МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

«ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Кафедра кібербезпеки та програмного забезпечення

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

ДО САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

ПО ТЕМІ

ТЕОРІЯ ГРАФІВ

ПО ДИСЦИПЛІНІ «ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА»

Одеса 2023

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ ТА НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

«ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

Кафедра кібербезпеки та програмного забезпечення

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

ПО ТЕМІ

«ТЕОРІЯ ГРАФІВ»

ПО ДИСЦИПЛІНІ «ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА»

для студентів спеціальностей

122 Комп'ютерні науки;

125 Кібербезпека

Затверджено
на засіданні кафедри КБПЗ
Протокол № 1 від 26.08.2022р.

Одеса 2023

Методичні вказівки для самостійної роботи по темі «Теорія графів» по дисципліні «Дискретна математика» для здобувачів першого (бакалаврського) рівня освіти спеціальностей 122 Комп'ютерні науки, 125 Кібербезпека / Укл. А.А. Кобозєва, І.І.Бобок, Г.В.Шаповалов. — Одеса: Одеська політехніка, 2023. — 21 с.

Укладачі: А.А. Кобозєва, д.т.н., професор;

І.І.Бобок, д.т.н., доцент;

Г.В.Шаповалов, к.т.н.

ЗМІСТ

Вступ

Теорія графів є одним з розділів дисципліни «Дискретна математика», що відповідно до плану навчального процесу входить у цикл обов'язкових дисциплін для студентів галузі знань «Інформаційні технології».

Теорія графів має виняткове значення для вивчення дисциплін, пов'язаних з інформаційною безпекою, кібербезпекою, інформаційними технологіями. Використання теорії графів є традиційним шляхом для формального представлення групи людей із вказівкою взаємних відносин між ними. Це обумовлено рядом факторів, серед яких наочність одержуваної моделі, можливість адекватного відображення за допомогою стандартних операцій на графах реальних дій над групами й подій у групах, існуванням розробленого математичного апарата для роботи із графами, включаючи велику кількість евристичних методів обробки, які добре зарекомендували себе на практиці.

У даний момент у науковому світі надзвичайно активізувалася робота з математичного моделювання терористичних організацій і інших типів кримінальних груп, метою яких є несанкціонований доступ до інформації, її заміна й інші неавторизовані дії. Задачі, пов'язані з організацією протидії групам супротивника, мають ефективні рішення з використанням графових математичних моделей супротивника. Окремі індивідуууми представляються в такій моделі у вигляді вузлів (вершин), пари яких з'єднуються ребром при існуванні певного взаємозв'язку між відповідними членами розглянутої групи. Граф-модель такої групи є зв'язним. У силу цього основна увага при вивченні теорії графів приділяється вивченню властивостей і особливостей зв'язних графів.

На самостійне вивчення винесені властивості зв'язних графів, у тому числі, дерев, ейлерових графів, знання й використання яких допоможе в рішенні задач професійної спрямованості студентам галузі знань «Інформаційні технології», спеціальностей 122 - Комп'ютерні науки, 125 - Кібербезпека.

Методичні вказівки для самостійної роботи з теми «Теорія графів» по дисципліні «Дискретна математика» містять докази всіх наведених властивостей зв'язних графів, а також завдання для самостійної роботи, виконання яких дозволить студентам більш глибоко розібратися в розглянутому розділі дисципліни.

Знання матеріалу, наведеного в додатках, необхідно для розуміння наведених властивостей графів і їхніх доказів.

1. Зв'язний граф. Дерево

Нехай $G=(V,X)$ - неорієнтований граф, де V - множина вершин, а X - множина неупорядкованих пар вершин, або ребер, $|V|=p$, $|X|=q$. Дві його вершини $v_i \in V$ і $v_j \in V$ називаються *зв'язаними*, якщо існує маршрут з кінцями у вершинах v_i і v_j (рис.1).

Для представленого на рис.1 графа вершини v_i і v_k не є зв'язаними, оскільки не існує маршруту, який їх з'єднує.

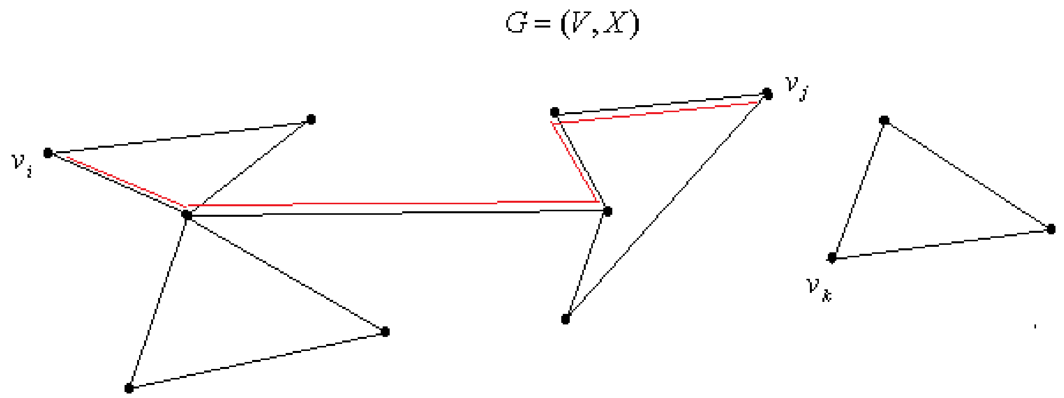


Рис.1.

Граф $G=(V,X)$ називається *зв'язним*, якщо будь-яка пара його вершин зв'язана.

Граф, який представлений на рис.1, не є зв'язним. Приклад зв'язного графа наведений на рис.2.

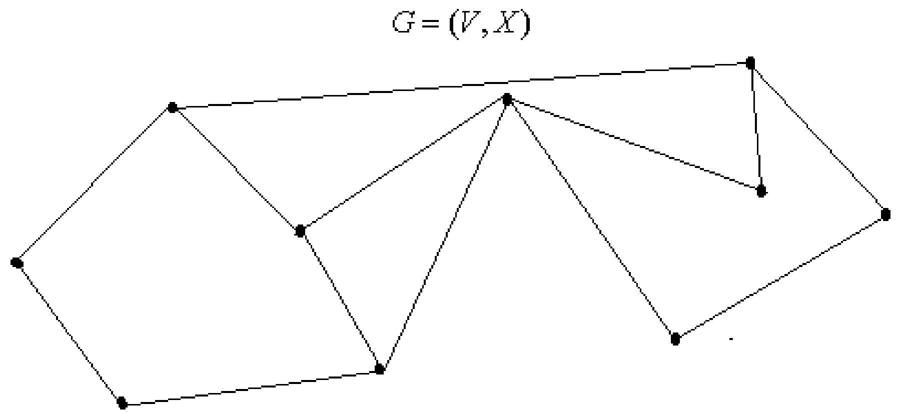


Рис.2.

Будемо вважати, що будь-яка вершина в графі $G=(V,X)$ зв'язана із самою собою (навіть при відсутності петлі). Тоді бінарне відношення «бути зв'язаними», задане на множині вершин V довільного графа, є відношенням еквівалентності. Дійсно, це відношення рефлексивно, симетрично й транзитивно. У силу цього, відношення зв'язаності вершин розбиває всю множину вершин V графа на класи еквівалентності $V_1,\ldots,V_k$: в один клас еквівалентності попадають попарно зв'язані вершини; якщо вершини не є зв'язаними, вони попадають в різні класи, тобто:

$$V=\bigcup_{i=1}^{k} V_i,\quad V_i \bigcap V_j = \varnothing \ \textit{при}\ i \neq j .$$

Підграф графа $G=(V,X)$, породжений V_i, називається *зв'язною компонентою* графа G (або компонентою зв'язності). На рис.3 граф G має три зв'язні компоненти: G_1, G_2, G_3, породжені відповідно класами еквівалентності: $V_1=\{1,2,3\}$, $V_2=\{4,5\}$, $V_3=\{6,7,8,9,10,11\}$.

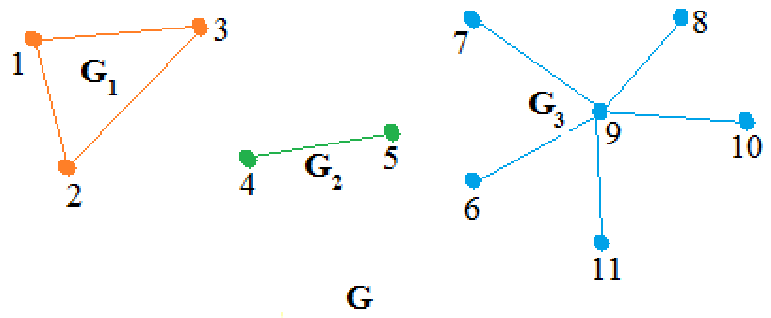


Рис.3.

Оскільки кожна компонента зв'язності графа $G=(V,X)$ є зв'язним графом, то незалежно від того, зв'язним або незв'язним був граф $G=(V,X)$, для його компонентів будуть мати місце всі властивості зв'язного графа.

Частковим випадком зв'язного графа є *дерево*. Неорієнтований граф називається деревом, якщо він зв'язний і не містить циклів (а тому не містить петель і кратних ребер) (рис.4(а)). Дерево - це мінімальний зв'язний граф: при видаленні хоча б одного ребра він втрачає зв'язність.

Всі ребра в дереві є мостами.

Лісом називається незв'язний граф без циклів (рис.4(б)). Зв'язні компоненти лісу є деревами.

Вершини дерева, ступінь яких дорівнює одиниці, називаються *листами* (або *висячими вершинами*). На рис.4(а) вершины 1, 6, 7 – листья.

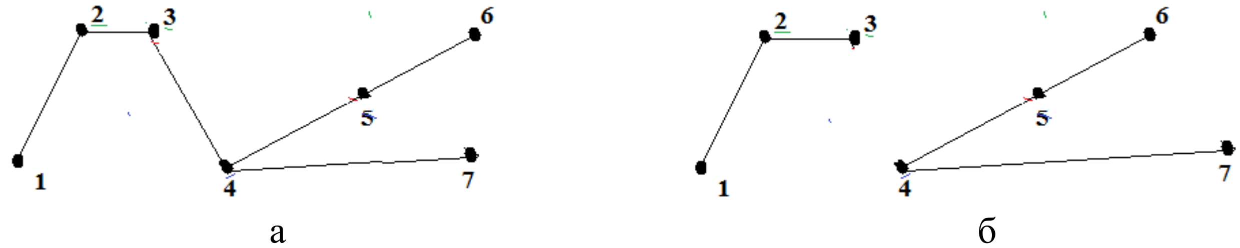


Рис.4.

У дереві будь-які дві вершини зв'язані єдиним ланцюгом.

2. Властивості довільного зв'язного графа

Граф $G=(V,X)$ називається *циклічним/ациклічним*, якщо він містить/не містить цикли.

Граф $G=(V,X)$ називається *одноциклічним*, якщо він містить єдиний цикл.

Твердження 1. Для будь-якого зв'язного графа $G=(V,X)$ наступні твердження еквівалентні:

(1) $G=(V,X)$ - одноциклічний граф;

(2) $G=(V,X)$ - зв'язний і $p=q$;

(3) Для деякого ребра $x \in X$ графа $G=(V,X)$ граф $G-x$ є деревом;

(4) $G=(V,X)$ зв'язний і множина його ребер, які не є мостами, утворюють простий цикл.

Доказ. Доказ проведемо за наступною схемою:

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1).$$

Покажемо, що $(1) \Rightarrow (2)$. Використовуємо для цього *метод математичної індукції* (см. Додаток А).

Нам необхідно показати, що з одноциклічності графа випливає, що $p=q$. Проведемо індукцію по числу вершин графа $p \in \mathrm{N}$. Перевіримо виконання розглянутого твердження для початкових (малих) значень p. Щоб забезпечити наявність у графі циклу, він повинен містити мінімально 3 вершини. Тому почнемо з $p=3$. Для $p=3$ є єдиний варіант одноциклічного графа, представлений на рис.5, для якого виконується $p=q=3$.

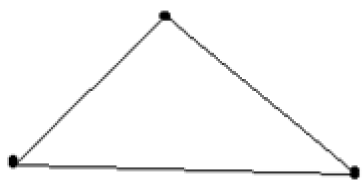
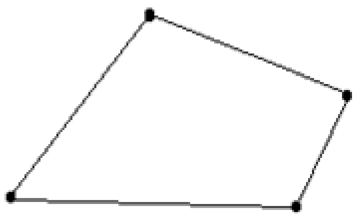


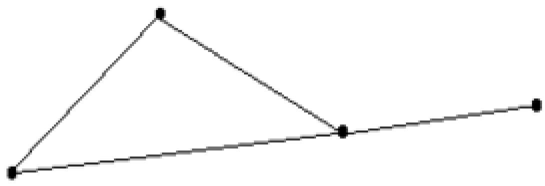
Рис. 5

Для $p=4$ варіантів одноциклічного графа 2, вони представлені на рис.6. Для обох варіантів виконується умова $p=q=4$.

Таким чином, перший пункт методу математичної індукції перевірений.



а



б

Рис.6.

Припустимо тепер, що для графа $G=(V,X)$ з кількістю вершин менше p доведено, що $(1)\Rightarrow(2)$. Доведемо, що $(1)\Rightarrow(2)$ для графа, який містить p вершин. Нехай в графі $G=(V,X)$ існує ребро, що не належить циклу. Видалимо його з $G=(V,X)$. Тоді $G=(V,X)$ розпадеться на два зв'язних підграфи: $G_1=(V_1,X_1)$, $|V_1|=p_1$, $|X_1|=q_1$, - одноциклічний і $G_2=(V_2,X_2)$, $|V_2|=p_2$, $|X_2|=q_2$ - ациклічний, тобто дерево. При цьому очевидно, що:

$$p_1+p_2=p \text{, а } q_1+q_2=q-1. \qquad (1)$$

В графі $G_1=(V_1,X_1)$, оскільки $p_1<p$, по припущенню індукції виконується:

$$p_1=q_1; \qquad (2)$$

в графі $G_2=(V_2,X_2)$, що є деревом, з урахуванням властивостей дерев:

$$p_2=q_2+1. \qquad (3)$$

Складемо рівності (2) і (3): $p_1+p_2=q_1+q_2+1$. З врахуванням (1) з останньої рівності випливає, що $p=q$.

Припустимо тепер, що в графі $G=(V,X)$ не існує ребра, що не належить циклу, тобто всі вершини графа становлять простий цикл. Видалимо з $G=(V,X)$ одне ребро, отримаємо простий ланцюг $G_1=(V_1,X_1)$, $|V_1|=p_1$, $|X_1|=q_1$, який є деревом, при цьому $p_1=p$, $q_1=q-1$. Для дерева має місце співвідношення: $p_1=q_1+1$, звідки для вхідного графа випливає, що $p=q$, що й було потрібно довести.

Покажемо тепер, що $(2)\Rightarrow(3)$. Для того, щоб показати, що граф $G-x=(V_1,X_1)$, $|V_1|=p_1$, $|X_1|=q_1$, є деревом, треба показати, що він зв'язний і $p_1=q_1+1$. Оскільки за умовою (2) $G=(V,X)$ зв'язний і $p=q$, то $G=(V,X)$ не є деревом (у цьому випадку було б $p=q+1$), а тому в $G=(V,X)$ є цикли. Видалимо з $G=(V,X)$ ребро x, що належить циклу, тоді граф $G-x=(V_1,X_1)$ залишиться зв'язним, при цьому $p_1=p$, $q_1=q-1$. Оскільки $p=q$, то $q_1=q-1=p-1=p_1-1$, тобто $G-x=(V_1,X_1)$ є деревом, що й було потрібно довести.

Покажемо тепер, що $(3)\Rightarrow(4)$. Для деякого ребра x граф $G-x=(V_1,X_1)$, $|V_1|=p_1$, $|X_1|=q_1$ є деревом, тому $G=(V,X)$ не є деревом, оскільки у противному випадку $G-x$ був би лісом, а тому в графі $G=(V,X)$ є цикли.

Ребро x належить циклу, оскільки $G-x$ - дерево. При цьому в графі $G=(V,X)$ точно один цикл. Припустимо, що циклів 2. Ребро x належить кожному з них (див. рис.7). Нехай вершини u,v належать різним циклам, не інцидентні ребру x. Тоді u,v в графі $G-x$ з'єднані двома ланцюгами, а це суперечить тому, що $G-x$ - дерево.

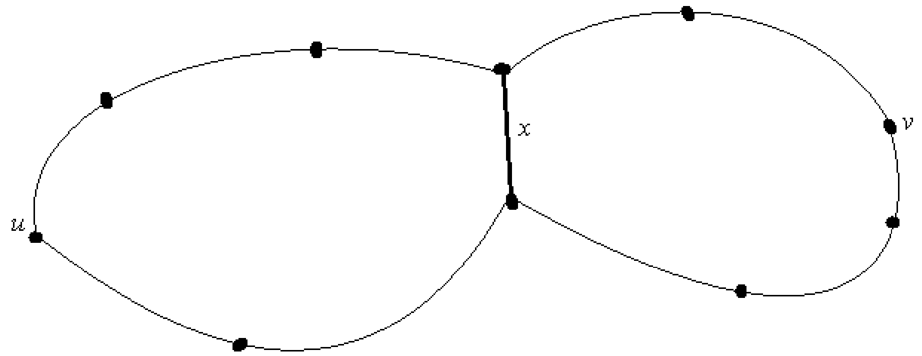


Рис.7.

Завдання 1. Доказ $(4)\Rightarrow(1)$ провести *самостійно*.

Твердження 2. Якщо v - вершина зв'язного графа $G=(V,X)$, то наступні твердження еквівалентні:

(1) v - точка зчленування графа $G=(V,X)$, тобто вершина, видалення якої збільшує кількість компонентів зв'язності;

(2) Існують такі вершини u,w, що відрізняються від v, що v належить будь-якому простому ланцюгу, що з'єднує u,w;

(3) Існує розбивка множини вершин $V-\{v\}$ на такі підмножини U,W, що для будь-яких вершин $u\in U$ і $w\in W$ вершина v належить будь-якому простому ланцюгу, що з'єднує u,w.

Доказ. Покажемо, що $(1)\Rightarrow(3)$. Оскільки v - точка зчленування графа $G=(V,X)$, то граф $G-v$ не є зв'язним. Утворимо розбивку множини вершин $V-\{v\}$, відносячи до U вершини однієї зі зв'язних компонент, а до W - вершини всіх інших зв'язних компонент. Тоді будь-які вершини $u\in U$ і $w\in W$ лежать у різних компонентах зв'язності графа $G-v$, а тоді будь-який простий ланцюг графа $G=(V,X)$, що з'єднує u,w, містить v.

Доказ $(3)\Rightarrow(2)$ витікає з того, що (2) є частковим випадком (3).

Покажемо $(3)\Rightarrow(1)$. Якщо v належить кожному простому ланцюгу в $G=(V,X)$, що з'єднує u,w, то в $G=(V,X)$ немає простого ланцюга, що з'єднує ці вершини в графі $G-v$. Оскільки $G-v$ не є зв'язним, то v - точка зчленування графа $G=(V,X)$.

Твердження 3. У кожному нетривіальному зв'язному графі $G=(V,X)$ знайдуться принаймні дві вершини, що не є точками зчленування.

Доказ. Нехай u,v - вершини графа $G=(V,X)$, максимально віддалені одна від іншої, тобто такі, що відстань $d(u,v)$ між ними дорівнює диаметру $d(G)$ графа $G=(V,X)$. Припустимо, що v - точка зчленування. Тоді існує вершина w, що належить той компоненті зв'язності графа $G-v$, яка не містить вершину u. Це означає, що v лежить на будь-якому ланцюзі, що з'єднує u,w. Тому $d(u,w)>d(u,v)$, що неможливо. Тому v, а також u не є точками зчленування графа.

Твердження 4. Нехай $d_0(G)=\min\limits_{v\in V}\deg(v)$ - мінімальний зі ступенів вершин графа $G=(V,X)$, для якого $|V|=p$. Якщо $d_0(G)\geq\frac{p-1}{2}$, то граф $G=(V,X)$ є зв'язним.

Доказ. Розглянемо довільну вершину $v\in V$ графа $G=(V,X)$. Оскільки $d_0(G)\geq\frac{p-1}{2}$, то $\deg(v)\geq\frac{p-1}{2}$. Отже при розкладанні графа $G=(V,X)$ на зв'язні компоненти одна з них $G_1=(V_1,X_1)$, що містить вершину v, містить всього не менше $\frac{p-1}{2}+1=\frac{p+1}{2}$ вершин. На інші компоненти зв'язності $G=(V,X)$ залишається менше $p-\frac{p+1}{2}=\frac{p-1}{2}$ вершин, які ввійдуть у множину $U\subseteq V$. Розглянемо вершину $v_0\in U$ із цих вершин, що залишилися. Її ступінь $\deg(v_0)\geq\frac{p-1}{2}$, але крім неї в множині U може міститися менше $\frac{p-1}{2}-1=\frac{p-3}{2}$ вершин, отже v_0 має суміжні вершини в $G_1=(V_1,X_1)$, але тоді v_0 буде зв'язаною деяким маршрутом і з вершиною v. З врахуванням того, що v_0 і v - довільні вершини графа $G=(V,X)$, із цього випливає зв'язність графа $G=(V,X)$.

3. Властивості дерева

Твердження 5. Для графа $G=(V,X)$ наступні твердження еквівалентні:

(1) $G=(V,X)$ - дерево;

(2) Будь-які дві вершини в $G=(V,X)$ з'єднані єдиним простим ланцюгом;

(3) $G=(V,X)$ - зв'язний граф і $p=q+1$;

(4) $G=(V,X)$ - ациклічний граф і $p=q+1$;

(5) $G=(V,X)$ - ациклічний граф і якщо будь-яку пару несуміжних вершин з'єднати ребром x, то в графі $G+x$ буде точно один простий цикл.

Доказ: Покажемо $(1) \Rightarrow (2)$. $G = (V, X)$ - зв'язний граф, тому будь-які дві його вершини з'єднані простим ланцюгом. Припустимо, що існують два різні прості ланцюги, що з'єднують вершини u, v графа $G = (V, X)$. Це приведе до наявності циклу в $G = (V, X)$ (рис.8), що суперечить тому, що $G = (V, X)$ - дерево.

Покажемо $(2) \Rightarrow (3)$. З того, що будь-які дві вершини в $G = (V, X)$ з'єднані простим ланцюгом, витікає зв'язність графа. Співвідношення $p = q + 1$ доведемо за допомогою методу математичної індукції, проводячи індукцію по числу вершин. Співвідношення $p = q + 1$ очевидно для зв'язних графів з однією й двома вершинами, єдино можливі варіанти яких представлені на рис.9.

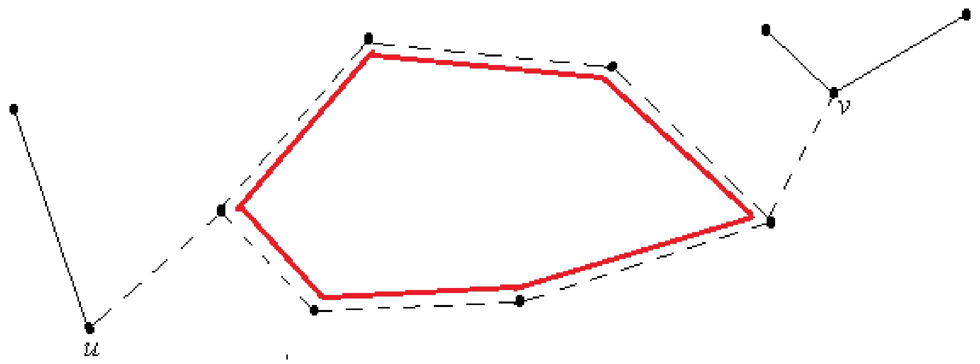


Рис.8.

Припустимо, що співвідношення $p = q + 1$ вірно для графа, що має менше p вершин. Граф $G = (V, X)$ має рівно p вершин. Видалення з нього будь-якого ребра x робить граф $G = (V, X)$ незв'язним у силу одиничності простих ланцюгів, що з'єднують вершини. Більше того, отриманий граф буде мати в точності дві компоненти зв'язності: $G_1 = (V_1, X_1)$, $|V_1| = p_1$, $|X_1| = q_1$ і $G_2 = (V_2, X_2)$, $|V_2| = p_2$, $|X_2| = q_2$.

Дійсно, припустимо, що після видалення довільного ребра утворилося більше число компонентів зв'язності, наприклад, три. Тоді в кожній з них знайдеться принаймні по одній вершині a, b, c, які не зв'язані одна з іншою. Значить у вхідному графі $G = (V, X)$ ланцюги, їх з'єднуючі, містили ребро x. Відновимо ці єдині ланцюги: $a..c$, $b..a$, кожний з яких містить ребро x, а тому їх перетин не є порожнім. Нехай d - спільна вершина для $a..c$ і $b..a$. Але тоді існує ланцюг, що з'єднує b, c, але не містить x, а це суперечить тому, що b, c з'єднані єдиним простим ланцюгом.

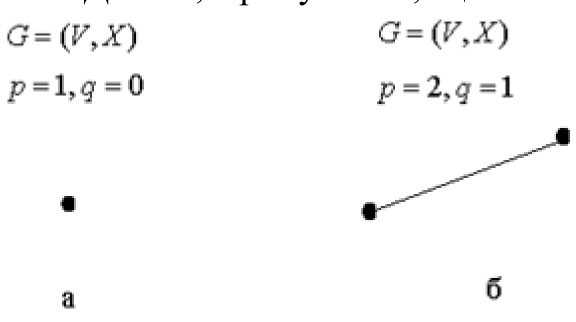


Рис. 9.

За припущенням індукції в кожній компоненті число вершин на одиницю більше числа ребер: $p_1 = q_1 + 1$, $p_2 = q_2 + 1$, а тому $p_1 + p_2 = q_1 + q_2 + 2$, але одне ребро було вилучено, тому отримано потрібний результат.

Покажемо $(3) \Rightarrow (1)$. $G = (V, X)$ - зв'язний граф. Покажемо, що якщо в $G = (V, X)$ є хоча б один цикл, то

$$p < q + 1, \qquad (4)$$

використовуючи для цього метод математичної індукції по числу вершин графа.

У першу чергу перевіримо істинність (4) для початкових малих значень p: $p = 3$ (рис.10(а)), $p = 4$ (рис.10(б,в)). Як видно з рис.10, $p < q + 1$.

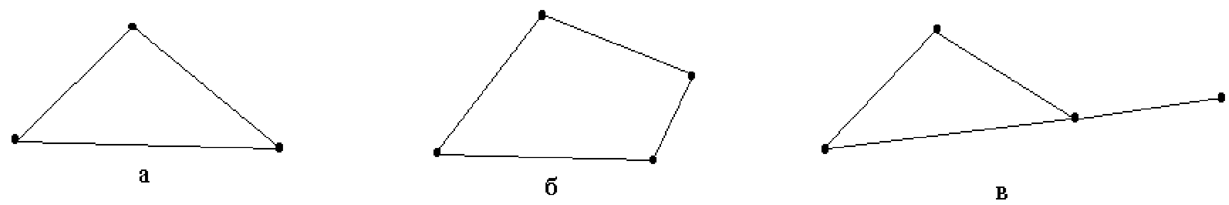


Рис.10.

Припустимо тепер, що для графів з кількістю вершин менше p співвідношення (4) має місце. Доведемо, що тоді (4) буде мати місце й для графа $G = (V, X)$ з p вершинами. Видалим з графа $G = (V, X)$, $|V| = p,\ |X| = q$, одну вершину v, що не є точкою зчленування. Нехай ступінь вершини $\deg(v) = k$. Видалення вершини відбудеться разом з видаленням k інцидентних їй ребер. Отримаємо граф $G_1 = (V_1, X_1)$, $|V_1| = p - 1,\ |X_1| = q - k$. За припущенням індукції для графа $G_1 = (V_1, X_1)$ виконується (4), тобто

$$p - 1 < q - k + 1.$$

Оскільки $\deg(v) = k \geq 1$, то $q - k + 1 \leq q$, тобто

$$p - 1 < q - k + 1 \leq q \quad \Rightarrow \quad p < q + 1,$$

тому граф $G = (V, X)$ не може мати циклів, є деревом.

Завдання 2. Самостійно довести: $(3) \Rightarrow (4)$, $(4) \Rightarrow (5)$, $(5) \Rightarrow (1)$.

Твердження 6. Будь-яке дерево є двудольним графом.

Доказ. Для доказу даного твердження введемо поняття кореневої структури рівнів графа.

Коренева структура рівнів $\Im(x)$ довільного графа $G=(V,X)$ є розбивка множини вершин V графа:

$$\Im(x)=\{L_0(x),L_1(x),\ldots,L_{l(x)}(x)\},$$

така, що $L_0(x)=\{x\},L_1(x)=Adj(L_0(x)),L_i(x)=Adj(L_{i-1}(x))-L_{i-2}(x)$, $i=2,3,\ldots,l(x)$, де $Adj(L_{i-1}(x))$ - множина вузлів графа, що не належать $L_{i-1}(x)$, але суміжні хоча б з одним вузлом з $L_{i-1}(x)$. Ексцентриситет $l(x)$ вузла x стосовно структури рівнів називається довжиною $\Im(x)$, а ширина $w(x)$ структури $\Im(x)$ визначається як

$$w(x)=\max\{|L_i(x)|\,|0\le i\le l(x)\}.$$

Нехай $G=(V,X)$ - дерево. Оберемо в $G=(V,X)$ довільну вершину $v\in V$ і побудуємо кореневу структуру рівнів дерева $G=(V,X)$ з коренем в v (рис.11).

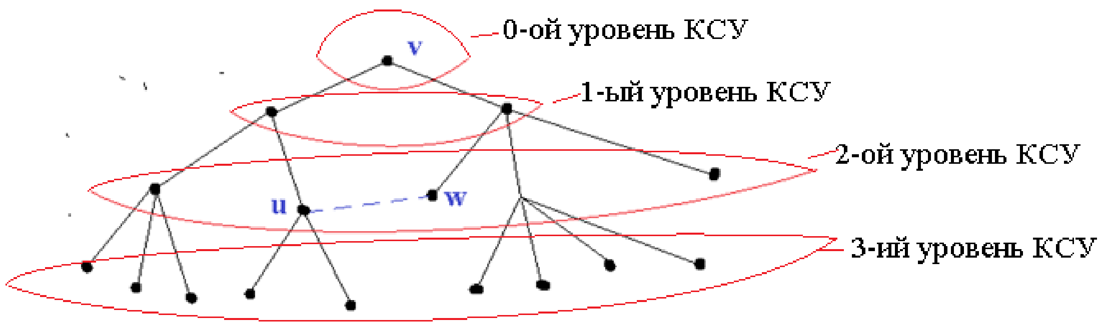


Рис.11.

При розгляді вершин будь-якого рівня мають місце наступні властивості: вершини одного рівня суміжні тільки з вершинами попереднього й наступного рівнів і не суміжні між собою, оскільки якби вершини одного рівня були суміжні, це привело б до існування простого циклу в $G=(V,X)$ (див. рис.11), що суперечить тому, що $G=(V,X)$ - дерево. Виходячи із цього, множину вершин V можна розбити на дві підмножини V_1 і V_2 наступним чином: в V_1 увійдуть вершини парних рівнів кореневої структури, а в V_1 - непарних рівнів, що й забезпечить двудольність дерева.

4. Ейлерови графи

Одним з видів зв'язного графа є ейлеров граф. *Ейлеров граф* – це граф, який має *ейлеров цикл* – замкнутий ланцюг, що містить всі вершини й всі ребра графа.

Твердження 7. Для зв'язного графа $G=(V,X)$ наступні твердження еквівалентні:

(1) $G=(V,X)$ - ейлеров граф;

(2) Будь-яка вершина графа $G=(V,X)$ має парний ступінь;

(3) Множину ребер графа $G=(V,X)$ можна розбити на прості цикли.

Доказ. Покажемо, що $(1)\Rightarrow(2)$. Нехай T - ейлеров цикл в $G=(V,X)$. Кожне проходження даної вершини в T вносить 2 у ступінь цієї вершини. І оскільки кожне ребро графа $G=(V,X)$ з'являється в T точно один раз, кожна вершина має парний ступінь.

Покажемо, що $(2)\Rightarrow(3)$. Оскільки $G=(V,X)$ - зв'язний і нетривіальний граф, то ступінь кожної вершини дорівнює принаймні 2, так що $G=(V,X)$ обов'язково містить простий цикл Z (оскільки у дереві є принаймні 2 висячі вершини). Видалення ребер циклу Z приводить до остовного підграфу G_1, у якому також кожна вершина має парний ступінь (оскільки простий цикл проходить через кожну зі своїх вершин усього один раз, кожній вершині циклу інцидентні рівно 2 ребра цього циклу, отже ступінь кожної вершини, через яку проходив цикл, зменшилася на 2). Якщо в G_1 немає ребер, то (3) уже доведено, інакше застосуємо вищеописану процедуру до G_1 і отримаємо граф G_2, у якому знову ступеня всіх вершин парні, і т.і. Одночасно із графом G_n (порожнім) одержуємо розбивку ребер графа $G=(V,X)$ на n простих циклів.

Завдання 3. Показати, що $(3)\Rightarrow(1)$.

5. Додаткові завдання для самостійного рішення

Завдання 4. Довести, що будь-яке дерево має центр, що складається або з однієї вершини, або із двох суміжних вершин (дим. Додаток Б).

Завдання 5. Довести, що будь-яке дерево має центроід, що складається або з однієї вершини, або із двох суміжних вершин (див. Додаток Б).

Завдання 6. Довести, що граф $G=(V,X)$ зв'язний тоді й тільки тоді, коли для будь-якої розбивки множини V на дві підмножини V_1 і V_2 існує ребро графа $G=(V,X)$, що з'єднує деяку вершину з V_1 с деякою вершиною з V_2.

Завдання 7. Показати, що якщо $G=(V,X)$ зв'язний, те він має одну компоненту зв'язності при його розкладанні на зв'язні компоненти.

Завдання 8. Довести, що якщо зі зв'язного графа $G=(V,X)$ видалити довільне ребро, що міститься в деякому простому циклі, то граф залишиться зв'язним.

Завдання 9. Довести, що у зв'язному графі $G=(V,X)$ будь-які два прості ланцюги максимальної довжини мають принаймні одну спільну вершину.

Завдання 10. Показати, що зв'язний граф $G=(V,X)$ з n вершинами містить не менше $n-1$ ребер.

Завдання 11. Показати, що в будь-якому зв'язному графі $G=(V,X)$, що має не менш двох вершин, знайдуться дві вершини з однаковими ступенями.

Література

1. Кобозєва, А.А. Аналіз захищеності інформаційних систем / А.А. Кобозєва, В.О. Хорошко, І.О. Мачалін. – К.: Вид. ДУІКТ, 2010. – 316 с.
2. Бондарчук Ю.В., Олійник Б.В. Основи дискретної математики: навч.посібник. Київ, 2007. 138 с. https://www.ukma.edu.ua/~bogd/Discrete%20Mathematics/PosibnykNew.pdf
3. Трохимчук Р. М. Теорія графів: Навч. посібник для студ. ф-ту кібернетики / Київський ун-т ім. Тараса Шевченка. — К.: РВЦ «Київський університет», 1998. https://www.studmed.ru/trohimchuk-rm-teorya-grafv_35e390f5170.html
4. Ніколаєва К.В., Койбічук В.В. Дискретний аналіз. Навчально-методичний посібник. – Суми: УАБС НБУ, 2007.– 84 с. https://essuir.sumdu.edu.ua/bitstream-download/123456789/50610/7/Nikolaieva_%20Dyskretnyi_analiz_2.pdf

Додаток А. Метод математичної індукції

Метод математичної індукції є важливим способом доказу теорем (тверджень), що залежать від натурального аргументу, і полягає в наступному.

Твердження *P(n)*, що залежить від натурального аргументу n, справедливо для будь-якого натурального n, якщо:

1. $P(n)$ є істинним твердженням для початкових значень n, наприклад при $n=1$, $n=2$, $n=3$;
2. Із припущення істинності $P(k)$, де $k<n$, випливає істинність $P(n)$.

Таким чином, при використанні методу математичної індукції доказ зводиться: до первісної перевірки істинності твердження $P(n)$ для початкових значень n; у випадку істинності твердження $P(n)$ для початкових значень n припускається, що вже доведено його істинність для $k<n$ *(припущення індукції)*; доводиться істинність $P(n)$ з урахуванням припущення індукції.

Приклад 1. Довести, що $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

Рішення. Для доказу застосуємо метод математичної індукції. Очевидно, що при $n=1$ дана рівність справедлива: $1=1^2$.

Припустимо, що вона справедлива при деякому k , тобто має місце:

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2 .$$

Доведемо, що тоді вона має місце й при $k+1$. Розглянемо відповідну суму при $n=k+1$:

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+(2k+1)=(k+1)^2 .$$

Таким чином, з умови, що ця рівність справедлива при k випливає, що вона справедлива й при $k+1$, тому вона справедлива при будь-якому натуральному n , що й було потрібно довести.

Приклад 2. Довести, що для $\forall n\in \mathrm{N}$:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Перевіримо істинність формули для початкових значень $n=1$: $1^2=\frac{1\cdot(1+1)(2+1)}{6}$ - істинно.

Припустимо, що для деякого k формула доведена, тобто

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Доведемо її істинність для $n=k+1$, з огляду на припущення індукції):

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6}=$$

$$=\frac{(k+1)(k(2k+1)+6(k+1))}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}=\left[\begin{array}{l}\textit{Розкладаємо квадратний}\\ \textit{тричлен на множники з}\\ \textit{врахуванням того,}\\ \textit{що його корні дорівнюють}\\ k_1=-2,\ k_2=-\frac{3}{2}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}.$$

що й було потрібно довести.

Приклад 3. Довести нерівність Бернуллі:

$$(1+\alpha)^n\geq 1+\alpha n\quad \forall n\in N,\forall\alpha>-1. \tag{1}$$

Для доказу (1) скористуємося методом математичної індукції:

Крок 1. Перевіримо, що (1) виконується для малих значень n, наприклад, $n=1$. Дійсно, якщо $n=1$, то (1) буде мати вигляд:

$$(1+\alpha)^1\overset{?}{\geq}1+\alpha\cdot 1,$$

і очевидно буде істинним.

Крок 2. Припустимо, що (1) вже доведене для деякого $n=k$, тобто вже доведено, що

$$(1+\alpha)^k\geq 1+\alpha k. \tag{2}$$

Крок 3. Покажемо, що, враховуючи (2), формула (1) має місце для $n=k+1$, тобто

$$(1+\alpha)^{k+1} \geq 1+\alpha(k+1). \tag{3}$$

Розглянемо детально $(1+\alpha)^{k+1}$:

$$(1+\alpha)^{k+1} = (1+\alpha)^{k}(1+\alpha) \overset{\textit{враховуючи припущення}\,(2)}{\geq} (1+\alpha k)(1+\alpha) \overset{\textit{розкриємо дужки}}{=}$$

$$= 1+\alpha k+\alpha+\alpha^{2}k \geq 1+\alpha k+\alpha = 1+\alpha(k+1)$$

що говоре про виконання (3) і доведення (1).

Додаток Б. Центри і центроіди графа

Нехай $G=(V,X)$ - неорієнтований зв'язний граф. *Ексцентриситетом* $e(v)$ вершини $v \in V$ називається

$$e(v)=\max_{u\in V} d(v,u),$$

де $d(v,u)$ - відстань між вершинами v і u.

Радіусом $r(G)$ графа $G=(V,X)$ називається найменший з ексцентриситетів його вершин:

$$r(G)=\min_{v\in V} e(v).$$

Діаметром $d(G)$ графа $G=(V,X)$ називається найбільший з ексцентриситетів його вершин:

$$d(G)=\max_{v\in V} e(v).$$

Вершина $v \in V$ називається *центральною* вершиною графа $G=(V,X)$, якщо її ексцентриситет дорівнює радіусу графа:

$$e(v)=r(G).$$

Центром графа $G=(V,X)$ називається множина всіх його центральних вершин.

Приклад 1. Для графа $G=(V,X)$, представленого на рис.Б.1, $r(G)=4$, $d(G)=7$, а центр графа представлений двома вершинами, що виділені на рисунку.

Гілка до вершини $v \in V$ дерева $G=(V,X)$ - це максимальне піддерево, що містить $v \in V$ як висячу вершину. Таким чином, число гілок до v дорівнює її ступеню $\deg(v)$.

Вага вершини $v \in V$ дерева $G=(V,X)$ - це найбільше число ребер по всіх гілках до v.

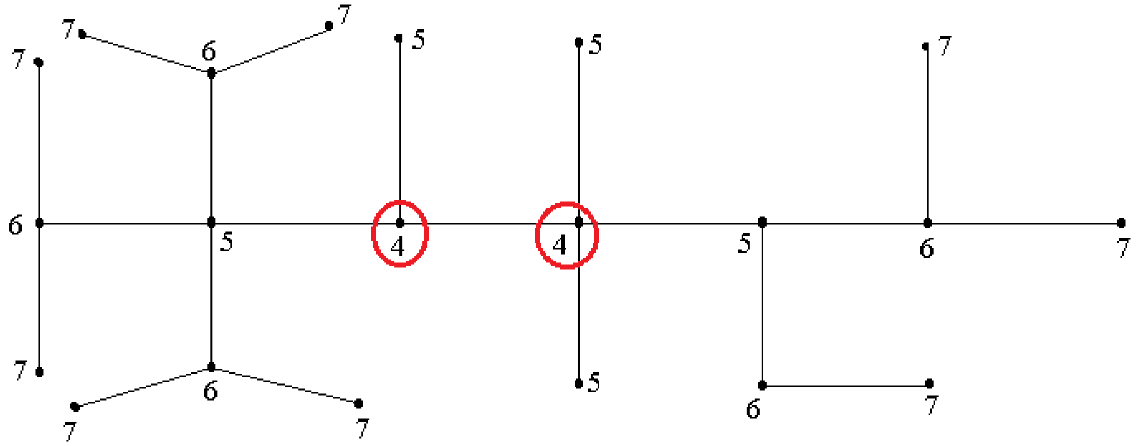


Рис.Б.1.

Приклад 2. Для дерева $G=(V,X)$, представленого на рис.Б.2, поруч із кожною вершиною представлена її вага.

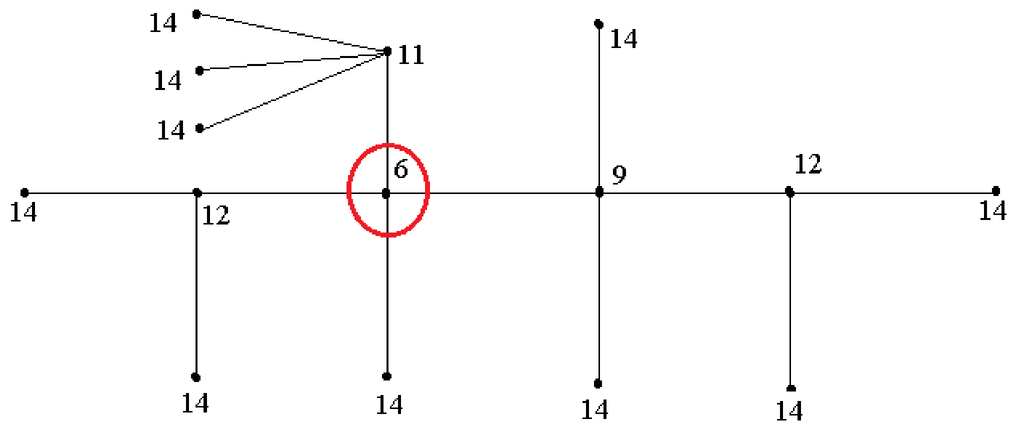


Рис.Б.2.

Вершина $v\in V$ називається *центроїдною* вершиною дерева $G=(V,X)$, якщо вона має найменшу вагу. *Центроїд* дерева $G=(V,X)$ складається із всіх таких вершин.

Для дерева, представленого на рис. Б.2, центроїд, що складається з однієї вершини з вагою 6, виділений.