МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Лабораторна робота з фізиці:

«Вимірювання геометричних розмірів тіл і визначення їх об’єму і площі поверхні»

Одеса - ОНПУ
2023

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Лабораторна робота з фізиці:

«Вимірювання геометричних розмірів тіл і визначення їх об'єму і площі поверхні»

для здобувачів спеціальностей АС і АІ

Затверджено
на засіданні
кафедри фізики ОДПУ
Протокол № від 2023

Одеса - ОНПУ
2023

Лабораторна робота з загального курсу фізики, розділ «Механіка» для здобувачів спеціальностей АС і АІ / Склав: М.Є. Дюбченко, Н.М. Корнєва, О.Н. Богданова– Одеса: ОНПУ, 2023.- 17 с.

Складачі: М.Є. Дюбченко, к.т.н., Н.М. Корнєва , к.ф.-м.н., .О.Н. Богданова, асс.

Рецензент: **О.В. Маслов**, доктор техн. наук, проф..

Лабораторна робота має теоретичний вступ, в якому розглядаються основи теорії похибок при вимірюванні фізичних величин. В практичній частині виконуються дві вправи, які пов’язані з висновками теорії.

Навчальний матеріал супроводжується графічним матеріалом.

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1-01

Теоретичний вступ

Фізичні величини і їх вимірювання.
Математична обробка результатів вимірювання

1. Види вимірювання

Мета: навчитися обробляти результати прямих та непрямих вимірювань, визначати абсолютну та відносну похибки фізичних величин та використання цих знань на фізичному лабораторному практикумі.

Під **фізичною величиною** розуміють властивість, яка є спільною в якісному відношенні для багатьох тіл, але ж в кількісному відношенні індивідуальна для кожного тіла. (наприклад, довжина, маса, момент сили, потужність і інші.).

Кожна фізична величина має дві характеристики: якісну і кількісну. Перша з них визначає властивість матеріального світу, яку відображає ця величина (наприклад, температуру характеризує інтенсивність руху молекул тіла).

Кількісна характеристика обумовлена тим, що кожний об\`єкт матеріального світу містить деяку кількість аналізованої властивості. Цю характеристику визначають вимірюванням – експериментальним порівнянням даної фізичної величини з другою фізичною величиною, яка якісно з нею однакова і приймається за одиницю.

Таким чином, одиницею фізичної величини є така фізична величина, якій по визначенню приписується числове значення, яке дорівнює одиниці. Результат вимірювання записується в вигляді значення фізичної величини – де-якого числа прийнятих для неї одиниць (наприклад, 12^0C – значення температури тіла).

За способом отримання числового значення величини усі вимірювання розподіляються на 4 основних види: **прямі, непрямі, сукупні і сумісні.**

В навчальних лабораторіях використовуються тільки прямі и непрямі вимірювання.

Прямими звуться вимірювання , при яких значення величини визначають з дослідних даних. При прямих вимірюваннях використовують приклади вимірювання, які необхідні для вимірювання цієї фізичної величини (наприклад, вимірювання кута кутоміром, температури термометром і ін.).

Непрямими звуться вимірювання, при яких значення величини знаходять на основі звісної залежності між цією величиною і величинами, які отримані в результаті прямих вимірювань. Прикладами непрямих вимірювань є визначення об’єму тіла по прямим вимірюванням його геометричних розмірів, знаходження питомого електричного опору провідника по його опору, довжині і площі поперечного перетину.

Метою вимірювання є знаходження **достеменного значення** величини — значення, яке ідеально характеризує якісні та кількісні характеристики величини, яка вимірюється. Достеменне значення фізичної величини може бути встановлено лише проведенням нескінченного числа вимірювань, що неможливо реалізувати на практиці. Тому замість достеменного значення величини, яку вимірюють, використовується **дійсне значення**, яке визначається експериментально і максимально близьке до достеменного значення.

За дійсне значення звичайно приймають **середнє арифметичне значення** ($\overline{X}$) ряду вимірювань однієї і тієї же величини:

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N},$$

де x_i - значення окремого вимірювання; N – число вимірювань.

ПОХИБКИ ВИМІРЮВАНЬ

Відхилення результату вимірювання від достеменного значення (дійсного значення) величини зветься **похибкою вимірювання. Від похибки вимірювання** залежить точність вимірювання – характеристика, яка відображає близькість результату вимірювання до достеменного значення величини, яка вимірюється. Малим похибкам відповідає висока точність вимірювання.

Класифікація похибок в залежності від способу її відображення і характеру проявлення з часом величини, яка вимірюється, приведена на рис. 1.

Рис. 1

Абсолютна похибка вимірювання Δ - різниця між результатом вимірювання x_i та достеменним значенням величини, яка вимірюється, (середнім арифметичним значенням $\overline{x}$):

$$\Delta = x_i - \overline{x}$$

Абсолютна похибка відображається в одиницях величини, яка вимірюється.

Однак, вона не може в повній мірі служити показником точності вимірювання, тому, що одне і теж її значення, наприклад, Δ = 0,05мм при x = 100 мм відповідає досить високої точності вимірювання, а при x = 1 мм – низький. Тому вводять поняття відносної похибки.

Відносна похибка вимірювання δ - відношення абсолютної похибки вимірювання Δ до дійсного значення величини, яка вимірюється ($\overline{x}$):

$$\delta = \frac{\Delta}{\overline{x}} = \frac{x_i - \overline{x}}{\overline{x}} * 100\%$$

Відносна похибка – безрозмірна величина, її чисельне значення можна вказувати, наприклад, в відсотках.

Вона показує, на яку долю від дійсного значення величини X ми помиляємося, тобто якість результатів вимірювання.

Груба похибка (промах) – похибка вимірювання, яка значно перевищує очікувану в даних вимірюваннях. Вона, як правило, виникає з похибок чи неправильних діянь оператора (невірного відліку, похибок в запису чи обчисленнях, неправильного включення приборів чи збоїв в їх роботі та ін.). Можливою причиною виникання промахів також може бути тимчасова різка зміна умов проведення вимірювання. Коли промахи виявляються в процесі вимірювання, то результати , які їх мають, не враховуються.

Систематичною зветься похибка, величина якої залишається сталою, чи закономірно змінюється при усіх вимірюваннях, які проводяться одним методом.

Систематична похибка результату вимірювання складається з деяких окремих систематичних похибок, які залежать від джерела виникання. Основні з них слідуючи:

1) **інструментальна похибка** –пов'язана з недосконалістю засобів вимірювання, які використовуються. Вона може бути оцінена, якщо є звісним клас точності приладу. Наприклад, клас точності «2» означає, що інструментальна похибка не перевищує 2% від максимального значення шуканої величини, на яку розрахований прибор. Часто за похибку засобів вимірювання приймають число, яке дорівнює половині ціни розподілу вимірювального приладу;

2) методична похибка – пов'язана з недосконалістю метода и прийомів використання засобів вимірювання. Наприклад, вона виникає при визначенні потуги постійного струму по показанням амперметра і вольтметра без врахування потуги, яка використовується вказаними приборами;

3) **суб'єктивна похибка** – пов'язана з недосконалістю органів почуттів оператора. Наприклад, похибка при вимірюванні частоти методом биття з слуховим контролем. Вимірювання з цифровими приборами не залежать від суб'єктивних похибок.

Систематичну похибку не можна усунути повторювальним вимірюванням. Її усувають чи за допомогою поправок, чи «удосконаленням» експерименту.

Випадковою зветься похибка, яка неконтрольовано змінюється від одного вимірювання до другого як по абсолютній величині, так і по знаку. Виникання таких похибок не зв'язано з якою-небудь закономірністю, вони спостерігаються при повторенні вимірювання однієї і тієї же величини в вигляді деякого розподілення результатів. Випадкові похибки неминучі, непереможні и завжди існують в результаті вимірювання. Пояснення великої сукупності випадкових похибок підкоряється закономірностям теорії імовірності і математичній статистики.

Практика вимірювання підтверджує, що випадкові похибки по величині в більшості випадків перевищують систематичні похибки. Тому далі будемо здійснювати оцінку тільки випадкових похибок.

Оцінка похибок при прямих вимірюваннях

а) Оцінка випадкових похибок

Оцінка випадкових похибок при вимірюванні фізичних величин здійснюється за допомогою теорії похибок, в основі якої лежать два припущення Гаусса:

1. При великому числі вимірювань випадкові похибки однакові по величині, але протилежні по знаку, зустрічаються однаково часто.

2. Чим більш похибка, тим вона менш імовірна.

Якщо припустити, що випадкова похибка підкоряється нормальному закону розподілення похибок (закону Гауса), то як слідує з теорії похибок, можна зменшити вплив випадкових похибок на кінцевий результат і з визначеною імовірністю, яка зветься **надійністю**, оцінити її величину (Приложення1).

Нехай проведено N з рівною точністю (одним і тім же прибором) прямих вимірювань величини X і отримано ряд значень $x_1, x_2, \ldots x_N$. Комбінація цих значень,

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N},$$

як вказано раніше, зветься **середнім арифметичним** ряду вимірювань. Це найбільш імовірне значення величини X чи найкраще приближення до X, яке є його оцінкою.

Таким чином, $X \approx \overline{X}$.

Наступна задача складається з визначення точності цього приблизного рівняння, тобто в отриманні такого інтервалу навколо $\overline{X}$, який зветься **довірчим інтервалом,** який з заданою надійністю (імовірністю) «покриває» значення X.
Інше мовно, **довірчим** зветься такий чисельний інтервал, відносно якого з раніш встановленою імовірністю можна сказати, що достеменне значення величини, яка вимірюється, знаходиться в середині цього інтервалу.

Як показується в теорії похибок основним показником точності загального результату $\overline{X}$ для ряду N вимірювань є величина σ.

Ця величина зветься **середнім квадратичним відхиленням** результату вимірювань (середня квадратична похибка середнього арифметичного).

В дослідженнях, які проводяться в навчальних лабораторіях, число вимірювань N є невеликим і величина σ може не відповідати досягненої точності.
В цьому випадку довірча оцінка проводиться методом малих вибірок, які основані на так званому розподілі Стьюдента. Тоді абсолютна похибка, яка обгрунтована випадковими похибками, визначається за формулою

$$\Delta_{сл} = t_s \cdot \sigma,$$

де t_s - коефіцієнт Стьюдента, який залежить від обраного рівня надійності p і числа вимірювань N.

Значення t_s для рівнів надійності $p = 0{,}95$ і $p = 0{,}98$ приведені в таблиці.

Таблиця коефіцієнтів Стьюдента t_s

N \ P	0,95	0,98
2	12,7	31,8
3	4,30	6,96
4	3,18	4,54
5	2,78	3,75
6	2,57	3,36
7	2,45	3,14
8	2,36	3,00
9	2,31	2,90
10	2,26	2,82

Кінцевий результат записують в вигляді

$$X = (\overline{X} \pm \Delta_{сл}) \text{ од. вим.}$$

Цей запис значить, що достеменне значення вимірювальної величини знаходиться з імовірністю P в інтервалі $\left[\overline{X}-\Delta_{сл};\ \ \overline{X}+\Delta_{сл}\right]$. *Границі цього інтервалу звуться довірчими границями результату вимірювань, а замкнений між ними інтервал –* ***довірчим інтервалом*** (Рис.2).

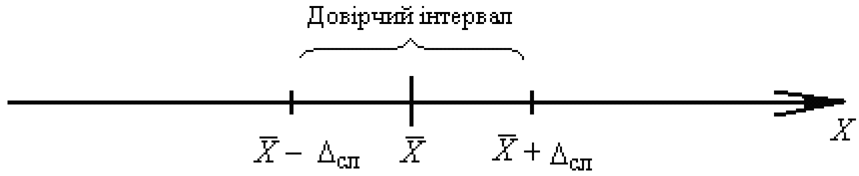


Рис. 2

Таким чином, в результаті вимірювань знаходять не достеменне (чи дійсне) значення вимірювальної величини, а оцінку цього значення в вигляді границь інтервалу, в якому воно знаходиться з заданою імовірністю.

б) Оцінка систематичної і повної похибки прямих вимірювань

Якщо здійснена оцінка не тільки випадкової, але ж і систематичної складових похибок, то повна похибка прямих вимірювань Δ^{Σ} визначається по формулі:

$$\Delta^{\Sigma}=\sqrt{\Delta_{сл}^{2}+\Delta_{сист}^{2}}\ ,$$

де $\Delta_{сл}=t_s\cdot\sigma$; $\Delta_{сист}=p\cdot\Delta_{сист}^{\max}$.

Тут $\Delta_{сист}^{\max}$ - ціна розподілення прибору. Наприклад, для мікрометра $\Delta_{сист}^{\max}$=0,01мм, а для штангенциркуля вона дорівнює чи 0,1мм, чи 0,05мм в залежності від його типу.

Тоді кінцевий результат записуємо в вигляді

$$X=(\overline{X}\pm\Delta^{\Sigma})\ \text{од. вим.}$$

Оцінка похибок при непрямих вимірюваннях

Похибка непрямих вимірювань залежать, як йдеться з їх визначення, від похибок прямих вимірювань і, крім того, від виду функції , по якій обчислюють значення величини, яка вимірюється непрямим шляхом.

а) Похибки функції однієї змінної

Коли величина $U=f(x)$ є функцією тільки однієї змінної x ,яка шляхом прямих вимірювань визначена з похибкою Δ_x, то похибка непрямих вимірювань $\Delta_{косв}$ величини U дорівнює

$$\Delta_{косв}=\left|\frac{df}{dx}\right|\cdot\Delta_x$$

Приклад 1:

Площа диска - $S=\dfrac{\pi D^2}{4}\ \Rightarrow$

$$\Delta_s=\left|\frac{dS}{dD}\right|\Delta_D=\frac{\pi D}{2}\Delta_D$$

Приклад 2:

Нехай при вільному падінні $h=\dfrac{gt^2}{2}\ \Rightarrow\ \Delta_h=\left|\dfrac{\partial h}{\partial t}\right|\Delta_t=gt\cdot\Delta_t$

б) Похибка функції   кількох змінних

Нехай шукана величина є функцією кількох змінних, тобто $U = f(x, y, \ldots z)$. Коли змінні $x, y, \ldots z$ визначені з похибкою $\Delta_x, \Delta_y, \ldots \Delta_z$, то

похибка непрямих вимірювань шуканої величини U дорівнює

$$\Delta_U = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\Delta_x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\Delta_y\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\Delta_z\right)^2}$$

Приклад 1:

$$g = \frac{2h}{t^2}; \qquad \Delta_g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial h}\Delta_h\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial t}\Delta_t\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{t^2}\Delta_h\right)^2 + \left(\frac{-4h}{t^3}\Delta_t\right)^2}.$$

Приклад 2:

$$E = \frac{mV^2}{2}; \qquad \Delta_E = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial m}\Delta_m\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\Delta_V\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{V^2}{2}\Delta_m\right)^2 + \left(mV \cdot \Delta_V\right)^2}$$

Правила округлення значень похибок і результатів вимірювання

Існують наступні 3 правила округлення обчисленого значення похибки і отриманого результату вимірювань:

1. Похибка результату вимірювання вказується двома значущими цифрами, коли перша з них 1 чи 2, і однією, - коли перша є 3 і більш.

Значущі цифри даного числа – всі цифри, крім нулів, які стоять попереду числа.
Приклади:

а) Число 15,0 має три значущі цифри.

б) Число 40 має дві значущі цифри.

в) Число 0,045 має дві значущі цифри.

г) Число 0,0450 має три значущі цифри

Приклади округлення:

а) $0{,}122 \approx 0{,}12$.

б) $0{,}126 \approx 0{,}13$.

в) $0{,}362 \approx 0{,}4$.

2. Результат вимірювання округляється до того ж десяткового розряду, яким закінчується округлене значення абсолютної похибки:

Неправильно	**<u>Правильно</u>**
$19{,}562 \pm 0{,}17$	$19{,}56 \pm 0{,}17$
$19{,}56 \pm 0{,}57$	$19{,}6 \pm 0{,}6$

3. Всі попередні обчислення здійснюють з одним-двома лишніми розрядами, а округлення здійснюють в кінцевій відповіді.

4. При записі кінцевого результату вимірювання фізичної величини її подають в вигляді інтервалу значень з вказанням відносної похибки і імовірності попадання достеменного значення до вказаного інтервалу при <u>обов’язковому вказанні одиниць вимірювання величини.</u>

Приклади:

1. $S = (16{,}26 \pm 0{,}15)\,мм^2$ $\quad \varepsilon = 0{,}92\%$ $\quad P = 0{,}9$.
2. $V = (78{,}5 \pm 0{,}8)\,мм^3$ $\quad \varepsilon = 1\%$ $\quad P = 0{,}95$.
3. $m = (150 \pm 12)\,кг$ $\quad \varepsilon = 8\%$ $\quad P = 0{,}9$.
4. $J = (0{,}157 \pm 0{,}012)\,кг \cdot м^2$ чи $J = (157 \pm 12) \cdot 10^{-3}\,кг \cdot м^2$ $\quad \varepsilon = 7{,}6\%$ $\quad P = 0{,}95$.

<u>Порядок виконання роботи</u>

<u>Вправа 1</u>

Вимірювання за допомогою мікрометра діаметра кулі і обчислення його об єму

1. Вимірюють 5 разів діаметр кулі D і отримають середнє арифметичне значення діаметру
$$\overline{D} = \frac{\sum_{i=1}^{5} D_i}{5}$$
2. Обчислюють абсолютні похибки окремих вимірювань (5 похибок)
$$\Delta D_i = \overline{D} - D_i$$
3. Обчислюють квадрати похибок окремих вимірювань $(\Delta D_i)^2$ і за формулою
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5} \Delta D_i^2}{N(N-1)}}$$
отримають середню квадратичну похибку визначення середнього арифметичного значення діаметру. Всі результати вимірювання і проміжні обчислення заносять до таблиці

№ п/п	D_i, мм	ΔD_i, мм	ΔD_i^2
1			
2			
3			
4			
5			
	$\overline{D} =$	$\sigma =$	

4. Користуючись таблицею коефіцієнтів Стьюдента для N=5 і надійності $p = 0{,}95$ визначають коеф. Стьюдента t_s =2,78. Обчислюють випадкову похибку прямих вимірювань діаметру
$$\Delta_D = t_s \cdot \sigma$$
5. Обчислюють систематичну похибку мікрометра по формулі $\Delta_{сист} = p \cdot \Delta_{сист}^{\max}$
Для мікрометра $\Delta_{сист}^{\max} = 0{,}01 мм$
6. Визначають повну похибку вимірювань діаметру кулі
$$\Delta_D^{\Sigma} = \sqrt{\Delta_D^2 + \Delta_{сист}^2}\ .$$
7. Записують результат вимірювання діаметру кулі
$$D = \overline{D} \pm \Delta_D^{\Sigma}$$
8. Обчислюють найбільш імовірне значення об'єму кулі
$$\overline{V} = \frac{1}{6}\pi\overline{D}^3$$

9. Обчислюють похибку непрямих вимірювань об'єму кулі

$$\Delta_V = \left|\frac{dV}{dD}\right| \Delta_D^{\Sigma} = \frac{1}{2}\pi \cdot \overline{D}^2 \cdot \Delta_D^{\Sigma}$$

10. Обчислюють відносну похибку

$$\varepsilon = \frac{\Delta_V}{\overline{V}} \cdot 100\%$$

11. Записують кінцевий результат вимірювання об'єму кулі

$$V = (\overline{V} \pm \Delta_V)\,мм^3 \quad \text{при } p=0{,}95$$

Вправа 2

Вимірювання за допомогою штангенциркуля діаметра и висоти циліндра і визначення площі його бічній поверхні

1. Вимірюють 5 разів діаметр D и висоту H циліндра и отримають їх середні арифметичні значення

$$\overline{D} = \frac{\sum_{i=1}^{5} D_i}{5}; \qquad \overline{H} = \frac{\sum_{i=1}^{5} H_i}{5}.$$

2. Знаходять абсолютні похибки окремих вимірювань діаметра и висоти

$$\Delta D_i = \overline{D} - D_i; \quad \Delta H_i = \overline{H} - H_i$$

3. Обчислюють квадрати похибок окремих вимірювань $(\Delta D_i)^2$ і $(\Delta H_i)^2$, потім по формулам

$$\sigma_{\overline{D}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5} \Delta D_i^2}{N(N-1)}}; \qquad \sigma_{\overline{H}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5} \Delta H_i^2}{N(N-1)}}$$

знаходять середню квадратичну похибку визначення середнього арифметичного значення діаметра и висоти. Всі результати вимірювань і проміжні обчислення заносять в таблицю

№ п/п	D_i, мм	ΔD_i, мм	ΔD_i^2	№ п/п	H_i, мм	ΔH_i, мм	ΔH_i^2
1				1			
2				2			
3				3			
4				4			
5				5			
$\overline{D} =$		$\sigma_{\overline{D}} =$		$\overline{H} =$		$\sigma_{\overline{H}} =$	

4. По таблиці коефіцієнтів Стьюдента для N=5 и надійності p =0,95 визначають коеф. Стьюдента t_s =2,78. Обчислюють випадкову похибку

$$\Delta_D = t_s \cdot \sigma_D; \qquad \Delta_H = t_s \cdot \sigma_H$$

5. Обчислюють систематичну похибку штангенциркуля по формулі

$$\Delta_{сист} = p \cdot \Delta_{сист}^{\max}$$

Для штангенциркуля $\Delta_{сист}^{\max} = 0{,}1$мм чи 0,05мм в залежності від типу.

6. Визначають повну похибку вимірювань діаметра і висоти

$$\Delta_D^{\Sigma} = \sqrt{\Delta_D^2 + \Delta_{сист}^2} \qquad \Delta_H^{\Sigma} = \sqrt{\Delta_H^2 + \Delta_{сист}^2}.$$

7. Записують результат вимірювання діаметру і висоти циліндра

$$D = \overline{D} \pm \Delta_D^{\Sigma} \qquad H = \overline{H} \pm \Delta_H^{\Sigma}$$

8. Обчислюють найбільш імовірне значення площі бічній поверхні

$$\overline{S} = \pi \cdot \overline{D} \cdot \overline{H}$$

9. Обчислюють похибку непрямих вимірювань площі бічній поверхні

$$\Delta_S = \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial D}\Delta_D^{\Sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial H}\Delta_H^{\Sigma}\right)^2} = \sqrt{(\pi\overline{H}\cdot\Delta_D^{\Sigma})^2 + (\pi\overline{D}\cdot\Delta_H^{\Sigma})^2}$$

10. Обчислюють відносну похибку

$$\varepsilon = \frac{\Delta_S}{\overline{S}} \cdot 100\%$$

11. Записують кінцевий результат вимірювань

$$S = (\overline{S} \pm \Delta_S)мм^2 \quad \text{при } p=0,95$$

Контрольні питання

1. Які вимірювання звуться прямими та непрямими?
2. Класифікація похибок.
3. Дати визначення абсолютній і відносній похибок.
4. Сформулювати положення Гауса, які лежать в основі теорії похибок.
5. Написати формулу для середньої квадратичної похибки ряду вимірювань.
6. Пояснити значення висловлювань «довірчий інтервал» і «довірча імовірність»
7. Як зміниться довірчий інтервал при збільшенні довірчої імовірності?
8. Як визначається похибка непрямих вимірювань?
9. Яка похибка характеризує якість вимірювань?
10. Від яких параметрів залежить коефіцієнт Стьюдента?
11. Як обчислюється повна абсолютна похибка прямих вимірювань?
12. Чому виникають похибки вимірювань?
13. Сформулюйте правила округлення результату вимірювань з похибкою.
14. Як правильно записати кінцевий результат?

Література

1. Воловик П.М. Фізика для університетів.- Київ. ІРПІНЬ: Перун, 2005.- 860 с.

ДОПОВНЕННЯ 1

Закономірності виникання та розподілення випадкових похибок були теоретично встановлені німецьким математиком К. Гаусом (1777-1855) і потім перевірені в багатьох дослідженнях.

При досить великому числі вимірювань випадкові похибки підкоряються закону нормального розподілення (розподілення Гауса), математична запис якого має вигляд

$$f(\Delta x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \ell^{-\frac{\Delta x^2}{2\sigma^2}},$$

де $f(\Delta x)$ - густина імовірності випадкових похибок; σ - середньоквадратичне відхилення середньоарифметичного: ℓ - основа натурального логарифма, яке дорівнює 2,72.

Величину σ^2 звуть дисперсією даного розподілення. Це границя, до якої прямує середньоквадратична похибка середньоарифметичного при нескінченному числі вимірювань. Вона дає можливість оцінити точність методики вимірювань.

При зменшенні дисперсії, зменшується розкид окремих результатів. Це свідчить про те, що вимірювання виконані точніше.

Графічно функція Гауса показана на рис. 3.

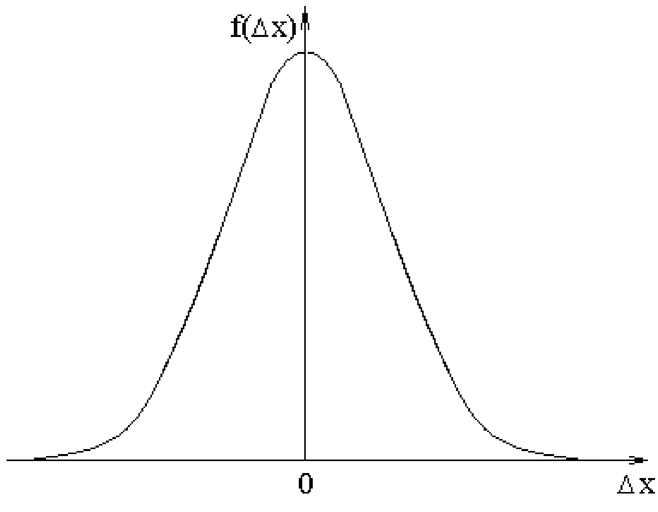
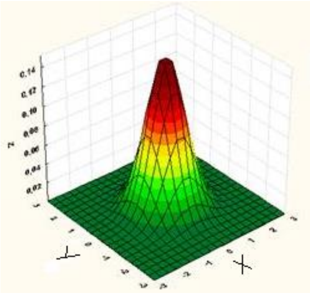


Рис. 3

Крива Гауса по формі нагадує колокол, тому графік нормального закону часто звуть **колоколоподібной кривою.** Як видно графік має «горб» в середині і різке зниження густини на краях. В цьому полягає сенс нормального розподілення.

Інакше закон нормального розподілення вказує на те, що:

1) найбільш імовірні похибки, близькі до нуля, тоді як великі по величині похибки зустрічаються досить рідко;



2)похибки, які однакові по величині, але протилежні по знаку, рівноімовірні.

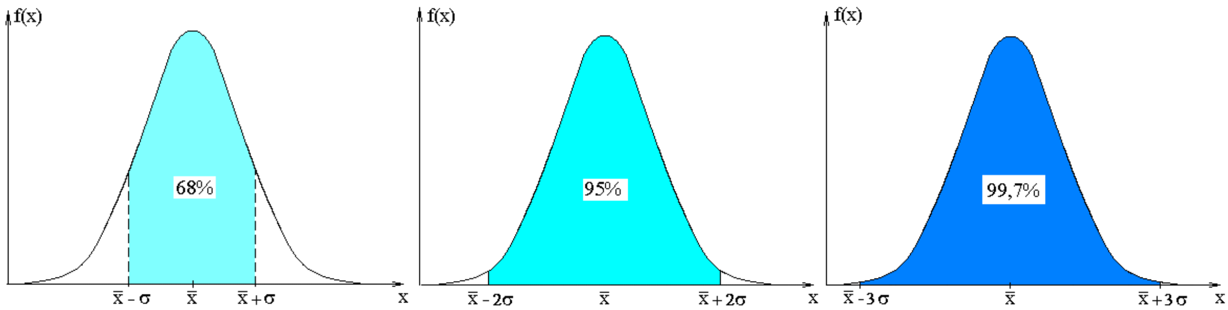
Як наглядна ілюстрація на рис.4 приведена колоколоподібна крива для двомірного випадка розподілення похибок (по осях X і Y).

Рис. 4

Чим точніше прибор, яким здійснюють вимірювання, тим вище максимум кривої і тим вона узче, **причому повна площа під кривою дорівнює одиниці** (при відповідному нормуванні масштабу по осях координат).

Криву Гауса можна побудувати, якщо відкласти по вісі абсцис не похибки, а значення вимірювальної величини. Тоді, якщо виділити де-яку частину області під кривою симетрично відносно її центра, то можна визначити імовірність того, що достеменне значення вимірювальної величини влучає в виділений інтервал.

Наприклад, якщо ширина довірчого інтервалу дорівнює середньоквадратичній похибці $\pm\sigma$, то імовірність існування там достеменного значення величини складає 68% (рис.5а). Коли ширина довірчого інтервалу дорівнює $\pm 2\sigma$, то імовірність знаходження там достеменного значення величини дорівнює 95% (рис.5б). У тому випадку, коли ширина довірчого інтервалу дорівнює $\pm 3\sigma$, то відповідна імовірність складає 99,7% (рис.5в).



а) б) в)

Рис. 5

Довірчий інтервал «три сигма» ($\pm 3\sigma$), який має довірчу імовірність 99,7%, значить, що з 370 випадкових похибок тільки одна по абсолютному значенню буде більше за 3σ. На основі цього грунтується один з критеріїв визначення грубих похибок (промахів). Коли остаточна похибка якогось результату вимірювання перебільшує значення 3σ, то цей результат розглядається як промах і виключається з ряду вимірювань.

ДОПОВНЕННЯ 2

(Протокол виконання лабораторної роботи №1-01)

Робочий лист

Робочий лист

«ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»
Кафедра фізики

Спец-ть-

Група

____

Здобувач(ка)
вищої освіти

____

Протокол №1

Лабораторна робота №1-01
Вимірювання геометричних розмірів тіл і визначення їх об'єму і площі поверхні

Спостереження викладача:

Одеса-201..

Вправа 1

Вимірювання за допомогою мікрометра діаметра кулі і обчислення її об’єму

1. Вимірюють 5 разів діаметр кулі D і знаходять середнє арифметичне значення діаметру

$$\overline{D} = \frac{\sum_{i=1}^{5} D_i}{5}$$

2. Знаходять абсолютні похибки окремих вимірювань (5 похибок)

$$\Delta D_i = \overline{D} - D_i$$

3. Обчислюють квадрати похибок окремих вимірювань $(\Delta D_i)^2$ і по формулі

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5} \Delta D_i^2}{N(N-1)}}$$

Знаходять середню квадратичну похибку визначення середнього арифметичного значення діаметру. Усі результати вимірювань і проміжні обчислення вносять до таблиці

№ п/п	D_i, мм	ΔD_i, мм	ΔD_i^2
1			
2			
3			
4			
5			
	$\overline{D} =$	$\sigma =$	

4. По таблиці коефіцієнтів Стьюдента для N=5 і надійності p = 0,95 визначають коеф. Стьюдента t_s =2,78. Обчислюють випадкову похибку прямих вимірювань діаметра

$$\Delta_D = t_s \cdot \sigma$$

5. Обчислюють систематичну похибку мікрометра по формулі $\Delta_{сист} = p \cdot \Delta_{сист}^{\max}$

Для мікрометра $\Delta_{сист}^{\max} = 0{,}01 мм$

6. Визначають повну похибку вимірювань діаметра кулі

$$\Delta_D^{\Sigma} = \sqrt{\Delta_D^2 + \Delta_{сист}^2}\ .$$

7 Записують кінцевий результат виміру діаметра кулі

$$D = \overline{D} \pm \Delta_D^{\Sigma}$$

8. Обчислюють найбільш імовірне значення об’єму кулі

$$\overline{V} = \frac{1}{6}\pi \overline{D}^3$$

9. Обчислюють похибку непрямих вимірювань об’єму кулі

$$\Delta_V = \left|\frac{dV}{dD}\right| \Delta_D^{\Sigma} = \frac{1}{2}\pi \cdot \overline{D}^2 \cdot \Delta_D^{\Sigma}$$

10. Обчислюють відносну похибку

$$\varepsilon = \frac{\Delta_V}{\overline{V}} \cdot 100\%$$

11. Записують кінцевий результат вимірювань об’єму кулі

$$V = (\overline{V} \pm \Delta_V)\, мм^3 \quad \text{при p=0,95}$$

Вправа 2

Вимірювання за допомогою штангенциркуля діаметра і висоти циліндра і визначення площі його бічній поверхні

1. Вимірюють 5 разів діаметр D і висоту H циліндра і знаходять їх середнє арифметичне значення

$$\overline{D} = \frac{\sum_{i=1}^{5} D_i}{5}; \qquad \overline{H} = \frac{\sum_{i=1}^{5} H_i}{5}.$$

2. Знаходять абсолютні похибки окремих вимірювань діаметра і висоти

$$\Delta D_i = \overline{D} - D_i; \quad \Delta H_i = \overline{H} - H_i$$

3. Обчислюють квадрати похибок окремих вимірювань $(\Delta D_i)^2$ і $(\Delta H_i)^2$, потім по формулам

$$\sigma_{\overline{D}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5} \Delta D_i^2}{N(N-1)}}\ ; \qquad \sigma_{\overline{H}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{5} \Delta H_i^2}{N(N-1)}}$$

знаходять середню квадратичну похибку визначення середнього арифметичного значення діаметра і висоти. Усі результати вимірювань і проміжні обчислення заносять до таблиці

№ п/п	D_i, мм	ΔD_i, мм	ΔD_i^2
1			
2			
3			
4			
5			
	$\overline{D} =$	σ_D	
№ п/п	H_i, мм	ΔH_i, мм	ΔH_i^2
1			
2			
3			
4			
5			
	$\overline{H} =$	$\sigma_H =$	

4. По таблиці коефіцієнтів Стьюдента для N=5 і надійності p=0,95 визначають коеф. Стьюдента t_s =2,78. Обчислюють випадкову похибку

$$\Delta_D = t_s \cdot \sigma_D; \qquad \Delta_H = t_s \cdot \sigma_H$$

5. Обчислюють систематичну похибку штангенциркуля по формулі

$$\Delta_{сист} = p \cdot \Delta_{сист}^{\max}$$

Для штангенциркуля $\Delta_{сист}^{\max} = 0{,}1$ мм або 0,05мм.

6. Визначають повну похибку вимірювань діаметра і висоти

$$\Delta_D^{\Sigma} = \sqrt{\Delta_D^2 + \Delta_{сист}^2} \qquad \Delta_H^{\Sigma} = \sqrt{\Delta_H^2 + \Delta_{сист}^2}$$

7. Записують кінцевий результат виміру діаметра і висоти циліндра

$$D = \overline{D} \pm \Delta_D^{\Sigma} \qquad H = \overline{H} \pm \Delta_H^{\Sigma}$$

8.. Обчислюють найбільш імовірне значення площі бічній поверхні

$$\overline{S} = \pi \cdot \overline{D} \cdot \overline{H}$$

9. Обчислюють похибку непрямих вимірювань площі бічній поверхні

$$\Delta_S = \sqrt{(\pi \overline{H} \Delta_D^{\Sigma})^2 + (\pi \overline{D} \Delta_H^{\Sigma})^2}$$

10. Обчислюють відносну похибку

$$\varepsilon = \frac{\Delta_S}{\overline{S}} \cdot 100\%$$

11. Записують кінцевий результат вимірювань

$$S = (\overline{S} \pm \Delta_S)\, мм^2 \quad \text{при p=0,95}$$