr^2}$.

Таким чином, центральна сила F_r , яка спричинює рух матеріальної точки, обернено пропорційна квадрату відстані від нерухомого центра і є силою притягування.

Приклад 1.5. Отримавши поштовх, тіло ковзає вниз з початковою швидкістю $v_0 = 3 \text{ м/с}$ вздовж площини, розташованої під кутом $\alpha = 30^\circ$ до горизонту. Визначити шлях S , який приходить тіло за 2 с , якщо коефіцієнт тертя ковзання тіла по шорсткій поверхні $f = 0,5$.

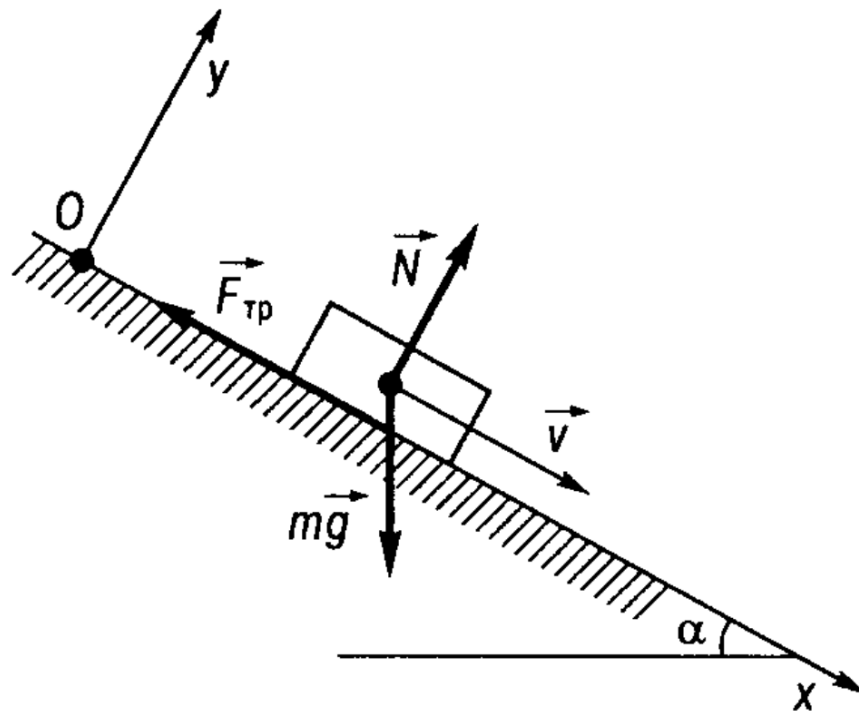


Рис. 1.5

Розв'язування. Введемо систему координат Oxy , початок відліку якої розташуємо в початковому положенні тіла, вісь Ox спрямуємо вздовж поверхні вниз. Вісь Oy , яка перпендикулярна до Ox , направимо вгору (рис. 1.5).

Нехай m – маса тіла, яке приймемо за матеріальну точку. Враховуючи, що досліджуване тіло є невілним, до нього прикладена крім активної сили (сили ваги $m\vec{g}$) реакція поверхні, якою на підставі аксіоми про звільнення від в'язей заміняємо дію шорсткої поверхні на тіло. Ця реакція має дві складові: дотичну складову, яка є силою тертя ковзання \vec{F}_{TP} і напрямлена протилежно руху вздовж поверхні вгору, і нормальну складову \vec{N} , перпендикулярну до площини (рис. 1.5).

На підставі основного рівняння динаміки точки

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{F}_{TP} + \vec{N}$$

отримаємо після проектування на осі Ox та Oy рівняння

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - F_{TP}, \quad (1)$$

$$0 = N - mg \cos \alpha. \quad (2)$$

Розв'язання задачі вимагає інтегрування рівнянь (1) та (2) і визначення закону руху тіла, тобто ця задача відноситься до оберненої (другої) задачі динаміки матеріальної точки. Для знаходження сталих інтегрування треба знати початкові умови руху тіла, які в даному випадку запишемо так:

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = v_0,$$

$$y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0.$$

Відомо, що $F_{TP} = fN$. Тоді враховуючи рівняння (2), знайдемо силу тертя $F_{TP} = fmg \cos \alpha$, а після скорочення на m з рівняння (1) отримаємо

$$\ddot{x} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha). \quad (3)$$

Для інтегрування диференціального рівняння (3), замінивши \ddot{x} та $\frac{d\dot{x}}{dt}$, одержимо

$$d\dot{x} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)dt.$$

Після інтегрування маємо

$$\dot{x} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t + C_1.$$

Цей вираз є першим інтегралом диференціального рівняння (3). Сталу інтегрування C_1 визначають шляхом підстановки початкової умови $\dot{x}(0) = v_0$ і початкового моменту часу $t = 0$ в перший інтеграл. Отримаємо $C_1 = v_0$, тобто

$$\dot{x} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)t + v_0.$$

В даному рівнянні теж змінимо \dot{x} на $\frac{dx}{dt}$ і знову розділимо змінні:

$$dx = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) dt + v_0 dt .$$

Після інтегрування цього виразу одержимо другий інтеграл рівняння (3):

$$x = \frac{1}{2} g(\sin \alpha - f \cos \alpha) t^2 + v_0 t + C_2 .$$

Враховуючи початкові умови за координатою $x(0) = 0$, визначають сталу інтегрування $C_2 = 0$.

Таким чином, кінематичний закон руху тіла має вигляд

$$x = \frac{1}{2} g(\sin \alpha - f \cos \alpha) t^2 + v_0 t .$$

Шуканий шлях S , який проходить тіло за час $t = 2c$, визначимо з рівняння

$$S = \frac{1}{2} g(\sin \alpha - f \cos \alpha) t_1^2 + v_0 t_1 .$$

Після підстановки числових даних маємо:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 9,81(\sin 30^\circ - 0,5 \cos 30^\circ) \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 9,81(0,5 - 0,5 \cdot 0,866) \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 = 7,31 \text{ м.} \end{aligned}$$

Приклад 1.6. Трамвай перебуває у спокої на похилій площині, яка розташована під кутом $\alpha = 2^\circ$ до горизонту. Коефіцієнт тертя спокою $f_0 = 0,05$. Водій трамвая вмикає двигун і поступово збільшує його потужність так, що сила тяги, напрямлена вздовж похилої площини вгору, щосекунди змінюється на 2000 Н . Визначити закон руху трамваю, якщо його маса 5000 кг , а коефіцієнт тертя під час руху $f = 0,04$.

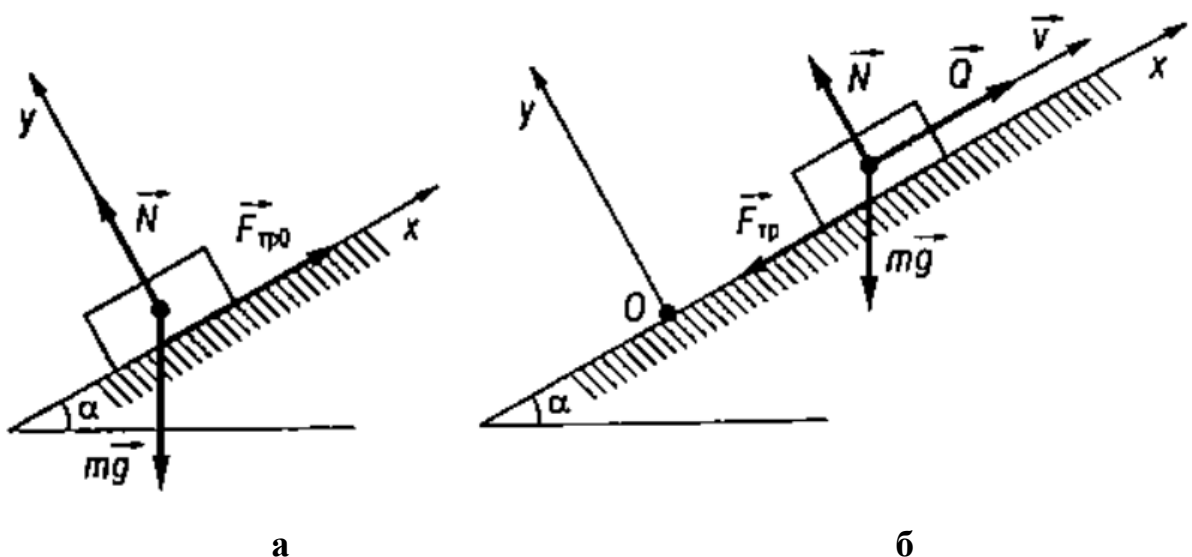


Рис. 1.6

Розв'язування. Об'єктом дослідження даної задачі є трамвай, який вважаємо матеріальною точкою. Введемо систему координат Oxy , початок її відліку розташуємо в початковому положенні трамвая (рис. 1.6, а). В цьому положенні до трамвая прикладено силу ваги $m\vec{g}$, нормальну складову реакції \vec{N} та силу тертя спокою F_{TP_0} , яка при вимкненому двигуні напрямлена протилежно можливому руху трамвая, тобто вгору.

Проекція сили ваги на вісь Ox не перевищує максимального значення сили тертя спокою $F_{max} = f_0 N$, тобто виконується умова $mg \sin \alpha < f_0 mg \cos \alpha$, що забезпечує нерухомість трамвая на похилій площині в початковий момент часу. Прикладання до трамвая сил тяги $Q = b_0 t$, $b_0 = 2000$ Н/с, яка напрямлена ввєрх вздовж похилої площини, надасть руху тільки тоді, коли величина сили тяги перевищить суму проекції сили ваги на вісь Ox та максимальної сили тертя спокою (напрямлена протилежно можливому руху трамвая), тобто за умови

$$Q > F_{max} + mg \sin \alpha .$$

Враховуючи, що $F_{max} = f_0 mg \cos \alpha$, маємо

$$Q > mg(\sin \alpha + f_0 \cos \alpha). \quad (1)$$

Визначимо з останньої умови момент часу $t = \tau$ початку руху трамвая після вмикання двигуна. Для цього знак «нерівності» замінимо на знак «дорівнює». Отримаємо

$$\tau = \frac{1}{b_0} mg(\sin \alpha + f_0 \cos \alpha). \quad (2)$$

Для наведених числових даних:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{2000} \cdot 5000 \cdot 9,81(\sin 2^\circ + 0,05 \cdot \cos 2^\circ) = \\ &= \frac{1}{2000} \cdot 5000 \cdot 9,91(0,0319 + 0,05 \cdot 0,9994) = 2,08 \text{ с.} \end{aligned}$$

Подальший рух трамвая можна визначити на підставі основного закону динаміки та принципу суперпозиції (рис. 1.6, б):

$$m\vec{w} = \vec{Q} + m\vec{g} + \vec{F}_{TP}. \quad (3)$$

Після проектування на осі системи координат Oxy (точка O – початкове положення трамвая) отримаємо

$$m\ddot{x} = Q - mg \sin \alpha - F_{TP}, \quad (4)$$

$$0 = N - mg \cos \alpha ,$$

де сила тертя ковзання $F_{TP} = fN = fmg \cos \alpha$.

Силу тяги можна подати так: $Q = b_0(t' + \tau)$, де $t' = t - \tau$. Тоді перше рівняння системи (4), враховуючи співвідношення (3), можна записати так:

$$m\ddot{x} = b_0 t' + (f_0 - f)mg \cos \alpha. \quad (5)$$

З урахуванням початкових умов $x(t'_0) = 0$, $\dot{x}(t'_0) = 0$ після подвійного інтегрування виразу (5) за часом t' отримаємо

$$x(t') = \frac{b_0}{6m} (t')^3 + (f_0 - f)g \cos \alpha \frac{(t')^2}{2}.$$

Для часу t останній вираз перепишемо так:

$$x(t) = \frac{b_0}{6m} (t - \tau)^3 + (f_0 - f)g \cos \alpha \frac{(t - \tau)^2}{2}.$$

Після підстановки числових даних закон руху трамвая набирає вигляду

$$x(t) = 0,067(t - 2,08)^3 + 0,049(t - 2,08)^2,$$

де x – в метрах, t – в секундах.

Приклад 1.7. Літак летить горизонтально. Опір повітря пропорційний квадрату швидкості: $R = \mu v^2$. Сила тяги постійна і складає кут α з напрямком польоту. Визначити кінематичний закон руху та найбільшу швидкість літака.

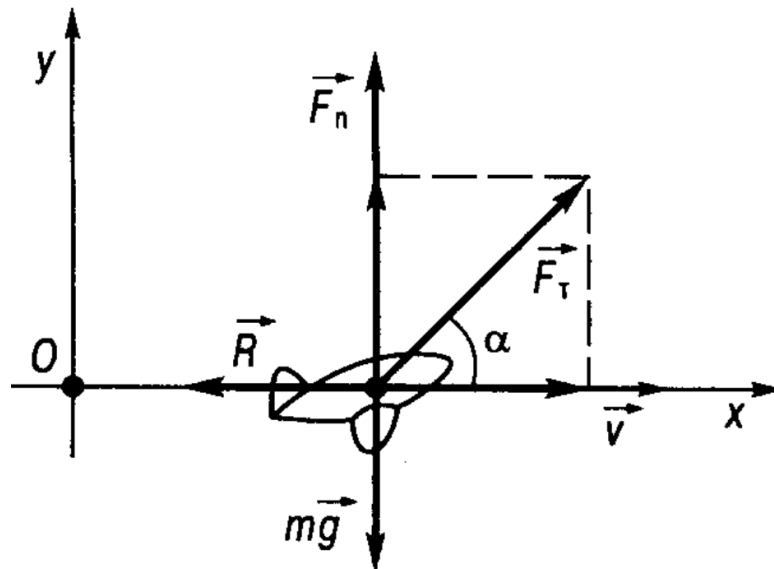


Рис.1.7

Розв'язування. У даній задачі треба визначити кінематичні характеристики руху літака, який приймаємо за матеріальну точку, тобто треба розв'язати другу (обернену) задачу динаміки.

Введемо прямокутну систему координат Oxy , початок відліку якої збігається з початковим положенням літака, вісь Ox , горизонтальна. У початковий момент часу (при $t = 0$) $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$ (рис.1.7).

Нехай m – маса літака. Під час руху до літака прикладено силу ваги $m\vec{g}$, силу тяги \vec{F}_T , підйомну силу \vec{F}_Π та силу опору \vec{R} (рис. 1.7).

На підставі основного закону динаміки та принципу суперпозиції запишемо

$$m\vec{w} = \vec{F}_T + \vec{F}_\Pi + m\vec{g} + \vec{R}. \quad (1)$$

Для проєкцій на осі координат маємо

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_T \cos \alpha - \mu\dot{x}^2, \\ 0 &= F_T \sin \alpha + F_\Pi - mg. \end{aligned} \quad (2)$$

З другого рівняння системи (2) можна знайти підйомну силу.

Для визначення закону руху літака перше рівняння запишемо у формі

$$m \frac{d\dot{x}}{dt} = F_T \cos \alpha - \mu\dot{x}^2,$$

а потім так:

$$\frac{d\dot{x}}{F_T \cos \alpha - \mu\dot{x}^2} = \frac{1}{m} dt. \quad (3)$$

Введемо позначення $\mu = k^2$, $F_T \cos \alpha = q^2$ і останній вираз перепишемо:

$$\frac{d\dot{x}}{q^2 - k^2\dot{x}^2} = \frac{1}{m} dt.$$

Після інтегрування маємо

$$\frac{1}{2kq} \ln \frac{q + k\dot{x}}{q - k\dot{x}} = \frac{1}{m} t + C_1. \quad (4)$$

Для визначення сталої інтегрування C_1 підставимо початкові умови ($t = 0, \dot{x}_0 = 0$) в інтеграл (4). Отримаємо $C_1 = 0$. Скориставшись основною логарифмічною тотожністю, запишемо

$$\frac{q + k\dot{x}}{q - k\dot{x}} = \exp\left(\frac{2kq}{m} t\right),$$

Розв'яжемо останній вираз відносно \dot{x} :

$$\dot{x} = \frac{q}{k} \cdot \frac{(e^{2\chi t} - 1)}{(e^{2\chi t} + 1)}, \quad (5)$$

де $\chi = \frac{kq}{m}$.

Чисельник і знаменник правої частини формули (5) помножимо на $0,5e^{-\chi t}$:

$$\dot{x} = \frac{q}{k} \cdot \frac{\frac{1}{2}(e^{\chi t} - e^{-\chi t})}{\frac{1}{2}(e^{\chi t} + e^{-\chi t})}$$

і виразимо \dot{x} через гіперболічні функції:

$$\dot{x} = \frac{q}{k} \cdot \frac{\text{sh } \chi t}{\text{ch } \chi t}, \quad (6)$$

або

$$\dot{x} = v = \frac{q}{k} \cdot \text{th } \chi t. \quad (7)$$

Оскільки $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, після розділення змінних з виразу (6) отримаємо

$$dx = \frac{q}{k} \cdot \frac{\text{sh } \chi t}{\text{ch } \chi t} dt.$$

Внесемо $\text{sh } \chi t$ під знак диференціала $dx = \frac{q}{k\chi} \cdot \frac{d(\text{ch } \chi t)}{\text{ch } \chi t}$. Після

інтегрування одержимо

$$x = \frac{q}{k\chi} \ln(\text{ch } \chi t) + C_2. \quad (8)$$

Підстановка початкової умови ($t = 0, x_0 = 0$) в вираз (6) дає змогу знайти сталу інтегрування: $C_2 = 0$. Отже, закон руху літака

$$x = \frac{m}{\mu} \ln \left(\text{ch} \frac{\sqrt{\mu F_T \cos \alpha}}{m} t \right).$$

Максимальну швидкість літака можна визначити з виразу (7). Аналізуючи його для умов $t \rightarrow \infty$ ($\text{th } \chi t \rightarrow 1$), приходимо до висновку, що максимальна швидкість не перевищить

$$v_{\max} = \dot{x}_{\max} = \frac{q}{k} = \sqrt{\frac{1}{\mu} F_T \cos \alpha}.$$

Приклад 1.8. Визначити кінематичний закон руху та рівняння траєкторії тіла, кинутого з початковою швидкістю \vec{v}_0 під кутом α до горизонту, якщо сила опору руху пропорційна швидкості тіла: $\vec{R} = -\mu m \vec{v}$, де μ – сталий коефіцієнт, m – маса тіла.

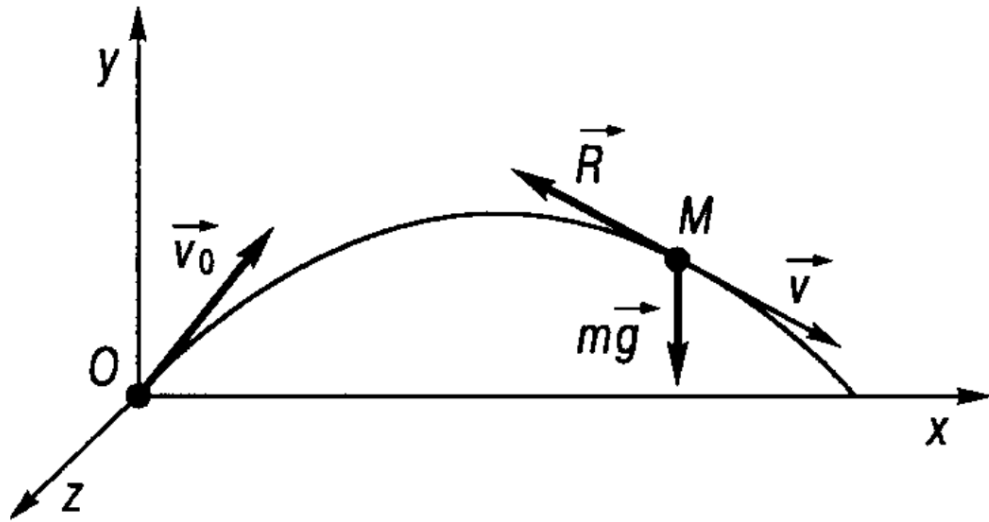


Рис. 1.8

Розв'язування. Дана задача є другою (оберненою) задачею динаміки.

Введемо систему координат Oxy , початок відліку якої збігається з початковим положенням тіла (рис. 1.8).

У поточному положенні M (рис. 1.8) на тіло діють сила ваги $m\vec{g}$ та сила опору \vec{R} , напрямлена протилежно до швидкості. На підставі основного рівняння динаміки точки та закону незалежності дії сил

$$m\vec{w} = m\vec{g} + \vec{R}. \quad (1)$$

Початкові умови мають вигляд

$$\begin{aligned} x_0 &= 0, & y_0 &= 0, \\ \dot{x}_0 &= v_0 \cos \alpha & \dot{y}_0 &= v_0 \sin \alpha. \end{aligned}$$

Проектуємо рівняння (1) на осі координат Oxy :

$$mw_x = -\mu mv_x, \quad mw_y = -mg - \mu mv_y.$$

Враховуючи, що $w_x = \ddot{x}$, $w_y = \ddot{y}$, $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$, отримаємо

$$\ddot{x} = -\mu\dot{x}, \quad \ddot{y} = -g - \mu\dot{y},$$

або

$$\ddot{x} + \mu\dot{x} = 0, \quad \ddot{y} + \mu\dot{y} = -g. \quad (2)$$

Розв'яжемо ці рівняння, використовуючи теорію звичайних диференціальних рівнянь. Перше рівняння системи (2) є звичайним лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Його розв'язок шукаємо як загальний розв'язок однорідного рівняння. Відповідне характеристичне рівняння має вигляд

$$\lambda^2 + \mu\lambda = 0. \quad (3)$$

Визначимо корені характеристичного рівняння: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\mu$. Далі запишемо загальний розв'язок диференціального рівняння у формі

$$x = C_1 e^{-\mu t} + C_2. \quad (4)$$

Для визначення сталих інтегрування C_1 , C_2 підставимо відповідні початкові умови ($t = 0, x_0 = 0, \dot{x}_0 = v_0 \cos \alpha$) у вираз (4) та у вираз похідної за часом, одержаний з (4). Отримаємо

$$C_1 + C_2 = 0, -\mu C_1 = v_0 \cos \alpha, \quad (5)$$

звідки

$$C_1 = -C_2 = -\frac{v_0}{\mu} \cos \alpha.$$

Закон руху тіла за координатою x запишемо у вигляді

$$x = \frac{v_0}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) \cos \alpha. \quad (6)$$

Друге рівняння системи (2) є неоднорідним диференціальним рівнянням, його загальний розв'язок $y(t)$ шукаємо як суму загального розв'язку y_1 відповідного однорідного рівняння та частинного розв'язку y_2 неоднорідного рівняння, тобто $y(t) = y_1 + y_2$. Характеристичне рівняння цього диференціального рівняння має вигляд (3). Тоді загальний розв'язок y_1 однорідного рівняння запишемо аналогічно виразу (4)

$$y_1 = C_3 e^{-\mu t} + C_4. \quad (7)$$

Похідна за часом від частинного розв'язку y_2 неоднорідного рівняння відповідно до правої частини цього рівняння має бути сталою величиною: $\dot{y}_2 = A$, де $A = \text{const}$. Ця величина визначається після підстановки похідної за часом від частинного розв'язку \dot{y}_2 у диференціальне рівняння. Взявши до уваги, що $\ddot{y}_2 = 0$, маємо $A = -\frac{g}{\mu}$, або $\dot{y}_2 = -\frac{g}{\mu}$. Останній вираз подамо

у вигляді $\frac{dy_2}{dt} = -\frac{g}{\mu}$. Після розділення змінних та інтегрування

отримаємо

$$y_2 = -\frac{g}{\mu} t + C. \quad (8)$$

Таким чином, загальний розв'язок неоднорідного рівняння подається як сума виразів (7) та (8):

$$y_1 = C_3 e^{-\mu t} + C'_4 - \frac{g}{\mu} t, \quad (9)$$

де $C'_4 = C_4 + C$.

Сталі інтегрування визначається підстановкою початкових умов ($t = 0, y_0 = 0, \dot{y}_0 = v_0 \sin \alpha$) у вираз (9) та похідну від y . Відповідна система алгебраїчних рівнянь має вигляд

$$C_3 + C'_4 = 0, \mu - C_3 = v_0 \sin \alpha + \frac{g}{\mu}. \quad (10)$$

Звідси

$$C_3 = -C'_4 = -\frac{v_0}{\mu} \sin \alpha - \frac{g}{\mu^2}.$$

Тоді закон руху тіла за координатою y запишемо у вигляді

$$y = \frac{1}{\mu^2} (g + \mu v_0 \sin \alpha) (1 - e^{-\mu t}) - \frac{g}{\mu} t. \quad (11)$$

Для визначення рівняння траєкторії виключаємо параметр t з рівнянь руху тіла (6) та (11) і отримуємо

$$y = \frac{1}{\mu} \frac{g + \mu v_0 \sin \alpha}{v_0 \cos \alpha} x + \frac{g}{\mu^2} \ln \left(1 - \frac{\mu}{v_0 \cos \alpha} x \right).$$

Приклад 1.9. Електрон масою m , який несе заряд e негативної електроенергії, входить в однорідне поле постійної напруженості \vec{H} зі швидкістю \vec{v}_0 під гострим кутом φ_0 до ліній напруженості поля. Визначити траєкторію руху електрона, якщо на нього діє сила $\vec{F} = -e(\vec{v} \times \vec{H})$. Вплив сили ваги не враховувати.

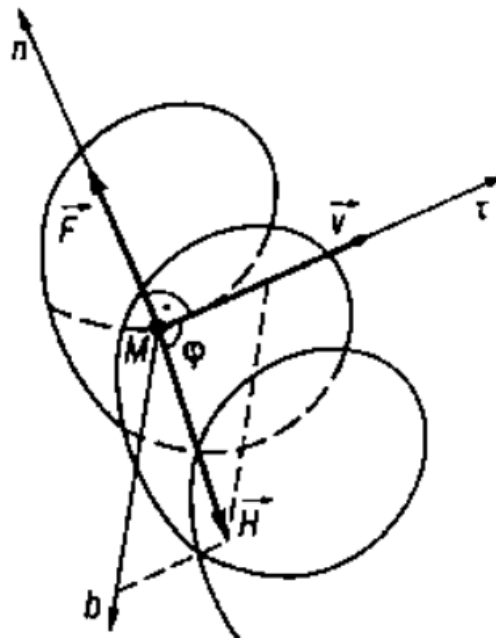


Рис. 1.9

Розв'язування. Об'єктом дослідження задачі є електрон, який розглядається як вільна матеріальна точка M , що рухається під дією сили \vec{F} . За основним законом динаміки матеріальної точки

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e(\vec{v} \times \vec{H}) \quad (1)$$

З рівняння (1), на підставі властивостей векторного добутку, випливає, що прискорення точки буде перпендикулярним до вектора швидкості. Враховуючи, що вектори швидкості та прискорення точки завжди лежать у стичній площині, прискорення електрона M дорівнює нормальній складовій прискорення.

Введемо натуральну систему координат $(M\tau nb)$, початок відліку якої зв'язаний з рухомим електронем M (рис. 1.9), і спроектуємо на її осі рівняння (1):

$$\begin{cases} m\dot{v} = 0, \\ m \frac{v^2}{\rho} = F_n, \\ F_b = 0; \end{cases} \quad (2)$$

причому в даному випадку $F_n = evH \sin \varphi$.

Перший інтеграл рівняння $\dot{v} = 0$ має вигляд $v = C_1$. З урахуванням початкової умови $t_0 = 0, v(t_0) = v_0$ отримаємо

$$v = v_0 = \text{const.}$$

Множимо скалярно обидві частини рівняння (1) на вектор \vec{H} . Враховуючи, що змішаний добуток векторів правої частини отриманого співвідношення дорівнює нулеві, –

$$\vec{H} \cdot (\vec{v} \times \vec{H}) = \vec{v} \cdot (\vec{H} \times \vec{H}) = 0,$$

одержимо

$$m\vec{H} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0.$$

За умовою вектор \vec{H} сталий, тому можна записати

$$m \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{H}) = 0,$$

або

$$m \frac{d}{dt} (vH \cos \varphi) = 0,$$

де $v \cos \varphi$ – проекція вектора швидкості на напрям вектора \vec{H} . На підставі даного рівняння вона є сталою: $v_H = v \cos \varphi = v_0 \cos \varphi = \text{const}$ і, відповідно, кут $\varphi = \widehat{(\vec{H}, \vec{v})} = \varphi_0 = \text{const}$.

З другого рівняння системи (2) маємо

$$\rho = \frac{mv_0}{eH \sin \varphi_0} = \text{const}.$$

Останній вираз означає, що рух електрона здійснюється по лінії постійного радіуса кривини ρ . Враховуючи, що стична площина траєкторії електрона утворює сталий кут з напрямком ліній напруженості поля, доходимо висновку, що траєкторія електрона – це гвинтова лінія на круговому циліндрі, твірна якого паралельна лініям напруженості поля.

Розділ 2.

ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ДИНАМІКИ

2.1. ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ КІЛЬКОСТІ РУХУ СИСТЕМИ МАТЕРІАЛЬНИХ ТОЧОК

2.1.1. Короткі теоретичні відомості.

Кількістю руху матеріальної точки \vec{q} (першою мірою механічного руху) називається вектор, який дорівнює добутку маси точки на вектор її швидкості:

$$\vec{q} = m\vec{v}. \quad (2.1)$$

Кількістю руху \vec{Q} системи матеріальних точок називається головний вектор (векторна сума) кількостей руху матеріальних точок, що входять у систему:

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^n \vec{q}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i. \quad (2.2)$$

Теорема. Кількість руху \vec{Q} абсолютно твердого тіла дорівнює добутку маси M тіла на швидкість його центра мас:

$$\vec{Q} = M\vec{v}_c. \quad (2.3)$$

Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки в диференціальній формі. Перша похідна за часом від кількості руху матеріальної точки дорівнює діючій на точку силі:

$$\frac{d\vec{q}}{dt} = \vec{F}. \quad (2.4)$$

Теорема про зміну кількості руху системи матеріальних точок у диференціальній формі. Похідна за часом від кількості руху системи

матеріальних точок (твердого тіла) дорівнює головному вектору зовнішніх сил, прикладених до точок системи (тіла):

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \vec{F}^e, \quad (2.5)$$

де $\vec{F}^e = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^e$; \vec{F}_i^e - зовнішні сили, прикладені до точок системи.

Теорема про зміну кількості руху матеріальної точки в інтегральній формі (теорема імпульсів). *Приріст кількості руху матеріальної точки за певний проміжок часу дорівнює імпульсу рівнодійної прикладених до точки сил за той самий проміжок часу:*

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \vec{S}, \quad (2.6)$$

де \vec{v}_0, \vec{v} - початкова та кінцева швидкість точки; $\vec{S} = \int_{t_0}^t \vec{F}(\tau) d\tau$ - повний

імпульс сили; $d\vec{S} = \vec{F}(\tau) d\tau$ - елементарний імпульс сили.

Теорема про зміну кількості руху системи матеріальних точок в інтегральній формі (теорема імпульсів). *Приріст кількості руху системи матеріальних точок за деякий проміжок часу $[t_0, t]$ дорівнює повному імпульсу головного вектора зовнішніх сил, прикладених до точок системи за той самий проміжок часу:*

$$\vec{Q}(t) - \vec{Q}(t_0) = \vec{S}^e, \quad (2.7)$$

де $\vec{S}^e = \int_{t_0}^t \vec{F}^e d\tau = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^e d\tau$ - повний імпульс головного вектора

зовнішніх сил; $\vec{Q}(t)$ та $\vec{Q}(t_0)$ - кількість руху системи матеріальних точок в початковий та кінцевий моменти часу.

Закон збереження кількості руху: якщо діюча сила \vec{F} або головний вектор зовнішніх сил \vec{F}^e (або проекція цих векторів на відповідну вісь) дорівнюють нулю, то кількість руху (її проекція на відповідну вісь) є сталою величиною:

$$\begin{aligned} \vec{q}(t) &= \vec{q}(t_0) = \text{const}, \\ \vec{Q}(t) &= \vec{Q}(t_0) = \text{const}, \\ Q_x(t) &= Q_x(t_0) = \text{const}. \end{aligned}$$

Теорему про зміну кількості руху або закон збереження кількості руху застосовують у випадках, коли до відомих і невідомих величин входять швидкості точок матеріальної системи (тіла), діючі на систему сили та час.

2.1.2. Приклади розв'язування задач.

Приклад 2.1. Тіло спускається по похилій площині, яка з горизонтом складає кут α (рис. 2.1). Через який час швидкість тіла збільшиться від v_0 до v , якщо коефіцієнт тертя ковзання між тілом і площиною дорівнює f ($\tan \alpha > f$)?

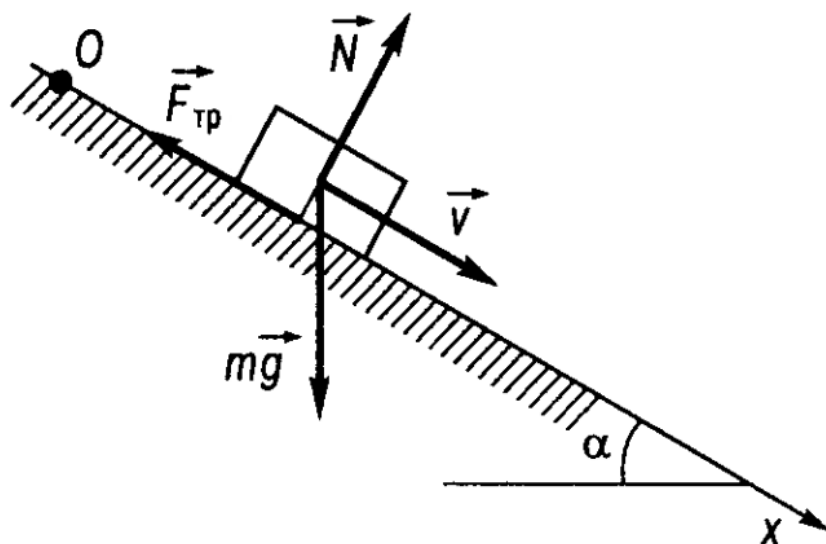


Рис.2.1

Розв'язування. Позначимо сили, що діють на тіло: сила ваги тіла $m\vec{g}$; сила тертя між тілом і площиною \vec{F}_{TP} . Згідно з означенням, сила тертя $F_{TP} = fN$, де \vec{N} - нормальна складова реакції поверхні площини. Згідно з рисунком $N = mg \cos \alpha$, тоді $F_{TP} = fmg \cos \alpha$. Спрямуємо вісь Ox паралельно площині спуску тіла і спроектуємо на неї співвідношення (2.7), що виражає теорему про зміну кількості руху. Маємо

$$Q_x - Q_{0x} = \int_0^t F_x^e dt,$$

або

$$Q_x - Q_{0x} = \int_0^t (mg \sin \alpha - fmg \cos \alpha) dt.$$

Проекція головного вектора зовнішніх сил на вісь Ox складається з постійних величин. Після інтегрування, враховуючи визначення кількості руху, одержимо

$$mv - mv_0 = mg(\sin \alpha - f \cos \alpha)t.$$

Отже, звідси розв'язок задачі

$$t = \frac{v - v_0}{g(\sin \alpha - f \cos \alpha)}.$$

Приклад 2.2. Матеріальна точка вагою $P = 1 \text{ Н}$ рухається рівномірно зі швидкістю $v = 2 \text{ м/с}$ по колу (рис. 2.2). Визначити імпульс сили, яка діє на точку за час, протягом якого вантаж проходить чверть кола.

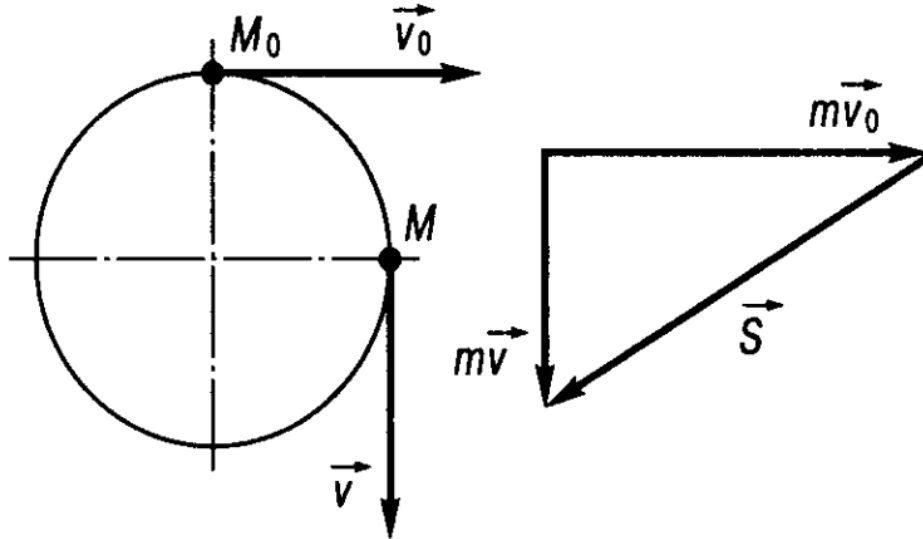


Рис. 2.2

Розв'язування. Згідно з теоремою імпульсів маємо $\vec{s} = m\vec{v} - m\vec{v}_0$. Будуючи геометричну різницю кількостей руху, знаходимо із отриманого прямокутного трикутника

$$S = m\sqrt{v_0^2 + v^2} = \frac{P}{g}v\sqrt{2} \approx 3 \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

Приклад 2.3. Тілу маси m надана початкова швидкість v_0 , спрямована вгору уздовж похилої площини, яка складає кут α з горизонтом (рис. 2.3, а). На тіло діє сила \vec{P} , спрямована в ту ж сторону. Знаючи закон зміни сили $P = P(t)$ і коефіцієнт тертя ковзання f , визначити швидкість тіла в моменти часу t_1 , t_2 , t_3 і перевірити одержаний результат для t_1 за допомогою диференціального рівняння руху.

Дано: $m = 16 \text{ кг}$, $v_0 = 7,6 \text{ м/с}$, $t_1 = 6 \text{ с}$, $t_2 = 11 \text{ с}$, $t_3 = 13 \text{ с}$,
 $P(t = 0) = P_0 = 75 \text{ Н}$; $P(t = t_1) = P_1 = 200 \text{ Н}$; $P(t = t_2) = P_2 = 0$;
 $P(t = t_3) = P_3 = 0$; $\alpha = 23^\circ$, $f = 0,12$.

Розв'язування. Встановлюємо сили, діючі на тіло: сила ваги $m\vec{g}$, нормальна складова реакції площини \vec{N} , змінна сила \vec{P} і сила тертя F_{TP} .

Тіло приймаємо за матеріальну точку. За теоремою про зміну кількості руху в проекціях на вісь Ox

$$mv_{1x} - mv_{0x} = \sum S_{ix},$$

де $\sum S_{ix} = -mg \sin \alpha \cdot t_1 - F_{TP} t_1 + S_{P_x}$, причому
 $F_{TP} = fmg \cos \alpha = 17,34 \text{ Н}$, а $mg \sin \alpha = 61,32 \text{ Н}$.

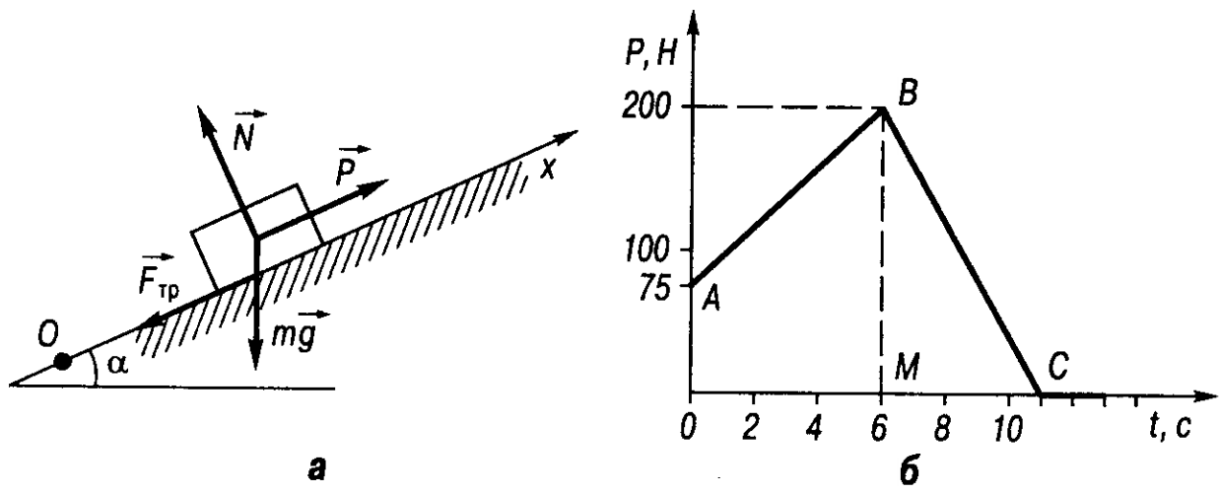


Рис. 2.3

Проекція імпульсу змінної сили P за час t_1

$$Sp_x = \int_0^{t_1} P dt.$$

Цей інтеграл визначаємо як площу фігури $OABM$ (рис. 2.3, б) на графіку $P = P(t)$:

$$S_{P_x} = \frac{1}{2}(75 + 200)6 = 825 \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

Тоді

$$mv_{1x} - mv_{0x} = -(17,34 + 61,32)6 + 825 = 353,04 \text{ Н} \cdot \text{с}.$$

Звідси

$$v_{1x} = \frac{353,04 + 16 \cdot 7,6}{16} = 29,665 \text{ м/с}.$$

Перевіримо одержане значення v_{1x} за допомогою диференціального рівняння руху. На відрізку AB закон зміни сили $P(t)$ можна записати у вигляді

$$P(t) = 75 + \frac{125}{6} t \quad (P_0 = 75, P_1 = 200).$$

Рівняння руху має вигляд

$$m\ddot{x} = -mg \sin \alpha - F_{TP} + P(t)$$

або $\ddot{x} = -0,22875 + 1,302t$. Інтегруючи, запишемо перший інтеграл

$$\dot{x} = -0,22875t + 1,302 \frac{t^2}{2} + C_1$$

та другий інтеграл

$$x = 0,22875 \frac{t^2}{2} + 0,651 \frac{t^3}{3} + C_1 t + C_2 .$$

З початкових умов знаходимо сталі інтегрування C_1 і C_2 . Враховуючи, що $x(t=0) = 0$ та $\dot{x}(t=0) = v_0$, отримаємо $C_2 = 0$ та $C_1 = v_0 = 7,6$.

Закон руху буде такий: $x = 0,217 t^3 - 0,11438 t^2 + 7,6 t$. Відповідно швидкість $v = \dot{x} = 0,651 t^2 - 0,22875 t + 7,6$.

$$\text{Тоді } v(t=6\text{с}) = -0,22875 \cdot 6 + 0,651 \cdot 36 + 7,6 = 29,663 \text{ м/с} .$$

Як бачимо, результати, одержані двома способами, збігаються.

Перевіримо, чи існує такий момент часу, при якому швидкість дорівнюватиме нулю. За теоремою про зміну кількості руху складемо рівняння для проміжку часу від 0 до t^* (при t^* швидкість $v_x = 0$):

$$mv_x - mv_{0x} = -mg \sin \alpha \cdot t^* - fmg \cos \alpha \cdot t^* + S_{P_x} ,$$

$$S_{P_x} = \int_0^{t^*} \left(75 + \frac{125}{6} t \right) dt = 75t^* + \frac{125}{12} (t^*)^2 .$$

Опускаючи зірочку і підставляючи числові значення, одержимо квадратне рівняння відносно часу t :

$$10,417 t^2 - 3,66 t + 112,96 = 0 .$$

або $t^2 - 0,351 t + 10,844 = 0$, яке дійсних коренів не має. Отже, на проміжку часу $(0, t_1)$ швидкість тіла стати рівною нулю не може.

Для визначення швидкості тіла в момент часу t_2 за теоремою про зміну кількості руху складаємо рівняння для проміжку часу (t_1, t_2) .

$$mv_{2x} - mv_{1x} = \sum S_{ix} ,$$

$$\text{де } \sum S_{ix} = -mg \sin \alpha (t_2 - t_1) - fmg \cos \alpha (t_2 - t_1) + S_{P_x} ;$$

$$S_{P_x} = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt ,$$

$P(t) = -40t + 440$ - рівняння прямої BC , яка проходить через точки B і C ;

$$S_{P_x} = \int_6^{11} (-40t + 440) dt = (-20t^2 + 440t) \Big|_6^{11} = 500 \text{ Н} \cdot \text{с} .$$

Проекцію імпульсу $P(t)$ за час (t_1, t_2) знаходимо як площу трикутника BC на графіку $P(t)$:

$$S_{P_x} = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 200 = 500 \text{ Н} \cdot \text{с} ,$$

$$v_{2x} = \frac{1}{m} \left(\sum S_{ix} + mv_{1x} \right) =$$

$$= \frac{1}{16} [16 \cdot 29,665 + 500 - (61,32 + 17,34) \cdot 5] = 36,33 \text{ м/с}.$$

Одержаний результат має місце, якщо тіло на проміжку часу (t_1, t_2) не змінює напрямку своєї початкової швидкості і сила тертя ковзання напрямлена протягом проміжку часу (t_1, t_2) вниз по похилій площині:

$$S_{Px} = \int_6^{11} (-40t + 440) dt = -20t^2 + 440t - 1920.$$

При зміні напрямку руху швидкість повинна дорівнювати нулю:

$$mv_{2x} = 0 = mv_{1x} - mg \sin \alpha \cdot (t - t_1) - fmg \cos \alpha \cdot (t - t_1) - 20t^2 + 440t - 1920 = -20t^2 + 361,34t - 1052,06 = 0.$$

Розв'язками рівняння є $\tau_1 = 14,33 \text{ с}$, $\tau_2 = 3,67 \text{ с}$, які задовольняють умовам $\tau_1 > 11 \text{ с}$, $\tau_2 < 6 \text{ с}$; отже, в проміжку часу $(t_1 = 6 \text{ с}; t_2 = 11 \text{ с})$ зміни швидкості не буде.

Вираз теореми про зміну кількості руху, складений для проміжку часу (t_1, t_2) , дає можливість визначити швидкість v_3 тіла в момент часу t_3 :

$$v_3 = \frac{1}{m} (mv_{2x} + \sum S_{ix}).$$

Оскільки $P(t) = 0$ для проміжку часу (t_1, t_2) , то $S_{ix} = 0$. Тоді маємо

$$\sum S_{ix} = -(mg \sin \alpha + fmg \cos \alpha)(t_3 - t_2).$$

Звідси

$$v_3 = \frac{1}{16} (16 \cdot 36,33 - 78,66 \cdot 2) = 26,5 \text{ м/с}.$$

Приклад 2.4. На горизонтальній платформі вагою \vec{P}_1 встановлено похилу площину AB , яка утворює з горизонтом кут α (рис. 2.4). По цій площині за допомогою лебідки піднімається вантаж C вагою \vec{P}_2 так, що відстань AC змінюється за законом $s = \frac{1}{2} at^2$. У початковий момент система знаходиться в стані спокою. Визначити швидкість, з якою буде рухатися платформа. Опором рухові платформи знехтувати.

Розв'язування. Механічна система складається з двох тіл: платформи і рухомого вантажу C . Зовнішніми силами, прикладеними до цієї системи, є вага платформи \vec{P}_1 , вага вантажу \vec{P}_2 , нормальні реакції \vec{N}_1 і \vec{N}_2 опорної площини в точках D і E . Оскільки всі сили вертикальні, то сума їх проекцій на горизонтальну вісь Ox дорівнює нулю, тобто

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0.$$

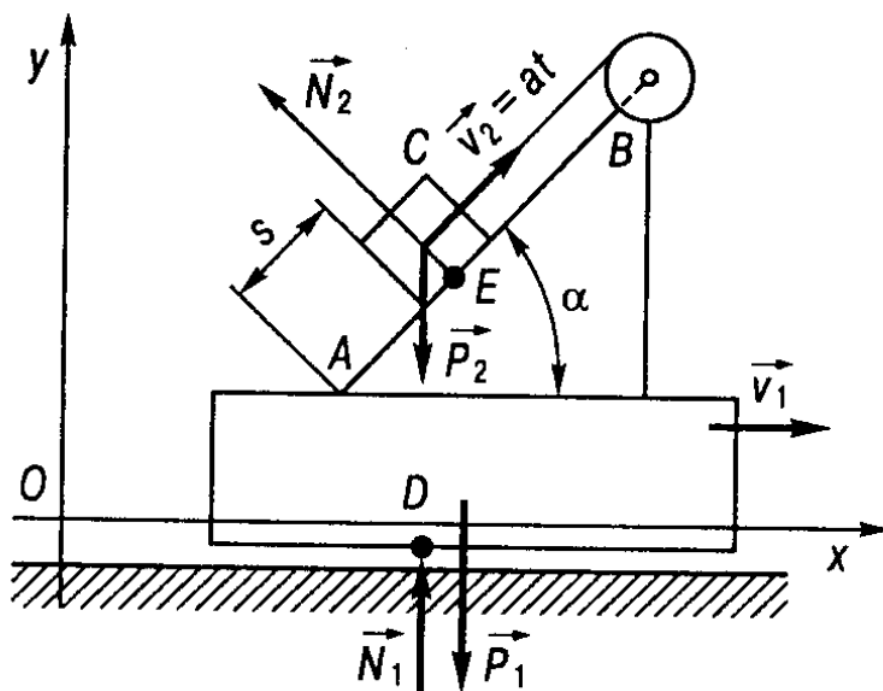


Рис. 2.4

Тому, враховуючи, що в початковий момент часу система нерухома, і застосовуючи теорему імпульсів, дістанемо

$$\frac{P_1}{g} v_{1x} + \frac{P_2}{g} v_{2x} = 0,$$

де v_{1x}, v_{2x} – проекції на вісь Ox абсолютних швидкостей платформи і вантажу. Нехай швидкість платформи дорівнює \vec{v}_1 , тоді $v_{1x} = \vec{v}_1$, $v_{2x} = v_1 + at \cos \alpha$. Отже,

$$\frac{P_1}{g} v_1 + \frac{P_2}{g} (v_1 + at \cos \alpha) = 0.$$

Звідси знаходимо

$$v_1 = -\frac{P_2}{P_1 + P_2} at \cos \alpha.$$

Знак "–" вказує на те, що платформа буде переміщуватися вліво.

Приклад 2.5. Вантаж вагою $P = 3 \text{ кН}$ ковзає вниз по нахиленій естакаді, яка вільно лежить на горизонтальній поверхні (рис. 2.5). Вага естакади $Q = 2 \text{ кН}$, коефіцієнт тертя ковзання між вантажем і естакадою $f = 0,2$, кут нахилу $\alpha = 30^\circ$. Визначити, за яких умов естакада залишиться нерухомою.

Розв'язування. Естакада буде в стані спокою доти, поки сила тертя $\vec{F}_{ТР}$ між поверхнею і естакадою не досягне свого граничного значення, рівного $f_0 N$, де f_0 – коефіцієнт тертя спокою естакади, а \vec{N} – нормальна складова реакції поверхні. Для визначення нормальної складової реакції і сили тертя розглянемо систему, яка складається із вантажу та естакади. На цю

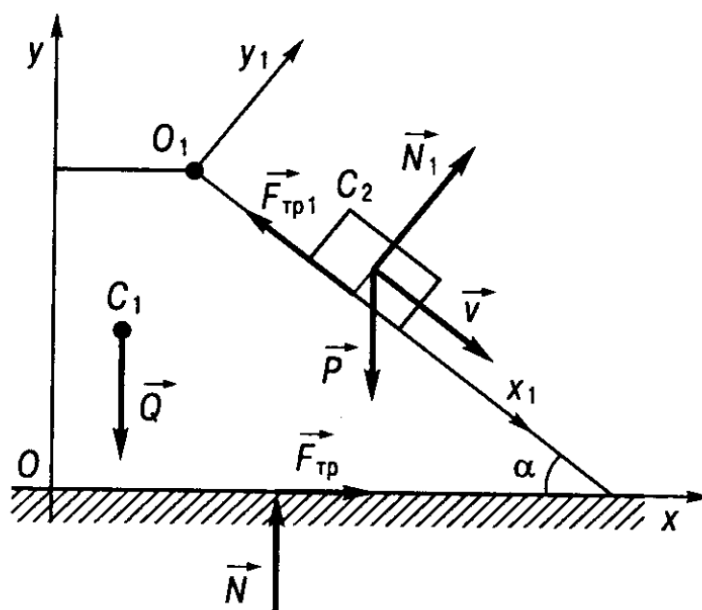


Рис. 2.5

систему діють такі сили: сила ваги вантажу \vec{P} , сила ваги естакади \vec{Q} , нормальна складова \vec{N} реакції опорної поверхні і сила тертя \vec{F}_{TP} між поверхнею і естакадою (рис. 2.5).

Проекції кількості руху системи при нерухомій естакаді на координатні осі Ox і Oy

$$Q_x = \frac{P}{g} v \cos \alpha, \quad Q_y = -\frac{P}{g} v \sin \alpha,$$

v - швидкість вантажу.

Застосуємо теорему про зміну кількості руху системи в диференціальній формі.

Отримаємо

$$\frac{P}{g} \cos \alpha \frac{dv}{dt} = F_{TP}; \quad -\frac{P}{g} \frac{dv}{dt} \sin \alpha = -Q - P + N.$$

Звідси нормальна складова реакції опорної поверхні

$$N = Q + P - \frac{P}{g} \sin \alpha \frac{dv}{dt}.$$

Естакада буде знаходитися в стані спокою, якщо сила тертя не перевищуватиме свого граничного значення $f_0 N$, тобто $f_0 N > \vec{F}_{TP}$. Із отриманих співвідношень матимемо

$$\frac{P}{g} \frac{dv}{dt} \cos \alpha < f_0 \left(Q + P - \frac{P}{g} \frac{dv}{dt} \sin \alpha \right),$$

або

$$f_0 > \frac{P \cdot \frac{dv}{dt} \cos \alpha}{g \left(Q + P - \frac{P}{g} \cdot \frac{dv}{dt} \sin \alpha \right)}.$$

Для остаточного розв'язку задачі необхідно визначити прискорення вантажу - $\frac{dv}{dt}$. Розглянемо рух одного вантажу, на який діють сила ваги \vec{P} , нормальна складова реакції естакади \vec{N}_1 і сила тертя \vec{F}_{TP_1} , яка за модулем дорівнює fN_1 . Складемо диференціальні рівняння руху вантажу у проекціях на осі O_1x_1 і O_1y_1 :

$$\frac{P}{g} \frac{dv}{dt} = P \sin \alpha - F_{TP_1}, \quad 0 = N_1 - P \cos \alpha.$$

З другого рівняння знаходимо $N_1 = P \cos \alpha$; отже, $F_{TP_1} = fN_1 = fP \cos \alpha$.

З першого рівняння маємо $\frac{dv}{dt} = (\sin \alpha - f \cos \alpha)g$. Після підстановки в нерівність для f_0 виразу $\frac{dv}{dt}$ визначаємо

$$f_0 > \frac{P(\sin \alpha - f \cos \alpha) \cos \alpha}{Q + P \cos \alpha (\cos \alpha + f \sin \alpha)}.$$

Цій умові має задовольнити f_0 , щоб естакада не почала рухатися. Підставивши дані умови задачі, дістанемо $f_0 > 0,19$.

Приклад 2.6. Теплохід масою m під час зупинки двигунів має швидкість v_0 . Внаслідок опору води його швидкість зменшується. Визначити, через який час швидкість теплохода зменшиться вдвічі, якщо сила опору змінюється пропорційно швидкості, причому коефіцієнт пропорційності дорівнює μ .

Розв'язування. На рис. 2.6 показано сили, що діють на теплохід: \vec{G} - сила ваги, \vec{Q} - архімедова сила і \vec{R} - сила опору води руху судна (точка C - центр ваги теплохода). Спрямувавши вісь Ox у напрямку руху теплохода, бачимо, що елементарний імпульс $\vec{R} dt$ опору води напрямлений в бік, протилежний диференціалу кількості руху, тому проекція на горизонтальну вісь векторної рівності $d(m\vec{v}) = \vec{R} dt$ дорівнюватиме $d(mv) = -R dt$. Відомо, що силу опору можна подати так: $R = \mu v$, тому $d(mv) = -\mu v dt$. Поділивши обидві частини рівності на добуток mv , одержимо

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\mu}{m} dt.$$

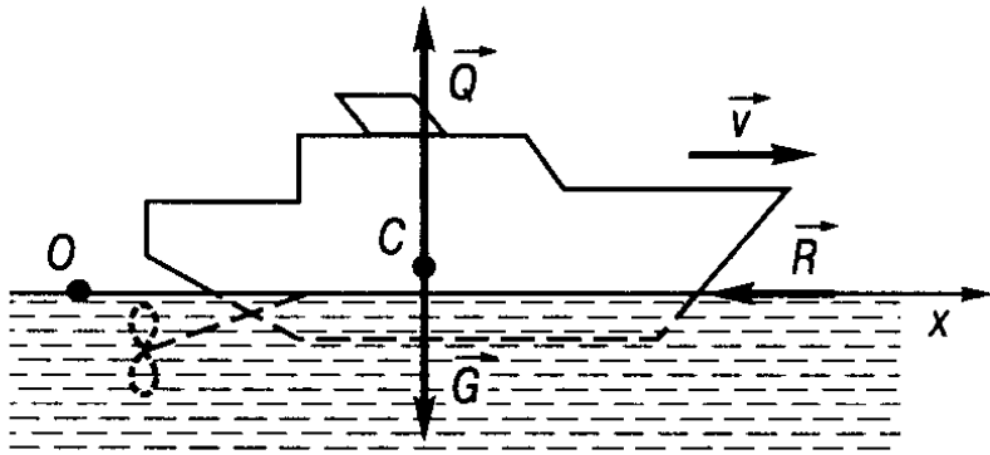


Рис. 2.6

Проінтегрувавши ліву частину цього співвідношення в інтервалі від v_0 до v_1 , а праву - відповідно цьому інтервалу проміжку часу від 0 до t , матимемо

$$\ln v \Big|_{v_0}^{v_1} = -\frac{\mu}{m} t \text{ або } \ln \frac{v_1}{v_0} = -\frac{\mu}{m} t.$$

Оскільки за умовою $v_1 = \frac{v_0}{2}$, маємо $-\frac{\mu}{m} t = \ln \frac{v_0}{2v_0} = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$, звідки

$$t = \frac{m}{\mu} \ln 2.$$

Приклад 2.7. Швидкість судна водотоннажністю $m = 25\,000$ кг за час $t = 50$ с після припинення роботи турбіни зменшилась на 5 вузлів. Визначити середню силу опору води, вважаючи рух корабля прямолінійним (вузол - одиниця швидкості, яка дорівнює 1 милі за годину, або 0,5144 м/с).

Розв'язування. Розглянемо корабель як матеріальну точку, що рухається вздовж осі Ox . За теоремою імпульсів

$$m(v_x - v_{0x}) = \int_0^t F_x dt = F_{\text{хсп}} t,$$

звідки

$$F_{\text{хсп}} = \frac{m(v_x - v_{0x})}{t} = \frac{-25000 \cdot 5 \cdot 0,514}{50} = -1285 \text{ кН}.$$

Приклад 2.8. Точка рівномірно рухається по колу з швидкістю $v = 0,2$ м/с, здійснюючи повний оберт за $T = 4$ с. Визначити імпульс сили S , що діє на точку за час одного періоду, якщо маса точки $m = 0,005$ кг. Знайти середнє значення сили \vec{F} .

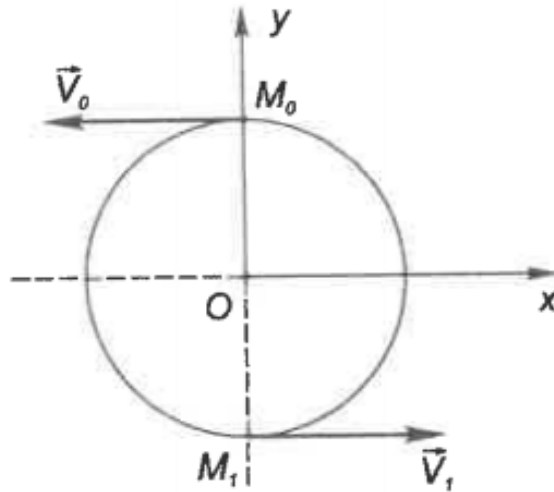


Рис. 2.7

Розв'язування. Показуємо коло (рис. 2.7). У відповідності з умовою задачі, показуємо точку на колі в початковому і кінцевому положеннях, відстаючих одне від одного на 180° і показуємо швидкості точки в цих положеннях (рис. 2.7). Вибираємо систему координат Oxy з початком в центрі кола.

Записуємо векторну рівність

$$m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0 = \int_0^{t_1} F dt = \vec{S}. \quad (1)$$

Проектуємо цю рівність (1) на осі координат:

$$\begin{aligned} m\dot{x}_1 - m\dot{x}_0 &= \int_0^{t_1} F_x dt = S_x; \\ m\dot{y}_1 - m\dot{y}_0 &= \int_0^{t_1} F_y dt = S_y. \end{aligned} \quad (2)$$

Знаходимо

$$S_x = mv_1 - mv_0 = 0,005 \cdot (0,2 + 0,2) = 0,002 \text{ кг} \cdot \text{с};$$

$$S_y = 0; \quad S = \sqrt{S_x^2 + S_y^2} = 0,002 \text{ кг} \cdot \text{с};$$

$$F_{cp} = \frac{S}{t} = \frac{0,002}{2} = 0,001 \text{ Н};$$

$$\cos(\widehat{x, \vec{S}}) = \frac{S_x}{S} = \frac{0,002}{0,002} = 1.$$

Отже, сила \vec{F}_{cp} збігається за напрямком з напрямком кінцевої швидкості.

Приклад 2.9. Який повинен бути коефіцієнт тертя f коліс загальмованого автомобіля з дорогою, якщо при швидкості їзди $v = 72 \text{ км/год}$ він зупиняється через 6 с після початку гальмування.

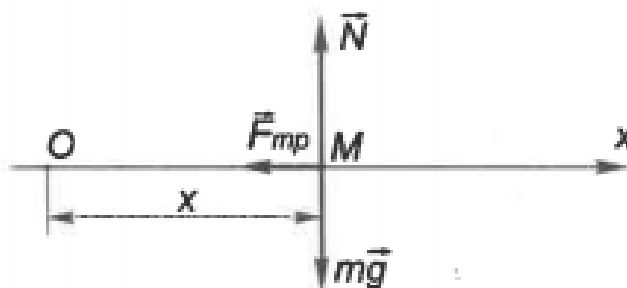


Рис. 2.8

Розв’язування. Показуємо автомобіль у вигляді матеріальної точки M в поточному стані (рис. 2.8), показуємо на рисунку всі діючі на матеріальну точку сили.

Записуємо векторну рівність

$$mv_1 - mv_0 = \int_0^{t_1} (m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}) dt. \quad (1)$$

Проектуємо рівність (1) на вісь Ox . Тоді одержимо:

$$m\dot{x}_1 - m\dot{x}_0 = - \int_0^{t_1} mg f; \quad dt = -mg ft. \quad (2)$$

Визначаємо f . При зупинці автомобіля $\dot{x}_0 = 0$, $v_0 = 72 \text{ км/год} = 20 \text{ м/с}$. Отже, будемо мати

$$f = \frac{\dot{x}_0}{gt} = \frac{20}{9,8 \cdot 6} = 0,34.$$

2.2. ТЕОРЕМА ПРО РУХ ЦЕНТРА МАС МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

2.2.1. Короткі теоретичні відомості.

Центром мас (центром інерції) системи матеріальних точок називається геометрична точка простору C , яка характеризує розподіл маси в системі і положення якої визначається радіусом-вектором

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m} \quad (2.8)$$

або координатами

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{m}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{m}, \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{m}, \quad (2.9)$$

де $m = \sum_{i=1}^n m_i$ - маса системи; x_i, y_i, z_i - координати i -ї точки в прямокутній декартовій системі координат $Oxyz$.

Теорема. Центр мас системи матеріальних точок рухається як вільна матеріальна точка, маса якої дорівнює масі всієї системи і на яку діє сила, що дорівнює головному вектору зовнішніх сил:

$$m\vec{w}_c = \vec{F}^e, \quad (2.10)$$

де \vec{w}_c - прискорення центра мас; $\vec{F}^e = \{F_x^e, F_y^e, F_z^e\}$ - головний вектор зовнішніх сил, причому $F_x^e = \sum_{i=1}^n F_{ix}^e$, $F_y^e = \sum_{i=1}^n F_{iy}^e$, $F_z^e = \sum_{i=1}^n F_{iz}^e$.

У координатній формі вираз (2.10) набуває вигляду

$$m\ddot{x}_c = F_x^e, \quad m\ddot{y}_c = F_y^e, \quad m\ddot{z}_c = F_z^e. \quad (2.11)$$

Співвідношення (2.11) є диференціальними рівняннями руху центра мас системи в проекціях на осі декартової системи координат. Відсутність внутрішніх сил у наведених диференціальних рівняннях дає можливість зробити висновок, що внутрішні сили безпосередньо не впливають на рух центра мас, але внутрішні сили в ряді випадків є причиною появи зовнішніх сил, прикладених до точок системи. Так, внутрішні сили, які приводять в обертальний рух ведуче колесо локомотива, викликають дію на нього зовнішньої сили зчеплення з рейкою. Ця сила прикладається до обода колеса. У змінюваній системі матеріальних точок внутрішні сили, викликаючи їх рух, змінюють їх взаємне розташування, не змінюючи положення центра мас системи.

З теореми про рух центра мас матеріальної системи можна зробити такі висновки:

1) самі по собі внутрішні сили не можуть змінити руху центра мас матеріальної системи;

2) пара сил, яка прикладена до матеріальної системи (твердого тіла), не може змінити руху її центра мас (вона може спричинити тільки обертальний рух тіла);

3) якщо головний вектор зовнішніх сил дорівнює нулю, тобто $m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \mathbf{0}$, то маємо $\vec{v}_c = \vec{v}_{c0} = \mathbf{const}$. Це означає, що центр мас

системи рухається рівномірно і прямолінійно. Ця теза може бути поширена на проекцію головного вектора зовнішніх сил на деяку вісь і відповідно на рух системи відносно цієї осі. Якщо до того ж у початковий момент часу швидкість руху центра мас дорівнювала нулю, то центр мас зберігає своє положення. Аналогічні властивості має і проекція положення центра мас на певну вісь.

2.2.2. Приклади розв'язування задач

Приклад 2.10. Горизонтальний поршневий двигун розміщений без кріплення на горизонтальній гладкій площині (рис. 2.9). Кривошип OA завдовжки r обертається з постійною кутовою швидкістю ω_0 . Вважаючи довжину шатуна рівною довжині кривошипа, а маси рухомих частин зведеними до двох мас m_1 і m_2 , зосереджених у пальці кривошипа і в центрі поршня, визначити горизонтальний рух корпусу двигуна, якщо його маса дорівнює m_3 . У початковий момент поршень займав крайнє ліве положення, а корпус перебував у стані спокою.

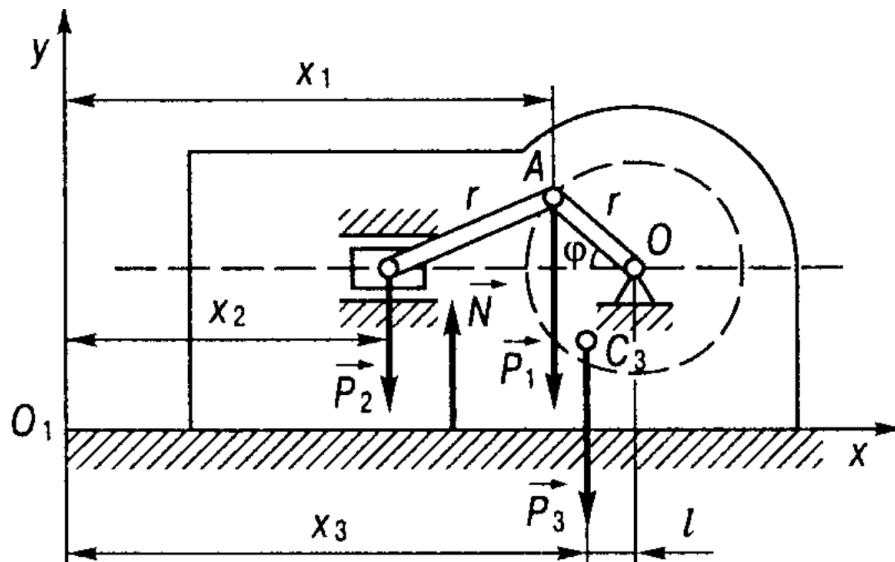


Рис. 2.9

Розв'язування. Розглянемо двигун як систему, що складається з кривошипа та шатуна зі зведеною масою m_1 , поршня масою m_2 і корпусу двигуна масою m_3 . На неї діють зовнішні сили: $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ - сили ваги; \vec{N} - нормальна реакція поверхні гладкого фундаменту. Оскільки потрібно знайти горизонтальний рух корпусу, скористаємося теоремою про проекції руху центра мас матеріальної системи на горизонтальний напрям:

$$m\ddot{x}_C = F_x^e. \quad (1)$$

Тут $m = m_1 + m_2 + m_3$ - маса двигуна.

Нехай x_1, x_2, x_3 - абсциси центрів мас частин системи в довільний момент часу t . Тоді абсциса центра мас C усієї системи

$$x_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m}. \quad (2)$$

Виразимо усі абсциси через величину x_3 , отримаємо

$$x_1 = x_3 + l - r \cos \varphi; \quad x_2 = x_3 + l - 2R \cos \varphi; \quad \varphi = \omega t, \quad (3)$$

де $l = \text{const}$ - різниця абсцис точки O і центра мас корпусу двигуна точки C_3 .

Підставивши ці абсциси у формулу (2), одержимо

$$\begin{aligned} x_c &= [(m_1 + m_2 + m_3)x_3 + m_1 l + m_2 l - m_1 r \cos \omega t - 2m_2 r \cos \omega t] / m = \\ &= x_3 + (m_1 + m_2)l / m - (m_1 + 2m_2)r / m \cos \omega t. \end{aligned}$$

Про диференціювавши x_c два рази за часом і підставивши в (1), будемо мати диференціальне рівняння руху центра мас корпусу двигуна

$$m\ddot{x}_3 = F_x^e - (m_1 + 2m_2)r\omega^2 \cos \omega t. \quad (4)$$

У цій задачі $F_x^e = 0$, тому що при вибраних осях всі зовнішні сили паралельні осі O_1y . Рівняння (4) можна записати у вигляді

$$\ddot{x}_3 = -\frac{(m_1 + 2m_2)r\omega^2}{m_1 + m_2 + m_3} \cos \omega t,$$

після інтегрування якого знаходимо

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= -\frac{(m_1 + 2m_2)}{m_1 + m_2 + m_3} r\omega \sin \omega t + C_1, \\ x_3 &= \frac{(m_1 + 2m_2)r \cos \omega t}{m_1 + m_2 + m_3} + C_1 t + C_2. \end{aligned}$$

Враховуючи початкові умови руху корпусу ($x_3(0) = x_3^0$, $\dot{x}_3(0) = 0$), одержимо

$$C_1 = 0, \quad C_2 = x_3^0 - \frac{m_1 + 2m_2}{m_1 + m_2 + m_3} r,$$

де x_3^0 - початкова абсциса корпусу двигуна, тому

$$x_3 = x_3^0 - \frac{(m_1 + 2m_2)r}{m_1 + m_2 + m_3} (1 - \cos \omega t).$$

Це рівняння є рівнянням руху корпусу двигуна. Він буде здійснювати гармонічні коливання з амплітудою $a = \frac{m_1 + 2m_2}{m_1 + m_2 + m_3} r$ і круговою частотою ω .

Приклад 2.11. Кривошип AB завдовжки r вагою P , який обертається з постійною кутовою швидкістю ω , приводить в рух кулісу і зв'язаний з нею поршень D , загальна вага яких також дорівнює P (рис. 2.10). На поршень при його русі діє постійна сила Q . Нехтуючи тертям, знайти найбільший горизонтальний тиск на вісь A кривошипа.

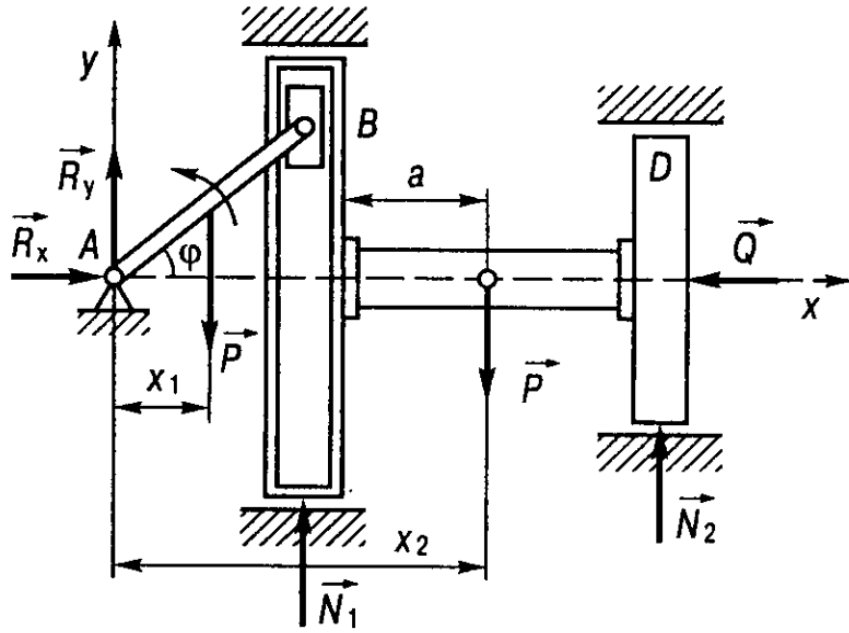


Рис. 2.10

Розв'язування. Для того, щоб виключити сили, які обертають кривошип, і тиск на нього з боку куліси, розглянемо горизонтальний рух усієї системи вздовж осі Ax . Тоді за теоремою про рух центра мас системи, якщо позначити горизонтальну реакцію осі A через R_x , матимемо

$$m \frac{d^2 x_c}{dt^2} = R_x - Q. \quad (1)$$

Враховуючи вирази (2.9), після їх подвійного диференціювання можна записати

$$m \ddot{x}_c = m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2. \quad (2)$$

У нашому випадку

$$m_1 = \frac{P}{g}, \quad x_1 = \frac{r}{2} \cos \varphi, \quad m_2 = \frac{P}{g}, \quad x_2 = a + r \cos \varphi, \quad \varphi = \omega t.$$

Скориставшись формулами (1) і (2), запишемо

$$R_x = Q + m \frac{d^2 x_c}{dt^2} = Q - \frac{r \omega^2}{g} \left(\frac{P}{2} + P \right) \cos \omega t. \quad (3)$$

Горизонтальна сила тиску, прикладена до осі обертання кривошипа, напрямлена протилежно реакції \vec{R}_x і дорівнює за модулем $|R_x|$. Тиск буде максимальним, коли $\varphi = 180^\circ$,

$$R_{x \max} = Q + \frac{r \omega^2}{g} \left(\frac{P}{2} + P \right).$$

Приклад 2.12. Машина для кування металу приводиться в дію кривошипно-шатунним механізмом OAB (рис. 2.11, а). Визначити тиск машини на фундамент при обертанні кривошипа, якщо маса станини з ковадлом D дорівнює m_1 , маса кривошипа довжини r дорівнює m_2 , маса молота 3 дорівнює m_3 . Кривошип OA вважати однорідним стрижнем. Кривошип, який обертається з постійною кутовою швидкістю ω проти ходу годинникової стрілки, в початковий момент часу займав вертикальне нижнє положення. Масою шатуна AB завдовжки l знехтувати.

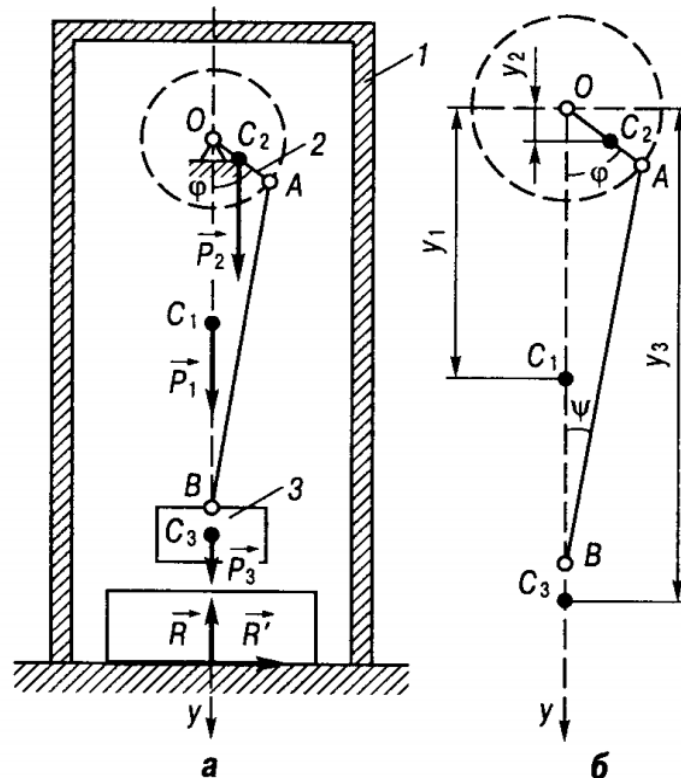


Рис. 2.11

Розв'язування. Розглянемо систему, яка складається з трьох тіл: станини з ковадлом D , кривошипа OA та молота 3 .

Зобразимо зовнішні сили, прикладені до машини (рис.2.11, б): $\vec{P}_1 = m_1 \vec{g}$ - сила ваги станини з ковадлом, $\vec{P}_2 = m_2 \vec{g}$ - сила ваги кривошипа, $\vec{P}_3 = m_3 \vec{g}$ - сила ваги молота 3 (всі сили ваги прикладені у відповідних центрах мас C_1, C_2, C_3 окремих тіл системи), \vec{R} - сумарна нормальна складова реакції фундаменту, \vec{R}' - сумарна тангенціальна складова реакції фундаменту.

Введемо вісь y і спрямуємо її по вертикалі вниз, взявши за початок її відліку вісь обертання O кривошипа OA .

Застосуємо теорему про рух центра мас системи матеріальних точок в проєкціях на вісь y :

$$m\ddot{y}_C = \sum_{i=1}^n F_{iy}^e.$$

Тут $m = m_1 + m_2 + m_3$ - маса кувальної машини.

Сума проєкцій усіх зовнішніх сил на вісь y

$$\sum_{i=1}^n F_{iy}^e = P_1 + P_2 + P_3 - R.$$

Таким чином,

$$m\ddot{y}_C = P_1 + P_2 + P_3 - R,$$

звідки нормальна складова реакції фундаменту

$$R = P_1 + P_2 + P_3 - m\ddot{y}_C.$$

Для розв'язання задачі залишається визначити $m\ddot{y}_C$. У даній задачі

$$m\ddot{y}_C = m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2 + m_3\ddot{y}_3,$$

де y_1, y_2, y_3 - відповідно координати центрів мас станини, кривошипа та молота. Розглянемо кривошипно-шатунний механізм у момент часу t , коли кривошип OA повернувся з нижнього вертикального положення на кут $\varphi = \omega t$. Координати центрів мас C_1, C_2, C_3 елементів системи зображені на рис. 2.11,б. Координати y_1, y_2, y_3 визначаються рівняннями

$$y_1 = OC_1 = \text{const}, \quad y_2 = \frac{OA}{2} \cos \omega t = \frac{r}{2} \cos \omega t,$$

$$y_3 = OA \cos \omega t + AB \cos \psi + BC_3 = r \cos \omega t + l \cos \psi + BC_3,$$

де $\psi = \angle ABO$. Залежність між кутами $\varphi = \omega t$ та ψ визначається за теоремою синусів з трикутника OAB :

$$\frac{\sin \psi}{\sin \omega t} = \frac{r}{l}, \quad \sin \psi = \frac{r}{l} \sin \omega t = \lambda \sin \omega t,$$

де $\lambda = \frac{r}{l}$. Тоді $\cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t}$, а вираз для y_3 має

вигляд

$$y_3 = r \cdot \cos \omega t + l \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t} + BC_3.$$

Зауважимо, що величина $BC_3 = \text{const}$. Розкладемо вираз $\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t}$ в ряд. Враховуючи, що $\lambda < 1$, відкинемо усі члени ряду, які утримують λ в степені, вище другого, тобто

$$\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t} \approx 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \omega t.$$

Звідси випливає, що

$$y_3 = r \cos \omega t + l \left(1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \omega t \right) + BC_3.$$

Враховуючи, що $\sin^2 \omega t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)$ і $\lambda = \frac{r}{l}$, отримаємо

$$y_3 = l - \frac{r^2}{4l} + r \left(\cos \omega t + \frac{1}{4} \lambda \cos 2\omega t \right) + BC_3.$$

Обчислимо другі похідні від y_1, y_2, y_3 за часом t :

$$\ddot{y}_1 = 0, \quad \ddot{y}_2 = \frac{-r\omega^2}{2} \cos \omega t, \quad \ddot{y}_3 = -r\omega^2(\cos \omega t + \lambda \cos 2\omega t).$$

Тепер знаходимо

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_c &= m_1\ddot{y}_1 + m_2\ddot{y}_2 + m_3\ddot{y}_3 = \\ &= -\frac{1}{2}m_2r\omega^2 \cos \omega t - m_3r\omega^2(\cos \omega t + \lambda \cos 2\omega t) \\ &= -\frac{1}{2}r\omega^2[(m_2 + 2m_3) \cos \omega t + 2\lambda m_3 \cos 2\omega t]. \end{aligned}$$

Тоді нормальна складова реакції фундаменту

$$R = (m_1 + m_2 + m_3)g + \frac{1}{2}r\omega^2[(m_2 + 2m_3) \cos \omega t + 2\lambda m_3 \cos 2\omega t].$$

Сила тиску кувальної машини на фундамент спрямована протилежно нормальній складовій реакції фундаменту \vec{R} і рівна їй за модулем.

2.3. ТЕОРЕМА ЕЙЛЕРА ПРО РУХ РІДИНИ

2.3.1. Короткі теоретичні відомості

Розглядається стала течія рідини між перерізами труби, площі яких σ_1 і σ_2 (рис. 2.12). Позначимо через \vec{v}_1 і \vec{v}_2 середні швидкості рідини у зазначених перерізах. Густина середовища в перерізах позначимо через ρ_1 і ρ_2 . Для сталої течії маса рідини, що протікає через зазначені перерізи за одиницю часу, буде сталою величиною $\mu = \rho_1 v_1 \sigma_1 = \rho_2 v_2 \sigma_2$. Величина μ називається секундною масою рідини.

Теорема Ейлера. При незмінній секундній масі рідини μ сума головних векторів об'ємних, поверхневих сил і напрямлених всередину певного об'єму секундних кількостей рухів рідини, що протікає через два поперечні перерізи труби, дорівнює нулю:

$$\vec{F}_{об} + \vec{F}_{пов} + \mu\vec{v}_1 - \mu\vec{v}_2 = \mathbf{0}. \quad (2.12)$$

Об'ємні (або масові) сили $\vec{F}_{об}$ діють на кожну частинку всередині виділеного об'єму рідини. До таких сил належать сили тяжіння. Поверхневі сили $\vec{F}_{пов}$ діють на частинки рідини, які лежать на поверхні об'єму. До цих сил належать сили тиску стінок та сили тертя стінок і рідини.

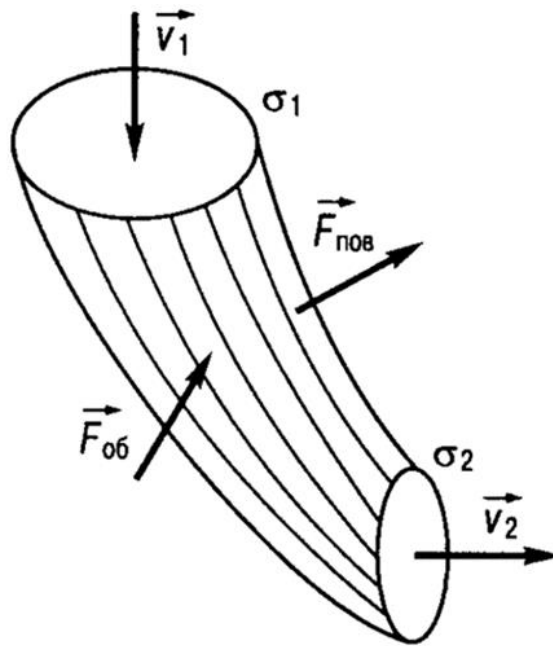


Рис. 2.12

2.3.2. Приклади розв'язування задач

Приклад 2.13. Визначити величину горизонтальної складової R сили динамічного (додатково до гідростатичного) тиску води на коліно труби діаметром $0,3$ м, якщо швидкість руху води в трубі $v = 2$ м/с (рис. 2.13). Густина води $\rho = 1$ т/м³.

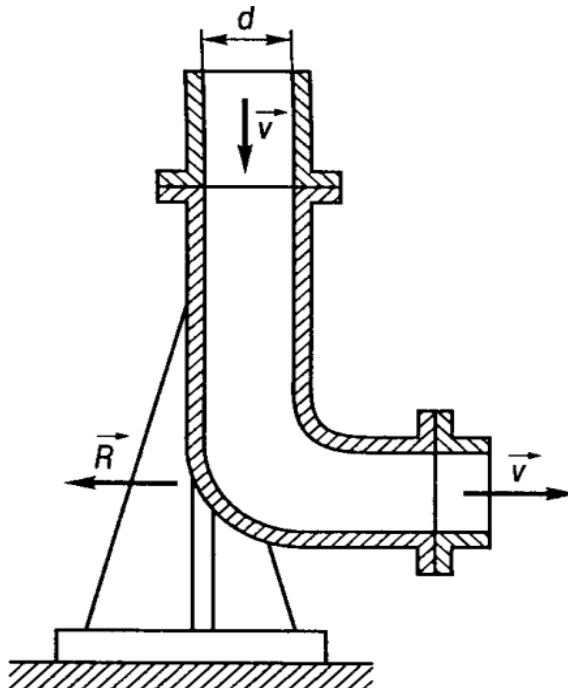


Рис. 2.13

Розв'язування. За законом рівності дії і протидії сила динамічного тиску води дорівнює величині відповідної складової тиску стінки труби на рідину, тому за теоремою Ейлера одержимо

$$R = \mu v = \rho v \frac{\pi d^2}{4} v = \rho v^2 \frac{\pi d^2}{4} = 283 \text{ Н}.$$

Приклад 2.14. Визначити тиск \vec{R} струменя, який витікає зі швидкістю \vec{v}_1 з труби перерізом σ , на нескінченну стінку, площина якої перпендикулярна до напрямку струменя (рис. 2.14, а) або складає з ним кут α (рис. 2.14, б).

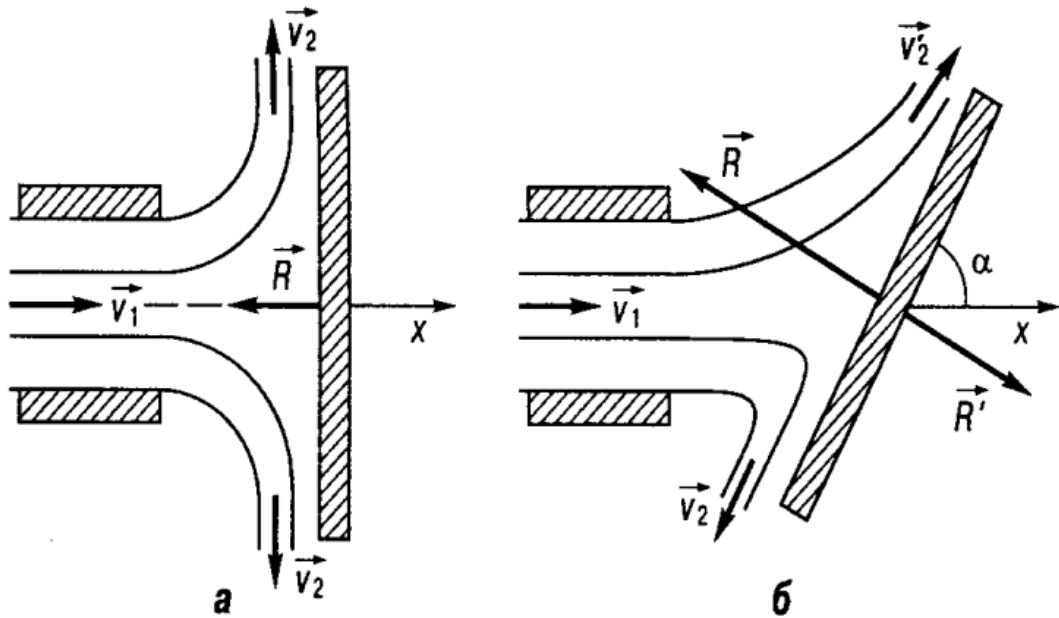


Рис. 2.14

Розв'язування. Застосовуючи теорему Ейлера в проекції на вісь x (вісь струменя), одержуємо при $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$$R = \mu v_1 = \rho v_1^2 \sigma.$$

Ця формула була вперше одержана Даниїлом Бернуллі (1700-1782) в 1736р. Простота розв'язання обумовлена тим, що стінка вважається нескінченною. Виведена формула Бернуллі наближено вірна, якщо вважати ширину пластинки такою, що значно перевищує ширину струменя.

Розглянемо неперпендикулярний удар струменя об стінку, що утворює з напрямком струменя кут α (рис. 2.14, б). Введемо позначення: \vec{v}_1 - швидкість витікання струменя з труби; \vec{v}_2 і \vec{v}'_2 - швидкості відповідно двох розгалужених потоків струменя вздовж стінки. Вектори секундних кількостей руху, зображених на рис. 2.14,б, відповідно дорівнюють $\mu \vec{v}_1$, $\mu_2 \vec{v}_2$, $\mu'_2 \vec{v}'_2$, де коефіцієнти μ , μ_2 , μ'_2 визначають масу рідини, що протікає через відповідний переріз за одиницю часу:

$$\mu = \rho v_1 \sigma_1, \quad \mu_2 = \rho v_2 \sigma_2, \quad \mu'_2 = \rho v'_2 \sigma'_2;$$

де ρ - густина рідини; σ_1 , σ_2 , σ_3 - площі перерізів струменів.

Нехтуючи тертям рідини об стінку, тиск стінки \vec{R} на струмінь будемо вважати перпендикулярним до стінки.

Проектуючи суму вище визначених векторів на напрям нормалі до стінки, знаходимо реакцію

$$R = \mu v_1 \sin \alpha = \sigma \rho v_1^2 \sin \alpha ;$$

при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ одержимо уже наведену формулу Бернуллі.

Проектуючи ту ж векторну суму на напрям стінки, можна визначити секундні кількості руху $\mu_2 v_2$ і $\mu'_2 v'_2$ вздовж стінки. За теоремою Ейлера матимемо

$$\mu v_1 \cos \alpha + \mu'_2 v'_2 - \mu_2 v_2 = 0,$$

а з умови збереження масової витрати всього струменя запишемо

$$\mu_2 + \mu'_2 = \mu.$$

У грубому наближенні можна прийняти

$$v_1 = v'_2 = v_2,$$

тобто вважати, що різниця між масовими витратами μ_2 і μ'_2 визначається лише різницею перерізів струменів, які розтікаються. При такому припущенні за теоремою Ейлера отримаємо

$$\mu_2 - \mu'_2 = \mu \cos \alpha,$$

звідки

$$\mu_2 = \mu \frac{1 + \cos \alpha}{2} = \mu \cos^2 \frac{\alpha}{2}, \quad \mu'_2 = \mu \frac{1 - \cos \alpha}{2} = \mu \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Приклад 2.15. Горизонтальна ділянка трубопроводу земснаряда має вигнуте під кутом 90° коліно (рис. 2.15). Визначити динамічний тиск \vec{R} пульпи на вигнуту частину трубопроводу, якщо його діаметр дорівнює 60 см , питома вага пульпи $\gamma = 12 \text{ кН/м}^3$, швидкість її течії $v = 6 \text{ м/с}$.

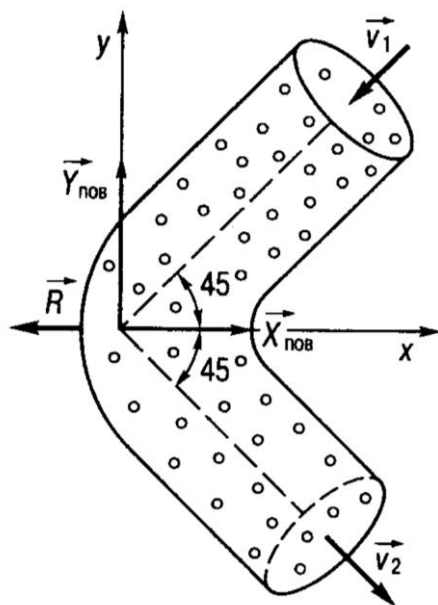


Рис. 2.15

Розв’язування. Розглянемо вигнуту частину трубопроводу і позначимо через σ_1 і σ_2 - площі поперечних початкового і кінцевого його перерізів, а через \vec{v}_1 і \vec{v}_2 - вектори відповідних швидкостей пульпи. Вісь x спрямуємо вздовж осі симетрії вигнутої частини трубопроводу, а вісь y - перпендикулярно до неї. За умовою задачі $v_1 = v_2 = v$, а вектори \vec{v}_1 і \vec{v}_2 складають з віссю x кути, які дорівнюють 45° . Сили ваги напрямлені вертикально і їх проекції на вісь x та y дорівнюють нулю. Позначимо через $\vec{X}_{\text{пов}}$ і $\vec{Y}_{\text{пов}}$ проекції головного вектора сил тиску стінок трубопроводу на пульпу і спроектуємо на осі координат вираз (2.12):

$$\begin{aligned} X_{\text{пов}} - \mu v \cos 45^\circ - \mu v \cos 45^\circ &= 0, \\ Y_{\text{пов}} - \mu v \sin 45^\circ + \mu v \sin 45^\circ &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{Звідси отримаємо: } X_{\text{пов}} = \mu v \sqrt{2}, \quad Y_{\text{пов}} = 0.$$

Таким чином, головний вектор поверхневих сил напрямлений вздовж осі x .

Напрямки сили динамічного тиску R пульпи на вигнуту частину трубопроводу і проекції $\vec{X}_{\text{пов}}$ головного вектора поверхневих сил стінок трубопроводу на вісь x протилежні за модулем $R = X_{\text{пов}} = \sqrt{2\mu v}$. Тоді за визначенням маємо

$$\mu = \rho v \sigma.$$

Залежність між питомою масою пульпи ρ і її питомою вагою визначається співвідношенням $\rho = \frac{\gamma}{g}$, а площа поперечного перерізу трубопроводу

$\sigma = \frac{\pi d^2}{4}$. Підставивши вирази для μ, ρ і σ в формулу для R , одержимо

$$R = \frac{\sqrt{2}\gamma}{4g} \pi d^2 v^2 = \frac{\sqrt{2} \cdot 12 \cdot 10^3}{4 \cdot 9,81} \cdot \pi \cdot 0,6^2 \cdot 6^2 = 17608,5 \text{ Н}.$$

2.4. ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ КІНЕТИЧНОЇ ЕНЕРГІЇ

2.4.1. Короткі теоретичні відомості

Кінетичною енергією матеріальної точки називають скалярну міру механічного руху точки в нерухомій системі координат, що дорівнює половині добутку маси точки m на квадрат її швидкості:

$$T = \frac{1}{2} m v^2. \quad (2.13)$$

Кінетичною енергією системи матеріальних точок називають суму кінетичних енергій усіх точок, що входять до системи:

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2, \quad (2.14)$$

де m_i - маси точок; v_i - швидкості точок.

Кінетична енергія твердого тіла, що рухається поступально,

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2, \quad (2.15)$$

де M - маса тіла; v_C - швидкість центра мас (або будь-якої іншої точки).

Кінетична енергія твердого тіла при обертанні його навколо нерухомої осі (наприклад Oz)

$$T_z^\omega = \frac{1}{2} I_z \omega^2, \quad (2.16)$$

де I_z - момент інерції тіла відносно осі обертання; ω - кутова швидкість тіла.

Для загального випадку руху твердого тіла (в тому числі і для плоского руху)

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2, \quad (2.17)$$

де I_C - момент інерції тіла відносно миттєвої осі, яка проходить через центр мас (для плоского руху ця вісь перпендикулярна до площини руху); ω - миттєва кутова швидкість.

Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки. Приріст кінетичної енергії матеріальної точки на деякому відрізку дуги її траєкторії дорівнює роботі сили, що прикладена до точки, на цьому відрізку дуги траєкторії:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A, \quad (2.18)$$

де v_0, v - відповідно початкова та кінцева швидкість точки; A - робота сили.

Теорема про зміну кінетичної енергії матеріальної точки в диференціальній формі. Диференціал кінетичної енергії матеріальної точки дорівнює елементарній роботі сил, що діють на точку:

$$dT = d'A. \quad (2.19)$$

Теорема про зміну кінетичної енергії системи матеріальних точок. Приріст кінетичної енергії системи матеріальних точок за де-який проміжок часу дорівнює сумі робіт зовнішніх і внутрішніх сил, що діють на точки системи протягом цього проміжку часу:

$$T - T_0 = \sum_{i=1}^n A_i^e + \sum_{i=1}^n A_i^j, \quad (2.20)$$

де $\sum_{i=1}^n A_i^e$ і $\sum_{i=1}^n A_i^j$ - відповідно сума робіт зовнішніх і внутрішніх сил.

Елементарна робота сили дорівнює скалярному добутку сили на елементарне переміщення точки її прикладання:

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot ds \cdot \cos(\widehat{\vec{F}, \vec{\tau}}) = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \quad (2.21)$$

де s - дугова координата; $\vec{\tau}$ - орт дотичної до траєкторії точки; dx, dy, dz - проекції вектора елементарного переміщення $d\vec{r}$ точки прикладання сили на осі декартової системи координат.

Робота сили на скінченному переміщенні матеріальної точки вздовж дуги L визначається одним з інтегралів

$$A = \int_L \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_L F_\tau ds = \int_L (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (2.22)$$

Робота сили ваги матеріальної точки дорівнює добутку сили ваги на різницю висот ($\pm h$) початкового і кінцевого положення точки:

$$A = \pm Ph = \pm mgh. \quad (2.23)$$

Робота центральної сили не залежить від форми траєкторії матеріальної точки, на яку діє центральна сила, а залежить тільки від початкового та кінцевого положень точки:

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr. \quad (2.24)$$

Робота сили пружності у випадку, коли кінці пружини закріплено шарнірно, а пружна сила пропорційна подовженню $\Delta r (F = C\Delta r)$, визначається з виразу

$$A = -\frac{C}{2}(\Delta r_2^2 - \Delta r_1^2), \quad (2.25)$$

де $\Delta r_1 = r_1 - r_0$, $\Delta r_2 = r_2 - r_0$ - початкове та кінцеве подовження пружини; r_1 та r_2 - довжина пружини в початковому та кінцевому положенні; r_0 - довжина недеформованої пружини; C - жорсткість пружини.

Елементарна робота сил, що прикладені до твердого тіла, дорівнює сумі роботи головного вектора зовнішніх сил, яка здійснюється на елементарному переміщенні полюса O , і роботи головного моменту цих сил, обчисленого відносно центра O , на елементарному обертальному переміщенні $d\varphi$ тіла навколо осі, що проходить через цей центр:

$$d'A = \vec{F}^e \cdot d\vec{r}_O + \vec{M}_O^e \cdot d\vec{\varphi}. \quad (2.26)$$

Елементарна та повна робота сил, прикладених до твердого тіла, що обертається навколо осі Oz .

$$d'A = M_z \cdot d\varphi, \quad A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z \cdot d\varphi, \quad (2.27)$$

де M_z - головний момент усіх зовнішніх сил відносно осі обертання Oz .

Сума робіт усіх внутрішніх сил абсолютно твердого тіла дорівнює нулю.

Потужність зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла, дорівнює сумі скалярного добутку головного вектора на швидкість полюса O і скалярного добутку головного моменту цих сил відносно даного полюса на кутову швидкість обертання тіла:

$$N = \vec{F}^e \cdot \vec{v}_O + \vec{M}_O^e \cdot \vec{\omega}. \quad (2.28)$$

В окремому випадку, коли тіло здійснює обертання навколо нерухомої осі, наприклад Oz і $M_z = const$, потужність і робота зовнішніх сил визначається за формулами

$$N = M_z \omega, \quad A = M_z (\varphi - \varphi_0), \quad (2.29)$$

де φ, φ_0 - кінцеве і початкове значення кута повороту тіла.

2.4.2. Приклади розв'язування задач.

Приклад 2.16. Вантажу вагою $\vec{P} = m\vec{g}$, підвішеному в точці O_1 на пружині, статичне подовження якої під дією сили ваги P дорівнює λ_{CT} , надана початкова швидкість \vec{v}_0 із положення M_0 вертикально вниз (рис. 2.16). Визначити швидкість вантажу в положенні M , якщо вантаж, який вважається матеріальною точкою, ковзає по кільцю радіуса R без тертя, $OO_1 = R$ і довжина недеформованої пружини теж дорівнює R .

Розв'язування. Застосуємо для аналізу руху вантажу теорему про зміну кінетичної енергії точки, взявши за початкове положення вантажу точку M_0 , за кінцеве - точку M . За формулою (2.18) отримаємо

$$m \frac{v^2}{2} - m \frac{v_0^2}{2} = A. \quad (1)$$

Роботу здійснюють сила ваги вантажу ($A = mgh$) і пружна сила пружини:

$$A = -\frac{C}{2} (\Delta r_2^2 - \Delta r_1^2),$$

де $\Delta r_2, \Delta r_1$ - відповідно подовження пружини в кінцевому та початковому положеннях.

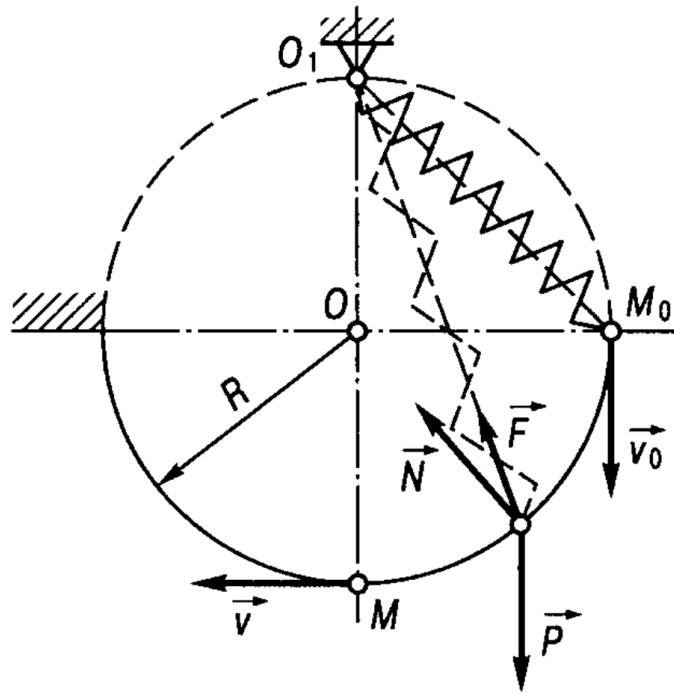


Рис. 2.16

Оскільки в стані статичної рівноваги тіла, підвешеного на пружині, сила ваги mg врівноважується пружною силою пружини, то $mg = C \lambda_{CT}$, де λ_{CT} - статичне подовження пружини (подовження пружини в стані рівноваги). Тоді коефіцієнт пружності пружини

$$C = \frac{mg}{\lambda_{CT}}.$$

Нормальна реакція \vec{N} кільця весь час перпендикулярна до переміщення і її робота дорівнює нулю. Отже, сума робіт

$$A = mgh - \frac{mg}{2\lambda_{CT}} (\Delta r_2^2 - \Delta r_1^2).$$

У випадку, який розглядається, $h = R$, $\Delta r_1 = R\sqrt{2} - R$, $\Delta r_2 = 2R - R = R$, тому

$$A = mgh - \frac{mg}{2\lambda_{CT}} [R^2 - R^2(\sqrt{2} - 1)^2] = mgR \left[1 - \frac{R}{\lambda_{CT}} (\sqrt{2} - 1) \right].$$

Підставивши A з одержаного виразу (1), дістанемо

$$m \frac{v^2}{2} - m \frac{v_0^2}{2} = mgR \left[1 - \frac{(\sqrt{2} - 1)R}{\lambda_{CT}} \right],$$

звідки

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gR \left[1 - \frac{(\sqrt{2} - 1)^2 R}{\lambda_{CT}} \right]}.$$

Приклад 2.17. Тіло, що має вагу $P = mg$, падає без початкової швидкості на пружину з висоти h (рис. 2.17). Визначити найбільше стиснення пружини λ . Масою пружини знехтувати.

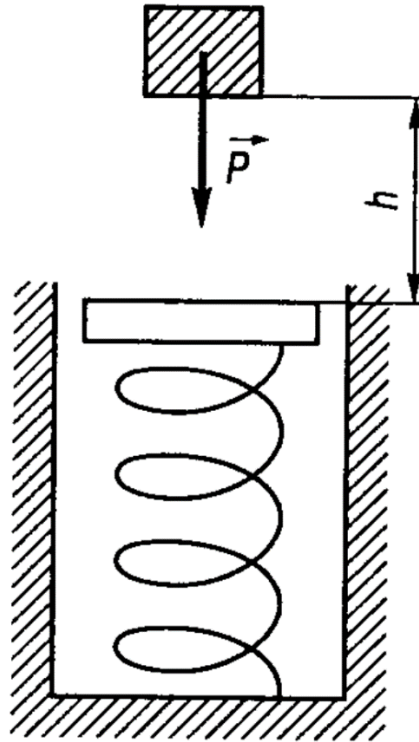


Рис. 2.17

Розв'язування. Застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії точки

$$m \frac{v^2}{2} - m \frac{v_0^2}{2} = A,$$

взявши за початкове положення тіла начало його падіння з висоти h , а за кінцеве - момент максимального стиснення пружини. Зміна кінетичної енергії за цей проміжок часу дорівнює нулю, тому що $v_0 = 0$ і при найбільшому стисненні пружини $v = 0$. Отже, робота $A = 0$. На тіло після його дотику з пружиною діють дві сили: сила ваги $\vec{P} = m\vec{g}$ і пружна сила пружини. Сила \vec{P} здійснює роботу на переміщенні $(h + \lambda)$, пружна сила - на переміщенні λ . Тому

$$A = mg(h + \lambda) - \frac{C}{2} \lambda^2 = 0,$$

де C - коефіцієнт пружності пружини.

Оскільки в стані статичної рівноваги тіла сила ваги врівноважується пружною силою пружини, то $mg = C\lambda_{CT}$, де λ_{CT} – статична деформація пружини (подовження пружини в стані рівноваги). Тоді коефіцієнт пружності пружини

$$C = \frac{mg}{\lambda_{CT}}.$$

Далі з виразу роботи сил отримаємо

$$h + \lambda - \frac{1}{2\lambda_{CT}}\lambda^2 = 0,$$

або

$$\lambda^2 - 2\lambda_{CT}\lambda - 2\lambda_{CT}h = 0.$$

Розв'язавши це рівняння, одержимо два корені. Враховуючи фізичний зміст задачі, залишаємо один корінь (другий корінь від'ємний):

$$\lambda = \lambda_{CT} + \sqrt{\lambda_{CT}^2 + 2\lambda_{CT}h}.$$

Зауважимо, що при $h = 0$ найбільше стиснення пружини $\lambda = 2\lambda_{CT}$, тобто при динамічній дії вантажу на пружину її найбільше стиснення в два рази більше статичної деформації.

Приклад 2.18. Редуктор пароплавного турбозубчастого агрегату складається з трьох коліс, радіуси яких дорівнюють відповідно r_1, r_2, r_3 (рис.2.18, а). На ведучі колеса *I* і *II* від турбін передаються моменти M_1 і M_2 . Визначити кутове прискорення гребного вала, якщо на гвинт діє момент опору M_3 . Взяти моменти інерції ведучих коліс рівними I_1 і I_2 , а момент інерції колеса *III* з валом і гвинтом I_3 .

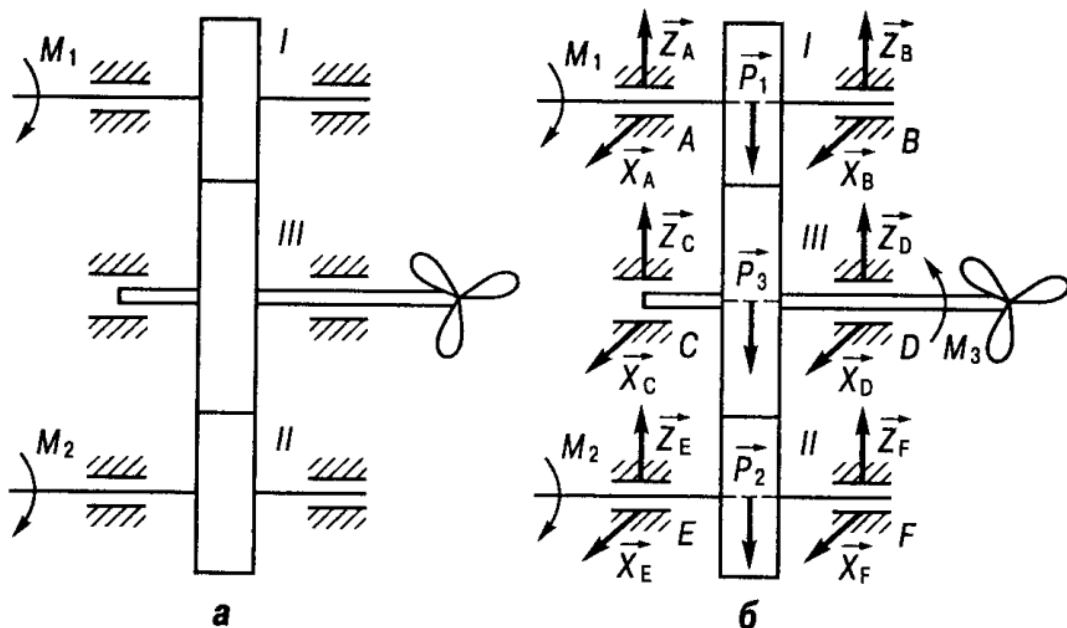


Рис. 2.18

Розв'язування. Скористаємося теоремою про зміну кінетичної енергії в диференціальній формі і запишемо формулу для визначення потужності:

$$\frac{dT}{dt} = N.$$

Визначимо кінетичну енергію системи, яка складається з трьох виконуючих обертальний рух коліс редуктора:

$$T = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2).$$

Враховуючи кінематичні співвідношення $\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 = \omega_3 r_3$, одержимо

$$T = \frac{1}{2} \left[I_1 \left(\frac{r_3}{r_1} \right)^2 + I_2 \left(\frac{r_3}{r_2} \right)^2 + I_3 \right] \omega_3^2$$

або

$$T = \frac{1}{2} I_{3B} \omega_3^2,$$

де зведеним момент інерції

$$I_{3B} = I_3 + I_1 \left(\frac{r_3}{r_1} \right)^2 + I_2 \left(\frac{r_3}{r_2} \right)^2.$$

Знайдемо потужність

$$N = M_1 \omega_1 + M_2 \omega_2 - M_3 \omega_3 = \left(M_1 \frac{r_3}{r_1} + M_2 \frac{r_3}{r_2} - M_3 \right) \omega_3.$$

Діючі на систему і зображені (рис.2.18, б) сили ваги коліс P_1, P_2, P_3 і реакції підшипників коліс $X_A, Z_A, X_B, Z_B, X_C, Z_C, X_D, Z_D, X_F, Z_F, X_E, Z_E$ прикладені до нерухомих точок; їх робота при обертальних рухах коліс дорівнює нулю, тому вони не входять до виразу потужності N . Внутрішніми силами є колові сили в точках дотику зубчастих коліс.

Із виразу для T , враховуючи, що кутова швидкість ω є функція часу, знаходимо

$$\frac{dT}{dt} = I_{3B} \omega_3 \varepsilon_3.$$

Тому маємо

$$I_{3B} \omega_3 \varepsilon_3 = \left(M_1 \frac{r_3}{r_1} + M_2 \frac{r_3}{r_2} - M_3 \right) \omega_3,$$

звідки

$$\varepsilon_3 = \frac{\left(M_1 \frac{r_3}{r_1} + M_2 \frac{r_3}{r_2} - M_3 \right)}{I_{3B}}.$$

Приклад 2.19. Механічна система внаслідок дії сили ваги тіла I починає рухатись після стану спокою (рис. 2.19, а). Враховуючи тертя ковзання тіла I

та опір коченню тіла 2, що котиться без ковзання, нехтуючи масами ниток, які вважаються нерозтяжними, знайти швидкість v тіла 1 у той момент, коли ним буде пройдено шлях S . Дано: $m_1 = 3 m$; $m_2 = 2 m$; $m_3 = m$; $m_4 = m$; $m_5 = m$; $R_2 = R_3 = 12 \text{ см}$, $r_2 = 0,5R_2$, $r_3 = 0,75R_3$, $R_4 = 20 \text{ см}$, $i_{2x} = 8 \text{ см}$, $i_{3x} = 10 \text{ см}$, $\alpha = 30^\circ$, $f = 0,1$; $\sigma = 0,2 \text{ см}$; $S = 2 \text{ м}$.

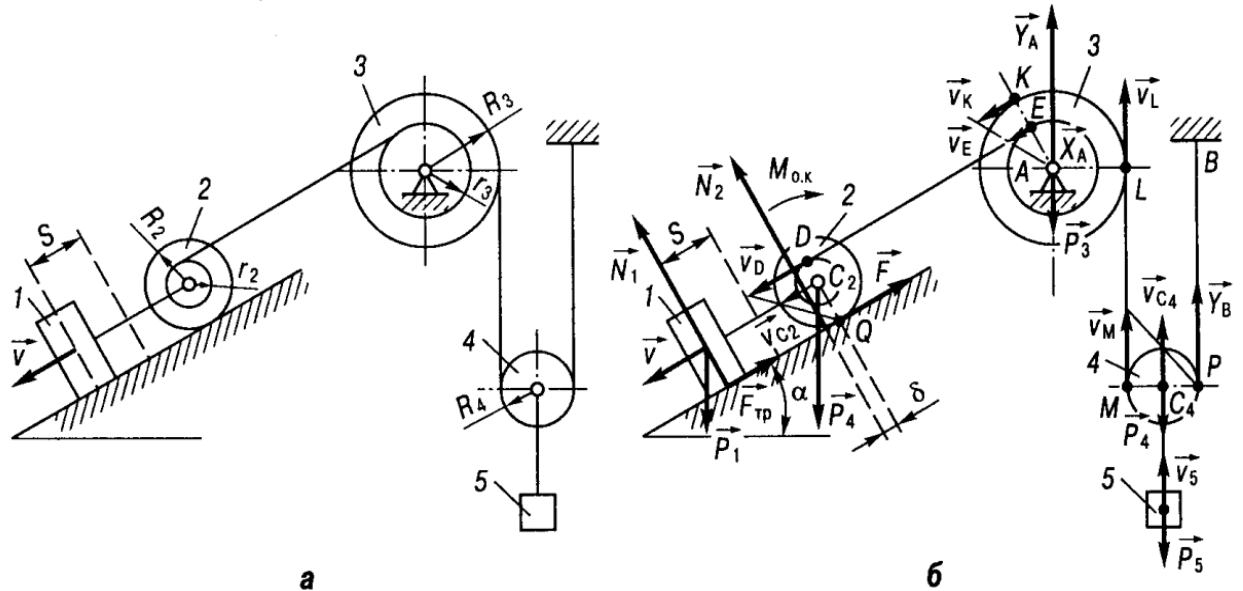


Рис. 2.19

Розв’язування. Застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії механічної системи (2.20)

$$T - T_0 = \sum_{i=1}^n A_i^e + \sum_{i=1}^n A_i^j.$$

Для заданої системи, яка складається із абсолютно твердих тіл, з’єднаних нерозтяжними нитками, сума робіт внутрішніх сил дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^n A_i^j = 0.$$

Крім того, оскільки у початковому положенні система перебуває у стані спокою, то $T_0 = 0$.

Кінетична енергія T системи в кінцевому її положенні дорівнює сумі кінетичних енергій тіл 1, 2, 3, 4, 5:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5.$$

Тягар 1 рухається поступально. Тому його кінетична енергія

$$T_1 = \frac{m_1 v^2}{2} = \frac{3m v^2}{2}.$$

Кінетична енергія блока 3, який обертається відносно нерухомої осі, $T_3 = \frac{1}{2} I_3 \omega_3^2$, де I_3 – момент інерції блока 3 відносно осі обертання; $I_3 = m_3 i_{3x}^2 = m i_{3x}^2$; ω_2 – кутова швидкість тіла 2; $\omega_3 = \frac{v_E}{r_3}$. Швидкість точки E блока 3 дорівнює швидкості точки D котка 2, яку можна знайти із співвідношення $\frac{v_D}{v_{C_2}} = \frac{(R_2 + r_2)}{R_2}$; оскільки $v_{C_2} = v$, $R_2 = 2r_2$, то $\frac{v_D}{v} = \frac{3}{2}$ і $v_E = v_D = \frac{3}{2}v$. Тоді $\omega_3 = \frac{3v}{2r_3}$. Із урахуванням виразів для I_3 і ω_3 формулу для кінетичної енергії блока 3 запишемо так:

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 i_{3x}^2 \left(\frac{3v}{2r_3} \right)^2 = \frac{9m}{8} \left(\frac{i_{3x}}{r_3} \right)^2 v^2.$$

Кінетична енергія блока 4, який здійснює плоский рух,

$$T_4 = \frac{1}{2} m_4 v_{C_4}^2 + \frac{1}{2} I_{C_4} \omega_4^2,$$

де v_{C_4} - швидкість центра мас C_4 блока 4; I_{C_4} - момент інерції блока (однорідного суцільного циліндра) відносно його центральної (горизонтальної) осі; $I_{C_4} = \frac{1}{2} m_4 R_4^2$; ω_4 – миттєва кутова швидкість блока 4. Оскільки блок 4 рухається таким чином, що нитка відносно поверхні блока не проковзує, то миттєвий центр швидкостей перебуває у точці P . Тому $\omega_4 = \frac{v_{C_4}}{R_4}$. Швидкість точки C_4 блока $v_{C_4} = \frac{v_M}{2}$, а $v_M = v_L = v_K$.

Швидкість v_K точки K блока 3 знайдемо із співвідношення

$$\frac{v_K}{v_E} = \frac{R_3}{r_3}.$$

Враховуючи те, що $r_3 = 0,75R_3$, з попередніх кінематичних співвідношень одержимо $v_{C_4} = v$, $\omega_4 = \frac{v}{R_4}$. Тоді кінетична енергія блока 4

$$T_4 = \frac{m_4 v^2}{2} + \frac{m_4 v^2}{4} = \frac{3m_4 v^2}{2}.$$

Кінетична енергія котка 2, який здійснює плоский рух,

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_{C_2}^2 + I_{C_2} \omega_2^2,$$

де v_{C_2} - швидкість центра мас C_2 котка 2; $v_{C_2} = v$; I_{C_2} - момент інерції котка 2 відносно його центральної горизонтальної поздовжньої осі:

$I_{C_2} = m_2 i_{2x}^2 = 2mi_{2x}^2$, ω_2 - миттєва кутова швидкість котка 2. Оскільки коток котиться без ковзання, то миттєвий центр швидкостей перебуває у точці Q . Тому

$\omega_2 = \frac{v_{C_2}}{R_2} = \frac{v}{R_2}$. З урахуванням виразів для I_{C_2} і ω_2 попередня формула набуває вигляду

$$T_2 = \frac{m_2 v^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{m_2 i_{2x}^2 v^2}{R_2^2} = mv^2 \left[1 + \left(\frac{i_{2x}}{R_2} \right)^2 \right].$$

Кінетична енергія тягара 5, який рухається поступально, $T_5 = \frac{m_5 v_5^2}{2}$,

де v_5 - швидкість тягара 5; $v_5 = v$. Тому $T_5 = \frac{mv^2}{2}$.

Кінетична енергія всієї механічної системи з урахуванням одержаних формул для, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5

$$T = \frac{mv^2}{2} \left\{ 3 + \frac{9}{4} \left(\frac{i_{3x}}{r_3} \right)^2 + \frac{3}{2} + 2 \left[1 + \left(\frac{i_{2x}}{R_2} \right)^2 \right] + 1 \right\}$$

або

$$T = \frac{67mv^2}{12}.$$

Знайдемо суму робіт усіх зовнішніх сил, прикладених до точок системи, на заданому переміщенні. Покажемо усі зовнішні сили, що діють на систему (рис. 2.19, б).

Робота сили ваги \vec{P}_1

$$A(\vec{P}_1) = m_1 g S \cdot \sin \alpha.$$

Робота сили тертя ковзання

$$A(\vec{F}_{TP}) = -F_{TP} \cdot S.$$

Оскільки $F_{TP} = fN_1 = fm_1 g \cos \alpha$, де N_1 - нормальна складова реакції похилої площини, то

$$A(\vec{F}_{TP}) = -fm_1 g S \cos \alpha.$$

Робота сил ваги \vec{P}_4 і \vec{P}_5

$$A(\vec{P}_4) = -m_4 g h_4, \quad A(\vec{P}_5) = -m_5 g h_5,$$

де $h_4 = h_5 = h$ - вертикальне переміщення центра мас C_4 блока 4 і тягара 5.

Для визначення величини переміщення h слід врахувати те, що між лінійними переміщеннями точок такі ж залежності, як і між їх швидкостями. Оскільки $v_{C_4} = v$, отримаємо $h = S$. Тому

$$A(\vec{P}_4) = -m_4 g S, \quad A(\vec{P}_5) = -m_5 g S.$$

Робота сили ваги P_2

$$A(\vec{P}_2) = m_2 g h_2 = m_2 g S \sin \alpha.$$

Робота пари сил опору кочення котка 2

$$A(M_{o.k}) = -M_{o.k} \varphi_2,$$

де $M_{o.k} = \delta N_2 = \delta m_2 g \cos \alpha$ – момент пари сил опору кочення котка 2; φ_2 – кут повороту котка 2. Оскільки коток 2 котиться без ковзання, то кут його повороту

$$\varphi_2 = \frac{S_{C_2}}{R_2},$$

де S_{C_2} – переміщення центра мас C_2 котка 2, причому $S_{C_2} = S$. Тому

$$A(M_{o.k}) = \frac{\delta m_2 g S \cos \alpha}{R_2}.$$

Робота сили ваги \vec{P}_3 і реакцій X_A, Y_A підшипника осі обертання блока 3 дорівнює нулю, оскільки ці сили прикладені до нерухомої точки. Робота сили зчеплення \vec{F} котка 2 дорівнює нулю, тому що сила прикладена в миттєвому центрі швидкостей котка. Точка прикладання реакції Y_B троса знаходиться в точці P (миттєвому центрі швидкостей тіла 4), тобто є нерухомою, тому робота реакції Y_B дорівнює нулю.

Сума робіт зовнішніх сил визначається додаванням робіт, обчислених за вищенаведеними виразами:

$$\begin{aligned} \sum A_i^e &= m_1 g S \sin \alpha - f m_1 g S \cos \alpha - m_4 g S - m_5 g S + m_2 g S \sin \alpha - \\ &- \frac{\delta m_2 g S \cos \alpha}{R_2} = mgS \left[5 \sin \alpha - \left(3f + \frac{2\delta}{R_2} \right) \cos \alpha - 2 \right] = 0,21 mgS. \end{aligned}$$

Відповідно до теореми про зміну кінетичної енергії механічної системи прирівняємо значення T і $\sum A_i^e$:

$$\frac{67}{12} m v^2 = 0,21 mgS, \quad (1)$$

звідки

$$v = \sqrt{\frac{12 \cdot 0,21gS}{67}} = \sqrt{\frac{0,21 \cdot 9,81 \cdot 2 \cdot 12}{67}} = 0,86 \text{ м/с}.$$

Теорема про зміну кінетичної енергії дає змогу окрім швидкості визначати також і прискорення. Про диференціювавши вираз (1) за часом, вважаючи пройдений тілом l шлях S змінною величиною, отримаємо

$$\frac{67}{12} \cdot 2v\dot{v} = 0,21g\dot{S}.$$

Оскільки $\dot{S} = \frac{dS}{dt} = v$, а $\dot{v} = \frac{dv}{dt} = w$, то скоротивши на v , одержимо

$$w = \dot{v} = \frac{12 \cdot 0,21g}{67 \cdot 2} = 0,184 \text{ м/с}^2.$$

Приклад 2.20. По похилій площині, що складає з горизонтом кут $\alpha = 30^\circ$, опускається без початкової швидкості важке тіло M . Коефіцієнт тертя $f = 0,1$. Яку швидкість буде мати тіло, пройшовши 2 м від початку руху?

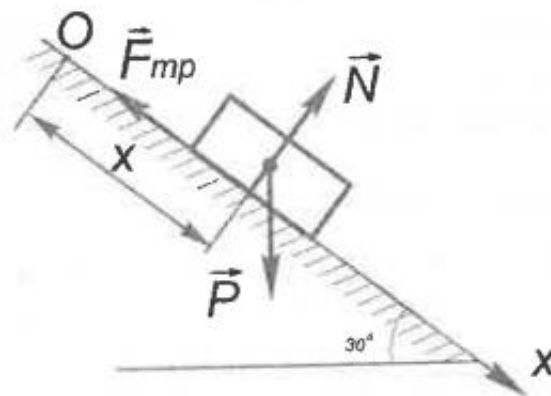


Рис. 2.20

Розв'язування. Оскільки сили, що діють на тіло, є постійними і початкова швидкість дорівнює нулю, то рух тіла буде прямолінійним. Прийmemo за траєкторію руху тіла вісь Ox (рис. 2.20). Початкове положення точки суміщаємо з початком відліку. Показуємо точку в поточному стані.

Звільняємо тіло від в'язей. На тіло будуть діяти сила ваги \vec{P} , сила тертя $\vec{F}_{\text{тр}}$ і сила реакції \vec{N} площини (рис. 2.20).

В даній задачі всі зовнішні сили постійні. Отже, для розв'язання задачі доцільно застосовувати теорему про зміну кінетичної енергії в скінченній формі.

Записуємо математичний вираз теореми.

$$T_2 - T_1 = A_{12}, \quad (1)$$

$$T_1 = \frac{mv_1^2}{2} = 0; \quad T_2 = \frac{mv_2^2}{2}.$$

Визначаємо роботу.

$$A_{1,2} = A_{1,2}^P + A_{1,2}^{F_{mp}} + A_{1,2}^N; \quad (2)$$

$$A_{1,2}^N = 0; \quad A_{1,2}^P = P \cdot h = P x \sin \alpha;$$

$$A_{1,2}^{F_{mp}} = -F_{mp} \cdot x = -(P \cdot f \cdot \cos \alpha)x;$$

$$A_{1,2} = P(\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha)x.$$

Прирівнюємо одержану тілом кінетичну енергію, до затраченої на даному переміщенні роботи

$$\frac{mv_2^2}{2} = \vec{P}(\sin \alpha - f \cos \alpha)x, \quad (3)$$

звідки

$$v_2 = \sqrt{2g(\sin \alpha - f \cos \alpha)x} = \sqrt{2 \cdot 9,8 \left(0,5 - 0,1 \frac{\sqrt{3}}{2}\right) 2} = 4,02 \text{ м/с}.$$

Приклад 2.21. Незагальмований потяг масою $m = 5 \cdot 10^5 \text{ кг}$ з виключеним двигуном починає гальмуватись за рахунок сили опору, що дорівнює, $R = (7650 + 500v)H$, де v - в м/с. Знаючи початкову швидкість потягу $v_0 = 15 \text{ м/с}$, визначити відстань, яку пройде потяг до зупинки.

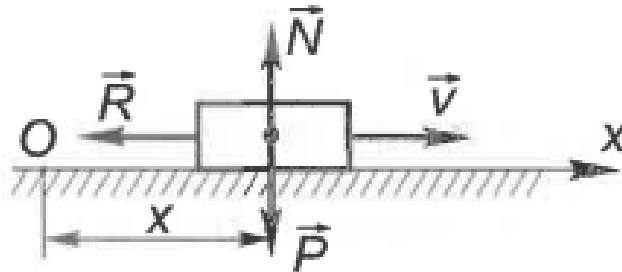


Рис. 2.21

Розв'язування. Оскільки рух потягу поступальний, розглядаємо потяг як матеріальну точку. Вісь Ox направляємо в бік руху потяга. Показуємо точку в поточному стані.

Звільняємо точку від в'язей. На точку будуть діяти \vec{P} - сила ваги, \vec{N} - нормальна реакція, \vec{R} - сила опору, причому сили \vec{P} і \vec{N} постійні, а сила \vec{R} залежить від швидкості (рис. 2.21).

Оскільки сила \vec{R} залежить від швидкості, то для розв'язання задачі застосовуємо теорему про зміну кінетичної енергії в диференціальній формі.

Записуємо математичний вираз теореми

$$dT = dA. \quad (1)$$

Визначаємо диференціал кінетичної енергії і елементарну роботу:
 $dT = mv dv$, а елементарна робота $dA = -R dS$, оскільки сили \vec{P} і \vec{N} роботу не виконують.

Підставимо одержані результати dT і dA у рівняння (1):

$$mv dv = -R dS \text{ або } mv dv = -(7650 + 500v) dS, \text{ розділяємо змінні}$$

$$m \frac{v dv}{7650 + 500v} = -dS.$$

Розв'язуємо одержане рівняння:

$$m \int_{v_0}^0 \frac{v dv}{7650 + 500v} = - \int_0^S dS.$$

Поміняємо границі інтегрування

$$m \int_0^{v_0} \frac{v dv}{7650 + 500v} = \int_S^0 dS,$$

$$m \left[\frac{v}{500} - \frac{7650}{500^2} \ln(7650 + 500v) \right] \Big|_0^{v_0} = S,$$

$$S = m \left[\frac{v_0}{500} - \frac{7650}{500^2} \ln(7650 + 500v_0) \right] - \ln 7650 =$$

$$= 500000 \left[\frac{15}{500} - \frac{7650}{500^2} \ln(7650 + 500 \cdot 15) \right] - \ln 7650 = 4535 \text{ м.}$$

2.5. ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНУ МОМЕНТУ КІЛЬКОСТІ РУХУ (КІНЕТИЧНОГО МОМЕНТУ).

2.5.1. Короткі теоретичні відомості

Момент кількості руху (або кінетичний момент) - друга міра механічного руху, яка застосовується в основному для характеристики обертального руху.

Моментом кількості руху \vec{k}_O точки відносно центра O називається величина, що дорівнює векторному добутку радіуса-вектора \vec{r} матеріальної точки, проведеного з центра O , на кількість руху цієї точки:

$$\vec{k}_O = \vec{r} \times \vec{q} = \vec{r} \times m\vec{v}.$$

Кінетичним моментом \vec{K}_O матеріальної системи, або головним моментом кількості руху системи матеріальних точок відносно центра O , називається векторна сума моментів кількостей руху точок системи відносно того ж самого центра:

$$\vec{K}_O = \sum_{i=1}^n \vec{k}_{O_i} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i,$$

де \vec{k}_{O_i} - момент кількості руху i -ї точки; \vec{r}_i - радіус-вектор, що з'єднує нерухомий центр O з i -ю точкою системи; \vec{v}_i - швидкість i -ї точки.

Кінетичний момент твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі Oz , дорівнює добутку моменту інерції тіла відносно нерухомої осі обертання на кутову швидкість:

$$K_z = I_z \omega.$$

Кінетичний момент твердого тіла при складному русі може бути визначений так:

1. Кінетичний момент тіла відносно нерухомого центра A дорівнює моменту кількості руху тіла, прикладеного в полюсі O , відносно того самого центра $A(\vec{r}_O \times \vec{Q})$, складеному з векторним добутком $\vec{\rho}_C \times m\vec{v}_O$, а також з моментом кількості руху тіла в обертальному русі навколо полюса $O(\vec{K}_O^\omega)$:

$$\vec{K}_A = \vec{r}_O \times \vec{Q} + \vec{\rho}_C \times m\vec{v}_O + \vec{K}_O^\omega,$$

де \vec{r}_O - радіус-вектор, який визначає положення початку рухомої системи координат $Oxyz$ (точки O) в нерухомій системі координат $A\xi\eta\zeta$; $\vec{Q} = m\vec{v}_C$ - кількість руху твердого тіла; $\vec{\rho}_C$ - радіус-вектор центра мас C твердого тіла в рухомій системі координат $Oxyz$; m - маса твердого тіла; \vec{v}_O - швидкість початку руху рухомої системи координат; \vec{K}_O^ω - кінетичний момент твердого тіла, зумовлений лише обертанням рухомої системи координат відносно полюса O .

2. Якщо початок рухомої системи координат збігається з центром мас, то кінетичний момент твердого тіла відносно нерухомого центра A дорівнює сумі моменту кількості руху тіла відносно того самого центра $A(\vec{r}_C \times \vec{Q})$ у припущенні, що вся маса тіла зосереджена в центрі мас, і моменту кількості руху тіла в обертальному русі навколо центра мас $C(\vec{K}_C^\omega)$:

$$\vec{K}_A = \vec{r}_C \times \vec{Q} + \vec{K}_C^\omega.$$

Теорема про зміну моменту кількості руху точки. Похідна за часом від моменту кількості руху матеріальної точки відносно нерухомого центра

O (або осі) дорівнює моменту \vec{M}_0 рівнодійної сил \vec{F} , прикладених до точки, відносно того самого центра (або осі):

$$\frac{d\vec{k}_0}{dt} = \vec{M}_0,$$

або

$$m \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

Звідси

$$m \frac{d}{dt} (y\dot{z} - z\dot{y}) = yF_z - zF_y,$$

$$m \frac{d}{dt} (z\dot{x} - x\dot{z}) = zF_x - xF_z,$$

$$m \frac{d}{dt} (x\dot{y} - y\dot{x}) = xF_y - yF_x,$$

де x, y, z - координати матеріальної точки; $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ - проекції швидкості цієї точки на осі координат; F_x, F_y, F_z - проекції рівнодійної сили на ті самі осі координат.

Теорема про зміну кінетичного моменту системи. Похідна за часом від кінетичного моменту системи відносно нерухомого центра O дорівнює головному моменту зовнішніх сил \vec{M}_0^e відносно того самого центра:

$$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \vec{M}_0^e,$$

Теорема про зміну кінетичного моменту в інтегральній формі або теорема моменту імпульсів зовнішніх сил. Приріст кінетичного моменту матеріальної системи відносно нерухомого центра O за деякий проміжок часу $[t_0, t]$ дорівнює головному моменту імпульсів \vec{L}_0^e зовнішніх сил, прикладених до точок системи, за той самий проміжок часу:

$$\vec{K}_0(t) - \vec{K}_0(t_0) = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i^e dt = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times d\vec{S}_i^e = \vec{L}_0^e.$$

Теорема Резаля. Швидкість \vec{v}_K кінця вектора кінетичного моменту системи відносно нерухомої точки O дорівнює головному моменту всіх зовнішніх сил відносно тієї самої точки:

$$\vec{v}_K = \frac{d\vec{K}_0}{dt} = \vec{M}_0^e.$$

Для твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі Oz , вираз теореми про зміну кінетичного моменту набуває вигляду (диференціальне рівняння обертального руху тіла)

$$I_z \cdot \varepsilon = M_z^e,$$

де $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\phi}$ - кутове прискорення тіла; I_z - момент інерції тіла навколо осі обертання Oz .

Закони збереження кінетичного моменту:

1. Якщо головний момент зовнішніх сил відносно деякої нерухомої точки O дорівнює нулю ($\vec{M}_O^e = \mathbf{0}$), то кінетичний момент системи відносно цієї самої точки буде сталим як за величиною, так і за напрямком, тобто $\vec{K}_O = \overline{const} = \vec{K}_O(t_0)$.

2. Якщо головний момент зовнішніх сил відносно однієї з координатних осей дорівнює нулю, то відповідний кінетичний момент системи відносно даної осі буде сталим ($M_z = 0$, $K_z = const$).

2.5.2. Приклади розв'язування задач

Приклад 2.22. Матеріальна точка маси $m = 0,5$ кг рухається за законом $\vec{r} = 2\vec{i} + (4t^2 + 5)\vec{j}$, де \vec{i} та \vec{j} - орти системи координат $Oxyz$. Визначити момент рівнодійної \vec{R} усіх прикладених до цієї точки сил відносно початку системи координат $Oxyz$.

Розв'язування. Для розв'язання задачі застосуємо теорему про зміну моменту кількості руху матеріальної точки, тобто вираз

$$\frac{d\vec{k}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{R}).$$

Рівняння руху точки, записані координатним способом, мають вигляд: $x = 2$ (м), $y = 4t^2 + 5$ (м), $z = 0$. Проекції швидкості точки на осі декартової системи координат: $v_x = \dot{x} = 0$, $v_y = \dot{y} = 8t$, $z = 0$.

Момент кількості руху точки відносно початку координат визначаємо за означенням:

$$\vec{k}_O = \vec{r} \times m\vec{v} = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & (4t^2 + 5) & 0 \\ 0 & 8t & 0 \end{vmatrix} = 16mt\vec{k} = 16 \cdot 0,5 t\vec{k} = 8t\vec{k},$$

де \vec{k} - одиничний вектор осі Oz .

Таким чином, $k_{Ox} = 0$, $k_{Oy} = 0$, $k_{Oz} = 8t$. Остаточо знаходимо

$$M_O(\vec{R}) = \frac{dk_{Oz}}{dt} = 8 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Приклад 2.23. В епіциклічному механізмі (рис. 2.22) рухоме колесо II радіуса r_2 котиться без ковзання по нерухомому колесу I радіуса r_1 . Колесо

II приводиться в рух кривошипом *III*, який обертається з кутовою швидкістю ω_3 навколо нерухомої осі O_1 . Скласти вираз моменту кількості руху K_z системи відносно нерухомої осі O_1z обертання кривошипа, яка перпендикулярна до площини рисунка.

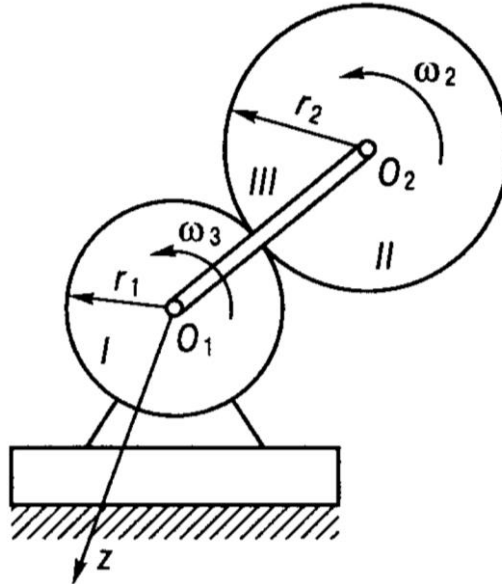


Рис. 2.22

Розв'язування. Кінетичний момент системи дорівнює сумі кінетичного моменту K_z^{III} кривошипа *III* і кінетичного моменту K_z^{II} колеса *II*, яке здійснює плоскопаралельний рух, тобто $K_z = K_z^{III} + K_z^{II}$.

Кривошип *III* здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі, тому його кінетичний момент

$$K_z^{III} = I_3 \omega_3,$$

де I_3 - момент інерції кривошипа відносно його осі обертання, яка проходить через точку O_1 .

Кінетичний момент відносно осі O_1z колеса *II*, яке здійснює складний рух,

$$K_z^{II} = m_2(r_1 + r_2)^2 \omega_3 + I_2 \omega_2,$$

де m_2 - маса колеса *II*; I_2 - момент інерції колеса *II* відносно осі, яка проходить через точку O_2 ; ω_2 - миттєва кутова швидкість колеса, що здійснює плоский рух. Визначаємо ω_2 із співвідношення

$$\omega_2 r_2 = \omega_3 (r_1 + r_2),$$

яке відповідає рівності лінійних швидкостей точки O_2 , що належить одночасно колесу *II* і кривошипу *III*. Тоді

$$\omega_2 = \frac{\omega_3 (r_1 + r_2)}{r_2}.$$

Підставивши K_Z^{II} , K_Z^{III} формулу для K_Z , отримаємо

$$K_Z = \left[I_3 + I_2 \frac{r_1 + r_2}{r_2} + m_2 (r_1 + r_2)^2 \right] \omega_3 .$$

Приклад 2.24. Гвинт пароплава має момент інерції I і починає обертатися із стану спокою обертальним моментом M . На гвинт діють сили опору води, момент яких пропорційний квадрату кутової швидкості, тобто $M_{оп} = k\omega^2$, де k - сталий коефіцієнт.

Визначити середню кутову швидкість гвинта за проміжок часу, в кінці якого кутова швидкість гвинта буде дорівнювати ω_1 .

Розв'язування. Застосуємо диференціальне рівняння обертового руху тіла

$$I_z \varepsilon = M_z^e .$$

Зовнішніми моментами є обертальний момент M і момент опору $M_{оп}$. Отже,

$$I \frac{d\omega}{dt} = M - k\omega^2 . \quad (1)$$

Середня кутова швидкість може бути визначена за формулою

$$\omega_c = \frac{\varphi}{t} .$$

Для знаходження φ і t проінтегруємо диференціальне рівняння обертового руху (1). Розділивши змінні, отримаємо

$$\frac{I d\omega}{M - k\omega^2} = dt .$$

Позначимо $\frac{M}{k} = a^2$, тоді $\frac{I d\omega}{k(a^2 - \omega^2)} = dt$.

Проінтегруємо останнє рівняння:

$$\frac{I}{2ak} \ln \frac{a + \omega}{a - \omega} \Big|_{\omega=0}^{\omega=\omega_1} = t , \quad \text{звідки } t = \frac{I}{2ak} \ln \frac{a + \omega_1}{a - \omega_1} .$$

Визначимо φ як функцію ω . Для цього помножимо рівняння (1) на $d\varphi$, одержимо

$$I\omega d\omega = (M - k\omega^2) d\varphi .$$

Розділивши змінні, матимемо

$$\frac{I\omega d\omega}{M - k\omega^2} = d\varphi .$$

Після інтегрування знаходимо

$$-\frac{I}{2k} \ln(a^2 - \omega^2) \Big|_{\omega=0}^{\omega=\omega_1} = \varphi ,$$

звідки

$$\varphi = \frac{I}{2k} \ln \frac{a^2}{a^2 - \omega_1^2}.$$

Згідно з виразом $\omega_c = \frac{\varphi}{t}$ середня кутова швидкість

$$\omega_c = a \frac{\ln \frac{a^2}{a^2 - \omega_1^2}}{\ln \frac{a + \omega_1}{a - \omega_1}}.$$

Приклад 2.25. Для визначення моменту інерції I тіла відносно вертикальної осі Oz його підвішують на пружному дроті ON так, щоб він збігався з прямою, яка проходить через центр мас тіла (точку C) (рис. 2.23). Тіло повертають у горизонтальній площині на деякий малий кут φ . Внаслідок закручування дроту тіло буде здійснювати крутильні коливання навколо вертикальної осі з періодом T , який вимірюється секундоміром. Для розрахунку крутильної жорсткості дроту виконують другий дослід: підвищують тіло (наприклад, диск) з відомим моментом інерції I_0 , для якого період коливань дорівнює T_0 . Визначити момент інерції тіла I .

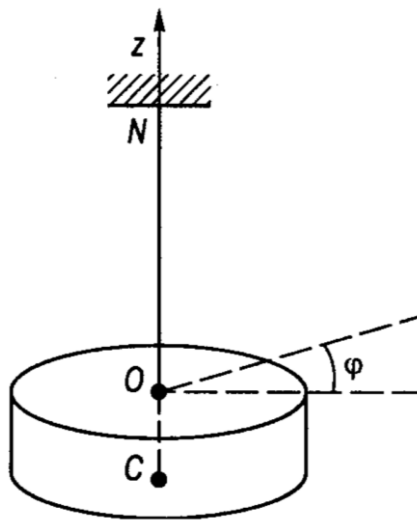


Рис. 2.23

Розв'язування. Складемо диференціальне рівняння руху тіла. Момент сили ваги відносно осі обертання дорівнює нулю, тому що вісь обертання вертикальна. Не враховуємо момент опору повітря і масу дроту. При малому куті закручування дроту момент пружних сил реакції дроту пропорційний куту закручування і приймається рівним $c\varphi$, причому коефіцієнт пропорційності c (крутильна жорсткість) залежить від розмірів дроту і пружних властивостей його матеріалу.

Позначимо через I момент інерції тіла відносно осі OC , отримаємо диференціальне рівняння гармонічних коливань

$$I\ddot{\varphi} = -c\varphi.$$

Період коливань

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{c}}.$$

Для визначення невідомої жорсткості дроту на кручення (величини c) запишемо період крутильних коливань T_0 на тому ж дроті еталонного тіла з відомим моментом інерції I_0 відносно осі OC . Маємо

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{c}},$$

звідки

$$c = \frac{4\pi^2 I_0}{T_0^2}.$$

Отже,

$$I = I_0 \frac{T^2}{T_0^2}.$$

Приклад 2.26. Однорідний горизонтальний диск (платформа) радіуса R і масою m має можливість обертатися без тертя навколо вертикальної осі (рис.2.24). Як зміниться кутова швидкість диска, якщо людина, що знаходиться на диску на відстані r від осі обертання, почне рухатися по колу радіуса r з відносною швидкістю v ? Маса людини дорівнює m_1 .

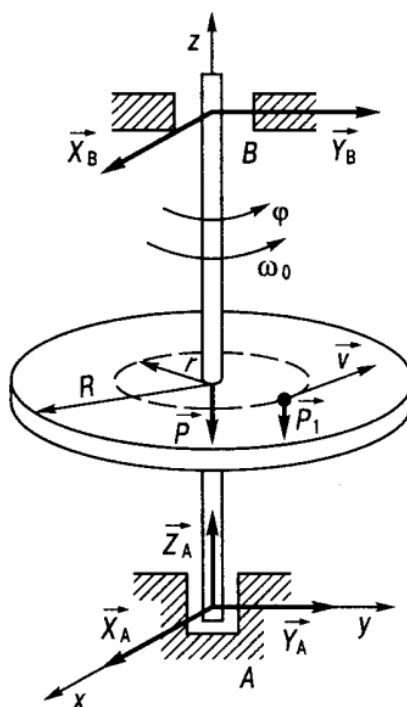


Рис. 2.24

Розв'язування. Об'єктом дослідження є механічна система, яка складається з диска з нерухомою віссю обертання Az і матеріальної точки, за яку приймається людина. Для розв'язання задачі використовується закон збереження кінетичного моменту системи відносно осі обертання.

Застосувавши аксіому про звільнення від в'язей, матимемо, що на механічну систему крім сил ваги будуть діяти ще й реакції підп'ятника $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A$ і підшипника \vec{X}_B, \vec{Y}_B осі обертання диска. Оскільки сили ваги $\vec{P} = m\vec{g}$ та $\vec{P}_1 = m_1\vec{g}$ паралельні осі Az , а реакції підп'ятника і підшипника перетинають її, то момент діючих на дану механічну систему зовнішніх сил відносно осі обертання Az дорівнює нулю:

$$\sum_i M_Z(\vec{F}_i^e) = 0.$$

Кінетичний момент системи відносно цієї осі є сталою величиною:

$$K_Z = \text{const}.$$

Нехай початкове значення кутової швидкості диска дорівнює ω_0 , а потім, внаслідок руху людини, дорівнює ω .

Складемо вирази K_Z , для початкового і поточного моментів часу і прирівняємо їх обидва значення. В початковий момент, коли людина не рухається по диску, кінетичний момент системи відносно осі повороту Az визначається як сума кінетичного моменту платформи та моменту кількості руху точки, нерухомої відносно платформи:

$$K_Z = I_Z\omega_0 + m_1r^2\omega_0.$$

Після того, як людина почне рухатись по платформі, кінетичний момент системи буде дорівнювати кінетичному моменту усієї системи від обертання з кутовою швидкістю ω , складеному з моментом кількості руху відносно руху людини по платформі (m_1vr). Якщо людина рухається у бік обертання, маємо

$$K_Z = I_Z\omega + m_1r^2\omega + m_1vr.$$

Прирівнявши отримані вирази кінетичних моментів, одержимо

$$I_Z\omega + m_1r^2\omega + m_1vr = I_Z\omega_0 + m_1r^2\omega_0,$$

звідки

$$\omega = \frac{(I_Z + m_1r^2)\omega_0 - m_1vr}{I_Z + m_1r^2}.$$

Момент інерції платформи, яку вважаємо однорідним диском,

$$I_Z = \frac{mR^2}{2}.$$

Отже, кутова швидкість платформи (диска) від руху по ній людини зменшиться на величину

$$\Delta\omega = \frac{2m_1rv}{mR^2 + 2m_1r^2}.$$

Приклад 2.27. До вала *I* приєднано електричний двигун, обертальний момент якого дорівнює m_1 , (рис. 2.25, а). За допомогою редуктора швидкостей, що складається з чотирьох зубчастих коліс *1*, *2*, *3* і *4*, цей обертальний момент передається на шпindel *III* токарного верстата, до якого прикладено момент опору m_2 . Визначити кутове прискорення шпинделя *III*, якщо моменти інерції всіх деталей, які обертаються, відповідно дорівнюють I_I, I_{II}, I_{III} . Радіуси коліс дорівнюють r_1, r_2, r_3 і r_4 .

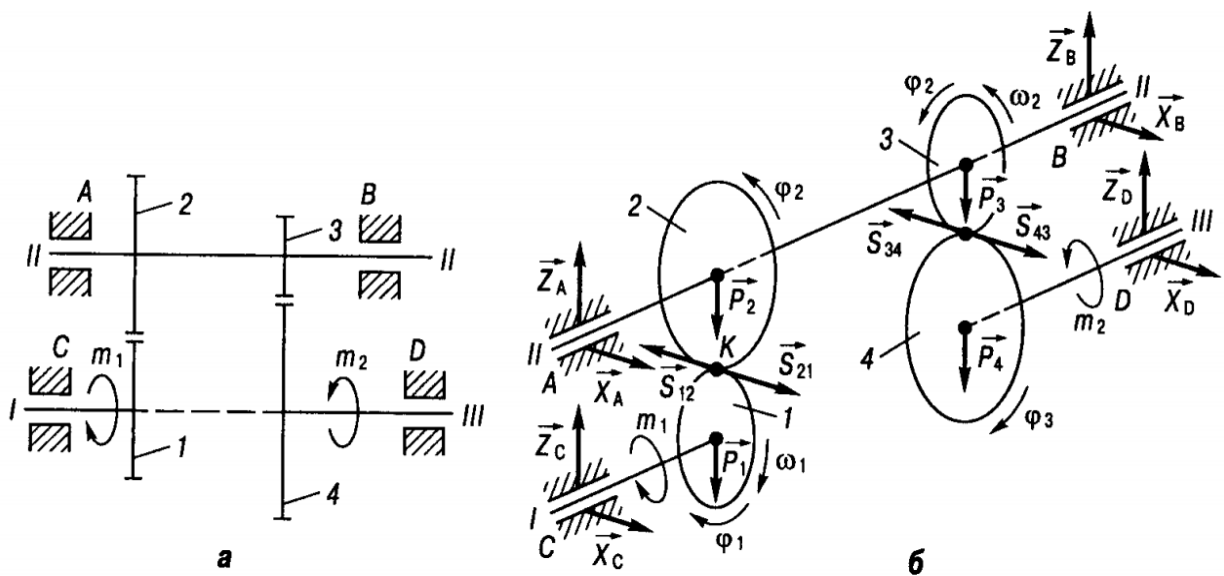


Рис. 2.25

Розв'язування. Система складається з трьох частин, які обертаються: колеса *I*, проміжного валу *II* та шпинделя *III*.

На систему, окрім прикладеного обертального моменту і моменту опору, діють сили ваги P_1, P_2, P_3, P_4 зубчастих коліс і реакції $X_A, Z_A, X_B, Z_B, X_C, Z_C, X_D, Z_D$ підшипників *A, B, C* і *D* осей обертання (рис. 2.25, б).

При розв'язанні задачі, якщо розглянути всю систему разом і застосувати теорему про зміну кінетичного моменту, наприклад, відносно осі обертання *II-II*, в диференціальне рівняння увійдуть моменти від невідомих реакцій підшипників *C* і *D*. Це робить неможливим розв'язання задачі. Тому проводимо дослідження руху системи, відокремлюючи колеса *1, 4* від валу *II* з колесами *2* і *3*.

Зображені на рис. 2.25, б колові зусилля $\vec{S}_{12}, \vec{S}_{21}, \vec{S}_{34}$ та \vec{S}_{43} - це зусилля між зубцями коліс. Ці сили є внутрішніми силами для даної механічної

системи. Сила \vec{S}_{12} для колеса *I* створює момент опору. Обертальний момент, що діє на проміжний вал *II*, зумовлений зусиллям \vec{S}_{21} . Сила \vec{S}_{43} створює обертальний момент для колеса *4*. Момент опору для колеса *3* створюється зусиллям \vec{S}_{34} . За законом рівності дії та протидії маємо

$$\vec{S}_{12} = -\vec{S}_{21}, \quad \vec{S}_{34} = -\vec{S}_{43}$$

До колеса *I* прикладено обертальний момент m_1 і колове зусилля \vec{S}_{12} у точці дотику зубчастих коліс; диференціальне рівняння руху колеса *I*

$$I_I \ddot{\varphi}_1 = m_1 - S_{12} r .$$

До проміжного валу *II* прикладено колові зусилля \vec{S}_{21} і \vec{S}_{34} ; диференціальне рівняння руху вала *II*

$$I_{II} \ddot{\varphi}_2 = S_{21} r_2 - S_{34} r_3 .$$

До шпинделя прикладено колове зусилля \vec{S}_{43} і момент опору m_2 ; диференціальне рівняння руху шпинделя *III*

$$I_{III} \ddot{\varphi}_3 = S_{43} r_4 - m_2 .$$

Виразимо кутові прискорення $\ddot{\varphi}_2$ і $\ddot{\varphi}_3$ через кутове прискорення $\ddot{\varphi}_1$ за допомогою кінематичних співвідношень

$$\begin{aligned} v_K &= \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2, \quad \omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{r_2}, \\ v_L &= \omega_2 r_3 = \omega_3 r_4, \quad \omega_3 = \frac{\omega_2 r_3}{r_4}, \end{aligned}$$

де *K*, *L* - точки дотику коліс. Після диференціювання цих виразів отримаємо

$$\ddot{\varphi}_2 = \ddot{\varphi}_1 \frac{r_1}{r_2}, \quad \ddot{\varphi}_3 = \ddot{\varphi}_2 \frac{r_3}{r_4} = \ddot{\varphi}_1 \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} .$$

Отже, рівняння руху набувають вигляду

$$I_I \ddot{\varphi}_1 = m_1 - S_{12} r, \quad I_{II} \ddot{\varphi}_1 \frac{r_1}{r_2} = S_{21} r_2 - S_{34} r_3 ,$$

$$I_{III} \ddot{\varphi}_1 \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} = S_{43} r_4 - m_2 .$$

Далі виключаємо невідомі колові зусилля.

З рівняння руху зубчастого колеса *I* знаходимо зусилля S_{12} :

$$S_{12} = \frac{1}{r_1} (m_1 - I_I \ddot{\varphi}_1) .$$

Враховуючи, що $S_{12} = S_{21}$, рівняння руху зубчастого колеса *II* запишемо у вигляді

$$I_{II} \frac{r_1}{r_2} \ddot{\varphi}_1 = \frac{r_2}{r_1} (m_1 - I_I \ddot{\varphi}_1) - S_{34} r_3.$$

З останнього рівняння визначаємо

$$S_{34} = \frac{1}{r_3} \left[\frac{r_2}{r_1} (m_1 - I_I \ddot{\varphi}_1) - I_{II} \frac{r_1}{r_2} \ddot{\varphi}_1 \right].$$

Враховуючи, що $S_{34} = S_{43}$, рівняння руху зубчастого колеса **III** буде таким:

$$I_{III} \ddot{\varphi}_1 \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} = \frac{r_4}{r_3} \left[\frac{r_2}{r_1} (m_1 - I_I \ddot{\varphi}_1) - I_{II} \frac{r_1}{r_2} \ddot{\varphi}_1 \right] - m_2.$$

Розв'язавши останнє рівняння відносно $\ddot{\varphi}_1$, отримаємо

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{m_1 - m_2 \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}}{I_I + I_{II} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 + I_{III} \left(\frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} \right)^2},$$

Отже, шукане кутове прискорення

$$\varepsilon_3 = \ddot{\varphi}_3 = \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} \ddot{\varphi}_1 = \frac{m_1 \frac{r_2 r_4}{r_1 r_3} - m_2}{\left[I_I \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 + I_{II} \right] \left(\frac{r_4}{r_3} \right)^2 + I_{III}}.$$

Приклад 2.28. Гирка M_1 (рис. 2.26) прив'язана до кінця нерозтяжної нитки M_1OA , частина якої OA пропущена через вертикальну трубку і рухається навколо осі трубки по колу радіуса $M_1C_1 = R$, швидкістю 120 об/хв . Повільно втягуючи нитку OA в трубку, вкорочують зовнішню частину нитки до довжини OM_2 , при якій гирка описує коло радіусом $R/2$. Скільки обертів за хвилину зробить гирка по цьому колу.

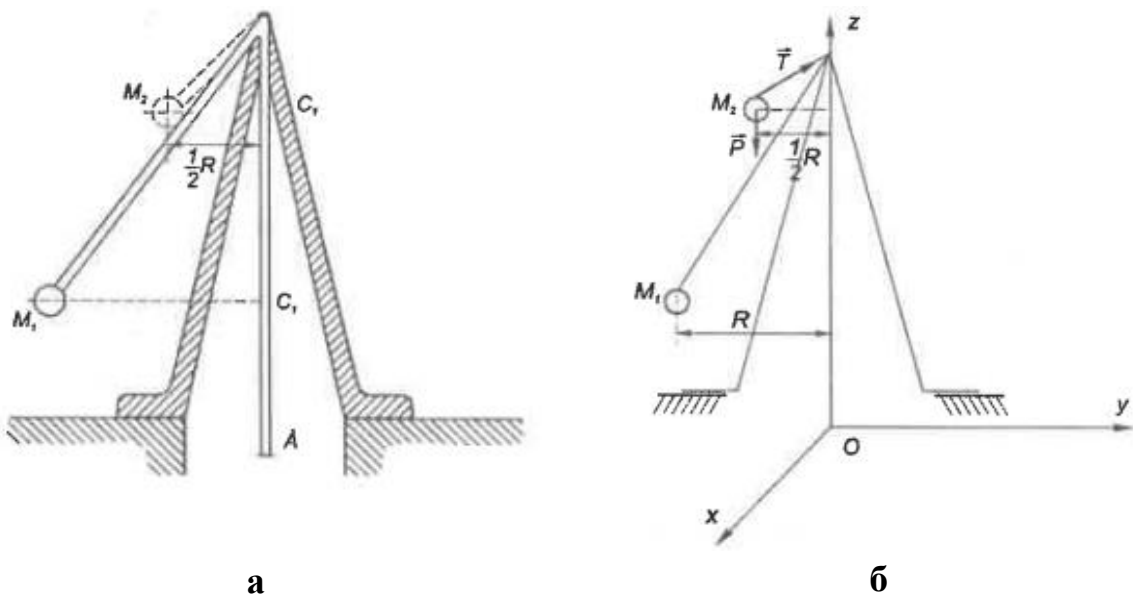


Рис. 2.26

Розв'язування. Виберемо декартову систему координат і на рисунку покажемо гирку в початковому і поточному (кінцевому) положеннях. На гирку діє сила тяжіння \vec{P} і реакція нитки \vec{T} (рис. 2.26, б). Моменти всіх зовнішніх сил (\vec{P} і \vec{T}) відносно осі z дорівнюють нулю (сила \vec{P} паралельна осі, лінія дії \vec{T} перетинає вісь z). Отже, $k_z = \text{const}$.

Користуючись положенням, що проекція моменту кількості руху на будь-яку вісь дорівнює моменту кількості руху відносно цієї осі, знаходимо:

$$k_{z_1} = mv_1R; \quad k_{z_2} = mv_2 \frac{R}{2}.$$

Прирівнюємо ці величини:

$$mv_1R = mv_2 \frac{R}{2}.$$

Звідки $v_2 = 2v_1$, але $v_1 = \omega_1R$, $v_2 = \omega_2 \frac{R}{2}$, отже, будемо мати:

$$\omega_2 \frac{R}{2} = 2\omega_1R \quad \text{і} \quad \omega_2 = 4\omega_1 \quad \text{або} \quad n_2 = 4n_1 = 4 \cdot 120 = 480 \text{ об/хв.}$$

Розділ 3. Питання для самоконтролю.

1. Сформулюйте закони Ньютона.
2. Який закон Ньютона є основним законом динаміки?
3. Записати основне рівняння динаміки матеріальної точки.
4. Скільки є форм запису диференціальних рівнянь руху матеріальної точки?
5. В чому полягає перша основна задача динаміки матеріальної точки?
6. Як визначити напрям вектору рівнодійної?
7. Записати диференціальне рівняння руху матеріальної точки у векторній формі.
8. Записати диференціальне рівняння руху матеріальної точки у координатній формі.
9. Записати диференціальне рівняння руху матеріальної точки у натуральній формі.
10. Записати диференціальне рівняння руху матеріальної точки в полярних координатах.
11. Записати формули для визначення рівнодійної сил прикладених до точки при координатному способі.
12. Записати формули для визначення рівнодійної сил прикладених до точки при натуральному способі.
13. Записати формули для визначення рівнодійної сил прикладених до точки у полярній системі координат.
14. Записати вираз для визначення кута α між рівнодійною силою \vec{F} та напрямком нормалі до траєкторії точки.
14. Надати методику розв'язування першої задачі динаміки.
15. В чому полягає обернена (друга) основна задача динаміки матеріальної точки?
16. Сформулюйте методику розв'язування оберненої задачі динаміки.
17. Записати формулу диференціального рівняння руху точки при координатному способі у прямокутній декартовій системі відліку.
18. Записати формулу диференціального рівняння руху точки при натуральному способі.
19. Що називається кількістю руху матеріальної точки?
20. Що називається кількістю руху системи матеріальних точок?
21. Який вигляд має рівняння, що виражає в диференціальній формі теорему про зміну кількості руху матеріальної точки і як в цьому випадку вона сформулюється?
22. Який вигляд мають рівняння, що виражає теорему про зміну кількості руху за кінцевий проміжок часу і як в цьому випадку сформулюється теорема?
23. Дати визначення центру мас системи матеріальних точок.
24. Чим визначається положення центра мас системи?

25. Сформулювати теорему про рух центра мас.
26. Які висновки можна зробити з теореми про рух центра мас матеріальної системи?
27. Сформулюйте теорему Ейлера про рух рідини.
28. На які частинки рідини діють об'ємні сили?
29. На які частинки рідини діють поверхні сили?
30. Дати визначення кінетичної енергії матеріальної точки.
31. Дати визначення кінетичної енергії системи матеріальних точок.
32. Записати формулу для визначення кінетичної енергії твердого тіла при обертанні його навколо нерухомої осі.
33. Записати формулу для визначення кінетичної енергії твердого тіла, що рухається поступально.
34. Записати формулу для визначення загального випадку руху твердого тіла.
35. Сформулювати теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки.
35. Сформулювати теорему про зміну кінетичної енергії матеріальної точки в диференціальній формі.
36. Сформулювати теорему про зміну кінетичної енергії системи матеріальних точок.
37. Чому дорівнюється елементарна робота сили?
38. Якою формулою визначається робота сили на скінченному переміщенні матеріальної точки вздовж дуги L ?
39. Записати формулу для визначення роботи сили ваги матеріальної точки.
40. Від чого залежить робота центральної сили?
41. Записати формулу для визначення роботи центральної сили.
42. Записати формулу для визначення роботи сили пружності.
43. Чому дорівнюється елементарна робота сил, що прикладені до твердого тіла?
44. Записати формулу для визначення повної роботи сил, прикладених до твердого тіла, що обертається навколо осі Oz .
45. Чому дорівнюється сума робіт усіх внутрішніх сил абсолютно твердого тіла?
46. Чому дорівнюється потужність зовнішніх сил, прикладених до твердого тіла?
47. Для чого застосовується момент кількості руху?
48. Дати визначення моменту кількості руху точки відносно центру O .
49. Дати визначення головному моменту кількості руху системи матеріальних точок відносно центра O .
50. Чому дорівнюється кінетичний момент твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі Oz .
51. Як визначається кінетичний момент твердого тіла при складному русі?
52. Сформулювати теорему про зміну моменту кількості руху точки.
53. Сформулювати теорему про зміну кінетичного моменту системи.

54. Сформулювати теорему про зміну кінетичного моменту в інтегральній формі.
55. Сформулювати теорему Резаля.
56. Сформулювати закони збереження кінетичного моменту.

ДОДАТКИ

Д1. Формули алгебри та тригонометрії.

Корені квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Деякі наближені формули. Якщо $\alpha \ll 1$, то

$$(1 + \alpha)^n = 1 + n\alpha$$

$$\sin \alpha = \alpha$$

$$e^\alpha = 1 + \alpha$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

$$\ln(1 + \alpha) = \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \alpha$$

Основні тригонометричні формули

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$$

$$\sin^2 \left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}}$$

$$\cos^2 \left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Д2. Спеціальні значення тригонометричних функцій

α	$0^{\circ}, 360^{\circ}$	30°	45°	60°	90°	180°	270°
α (радіани)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\pm\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\pm\infty$	0

Д3. Таблиця похідних

Функція	Похідна	Функція	Похідна	Функція	Похідна
C (const)	0	$\log_a t$	$\frac{1}{t} \log_a e = \frac{1}{t \ln a}$	$\operatorname{arctg} t$	$\frac{1}{1+t^2}$
t	1	$\lg t$	$\frac{1}{t} \lg e$	$\operatorname{arcctg} t$	$-\frac{1}{1+t^2}$
t^n	nt^{n-1}	$\sin t$	$\cos t$	$\operatorname{sh} t$	$\operatorname{ch} t$
$\frac{1}{t}$	$-\frac{1}{t^2}$	$\cos t$	$-\sin t$	$\operatorname{ch} t$	$\operatorname{sh} t$
$\frac{1}{t^n}$	$-\frac{n}{t^{n+1}}$	$\operatorname{tg} t$	$\frac{1}{\cos^2 t}$	$\operatorname{th} t$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$
\sqrt{t}	$\frac{1}{2\sqrt{t}}$	$\operatorname{ctg} t$	$-\frac{1}{\sin^2 t}$	$\operatorname{cth} t$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 t}$
$\sqrt[n]{t}$	$\frac{1}{n\sqrt[n]{t^{n-1}}}$	$\sec t$	$\sec t \cdot \operatorname{tg} t$	$\operatorname{Arsh} t$	$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$
e^t	e^t	$\operatorname{cosec} t$	$-\operatorname{cosec} t \cdot \operatorname{ctg} t$	$\operatorname{Arch} t$	$\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$
a^t	$a^t \ln a$	$\operatorname{arcsin} t$	$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	$\operatorname{Arth} t$	$\frac{1}{1-t^2}$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$	$\operatorname{arccos} t$	$-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	$\operatorname{Arcth} t$	$-\frac{1}{1-t^2}$

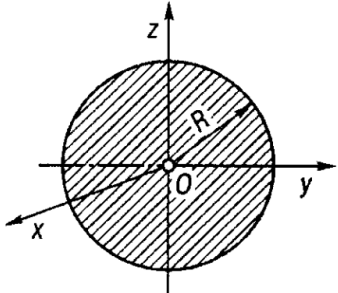
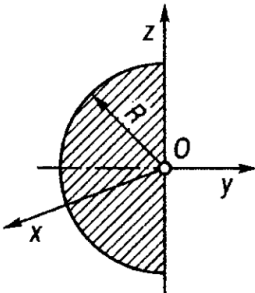
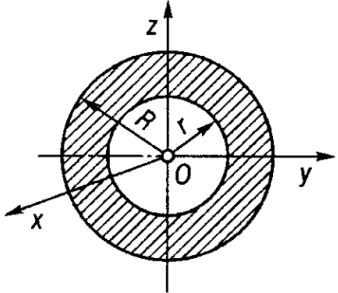
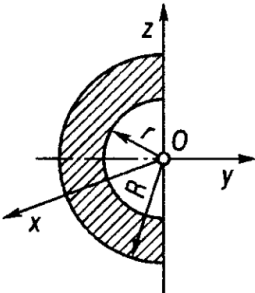
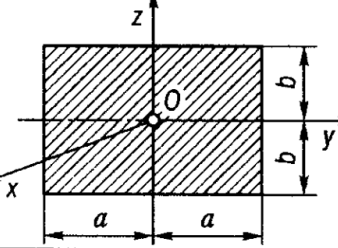
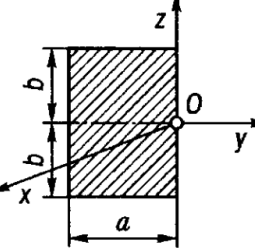
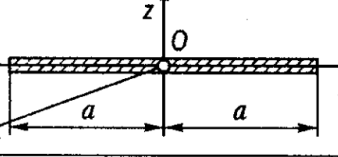
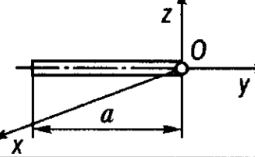
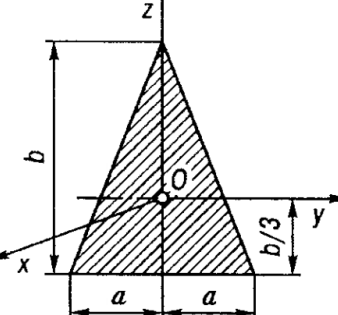
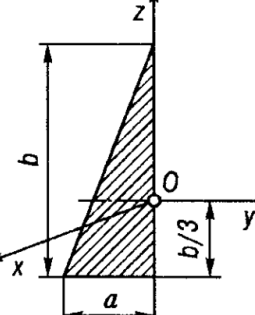
Д4. Таблиця інтегралів деяких елементарних функцій

$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$	$\int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\operatorname{ctgt} + C, (t \neq k\pi)$	$\int \frac{dt}{a^2 + t^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C, (a \neq 0)$
$\int t^\alpha dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1)$	$\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \operatorname{tgt} + C, \left(t \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$	$\int \frac{dt}{a^2 - t^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+t}{a-t} \right + C, (a \neq 0)$
$\int \frac{dt}{t} = \ln t + C$	$\int \cos t dt = \sin t + C$	$\int \frac{dt}{a^2 - t^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arth} \frac{t}{a} + C, (t < a)$
$\int e^t dt = e^t + C$	$\int \operatorname{ch} t dt = \operatorname{sh} t + C$	$\int \frac{dt}{t^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{t+a}{t-a} \right + C, (a \neq 0)$
$\int a^t dt = \frac{a^t}{\ln a} + C, (a \neq 1)$	$\int \operatorname{sh} t dt = \operatorname{ch} t + C$	$\int \frac{dt}{t^2 - a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arcth} \frac{t}{a} + C, (t > a)$
$\int \sin t dt = -\cos t + C$	$\int \operatorname{th} t dt = \ln \operatorname{ch} t + C$	$\int \frac{dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{t}{a} + C, (t < a)$
$\int \cos t dt = \sin t + C$	$\int \operatorname{cth} t dt = \ln \operatorname{sh} t + C, (t \neq 0)$	$\int \frac{dt}{\sqrt{a^2 + t^2}} = \ln \left(t + \sqrt{a^2 + t^2} \right) + C$
$\int \operatorname{tgt} dt = -\ln \cos t + C, \left(t \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$	$\int \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 t} = \operatorname{th} t + C$	$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - a^2}} = \ln \left t + \sqrt{t^2 - a^2} \right + C, (t > a)$
$\int \operatorname{ctgt} dt = \ln \sin t + C, (t \neq k\pi)$	$\int \frac{dt}{\operatorname{sh}^2 t} = -\operatorname{cth} t + C, (t \neq 0)$	

Д5. Одиниці механічних величин в СІ.

Величини	Одиниця вимірювання	Скорочені позначення одиниці	
		українські	латинські чи грецькі
Довжина	Метр	<i>м</i>	<i>m</i>
Маса	Кілограм	<i>кг</i>	<i>kg</i>
Час	Секунда	<i>с</i>	<i>s</i>
Кут	Радіан	<i>рад</i>	<i>rad</i>
Площа	Квадратний метр	<i>м²</i>	<i>m²</i>
Об'єм	Кубічний метр	<i>м³</i>	<i>m³</i>
Швидкість	Метр за секунду	<i>м/с</i>	<i>m / s</i>
Кутова швидкість	Радіан за секунду	<i>рад / с</i>	<i>rad / s</i>
Прискорення	Метр за секунду в квадраті	<i>м / с²</i>	<i>m / s²</i>
Кутове прискорення	Радіан за секунду в квадраті	<i>рад / с²</i>	<i>rad / s²</i>
Сила	Ньютон (<i>кг · м/с²</i>)	<i>Н</i>	<i>N</i>
Тиск (механічна напруга)	Паскаль (<i>Н / м²</i>)	<i>Па</i>	<i>Pa</i>
Робота, енергія	Джоуль (<i>Н · м</i>)	<i>Дж</i>	<i>J</i>
Потужність	Ват (<i>Дж / с</i>)	<i>Вт</i>	<i>W</i>
Імпульс сили	Ньютон на секунду	<i>Н · с</i>	<i>N · s</i>
Момент сили	Ньютон на метр	<i>Н · м</i>	<i>N · m</i>
Момент інерції	Кілограм на метр в квадраті	<i>кг · м²</i>	<i>kg · m²</i>

Д6. Вирази для визначення моментів інерції тіла

Фігура *	J_x	J_y	J_z	Фігура *
	$\frac{mR^2}{2}$	$\frac{mR^2}{4}$	$\frac{mR^2}{4}$	
	$\frac{m(R^2 + r^2)}{2}$	$\frac{m(R^2 + r^2)}{4}$	$\frac{m(R^2 + r^2)}{4}$	
	$\frac{m(a^2 + b^2)}{3}$	$\frac{mb^2}{3}$	$\frac{ma^2}{3}$	
	$\frac{ma^2}{3}$	0	$\frac{ma^2}{3}$	
	$\frac{m(3a^2 + b^2)}{18}$	$\frac{mb^2}{18}$	$\frac{ma^2}{6}$	

* Зауважимо, що моменти інерції тіл і їх половинок (зображених зліва і справа) відносно вказаних осей визначаються однаковими формулами, але значення моментів інерції відрізнятимуться, оскільки маса, яка входить у формули, пропорційна площі поперечного перерізу тіла або довжині стрижня.

Д7. Матричні зображення операцій векторної алгебри.

Для зручності застосування комп'ютерних технологій доцільно векторну форму запису зобразити у матричній формі. Наведемо лише ті співвідношення, які найчастіше зустрічаються в курсі теоретичної механіки.

Зобразимо вектор \vec{a} тривимірного евклідового простору впорядкованим стовпцем (матрицею розміром 3×1) його компонент a_1, a_2, a_3 і позначимо його \vec{a} :

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = [a_1, a_2, a_3]^T. \quad (1)$$

Звертаємо увагу на те, що над вектором \vec{a} ставиться стрілка, а при його матричному запису лише риска над ним – \vec{a} .

З урахуванням цих позначень скалярний добуток двох векторів матиме вигляд

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{a}^T \vec{b} = [a_1, a_2, a_3] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Неважко помітити, що перехід від відомої векторної форми запису до матричної виконується заміною \vec{a} і \vec{b} на \vec{a} і \vec{b} і перетворенням знака скалярного добутку на знак транспонування.

Зрозуміло, що замість позначень a_1, a_2, a_3 можна застосувати позначення компонент у формі проєкції вектора на ті чи інші ортогональні осі, наприклад a_x, a_y, a_z . У цьому випадку

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a}^T \vec{b} = [a_x, a_y, a_z] \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} =$$

$$= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (3)$$

Величину вектора $a = |\vec{a}|$ і косинус кута між векторами \vec{a} і \vec{b} у матричній формі визначають за очевидними формулами

$$a = \sqrt{\vec{a}^T \vec{a}}; \quad \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a}^T \vec{b}}{ab}. \quad (4)$$

Якщо кожному вектору \vec{a} поставити у відповідність кососиметричну матрицю

$$\vec{a}^k = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

складену з його компонент, то векторному добутку $\vec{a} \times \vec{b}$ можна поставити у відповідність так співвідношення у матричній формі:

$$\vec{a}^k \vec{b} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

або, якщо за компоненти вектора взяти його проєкції на осі Ox, Oy, Oz , то

$$\begin{aligned} \vec{a}^k \vec{b} &= \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7)$$

Коли є матрична форма запису скалярного і векторного добутків, то неважко отримати вираз

для змішаних векторно-скалярних добутоків трьох векторів:

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b} \cdot (\bar{c} \times \bar{a}) = \bar{c} \cdot (\bar{a} \times \bar{b}), \quad (8)$$

яким відповідають наступні матричні записи:

$$\bar{a}^T (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b}^T (\bar{c} \times \bar{a}) = \bar{c}^T (\bar{a} \times \bar{b}). \quad (9)$$

Подвійному векторному добутку

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b} (\bar{c} \cdot \bar{a}) - \bar{c} (\bar{a} \cdot \bar{b}) \quad (10)$$

ставиться у відповідність така матрична форма запису:

$$\bar{a}^* (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b} (\bar{c}^T \bar{a}) - \bar{c} (\bar{a}^T \bar{b}). \quad (11)$$

Співвідношення між векторними і матричними формами запису для добутоків мають вигляд

$$\begin{aligned} (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot (\bar{c} \times \bar{d}) &= (\bar{a} \times \bar{b})^T (\bar{c} \times \bar{d}); \\ \bar{a} \cdot \bar{a} &= a^2 = \bar{a}^T \bar{a}. \end{aligned} \quad (12)$$

Векторному добутку

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times (\bar{c} \times \bar{d})$$

ставиться у відповідність матрична форма запису

$$(\bar{a} \times \bar{b})^* (\bar{c} \times \bar{d}).$$

Зазначимо, що крім виразів (2) і (3) існують у матричних операціях й інші форми запису скалярного добутку – це слід (tr) матриці, що дорівнює сумі її діагональних елементів:

$$\begin{aligned} tr(\bar{a} \bar{b}^T) &= tr \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{bmatrix} = \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \end{aligned} \quad (13)$$

або

$$tr(\bar{b} \bar{a}^T) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (14)$$

Розглянемо тепер лінійні функції проєкції a_1, a_2, a_3 вектора \bar{a} :

$$\begin{aligned} c_1 &= I_{11} a_1 + I_{12} a_2 + I_{13} a_3, \\ c_2 &= I_{21} a_1 + I_{22} a_2 + I_{23} a_3, \\ c_3 &= I_{31} a_1 + I_{32} a_2 + I_{33} a_3. \end{aligned} \quad (15)$$

Якщо при довільному векторі \bar{a} величини c_1, c_2, c_3 також можна розглядати як проєкції на ті самі осі деякого вектора \bar{c} , то говорять, що сукупність дев'яти величин

$$\begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix} = \bar{I} \quad (16)$$

визначає тензор \bar{I} , причому I_{ik} є його складовими в цих осях ($i, k = 1, 2, 3$).

Вектор \bar{c} називається добутком тензора \bar{I} на вектор \bar{a} справа і записується у формі

$$\bar{c} = \bar{I} \bar{a}. \quad (17)$$

Матричне зображення цього співвідношення має вигляд

$$\bar{c} = \bar{I} \bar{a}, \quad (18)$$

де \bar{I} позначає (3×3)-матрицю (16), а \bar{c} і \bar{a} – (3×1)-стовпці, що поставлені у відповідність векторам \bar{c} і \bar{a} .

Транспонуванню співвідношення (18)

$$\bar{c}^T = \bar{a}^T \bar{I}^T \quad (19)$$

відповідає операція множення транспонованого тензора \bar{I}^T на \bar{a} зліва:

$$\bar{c} = \bar{a} \bar{I}^T. \quad (20)$$

На завершення наведемо формули диференціювання матриці.

Якщо A – матриця, що має компоненти a_{ik} , тобто

$$A = \| a_{ik} \| \quad (i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n), \quad (21)$$

то похідна за часом від матриці A буде

$$\frac{dA}{dt} = \dot{A} = \|\dot{a}_{ik}\| \quad (i=1, \dots, m; k=1, \dots, n). \quad (22)$$

Наприклад, радіусу-вектору \vec{r} ставимо у від-

повідність стовпець $\vec{r} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ (або рядок \vec{r}^T) і

після диференціювання отримаємо стовпець \vec{v}

(чи рядок \vec{v}^T), який відповідає вектору швидкості

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \text{ тоді}$$

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}, \quad \vec{v}^T = \dot{\vec{r}}^T. \quad (23)$$

Якщо \vec{r} явно залежить від часу t та узагальнених координат q_1, q_2, \dots, q_n ,

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, \dots, q_n, t) \quad (24)$$

або

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, \dots, q_n, t),$$

то вектор швидкості визначається стовпцем

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_n} \dot{q}_n + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}. \quad (25)$$

Рівності (25) можна надати вигляду

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \vec{\dot{q}} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}, \quad (26)$$

де $\vec{\dot{q}}$ – стовпець елементів \dot{q}_s ($s=1, 2, \dots, n$), а

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q}$ зображує $(3 \times n)$ -матрицю

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial q_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial q_n} \\ \frac{\partial x_3}{\partial q_1} & \frac{\partial x_3}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial x_3}{\partial q_n} \end{bmatrix} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q}. \quad (27)$$

Із (26) випливає співвідношення

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q}, \quad (28)$$

що є матричною формою запису однієї з тотожностей Лагранжа

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_s}. \quad (29)$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Теоретична механіка. Збірник задач / О.С. Апостолюк, В.М. Воробйов, Д.І. Ільчишина та ін.; За ред. М.А. Павловського.- К.: Техніка, 2007.- 400 с.: іл.
2. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики: Учеб. Для машино-строит. и приборостроит. спец. вузов.- 5-е изд., перераб. и доп. – М.: высш. шк., 1990.- 607 с.: ил.
3. Павловський М.А. Теоретична механіка: Підручник.- К.: Техніка, 2002.- 512 с.: іл.
4. Цасюк В.В. Теоретична механіка: Навчальний посібник.- Київ: Центр навчальної літератури, 2004.- 402 с.