

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”
Інститут комп'ютерних систем
Кафедра інформаційних систем

Теорія інформації та цифрова обробка сигналів

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до лабораторних робіт
(спеціальність 122 – «Комп'ютерні науки»)

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ “ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА”
Інститут комп'ютерних систем
Кафедра інформаційних систем

Теорія інформації та цифрова обробка сигналів

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до лабораторних робіт
(спеціальність 122 – «Комп'ютерні науки»)

Затверджено
на засіданні кафедри
інформаційних систем
Протокол № 1 от 30.08.22

Методичні вказівки до лабораторних робіт з дисципліни « Теорія інформації та цифрова обробка сигналів» для студентів всіх форм навчання інституту комп'ютерних систем (спеціальність 122 – «Комп'ютерні науки») / Укладач: Г.Ю.Щербакова – Одеса: НУОП, 2022. – 68 с.

Укладач: Щербакова Галина Юріївна,
д.т.н., професор

Лабораторна робота №1

Сигнали і характеристики сигналів

1. Мета лабораторного заняття

Вивчення методики обчислення і аналізу основних характеристик сигналів.

2 Вихідні дані

2.1 Набір початкових даних (додаток 1, таблиця Д1.1).

2.2 Умови проведення дослідження.

3 Зміст лабораторного заняття

3.1. Визначити інтервал часу T_0 , спільний для сигналів, котрий вміщує ціле число періодів сигналів $S_1(t)$ і $S_2(t)$. Мінімальна кількість періодів 3.

3.2. Побудувати графіки всіх промодельованих сигналів. Моделювання шуму проводити з допомогою функції *rand()*.

3.3. Для всіх сигналів знайти середнє, дисперсію, енергію, потужність.

3.4. Провести дослідження з урахуванням впливу завданих умов.

4 Основи розробки алгоритму і програмної реалізації

Сигнал — це інформаційна функція, яка несе сповіщення про фізичні властивості, стан чи поведінку якої-небудь фізичної системи, об'єкту або середовища. Метою обробки сигналів можна вважати виділення інформаційних відомостей, котрі відображені в цих сигналах (коротко — корисна або цільова інформація) і перетворення цих відомостей в форму, потрібну для сприйняття та подальшого використання.

Аналіз сигналів є одним з важливих моментів їх обробки. Він включає в себе три основних складових: вимірювання числових параметрів сигналів, розкладання сигналу на елементарні складові для того, щоб розглянути їх окремо або порівняти властивості різних сигналів, кількісне вимірювання ступеню «схожості» різних сигналів.

Сигнали **класифікуються**: по **фізичній природі носія інформації**: на *електромагнітні, електричні, акустичні, оптичні*; по **характеру сигналу**: *детерміновані (регулярні)* – котрі повторюються на завданому проміжку часу і можуть бути описані аналітичною функцією; *нерегулярні (випадкові)* – приймають довільні значення в будь-який момент часу (для опису таких сигналів використовують апарат теорії імовірностей; в **залежності від функції, що описує параметри сигналу**: *аналогові, дискретні, квантовані, цифрові* сигнали.

Однією з **ознак класифікації** сигналів, що істотно впливає на методи їх аналізу, є *періодичність*. Для періодичного сигналу з періодом T виконується співвідношення: $S(t + nT) = S(t)$, при будь-якому t , (де n – довільне ціле число).

Величина, обернена періоду, називається *частотою повторення сигналу*:

$$f = 1/T. \quad (1.1)$$

Часто використовують поняття кругової частоти (вимірюють її в радіанах на секунду) :

$$\omega = 2\pi f. \quad (1.2)$$

Важливу роль при обробці сигналів грають гармонійні коливання, котрі в загальному вигляді можна записати наступним чином: $S(t) = \cos(\omega t + \phi)$ чи

$$S(t) = \sin(\omega t + \phi). \quad (1.3)$$

Гармонический сигнал полностью определяется тремя числовыми параметрами: амплитудой A , частотой f и начальной фазой ϕ .

Приклад моделювання гармонійного сигналу (рис. 1.1):

```
clf(); // очищення графічного вікна
A = 0.5; // амплітуда
f = 3; // частота
step = 0.01; // крок дискретизації
t = 0: step:3/f; // вектор часу (час спостереження - 3 періоди сигналу).
S = A*sin(2*%pi*f*t); // генерація гармонійного сигналу
plot(t, S); // побудова графіку сигналу S
xlabel('Harmonic signal','t','S'); // додавання назв у графічному вікні
```

В даному прикладі початкова фаза ϕ равна 0. Час спостереження сигналу відповідає трьом його періодам. Період сигналу T , при частоті f буде $T = 1/f$.

Враховуючи це, вектор моментів часу можна завдати наступним чином:

$$t = 0:step:3*T,$$

що відповідає $t = 0:step:3/f$ ($step$ – крок дискретизації).

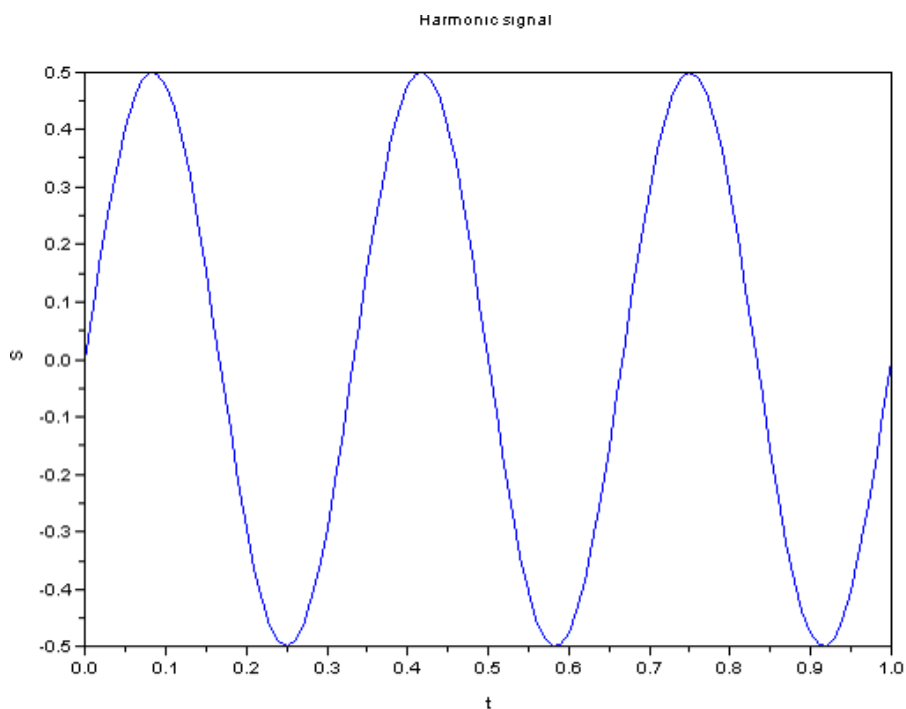


Рисунок 1.1 – Графічний вигляд гармонічного сигналу $S(t)$

Білим шумом (white noise) називають стаціонарний випадковий процес, спектральна щільність потужності котрого постійна на всіх частотах. Білий шум є абстрактною математичною моделлю і фізично існувати не може, оскільки в цьому випадку його потужність нескінченна. На практиці сигнал може бути білим шумом тільки в обмеженій полосі частот. Білий шум з нормальним розподілом можна згенерувати наступним чином (рис. 1.2):

```
noise = rand(t,'normal');           // генерація нормального білого шуму
plot(t,noise);
xlabel('White noise','t','Noise');
```

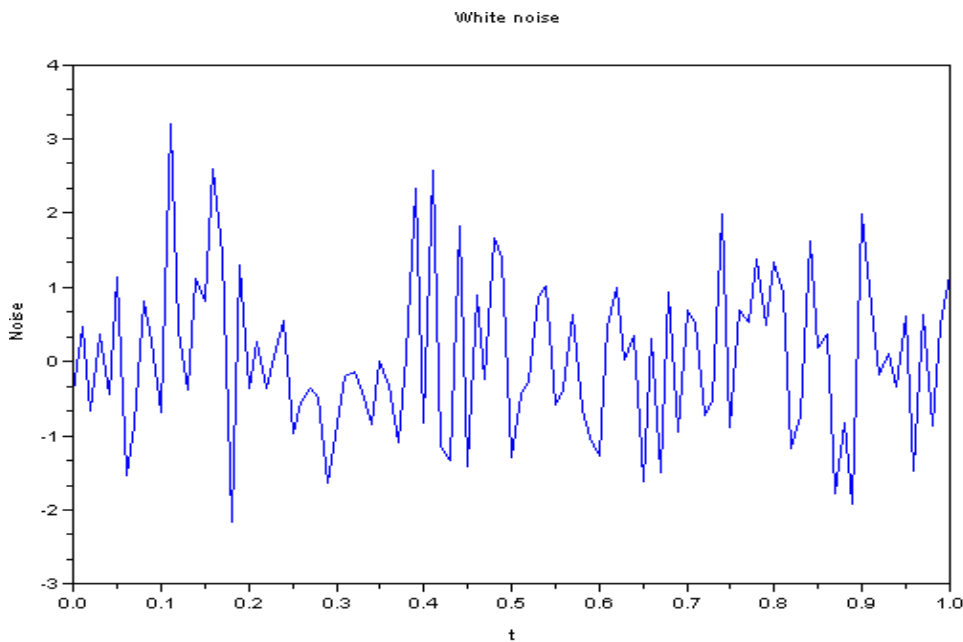


Рисунок 1.2 – Графічний вигляд білого шуму

На практиці, в якості кількісних параметрів сигналів використовують середнє значення, дисперсію, енергію і потужність сигналу. Коли всі імовірності f_i появ значень x_i дискретної випадкової величини X однакові ($f_i=1/n$, де n – кількість можливих значень випадкової величини), то математичне очікування дорівнює

$$m_x = M[X] = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad (1.4)$$

дисперсія визначається як:

$$D[X] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2. \quad (1.5)$$

незмінена оцінка дисперсії буде

$$D[X] = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)^2. \quad (1.6)$$

енергія сигналу

$$E = step * \sum_{i=1}^N x_i^2, \quad (1.7)$$

де $step$ – крок дискретизації; N – кількість відліків.

Середня потужність на інтервалі для дискретного сигналу

$$P = \frac{E}{N \cdot \text{step}} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N}. \quad (1.8)$$

При розрахунку кількісних параметрів сигналів необхідно розглядати їх на одному і тому ж інтервалі часу T_0 , котрий вміщує ціле число періодів обох сигналів $S_1(t)$ і $S_2(t)$. Наприклад, коли $f_1=0.6\text{Гц}$ і $f_2=1.3\text{Гц}$, то $T_1=1/f_1=10/6$ с, $T_2=1/f_2=10/13$ с. Хай на інтервалі T_0 вміщується ціле число m періодів сигналу $S_1(t)$ і ціле число k періодів сигналу $S_2(t)$. Тоді

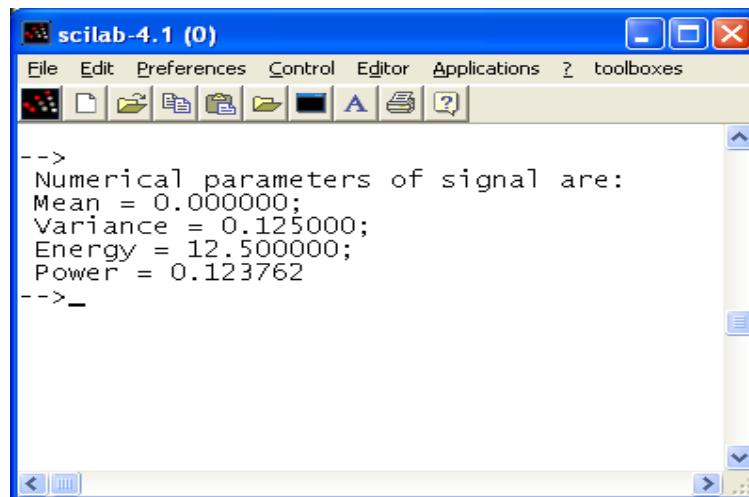
$$T_0 = m \cdot T_1 = k \cdot T_2 \quad \text{чи} \quad m \cdot 10/6 = k \cdot 10/13.$$

Отримуємо $m = (k \cdot 10/13) / (10/6) = k \cdot 6/13$. Зрозуміло, що для того, щоб m було цілим, k має дорівнювати 13. Тобто, отримуємо $k=13$, $m=6$, $T_0 = m \cdot 10/6 = 6 \cdot 10/6 = 10$ с. Відповідно, для розрахунку кількісних параметрів сигналів будемо розглядати ці сигнали на інтервалі від 0 до $T_0=10$ с.

В SciLab розрахунок параметрів сигналу можна провести, використовуючи функції [mean\(\)](#), [variance\(\)](#), [sum\(\)](#), [length\(\)](#) (рис. 1.3):

```
M = mean(S);           // середнє значення
D = variance(S);       // дисперсія
E = step*sum(S^2);     // енергія
P = E/(step*length(S)); // потужність
                        // можна розрахувати потужність по формулі
                        // P = sum(S^2)/length(S);
```

```
printf('\n Numerical parameters of signal are:\n Mean = %f;\n Variance = %f;\n Energy = %f;\n Power = %f\n",M,D,E,P); //Виводимо результат
```



```
scilab-4.1 (0)
File Edit Preferences Control Editor Applications ? toolboxes
-->
Numerical parameters of signal are:
Mean = 0.000000;
Variance = 0.125000;
Energy = 12.500000;
Power = 0.123762
-->_
```

Рисунок 1.3 – Результат розрахунку кількісних параметрів сигналу $S(t)$

5 Зміст звіту

Мета і стислий зміст роботи, результати розрахунків, висновки.

Контрольні запитання

1. Дати визначення математичного сподівання (дисперсії) сигналу.

2. Яким чином можна обчислити енергію сигналу?
3. Чому дорівнює потужність сигналу?
4. Яким чином можна обчислити період сигналу?

Література / 1-5 /.

Додаток 1. Параметри сигналів для дослідження.

Згідно з варіантом провести моделювання сигналів $S_1(t)$, $S_2(t)$, $S_3(t)$, $S_4(t)$, $S_5(t)$, параметри котрих наведені в таблиці Д 1.1:

$S_1(t)=A_1*\sin(2\pi f_1t)$; $S_2(t)=A_2*\sin(2\pi f_2t)$; $S_3(t)=S_1(t)+S_2(t)$; $S_4(t)$ – нормальний білий шум;
 $S_5(t)=S_3(t)+S_4(t)$.

Таблиця Д.1.1.

№ варіанта	A_1	A_2	$f_1, \text{Гц}$	$f_2, \text{Гц}$
1	0.6	1	3	2
2	0.7	1.2	4	6
3	0.8	2	5	4
4	0.9	1	6	2
5	1	0.5	7	3
6	2	0.8	8	5
7	3	2	9	2
8	0.4	1	4	1.5
9	0.8	0.7	2	7
10	0.5	0.1	2	5
11	4	1.5	10	4
12	5	3.5	11	5
13	6	4	12	8
14	7	3	20	5
15	8	5	4	12
16	9	4	5	15
17	10	3	6	12
18	11	5	3	8
19	0.7	1	1	4
20	0.3	2	2	0.5
21	0.8	0.2	4	1
22	0.2	0.3	6	2
23	0.5	1,1	3	9
24	25	15	5	4
25	7	6	8	3

Лабораторна робота №2

Періодичні сигнали та ряди Фур'є

1. Мета лабораторного заняття

Навчитися представляти періодичні сигнали рядом Фур'є і будувати амплітудну спектральну діаграму (лінійчатий амплітудний спектр). Навчитися розкладати періодичні сигнали за ортогональним базисом.

2 Вихідні дані

2.1 Набір початкових даних (додаток 2, таблиця Д2.1).

2.2 Умови проведення дослідження.

3 Зміст лабораторного заняття

3.1. Побудувати графіки сигналів s_1 і s_2 , представивши їх рядом Фур'є.

3.2. Сформувати ідеальний меандр, побудувати графік. Знайти помилку апроксимації ідеального меандру рядом Фур'є. Побудувати графік залежності помилки апроксимації від кількості гармонік.

3.3. Побудувати амплітудну спектральну діаграму сигналів s_1 і s_2 (лінійчатий амплітудний спектр).

3.4. Провести дослідження з урахуванням впливу завданих умов.

4 Основи розробки алгоритму і програмної реалізації

Завдання, які ми маємо виконати: побудувати графіки сигналів s_1 і s_2 (уявивши їх рядом Фур'є); сформувати ідеальний меандр, побудувати графік; знайти помилку апроксимації ідеального меандру рядом Фур'є; побудувати графік залежності помилки апроксимації від кількості гармонік; побудувати амплітудну спектральну діаграму сигналів s_1 і s_2 (лінійчатий амплітудний спектр). Відповідні теоретичні та практичні рекомендації до цього нададуться з використанням наступних прикладів. Розглянемо приклади розкладу декотрих видів періодичних сигналів в ряд Фур'є:

a) послідовність прямокутних імпульсів.

Для формування послідовності прямокутних імпульсів можна використовувати, наприклад, наступний програмний код на мові Scilab

```
t=-5:1/100:5;  
x=1+squarewave (t*%pi, 50);  
plot (t,x)
```

чи детальніше

```
n=4;// кількість імпульсів  
A=5;//амплітуда імпульсів  
T=2;//період імпульсов  
tau=0.8// довжина імпульсу  
dx=1/100;//крок дискретизації, dx=1/f - де f – частота дискретизації  
t=-floor(n/2)*T:dx:T*(floor((n+1)/2));// інтервал часу, на котрому задається //  
послідовність  
tpr=tau/T*100;//процент періоду, на якому //імпульс додатний  
x=A*(1+squarewave(t*2*%pi/T ,tpr))/2;
```

plot(t,x);

Зображення послідовності імпульсів, яку ми маємо отримати, надано на рис. 2.1, а.

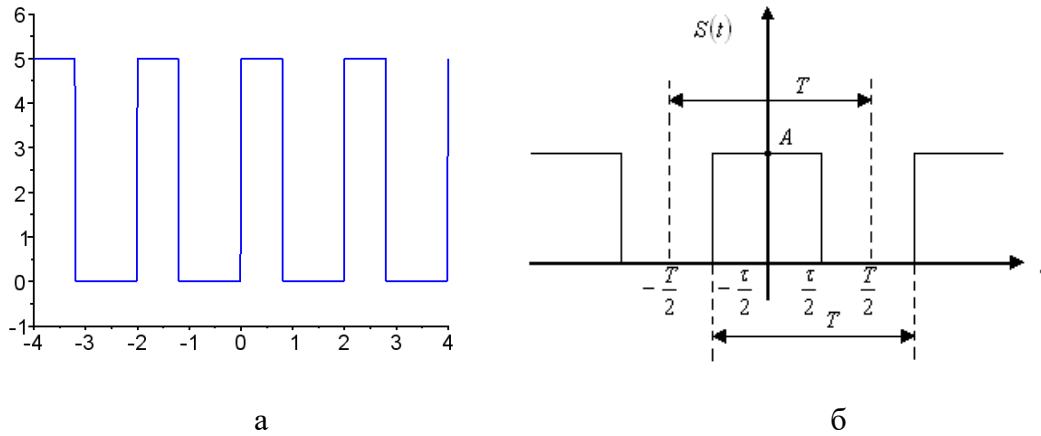


Рис 2.1. Послідовність прямокутних імпульсів.

Зауваження. Для формування послідовності імпульсів довільної форми (в тому числі прямокутної) можна використовувати функцію **pulstran** (див. розділ Help (довідка) в Scilab).

Розглянемо сигнал, який є парною функцією (рис. 2, б), для уявлення котрого використано **сінусно-косінусну форму** ряду Фур'є:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A \cos\left(\frac{2\pi k}{T} \cdot t\right) dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A \cos\left(\frac{2\pi k}{T} \cdot t\right) dt = \frac{2A}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k \tau}{T}\right). \quad (2.1)$$

Довжина імпульсів і період їх надходження входять в цю формулу у вигляді відношення, котре звуть **скважністю послідовності імпульсів**: $q = \frac{T}{\tau}$.

$$a_k = \frac{2A}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k}{q}\right) = \frac{2A}{q} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi k}{q}\right)}{\frac{\pi k}{q}}. \quad (2.2)$$

Значення постійної складової ряду з урахуванням $x \rightarrow 0, \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ буде

$$\frac{a_0}{2} = \frac{A}{q} = \frac{A\tau}{T}.$$

Уявлення послідовності прямокутних імпульсів у вигляді ряду Фур'є:

$$S(t) = \frac{A}{q} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2A}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k}{q}\right) \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right). \quad (2.3)$$

Побудуємо амплітудний спектр для цього ряду. Графік функції $\frac{\sin x}{x}$ має пелюстковий характер. Горизонтальну вісь розмічено в номерах гармонік і в частотах (рис. 3,а). Для розрахунку значень функції $\frac{\sin x}{x}$ в Scilab наявна функція *sinc(x)*, для побудови амплітудного спектру можна використовувати наступний програмний код:

```
A=1;//амплітуда прямокутного імпульсу //послідовності
T=2;//період імпульсів
tau=0.4// довжина імпульсу
q=T/tau;//скважність (в прикладі q=5)
N=3;// ширина частини спектру, що відображується
k=-N*q:N*q;//номери гармонік від -N*q до +N*q
ak=2*A/q*sinc(%pi*k/q);//амплітуди гармонік
plot2d3(k,abs(ak));//побудова амплітудного спектру //послідовності
plot2d(k,abs(ak));//побудова огинаючої модулю //амплітудного спектру
```

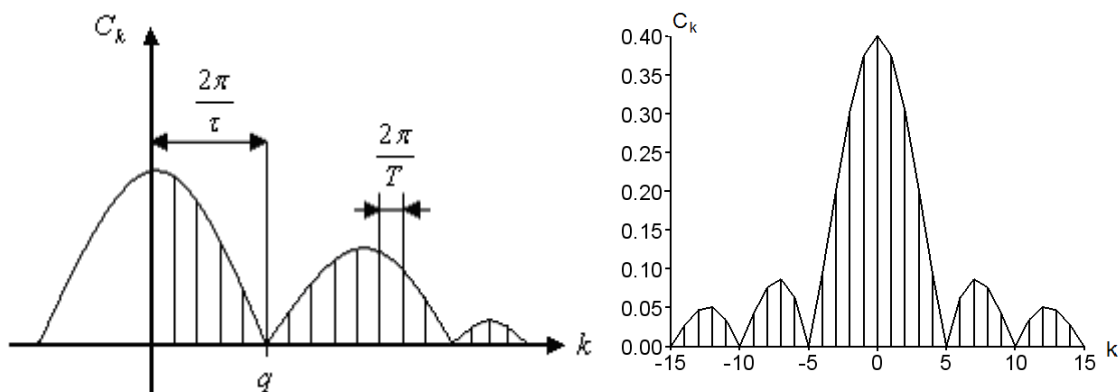


Рисунок 2.2 Коефіцієнти ряду Фур'є для послідовності прямокутних імпульсів

Ширина пелюстків, яку вимірюють в кількості гармонік, дорівнює скважності (при $k = nq$, отримуємо $\sin \frac{\pi k}{q} = 0$, коли $n \neq 0$). Звідси випливає важлива властивість спектру послідовності прямокутних імпульсів – в ньому **відсутні гармоніки з номерами, які кратні скважності**. Відстань по частоті між сусідніми гармоніками дорівнює круговій частоті надходження імпульсів $\frac{2\pi}{T}$. Ширина пелюстків, яку можна виміряти в одиницях кругової частоти, дорівнює $\frac{2\pi}{\tau}$, тобто вона обернено пропорційна довжині сигналу. Можна зробити висновок: **коротший імпульс надає ширший спектр**.

Кількість складових в ряді Фур'є вирає істотну роль в наближенні послідовності імпульсів (рис. 2.3). Наступний фрагмент програмного коду може дозволити побачити, як саме впливає кількість гармонік, які ми враховуємо, на форму імпульсів.

```
A=1;//амплітуда прямокутного імпульсу //послідовності
T=2;//період імпульсів
tau=0.8// довжина імпульсу
q=T/tau;//скважність
N=12;//максимальний номер гармоніки
```

```

k=0:N;//номера гармонік від 1 до +N
ak=2*A/q*sinc(%pi*k/q);//амплітуди гармонік з номерами //від 1 до N
ak(1)=ak(1)/2;//амплітуда нульової гармоніки - //постійна складова
t=0:0.001:10;//вектор моментів часу розмірності //[1*Nt]
harmonics=cos(2*%pi*k*t/T);//розрахунок значень всіх // гармонік в кожен момент
      часу t (з //амплітудою, що дорівнює 1)
z1=harmonics.*repmat(ak',1,length(t));// розрахунок значень всіх // гармонік в кожен
      момент часу t (з // істинною амплітудою)
zt=cumsum(z1,1);// розрахунок наближення послідовності //рядом з набором гармонік.
      // z1 - матриця [(N+1)*Nt], в кожному //рядку якої Nt значень
      ряду, // що наближає вихідну //послідовність відповідною
      //кількістю гармонік (наприклад, для // 3 рядка враховуються
      0-а, 1-а //і 2-а гармоніки, для 6-го рядка// враховуються
      гармоніки з 0-ї по 5-у і т.д.)

xset('window',1);
for k1=1:N
    subplot(floor(N/2)+1,k1,plot(t,zt(k1,:)));// побудова на графіку наближення
//послідовності рядом з різною кількістю //складових (верхній рисунок зліва - тільки 0-
а //гармоніка, верхній справа - 0-а і 1-а, ..., справа // знизу - гармоніки від 0-ї до 11-ї)
end;

```

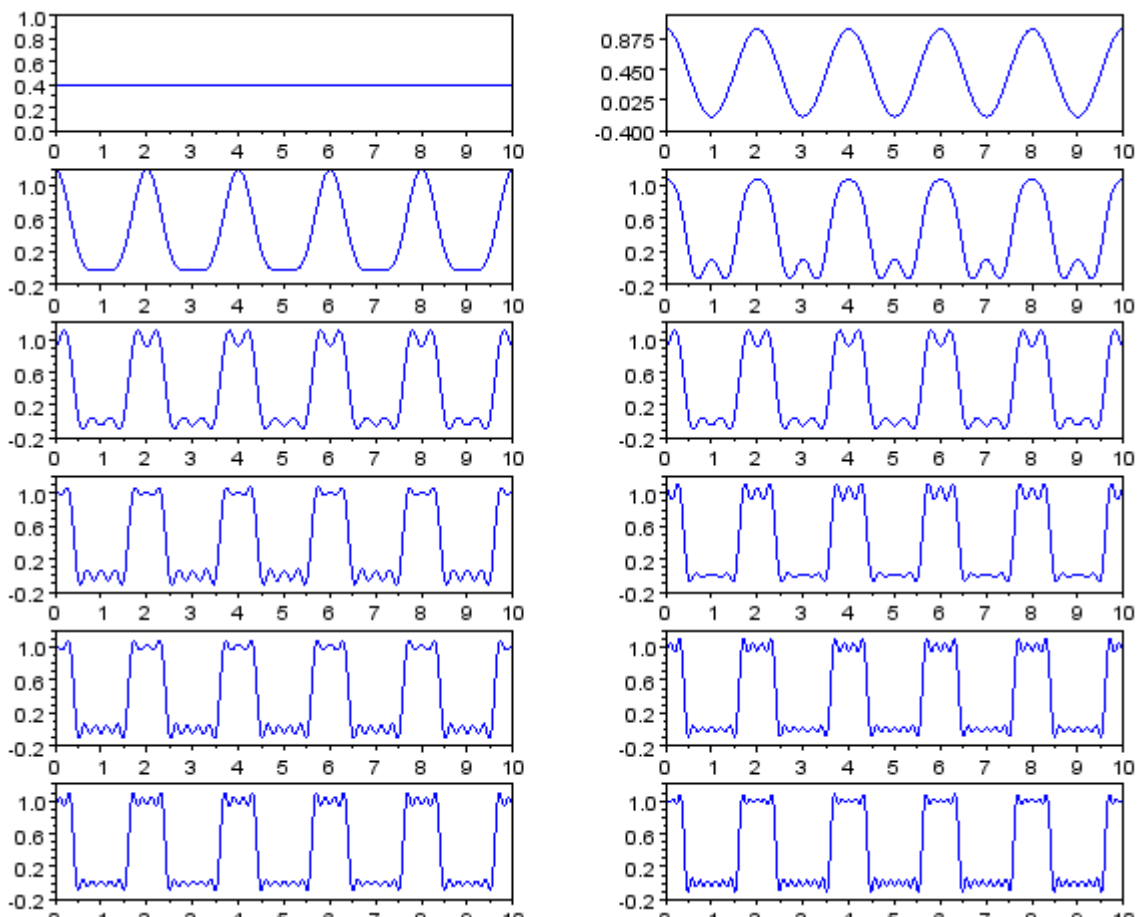


Рисунок 2.3. Послідовність прямокутних імпульсів, надана рядом Фур'є з різною кількістю гармонік

Узагальнений ряд Фур'є складається з нескінченної кількості членів. На практиці це не завжди потрібно, тому ряд обмежують числом членів N . Це призводить до **помилки апроксимації**: $\xi(t) = S(t) - \sum_{k=1}^N C_k \varphi_k(t)$. Зазвичай розглядають норму помилки

$$\|\xi\| = \sqrt{\int_T |\xi(t)|^2 dt}. \quad (2.4)$$

Обчислимо помилку апроксимації (2.4) послідовності прямокутних імпульсів рядом Фур'є. Це буде залежати від кількості гармонічних складових. Ураховуючи періодичність послідовності, доцільно знайти помилку на інтервалі періоду $[-T/2, +T/2]$. Нижче наведений програмний код. Цей код може дозволити виконати розкладання в ряд послідовності прямокутних імпульсів та обчислити похибку апроксимації.

```
A=5;//амплітуда імпульсів
T=2;//період імпульсів
tau=0.8// довжина імпульсу
dx=1/1000;//крок дискретизації, dx=1/f - де f - частота //дискретизації
t=-T/2:dx:T/2;//часовий інтервал, на котрому задається //послідовність
tpr=tau/T*100;//процент періоду, під час котрого //імпульс додатний
x=A*(1+squarewave((t+tau/2)*2*pi/T ,tpr))/2; // побудова парної послідовності
xset('window',0);
plot(t,x);
q=T/tau;//скважність
N=21;//максимальний номер гармоніки
k=0:N;//номера гармонік від 0 до N
ak=2*A/q*sinc(pi*k/q);//амплітуди гармонік з номерами //від 1 до N
ak(1)=ak(1)/2;//амплітуда нульової гармоніки - //постійна складова
harmonics=cos(2*pi*k*t/T);//розрахунок значень всіх //гармонік в кожен момент
часу t (з амплітудою, // яка дорівнює 1)
z1=harmonics.*repmat(ak',1,length(t));//розрахунок значень //всіх гармонік в кожен
момент часу t з істинною //амплітудою
zt=cumsum(z1,1);// розрахунок приближення послідовності //рядом, який складається з
набору гармонік. z1 - матриця //(N+1)*Nt, в кожному рядку Nt значень ряду, що
//приближає вихідну послідовність // відповідною кількістю гармонік (наприклад, для
//3 рядка враховують 0-у, 1-у і 2-у гармоніки, //для 6-го рядка враховують гармоніки з 0-ї
і по 5-у і //т.д.)
ksi=sqrt(sum((zt-(repmat(x',1,(N+1))))).^2,2)*dx)/A*100;
//розрахунок погрішності апроксимації в % від амплітуди //імпульсу
xset('window',1);
plot(k,ksi);xgrid;//побудова графіку погрішності
```

Результати представлені на рис. 2.4. Як можна побачити, зі зростанням кількості гармонік похибка апроксимації зменшується. В послідовності прямокутних імпульсів є різкі зміни амплітуди, тому вона не дуже добре апроксимується рядом Фур'є (ми ж пам'ятаємо про умови Дирихле з першої лекції?). В околі точок розриву вихідної послідовності на графіку суми ряду Фур'є (рис. 2.4,б) можна побачити пульсації, їх амплітуда практично не змінюється з зростанням кількості гармонік, але при цьому пульсації зжимаються по горизонталі, наближаючись до точки розриву. Це явище зветься ефектом Гиббса.

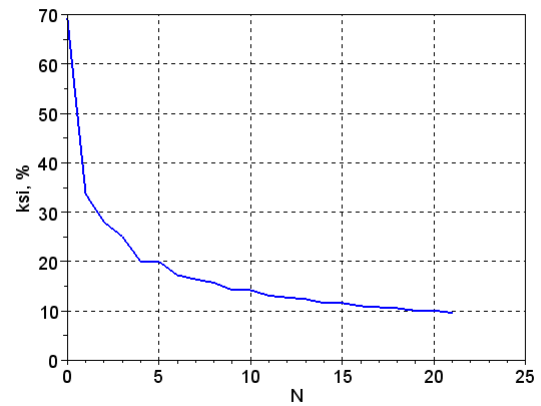
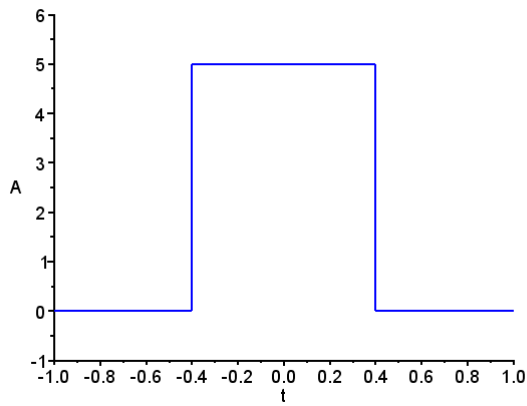


Рисунок 2.4

б) пилкоподібний сигнал. Загальний вигляд пилкоподібного сигналу наведений на рисунку 2.5.

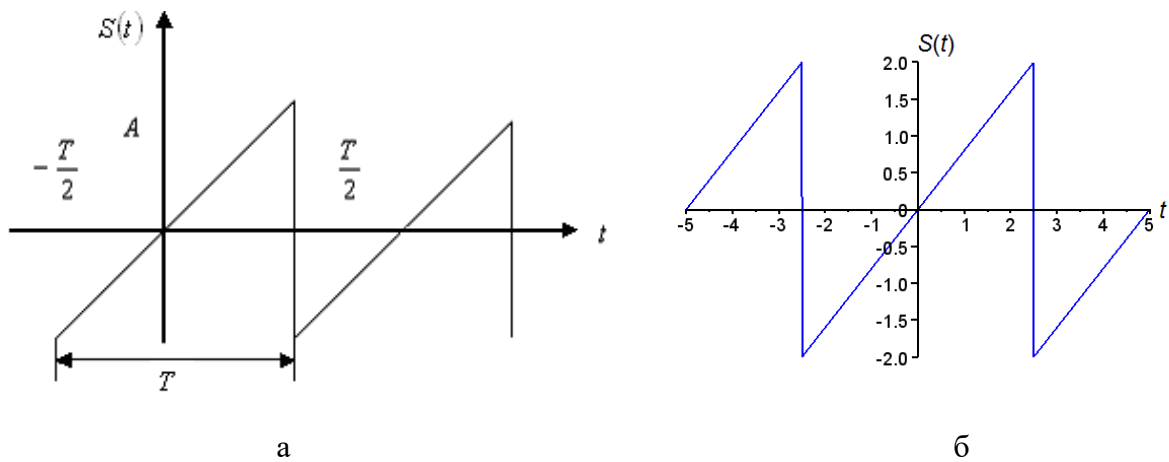


Рисунок 2.5. Пилкоподібний сигнал: а – загальний вигляд; б – пилкоподібний сигнал, що побудований засобами Scilab

Пилкоподібний сигнал в межах періоду описується лінійною функцією

$$S(t) = \frac{2A}{T}(t - nT), \left(n - \frac{1}{2}\right) \cdot T < t \leq \left(n + \frac{1}{2}\right) \cdot T, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots (5)$$

Для побудови пилкоподібного сигналу в Scilab можна використати функцію **sawtooth**. (Зауважимо - для коректної роботи функції необхідно встановити бібліотеку Time-Frequency Toolbox).

```
A=2;//амплітуда
T=5;//період
dt=0.001 //крок дискретизації
n=-1:dt:1; //інтервал часу
s=A*sawtooth((n-T/2)*2*%pi);//розрахунок пилкоподібного //сигналу
plot(T*n,s);//Побудова графіку сигналу
```

Альтернативний варіант - функція **sawtooth1** (використовувати в основному тексті програми замість оператора **sawtooth**)

```
function y=sawtooth1(t, width)
[nargout,nargin]=argn(0);
```

```

if (nargin < 1 | nargin > 2)
error ("At least one parameter needed!");
end
if (nargin == 1)
width = 1;
else
if (width < 0 | width > 1 | ~isreal (width))
error ("width must be a real number between 0 and 1.");
end
end
t = pmodulo (t / (2 * %pi), 1);
y = mtlb_zeros (size (t));
if (width ~= 0)
y (t < width) = 2 * t (t < width) / width - 1;
end
if (width ~= 1)
y (t >= width) = -2 * (t (t >= width) - width) / (1 - width) + 1;
end
endfunction;
xgrid

```

Результати розрахунку представлені на рис. 2.5, б.

Сигнал, що розглядається, є непарною функцією, тому його ряд Фур'є в синусно-косинусній формі утримує тільки синусні складові:

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{2A}{T} t \cdot \sin\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) dt = -\frac{2A}{\pi k} (-1)^k. \quad (6)$$

Ряд Фур'є пилкоподібного сигналу має вигляд:

$$S(t) = \frac{2A}{\pi} \left(\sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) - \frac{1}{2} \sin\left(2 \frac{2\pi}{T} t\right) + \frac{1}{3} \sin\left(3 \frac{2\pi}{T} t\right) - \frac{1}{4} \sin\left(4 \frac{2\pi}{T} t\right) + \dots \right). \quad (7)$$

Для спектрів прямокутного і пилкоподібного сигналів характерно, що амплітуди гармонік зі зростанням їхніх номерів **зменшуються пропорційно** номеру k .

5 Зміст звіту

Мета і стислий зміст роботи, результати розрахунків, висновки.

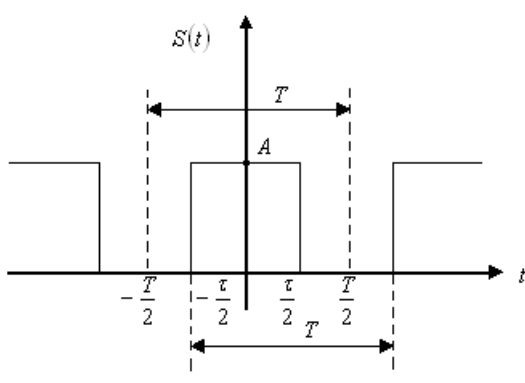
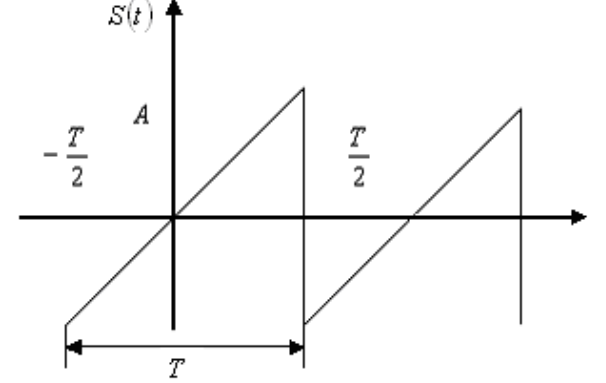
Контрольні запитання

1. Дати визначення скважності сигналу.
2. Яким чином можна обчислити помилку апроксимації рядом Фур'є?
3. Як виглядає послідовність імпульсів, надана рядом Фур'є з різною кількістю гармонік?
4. Яким чином можна обчислити амплітудний спектр?

Література / 1-5 /.

Додаток 2. Уявіть періодичні найпростіші гармонійні сигнали рядом Фур'є, параметри сигналів наведені в табл. Д.2.1: тривалість періоду T розрахувати за значенням частоти повторювання f , величину $\tau < T$ тривалості імпульсу меандра вибрати самостійно.

Таблиця Д.2.1.

№ Вар	Парний меандр $s_1(t)$		Пила $s_2(t)$	
				
	<i>Амплітуда A</i>	<i>Частота f, Гц</i>	<i>Амплітуда A</i>	<i>Частота f, Гц</i>
1	10	1/4	0,4	1/16
2	5	1/16	0,2	1/64
3	15	1/5	0,7	1/4
4	3	1/8	1	1/14
5	8	1/2	0,6	1/5
6	7	1/14	0,8	1/32
7	16	1/48	0,9	1/2
8	9	1/3	0,5	1/4
9	7	1/5	0,3	1/14
10	6	1/4	0,6	1/16
11	5	1	10	100
12	4	2	20	200
13	3	4	30	250
14	2	5	40	400
15	10	8	50	500
16	20	10	60	10
17	30	20	70	20
18	40	40	80	40
19	50	50	90	50
20	60	80	100	80
21	70	100	110	20
22	80	200	5	40
23	90	250	4	50

Лабораторна робота № 3

Перетворення Фур'є

1. Мета лабораторного заняття

Оволодіти навичками проведення дискретизації безперервних сигналів і визначення їх характеристик.

2 Вихідні дані

2.1 Набір початкових даних (додаток 3, таблиця ДЗ.1).

2.2 Умови проведення дослідження.

3 Зміст лабораторного заняття

3.1. Провести моделювання з побудовою графіку безперервного сигналу.

3.2. Знайти спектр сигналу, помножити на завданий коефіцієнт спектральну амплітуду.

3.3. Виконати обернене перетворення Фур'є отриманого спектра сигналу.

3.4. Провести дослідження з урахуванням впливу завданих умов.

4 Основи розробки алгоритму і програмної реалізації

Під властивостями перетворення Фур'є розуміють взаємну відповідність трансформації сигналів і їх спектрів. Розглянемо два сигнали $f(t)$ і $g(t)$ та їх спектральні функції $\dot{F}(\omega)$, $\dot{G}(\omega)$. Сформулюємо основні властивості перетворення Фур'є.

1. Лінійність.

$$S(t) = \alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t); \quad \dot{S}(\omega) = \alpha \cdot \dot{F}(\omega) + \beta \cdot \dot{G}(\omega). \quad (3.1)$$

2. Затримка.

$$S(t) = f(t - \tau),$$

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) e^{-j\omega(t - \tau)} d(t - \tau) e^{-j\omega\tau} = \dot{F}(\omega) e^{-j\omega\tau} \quad (3.2)$$

(спектр вихідного сигналу помножується на $e^{-j\omega\tau}$). Тобто **амплітудний спектр сигналів не змінюється**, а фазовий спектр отримує додаткову складову $-\omega\tau$, котра лінійно залежить від частоти.

3. Зменення масштабу в часі.

Відомо, що **чим коротший сигнал, тим ширший його спектр**:

$$S(t) = f(\alpha \cdot t), \quad (3.3)$$

тобто при $\alpha > 1$ – сигнал стискається, при $\alpha < 1$ – сигнал розтягується, при $\alpha < 0$ – відбувається дзеркальне відображення сигналу відносно OY .

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t) e^{\frac{-j\omega}{\alpha} \alpha t} d(\alpha t) = \frac{1}{\alpha} \dot{F}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right). \quad (3.4)$$

Зміна довжини сигналу призводить до зміни ширини спектра в протилежний бік $\left(t \cdot \alpha \rightarrow \frac{\omega}{\alpha}\right)$ одночасно зі збільшенням ($\alpha < 1$) чи зменшенням ($\alpha > 1$) рівня спектральних складових. Коли $\alpha < 0$, то $t \rightarrow \alpha t$ викликає перестановку меж інтегрування і несе за собою зміну знака у результаті:

$$\dot{S}(\omega) = -\frac{1}{\alpha} \dot{S}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right); \quad \alpha < 0$$

чи в загальному випадку:

$$\dot{S}(\omega) = \frac{1}{|\alpha|} \dot{S}\left(\frac{\omega}{\alpha}\right); \quad \alpha \neq 0, \quad (3.5)$$

при $\alpha = -1$ $\dot{S}(\omega) = \dot{F}(-\omega) = \dot{F}^*(\omega)$.

4. Диференціювання сигналу.

Скористуємося поняттям *похідної*:

$$S(t) = \frac{df}{dt} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{f(t + \xi) - f(t)}{\xi}, \quad (3.6)$$

тоді

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{f(t + \xi) - f(t)}{\xi} e^{-j\omega t} dt = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\dot{F}(\omega) e^{j\omega\xi} - \dot{F}(\omega)}{\xi} = \dot{F}(\omega) \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{e^{j\omega\xi} - 1}{\xi} = j\omega \dot{F}(\omega), \quad (3.7)$$

де $j\omega$ – оператор диференціювання в частотній області.

При диференціюванні спектр отримується шляхом множення вихідного сигналу на $j\omega$. Фазовий спектр зсувається на 90° для $\omega > 0$ і на -90° для $\omega < 0$. При диференціюванні *низькі частоти слабшають, а високі – посилюються*.

5. Інтегрування сигналу.

Інтегрування сигналу – операція обернена щодо диференціюванню:

$$\dot{S}(\omega) = \frac{\dot{F}(\omega)}{j\omega}. \quad (3.8)$$

Для сигналів без постійної складової:

$$\dot{F}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 0, \quad (3.9)$$

інакше:

$$\dot{S}(\omega) = \frac{\dot{F}(\omega)}{j\omega} + \pi \dot{F}(0) \delta(\omega), \quad (3.10)$$

де $\frac{1}{j\omega}$ – оператор інтегрування, $\delta(\omega)$ – дельта-функція.

При інтегруванні *високі частоти слабшають, а низькі – посилюються*. Фазовий спектр зсувається на 90° для $\omega < 0$ і на -90° для $\omega > 0$.

6. Спектр згортки сигналів.

Згортка сигналів часто використовувана операція, вона описує проходження сигналу через лінійну систему з постійними параметрами:

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t')g(t-t')dt'. \quad (3.11)$$

Після перетворення Фур'є:

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t')g(t-t')dt'e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t')e^{-j\omega t'} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(t-t')e^{-j\omega(t-t')}d(t-t')dt' = \\ &= \dot{F}(\omega) \cdot \dot{G}(\omega) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Спектр згортки двох сигналів дорівнює добутку спектрів цих сигналів.

7. Спектр добутку сигналів.

Хай

$$S(t) = f(t) \cdot g(t), \quad (3.13)$$

тоді:

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega')e^{-j\omega t'} d\omega' \right) g(t)e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{F}(\omega') \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j(\omega-\omega')t} dt d\omega' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{F}(\omega') \cdot \dot{G}(\omega-\omega') d\omega' \end{aligned} \quad (3.14)$$

Спектр добутку двох сигналів являє собою *згортку спектрів* цих сигналів.

8. Множення сигналу на гармонічну функцію.

Помножимо вихідний сигнал, спектр якого відомий, на *гармонічну функцію*:

$$S(t) = f(t) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (3.15)$$

Тоді:

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\omega t + \varphi) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{e^{j\omega t + j\varphi} + e^{-j\omega t - j\varphi}}{2} e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\varphi} e^{-j(\omega-\omega_0)t} dt = \frac{1}{2} e^{j\varphi} \dot{F}(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2} e^{-j\varphi} \dot{F}(\omega+\omega_0). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Тобто спектр «роздвоївся»: розділився на два доданки в два рази меншого рівня (множник $\frac{1}{2}$), зміщених на Ω_0 вправо: $\Omega - \Omega_0$ та вліво: $\Omega + \Omega_0$ по вісі частот. Крім того, при кожному доданку наявний множник, який враховує початкову фазу гармонічного коливання.

9. Зв'язок перетворення Фур'є і коефіцієнтів ряду Фур'є.

Хай $S(t)$ – сигнал кончевої довжини, а $S(\omega)$ – його спектральна функція. Отримуємо на основі $S(t)$ періодичний сигнал, з періодом повторення T не менше довжини сигналу:

$$S_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(t - kT). \quad (3.17)$$

Таким чином, між спектральною функцією $S(\omega)$ одиночного імпульсу і коефіцієнтами C_k ряду Фур'є для періодичної послідовності таких імпульсів існує зв'язок:

$$C_k = \frac{1}{T} \dot{S}\left(\frac{2\pi k}{T}\right). \quad (3.18)$$

Приклад розрахунку перетворення Фур'є для прямокутного імпульсу з центром у початку координат (рис. 3.1, а)

$$S(t) = \begin{cases} A & \text{при } -\tau/2 \leq t \leq \tau/2, \\ 0 & \text{при } t < -\tau/2 \text{ и } t > \tau/2. \end{cases} \quad (3.19)$$

Спектральна щільність такого сигналу

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j\omega t} dt = \frac{A}{-j\omega} \left(e^{-\frac{j\omega\tau}{2}} - e^{\frac{j\omega\tau}{2}} \right) = \frac{2A}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = A\tau \left[\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \right]. \quad (3.20)$$

Спектр представляє собою функцію виду $|\text{sinc}(x)| = |\sin(x)/x|$ (рис. 3.1, в). Амплітудний спектр має пелюстковий характер, і ширина пелюстка равна $2\pi/\tau$. Розглянемо пелюстковий імпульс, з затримкою на $\tau/2$, з тією ж амплітудою і довжиною (рис. 2.11, б).

$$S(t) = \begin{cases} A & \text{при } 0 \leq t \leq \tau, \\ 0 & \text{при } t < 0 \text{ и } t > \tau. \end{cases} \quad (3.21)$$

З урахуванням властивості затримки перетворення Фур'є спектральна щільність імпульсу з затримкою буде

$$\dot{S}(\omega) = A\tau \left[\frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \right] e^{-j\frac{\omega\tau}{2}}. \quad (3.22)$$

Графік амплітудного спектру і фазовий спектр імпульсу з затримкою наведені на рис. 3.1 д, е. Після зсуву імпульсу в часі його амплітудний спектр лишився без змін, а фазовий отримав зсув, що лінійно залежить від частоти.

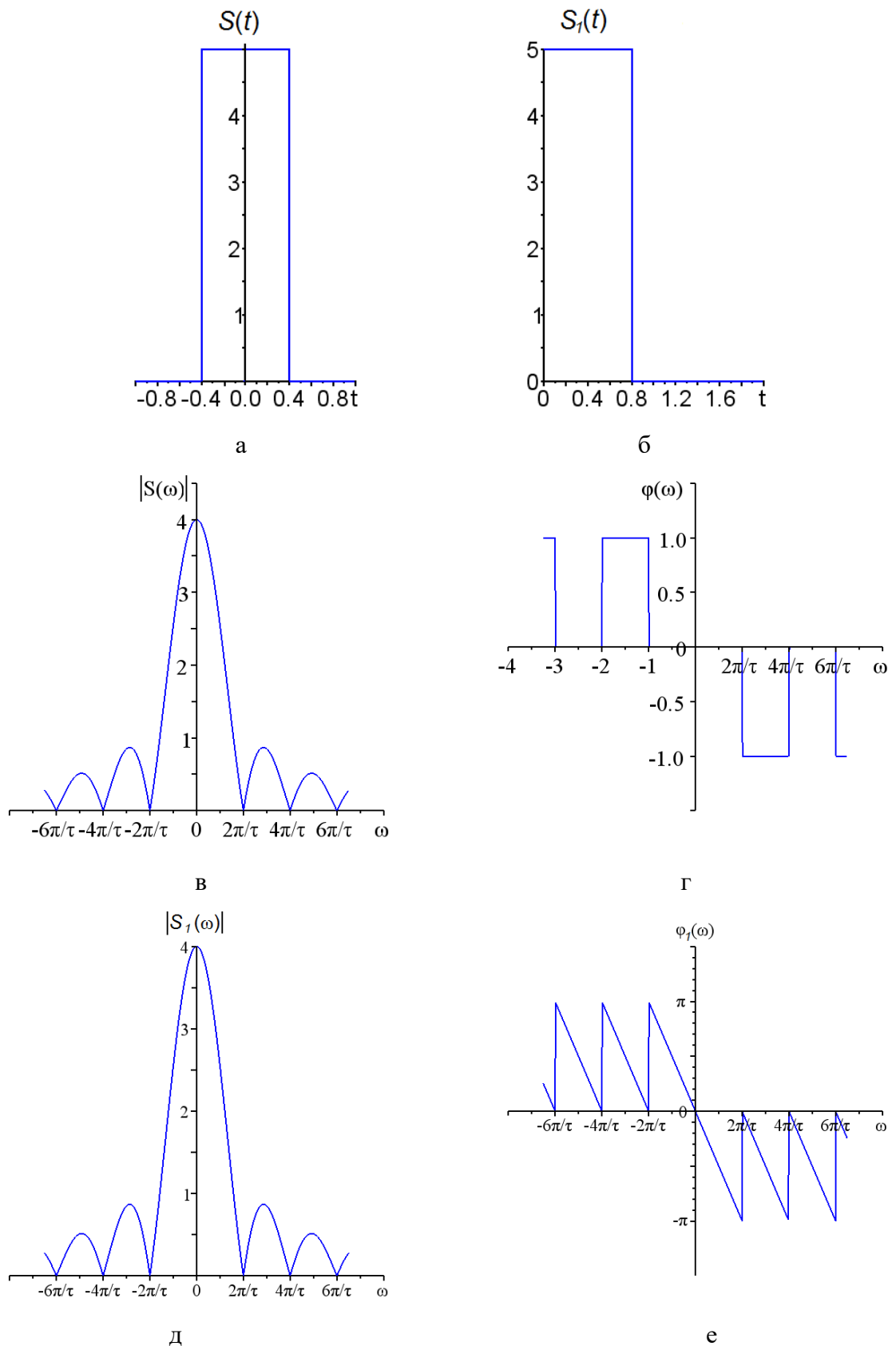


Рисунок 3.1 – Різні імпульси та їхні спектри

а) – прямокутний імпульс; б) – прямокутний імпульс з затримкою в часі; в) – амплітудний і г) – фазовий спектри прямокутного імпульсу; д) – амплітудний і е) – фазовий спектри прямокутний імпульс з затримкою в часі.

Приклади програмної реалізації:

Для отримання ДПФ використана функція Scilab **fft** чи **fftw**, яка виконує дискретне перетворення Фур'є по швидким алгоритмам (Fast Fourier Transform, FFT). Виклик функції може здійснюватись у вигляді **fft(s)** чи **fft(s,-1)**, де **s** – сигнал, який піддається аналізу. Обернене перетворення Фур'є здійснюється функцією **ifft(x)** чи **ifft(x,1)**. Для забезпечення високої продуктивності перетворення Фур'є кількість відліків у сигналі, який піддається аналізу, має бути 2^n , де n – ціле додатне число. Замість **fft** може використовуватись функція **fftw**. В Scilab є також функція **dft**, що виконує розрахунок дискретного перетворення Фур'є з використанням матриці ДПФ. Синтаксис виклику цієї функції **x=dft(s,-1)** – пряме ДПФ, **s=dft(x,1)** – обернене ДПФ. Дана функція працює повільніше, ала кількість відліків сигналу для неї може бути довільним. В Scilab можна також користуватись функцією **mtlb_fft(s,NFFT)**, котра дозволяє для збільшення швидкодії додавати до відліків сигналів нулі до найближчого більшого ступеню двійки ($NFFT=2^n$). Розглянемо приклад використання перетворення Фур'є.

```
dt=1/100;          // Частота дискретизації
t = 0:dt:30;      // Вектор часу
N = 30;           // Довжина сигналу
t = 0:dt:N;       // Вектор часу
// *** параметри сигналу
A=10;            // Амплітуда сигналу
T=7;             //
f=1 ./ %pi;      // частота синусоїдальної складової сигналу
K=8;             //
s = A .*exp(-t ./T) .*sin(2 .*%pi .*f .*t); // вихідний сигнал
xset('window', 0);
subplot(1,2,1);
plot2d(t,s);          // вивід сигналу
title('Вихідний сигнал');
xlabel('час (секунды)');
y=fft(s);           //Амплітудний спектр
subplot(1,2,2);
plot2d(abs(y));      // вивід спектру
title('амплітудний спектр, вихідного сигналу');
xlabel('Частота, Гц');
```

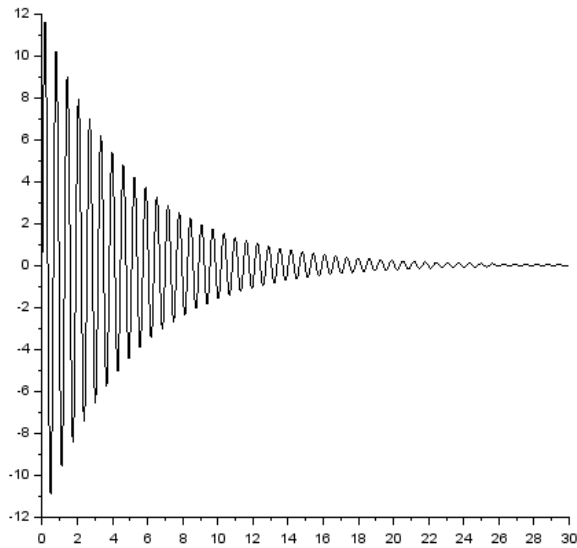
Обернене перетворення Фур'є:

```
y1 = K * y;
xset('window', 1);
subplot(1,2,1);
plot2d(abs(y1));     // вивід спектру
title('Спектр перетвореного сигналу');
xlabel('Частота, Гц');
C=2*1/dt/T;         // Поправочний коефіцієнт.
subplot(1,2,2);
plot2d(C*abs(y1));
title('Спектр перетвореного сигналу ');
xlabel('Частота, Гц');
```

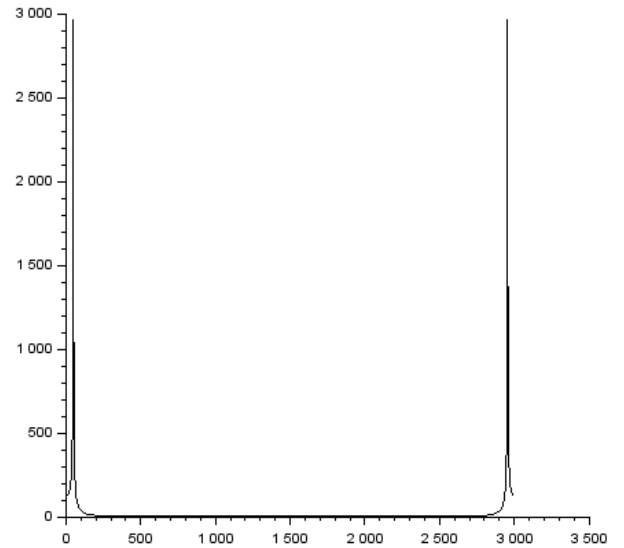
```

xset('window', 2);
ss = ifft(y1);                                // Обернене перетворення Фур'є
plot2d(t,ss);                                 // вивід перетвореного сигналу
title('Результат оберненого перетворення Фур'є');
xlabel('час (секунди)');

```



а



в

Рисунок 3.2. а – сигнал, в – спектр сигналу.

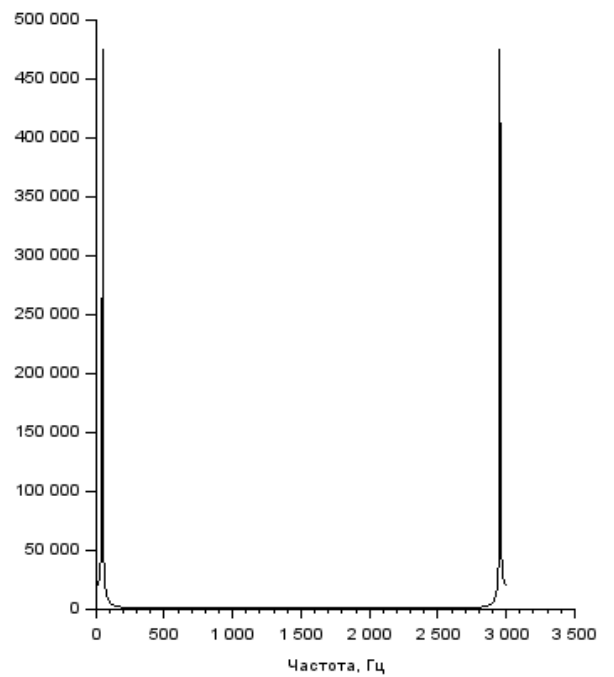
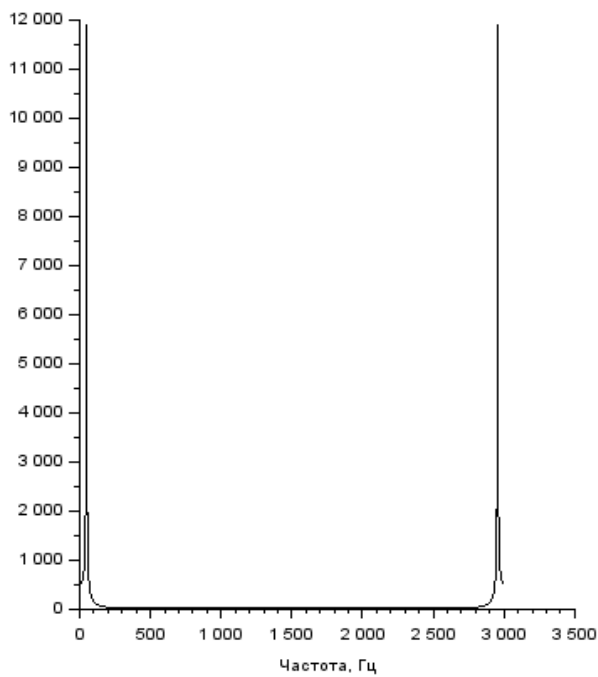


Рисунок 3.3. Спектр перетвореного сигналу.

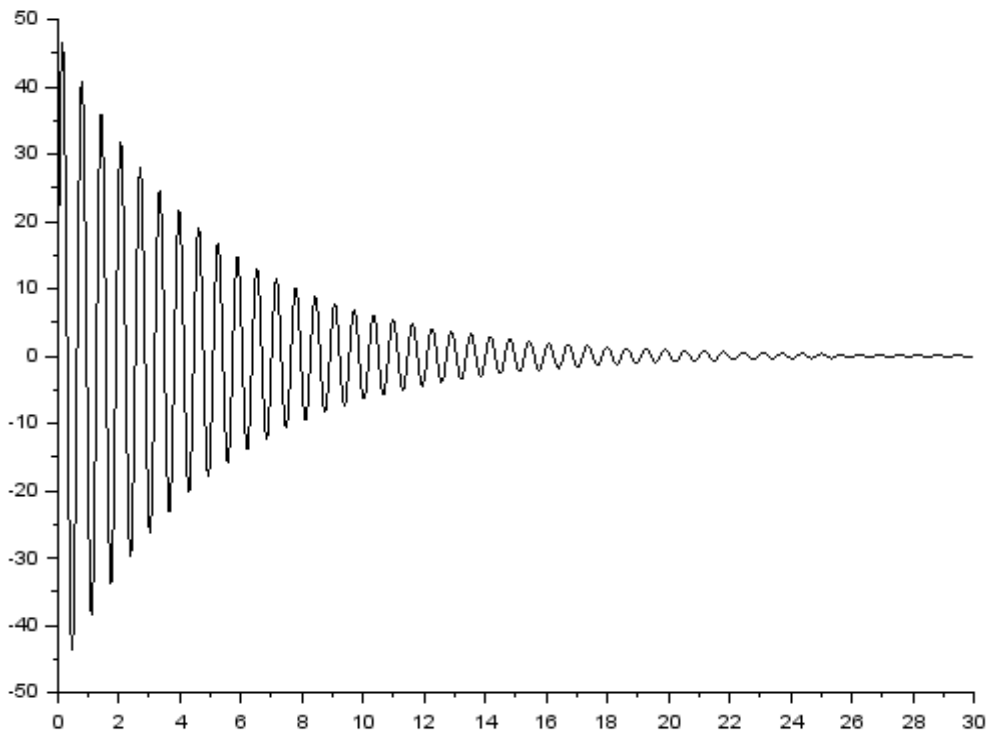


Рис 3.4. Відтворений сигнал.

5 Зміст звіту

Мета і стислий зміст роботи, результати розрахунків, висновки.

Контрольні запитання

1. Теорема Котельникова.
2. Дискретизовані сигнали.
3. Спектр дискретизованого сигналу.
4. Дискретне перетворення Фур'є.
5. Особливості дискретного перетворення Фур'є.
6. Амплітудна і фазова характеристики сигналів.

Література / 1-5 /.

Додаток 3. Аналіз гармонійних сигналів.

Д 3.1 Провести моделювання (та побудувати графік) безперервного сигналу $S(t)$, який дорівнює $S(t) = Ae^{-t/T} \sin(2\pi ft)$

Д 3.2. Знайти спектр сигналу $S(t)$. Змінити спектральну амплітуду (помножити на K).

Д 3.3. Виконати обернене перетворення Фур'є отриманого спектра сигналу.

Д 3.4. Проаналізувати відновлений сигнал.

Д 3.5 Дискретне перетворення Фур'є необмеженого у часі сигналу.

Д 3.5.1 Гармонійне коливання $S(t) = A \sin(2\pi ft)$ ($f = 50$ Гц) на інтервалі $Nt_a = 50$ мс представлено вибірками з частотою 500 Гц. Знайти і побудувати спектр даного сигналу при різному часі спостереження (16 мс, 32 мс, 64 мс, 128 мс).

Д 3.6 Зробити висновки.

Таблиця Д 3.1

№ варіанта	A	T [с]	f [с ⁻¹]	K
1	21	3	$1/\pi$	0.5
2	30	5	$1/2 \pi$	2
3	13	1	$2/\pi$	0.2
4	25	2	$1/2 \pi$	0.1
5	50	3	$1/3 \pi$	5
6	24	4	$1/\pi$	0.25
7	12	5	$1/2 \pi$	4
8	15	2	$2/3 \pi$	3
9	21	1	$4/5 \pi$	2
10	30	3	$1/\pi$	5
11	5	2	$4/3 \pi$	0.5
12	2	3	$3/\pi$	6
13	3	4	$2/3 \pi$	7
14	5	5	$2/3 \pi$	10
15	6	1	$3/\pi$	0.2
16	11	2,5	$2/\pi$	4
17	12	3	$4/3 \pi$	0.5
18	13	4	$3/\pi$	6
19	14	1`	$2/3 \pi$	7
20	20	3	$2/\pi$	3
21	2	5	$1/\pi$	6
22	3	2	$3/\pi$	7
23	4	1	$2/\pi$	12
24	2.5	4	$1/\pi$	0.2
25	3.5	2	$2/5 \pi$	4

Лабораторна робота № 4

Функції вікна. Критерії вікна

1. Мета лабораторного заняття

Оволодіти навичками розрахунку та аналізу функції вікна.

2 Вихідні дані

2.1 Набір початкових даних (додаток 4, таблиця Д 4.1).

2.2 Умови проведення дослідження.

3 Зміст лабораторного заняття

3.1. Сформуувати та вивести на екран функції вікон для N відліків.

3.2. Здобути спектральну характеристику.

3.3. Оцінити частотні характеристики.

3.4. Сформуувати 4 типи вікон— Блекмана, прямокутне, Хеммінга, трикутне.

3.5. Здобути спектральну характеристику

3.6. Порівняти частотні характеристики.

3.7. Визначити критерії вікон.

4 Основи розробки алгоритму і програмної реалізації

При аналізі сигналів широко використовують віконне перетворення Фур'є. Хай сигнал $s(t)$ завданий на інтервалі $(0, t \rightarrow \infty)$. Розглядаючи такий сигнал на відрізьку $[t_{\min}, t_{\max}]$, ми ніби «вирізаємо» з вихідного сигналу $s(t)$ деякий сигнал $sw(t)$, який співпадає з $s(t)$ на відрізьку $[t_{\min}, t_{\max}]$ і дорівнює нулю за його межами. Математично це можна записати у вигляді добутку вихідного сигналу $s(t)$ і деякої віконної функції $w(t)$, котра визначається наступним чином:

$$w(t) = \begin{cases} 1, & t_{\min} \leq t \leq t_{\max} \\ 0, & t < t_{\min} \text{ и } t > t_{\max} \end{cases} \quad (4.1)$$

Дана віконна функція – це прямокутна віконна функція. Спектральну функцію «вирізаного» сигналу $sw(t)$ знайдемо з використанням с использованием перетворення Фур'є і його властивості – множенню оригіналів в часовій області відповідає згортка спектральних функцій з частотною:

$$\dot{S}w(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} sw(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} w(t)s(t)e^{-j\omega t} dt = \dot{S}(\omega) * \dot{W}(\omega), \quad (4.2)$$

де $\dot{S}(\omega)$, $\dot{W}(\omega)$ – спектральні функції сигналу і вікна,

* – символ згортки.

Як наслідок з виразу (4.2) спектр «вирізаного» сигналу $sw(t)$ спотворений по відношенню до спектру сигналу $s(t)$ за рахунок згортки спектру вихідного сигналу і спектру вікна, що і призводить до появи фальшивих спектральних ліній. Типовий спектр вікна на рис. 4.1. Він складається з основного пелюстка з амплітудою A_{OL} і додаткових пелюстків, які характеризуються амплітудою A_{HDL} найбільшого з них.



Рисунок 4.1. Спектр вікна

На практиці використовують ряд типів вікон, котрі дозволяють уникнути спотворень амплітуди та інших небажаних явищ. При виборі вікна враховують такі особливості. Час спостереження (ширина вікна) має бути числом, яке кратне періоду основного коливання.

Спектр повторюється з частотою вибірок $f_D = \frac{1}{T}$, де T – період дискретизації. Відстань між частотними лініями:

$\Delta f = \frac{1}{NT}$, де N – об'єм вибірки.

Критерії оцінки вікна:

а) відношення амплітуди найбільшого з додаткових пелюстків до амплітуди основного пелюстка:

$$\alpha = \frac{A_{ндл}}{A_{ол}}. \quad (4.3)$$

ДПФ $W_d(j\omega)$ функції вікна $w(t)$ дає при $\omega = 0$ максимальну амплітуду основного пелюстка, амплітуди додаткових пелюстків менші. Значення α використовується для порівняння різних функцій вікна.

б) максимальна похибка дискретизації:

$$b = \frac{\text{амплитуда ДПФ окна при } f = \frac{\Delta f}{2}}{\text{амплитуда ДПФ окна при } f = 0} \quad (4.4)$$

оцінює наскільки максимально невірно була виміряна амплітуда.

Спектральні лінії виміряної вибіркою функції не обов'язково співпадають з нулями ДПФ і знаходяться на відстані Δf одна від іншої.

в) ширина основного пелюстка.

Функції вікна, в котрих додаткові пелюстки малі, мають особливо широкий основний пелюсток. Це призводить до розходження спектральних ліній. Для характеристики основного пелюстка використовують *граничну частоту*, при котрій амплітуда основного пелюстка зменшиться на 3 дБ:

$$c = \frac{\text{амплітуда при } f_0 = 0}{\text{амплітуда при } f_z} = 3 \text{ дБ} \quad (4.5)$$

Ширина основного пелюстка L , в ідеалі утримує більшу частину функції вікна, має бути меншою.

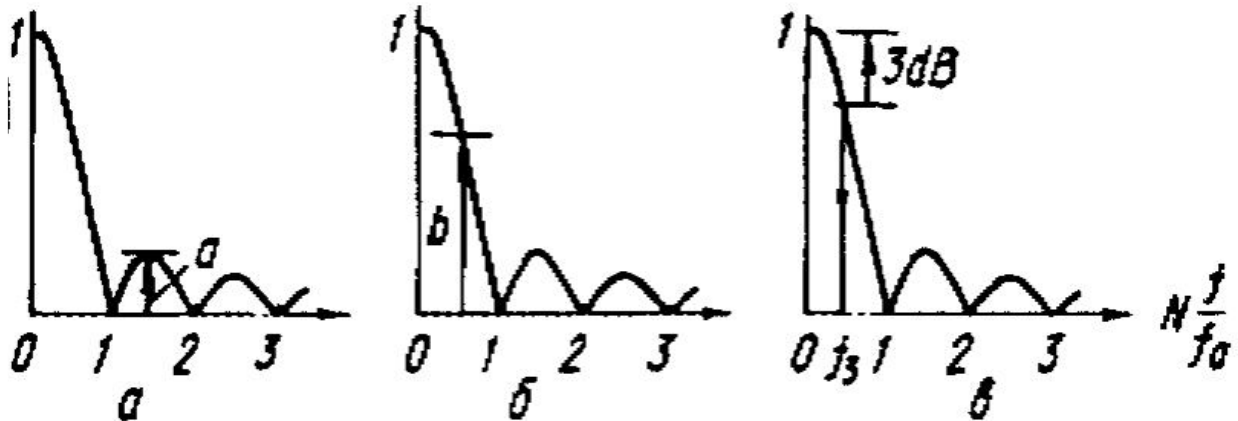


Рисунок 4.2. Критерії оцінки прямокутного вікна ($N = 17$). а – співвідношення між амплітудою найбільшого додаткового пелюстка і амплітудою основного пелюстка; б – максимальна помилка дискретизації; в – ширина основного пелюстка, виражена різницею частот $c = f_0 - f_3$

Види вікон.

Для визначення вікон в Scilab використовують вбудовану функцію *window*, котра обчислює симетричне вікно багатьох видів. Виклик функції для розрахунку n точок вікна (n – кількість відліків) здійснюється наступним чином.

```
win_l=(re',n)           //прямокутне вікно
win_l=window('tr',n)     //трикутне вікно
win_l=window('hn',n)     //вікно Ханна
win_l=window('hm',n)     //вікно Хемминга
win_l=window('kr',n,alpha) //вікно Кайзера
[win_l,cwp]=window('ch',n,par) //вікно Чебышева
```

Параметри виклику функції наступні:

n – довжина вікна; вектор $par=[dp,df]$, де dp ($0 < dp < 0.5$) визначає ширину основного пелюстка і df визначає висоту бокових пелюстків ($df > 0$); $alpha > 0$ – параметр вікна Кайзера, змінюючи котрий можна отримати різні форми вікна:

$alpha$	форма вікна
≈ 0	Прямокутна
5	подобно вікну Хэмминга (Hamming)
6	подібно вікну Ханна (Hanning)
8.6	подібно вікну Блекмана

Окремі типи вікон та їх особливості.

Прямокутне вікно.

Задається функцією $W=window('re',n)$, де 're' – від англійського rectangle (прямокутник), n – кількість відліків. Повертає вектор: $W = ones(1,n)$, n – його довжина. Вид вікна і його спектр відповідають спектру прямокутного імпульсу з одиничною амплітудою і шириною n . Нижче представлено прямокутне вікно і його спектр для $n=16$. Амплітуда спектру виражена в дБ (рис. 4.3)

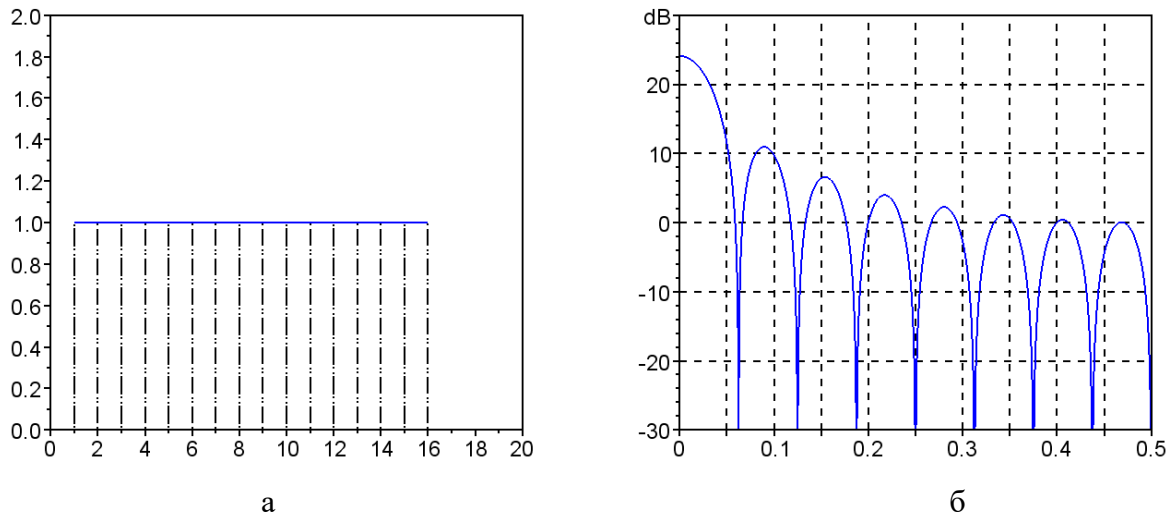


Рисунок 4.3. Прямокутне вікно: а – форма вікна, б – амплітудний спектр вікна

Текст відповідної програми представлений нижче.

```
clear();
clf();           //очистка пам'яті і поточного графічного вікна
n=16;           //кількість відліків вікна
W1=window('re',n); //розрахунок відліків вікна
subplot(1,2,1);
plot(1:n,W1);plot2d3(1:n,W1); //побудова вікна
title('Прямокутне вікно ');
xlabel('Відліки');
detw=0.001;     //крок зміни кругової частоти Δw

//розрахунок амплітудного спектру з кроком Δw
ss=0;p=0;
for w=0:detw:%pi
    p=p+1;
    ss=0
    for k=0:n-1;
        ss=ss+W1(k+1)*exp(-%i*k*w);
    end;
    X(p)=ss;
end;
//ff=1/n*(0:n-1);
ff=(0:detw:%pi)/(2*%pi); //діапазон частот, Гц
subplot(1,2,2);
plot(ff,20*log10(abs(X))); //амплітудний спектр
```

```
xgrid;
title('Амплітудний спектр');
xlabel('Частота, Гц');
```

Трикутне вікно.

Трикутне вікно задається функцією $W=window('tr',n)$, де 'tr'—від англійського triangle (трикутник), n – кількість відліків. Відліки трикутного вікна розраховують по формулам:

$$W(k) = \begin{cases} \frac{2k}{n+1}, & 1 \leq k \leq \frac{n+1}{2} \\ \frac{2(n-k+1)}{n+1}, & \frac{n+1}{2} < k \leq n \end{cases} \quad (4.6)$$

Тут $k = \overline{1, n}$ – число ціле (номер відліку). При непарному n трикутне вікно є симетричним, його значення (при $k = 1$ і $k = n$) рівні $\frac{2}{n+1}$, а в середині вікна досягається одиничне значення для непарного n (при $k = \frac{n+1}{2}$). При парному n трикутне вікно також є симетричним, його крайні значення такі ж, як і в попередньому випадку, але в середині вікна в двох точках (при $k = \frac{n}{2}$ і $k = \frac{n}{2} + 1$) досягається максимальне значення $\frac{n}{n+1}$. Нижче представлено трикутне вікно і його спектр для $n=16$. Амплітуда спектра - в дБ (рис.4.4).

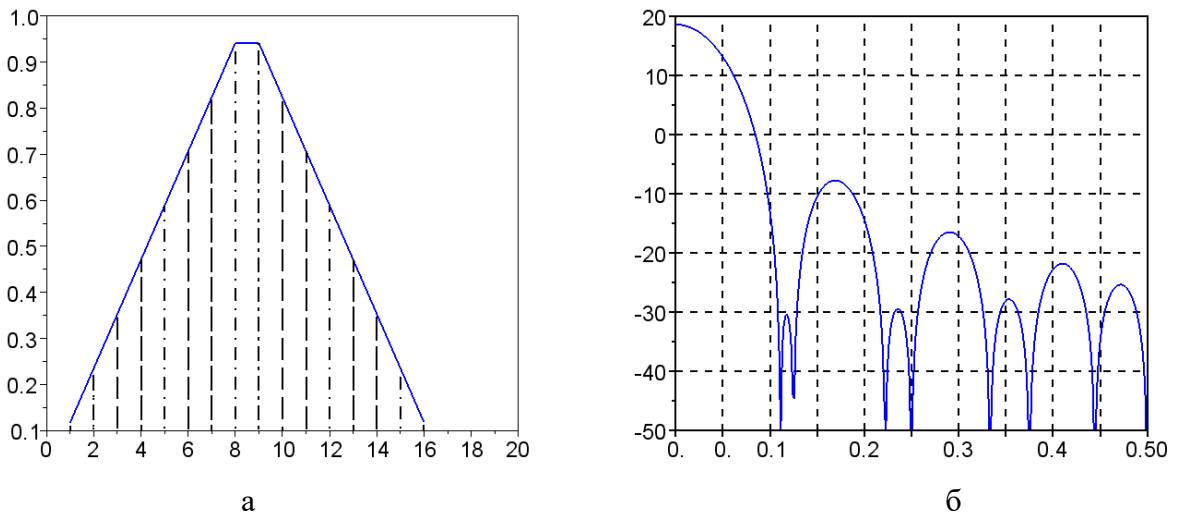


Рисунок 4.4. Трикутне вікно: а – форма вікна, б – амплітудний спектр вікна

Вікно Хемминга

Функція $W=window('hm',n)$, де n – кількість відліків реалізує вікно Хемминга. Відліки вікна Хемминга розраховують по формулі:

$$W(k) = 0,54 - 0,46 \cos\left(2\pi \frac{k-1}{n-1}\right) \quad (4.7)$$

Необхідно врахувати, що $k = \overline{1, n}$ – число ціле (номер відліку), n – кількість відліків. Нижче представлено вікно Хеммінга і його спектр для $n=16$. Амплітуда спектра - в дБ (рис.4.5).

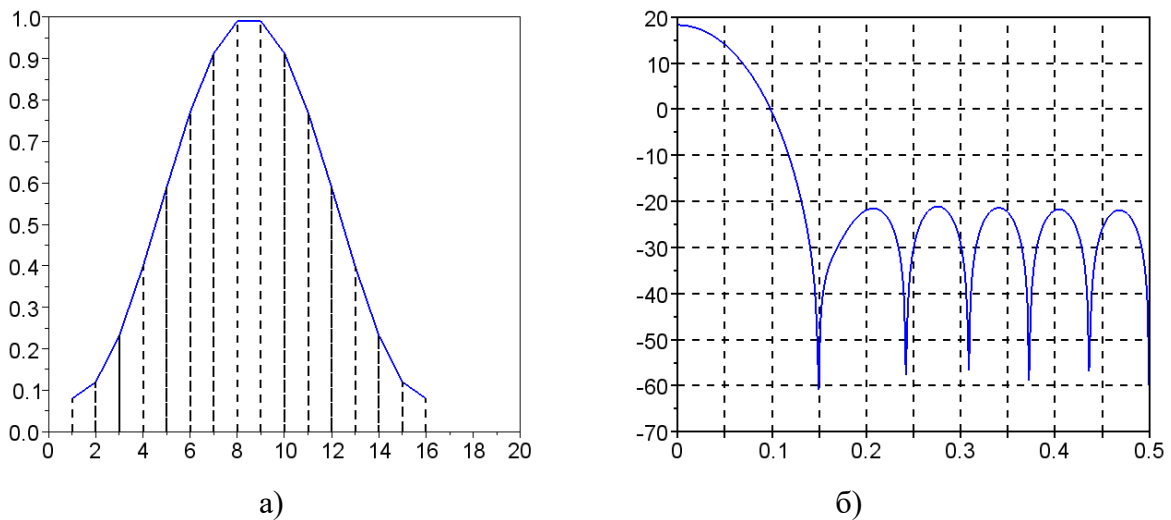


Рисунок 4.5. Вікно Хеммінга: а – форма вікна, б – амплітудний спектр вікна.

Вікно Блекмана.

Відліки вікна Блекмана розраховуються по формулі:

$$W(k) = 0.42 - 0.5 \cos\left(2\pi \frac{k-1}{n-1}\right) + 0.08 \cos\left(4\pi \frac{k-1}{n-1}\right), \quad (4.8)$$

де $k = \overline{1, n}$ – число ціле (номер відліку), n – кількість відліків.

Нижче наведено вікно Блекмана і його спектр для $n=16$, розраховане по (4.8) (рис.4.6). Амплітуда спектра виражена в дБ.

Порівняння вікон.

Для порівняння можна вивести графіки віконних функцій в одному вікні:

```
clf()
N = 24;
whm = window('hm', N); // Hamming window
wkr = window('kr', N, 6); // Hamming Kaiser window
wch = window('ch', N, [0.005 -1]); // Chebychev window
```

```
// Plot the window profile
subplot(121);
plot2d((1:N)', [whm; wkr; wch])
set(gca(), 'grid', [1 1]*color('gray'))
xlabel("n")
ylabel("w_n")
title(gettext("Profile plot"))
```

```
// Plot the magnitude of the frequency responses
n = 256;
```

```

[Whm,fr] = frmag(whm, n);
[Wkr,fr] = frmag(wkr, n);
[Wch,fr] = frmag(wch, n);
subplot(122);
plot2d(fr', 20*log10([Whm; Wkr; Wch]))
set(gca(), 'grid', [1 1]*color('gray'))
xlabel(gettext("Pulsation (rad/s)"))
ylabel(gettext("Magnitude (dB)"))
legend(["Hamming N=24"; "Kaiser N=24, Beta=6"; "Chebychev N=24, dp=0.005"]);
title(gettext("Magnitude plot"))

```

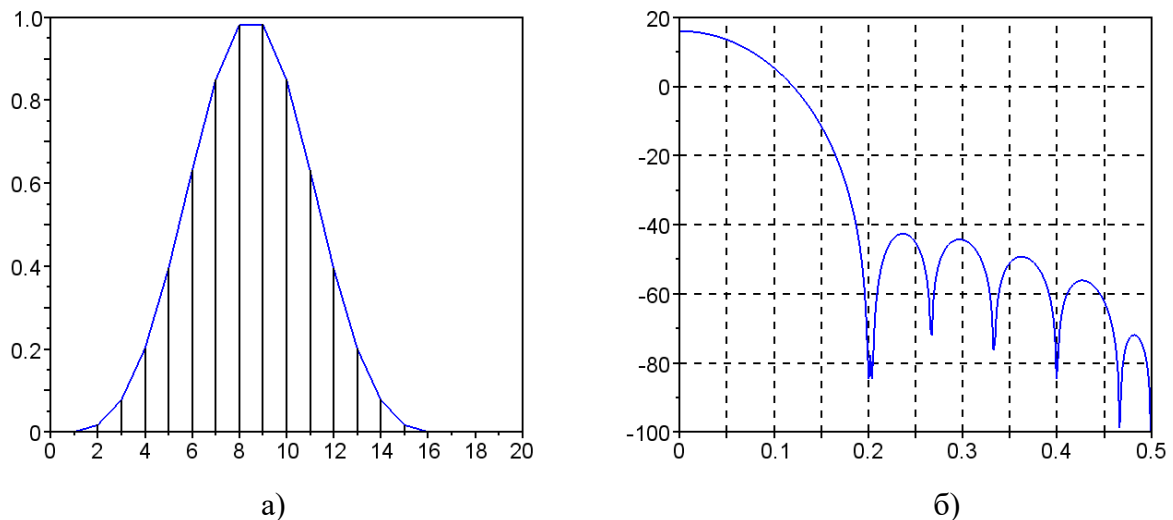


Рисунок 4.6. Вікно Блекмана: а – форма вікна, б – амплітудний спектр окна.

Визначення критеріїв оцінки вікна.

Для порівняння характеристик вікон необхідно визначити критерії їх оцінки: 1) відношення амплітуди найбільшого з додаткових пелюстків до амплітуди основного пелюстка:

$$\alpha = \frac{A_{\text{НДЛ}}}{A_{\text{ОЛ}}};$$

2) максимальна погрішність дискретизації:

$$b = \frac{\text{амплітуда ДПФ окна при } f = \frac{\Delta f}{2}}{\text{амплітуда ДПФ окна при } f = 0},$$

Де відстань між частотними лініями: $\Delta f = \frac{1}{NT}$, N – обсяг вибірки, T – період дискретизації; 3) ширина основного пелюстка L .

Визначення цих критеріїв продемонструємо на прикладі вікна Кайзера для $n=16$ і $\alpha=4$. Для полегшення рішення задачі пронормуємо відліки вікна так, щоб сума відліків дорівнювала 1. Для цього розраховані з допомогою функції $W1=window('kr',16,5)$ відліки розділимо на їх суму: $W1=W1/sum(W1)$. В цьому випадку амплітуда постійної складової перетворення Фур'є буде 1 (чи 0 дБ), а амплітуда найбільшого з додаткових пелюстків і покаже значення α в дБ.

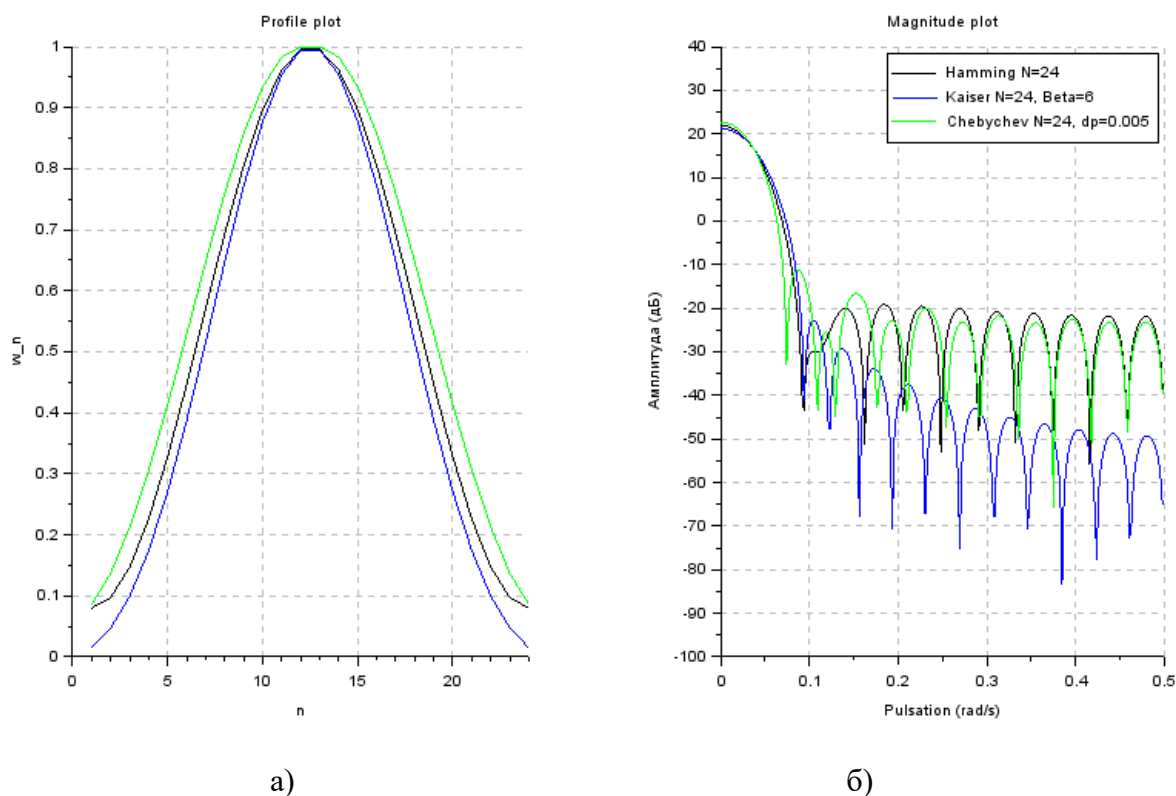


Рисунок 4.7. Порівняння віконних функцій: а – форма вікна, б – амплітудний спектр вікна.

Як видно з рис. 4.7, відношення амплітуди найбільшого з додаткових пелюстків (-32.2 дБ) до амплітуди основного пелюстка (0 дБ):

$$\alpha = \frac{A_{\text{НДЛ}}}{A_{\text{ОЛ}}} = -32.2 \text{ дБ} \text{ чи } \alpha = \frac{A_{\text{НДЛ}}}{A_{\text{ОЛ}}} = 10^{-32.2/20} = 0.025.$$

Для визначення максимальної погрішності дискретизації b визначимо амплітуду спектра вікна при частоті $f = \frac{\Delta f}{2} = \frac{1}{2n} = \frac{1}{32}$ Гц. Цій частоті відповідає точка А (см. рис. 4.8), для котрої $A_A = -2$ дБ. Відповідно $b = -2$ дБ чи $b = 10^{-2/20} = 0.79$. Для визначення ширини основного пелюстка відмітимо на вісі ординат точку -3 дБ і проведемо горизонтальну лінію до перетину з кривою спектру (отримуємо точку В на рис.4.8). Абсциса цієї точки і відповідає граничній частоті $f_e = 0.04$ Гц, що і визначає ширину основного пелюстка $L = 0.04$ Гц. Ширину основного пелюстка можна визначити в долях від відстані між частотними лініями Δf . Так як $\frac{f_e}{\Delta f} = \frac{f_e}{1/n} = \frac{0.04}{1/16} = 0.64$, то $L = 0.64 \Delta f$

Для інших типів вікон розрахунок критеріїв виконується аналогічно.

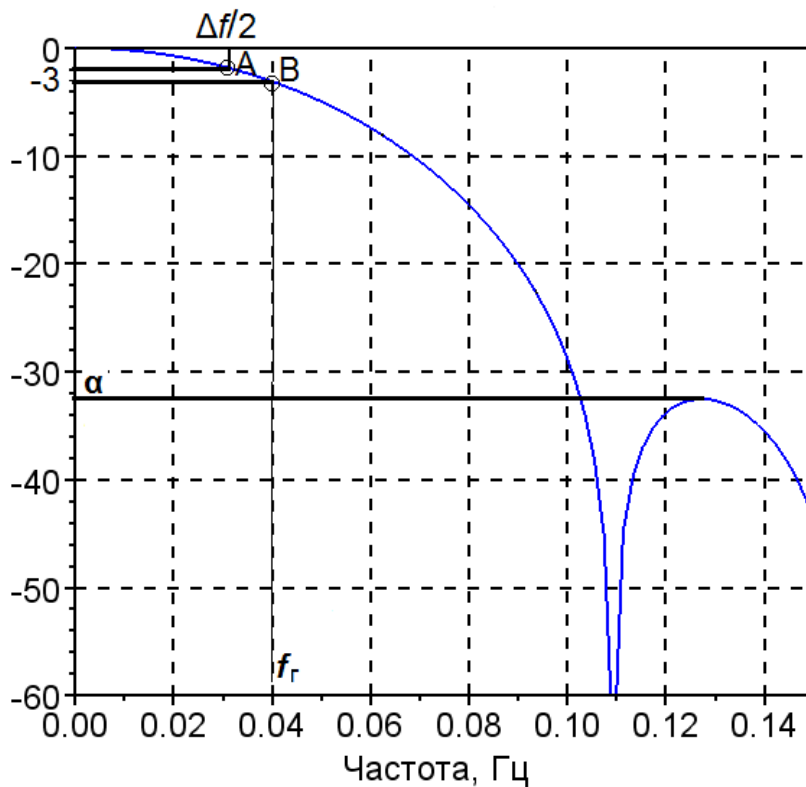


Рисунок 4.8. Визначення критерію вікна.

5 Зміст звіту

Мета і стислий зміст роботи, результати розрахунків, висновки.

Контрольні запитання

1. Критерії вікна.
2. Функції вікна та їхні спектри.
3. Поняття частотного спектра періодичного сигналу.
4. Спектральна щільність періодичної послідовності та одиночного імпульсу.
5. Пряме і обернене перетворення Фур'є.
6. Властивості перетворення Фур'є.
7. Теорема Котельнікова.
8. Дискретизовані сигнали. Спектр дискретизованого сигналу.

Література / 1-5 /.

Додаток 4.

Д4.1. Функції вікна.

Д4.1.1. Згідно з варіантом (табл. Д 4.1) сформувати та вивести на екран функції вікон для N відліків. Здобути спектральну характеристику. Оцінити частотні характеристики.

Д4.1.2. Користуючись стандартними функціями середовища Scilab, сформувати та вивести на екран 4 типи вікон— Блекмана, прямокутне, Хеммінга, трикутне. Здобути спектральну характеристику. Порівняти частотні характеристики.

Д4.2. Зробити висновки. Визначити критерії вікон згідно з варіантом.

Таблиця Д 4.1.

№ варіанта	Вікно Блекмана	Прямокутне вікно	Вікно Хеммінга	Трикутне вікно
1	$N=21$			
2		$N=27$		
3			$N=19$	
4				$N=11$
5	$N=29$			
6			$N=23$	
7	$N=21$			
8		$N=27$		
9			$N=19$	
10				$N=11$
11	$N=29$			
12			$N=23$	
13	$N=21$			
14		$N=27$		
15			$N=19$	
16				$N=11$
17	$N=29$			
18			$N=23$	

Лабораторна робота № 4

Синтез нерекурсивних фільтрів

1. Мета лабораторного заняття

Набуття навичок розрахунку коефіцієнтів цифрових нерекурсивних фільтрів (НРФ) та моделювання фільтрів.

2 Вихідні дані

2.1 Набір початкових даних (додаток 5, таблиця Д 5.1).

2.2 Умови проведення дослідження.

3 Зміст лабораторного заняття

3.1. Розрахувати коефіцієнти фільтра.

3.2. Сформувані віконні функції, визначити згладжуючі коефіцієнти.

3.3. Побудувати амплітудно-частотну характеристику..

3.4. Сформувані вхідну функцію для перевірки роботи синтезованого фільтра.

3.5. Провести моделювання фільтра

4 Основи розробки алгоритму і програмної реалізації

При синтезі НРФ визначають вагові коефіцієнти a_k так, щоб бажана передавальна функція добре досягалась «за можливістю». Це «за можливістю» може бути досягнене, коли апроксимувати завдану передавальну функцію по *методу найменших квадратів*.

Для визначення коефіцієнтів необхідно наступне.

Треба задати вид передавальної функції ідеального фільтру $G_w(j\omega)$ (бажану передавальну функцію) з граничною частотою ω_g (рис. 5.1):

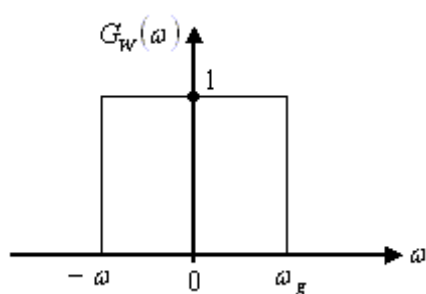


Рисунок 5.1 – Передавальна функція ідеального фільтру

Треба пам'ятати про властивості ДПФ – періодичності з частотою дискретизації $f_D = 1/T$ чи $\omega_D = 2\pi f_D = 2\pi/T$ (рис. 5.2):

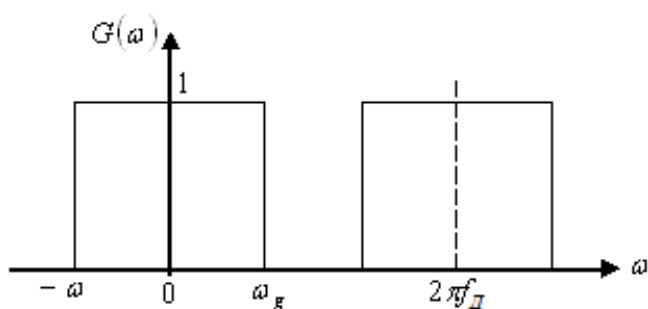


Рисунок 5.2 – Передавальна функція цифрового фільтру з урахуванням періодичності

Оскільки апроксимація передавальної характеристики $G_d(j\omega)$ проводиться рядом Фур'є, треба пам'ятати: зі зростанням членів ряду помилка апроксимації зменшується (рис. 5.3):

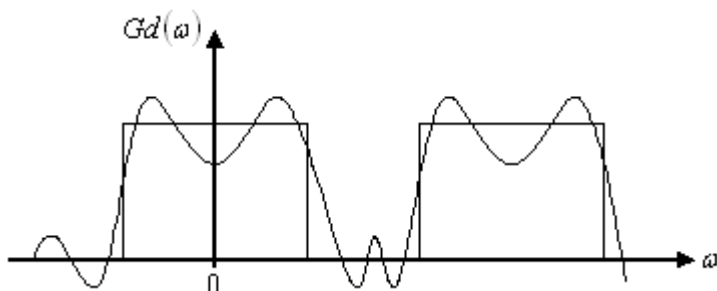


Рисунок 5.3 – Передавальна функція реалізованого фільтру

Метод найменших квадратів Гауса служить критерієм апроксимації:

$$\frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} (G_d(j\omega) - G_w(j\omega))^2 d\omega \Rightarrow \min. \quad (5.1)$$

Середньоквадратична погрішність апроксимації мінімальна, коли вагові коефіцієнти a_k бажаного фільтру є коефіцієнтами розкладу $G_d(j\omega)$ в ряд Фур'є в частотній області. В частотній області передавальна функція $G_d(j\omega)$ співпадає з ДПФ вагових коефіцієнтів фільтру. Тому для визначення коефіцієнтів фільтру треба виконати зворотне перетворення Фур'є від $G_d(j\omega)$:

$$a_k = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} G_d(j\omega) e^{j\omega k T} d\omega. \quad (5.2)$$

Розіб'ємо даний вираз на два інтеграли з нижньою межею $\omega = 0$.

$$a_k = \frac{T}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{T}} G_d(j\omega) e^{j\omega k T} d\omega + \frac{T}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{T}} G_d(-j\omega) e^{-j\omega k T} d\omega. \quad (5.3)$$

Коли $G_d(j\omega)$ – парна, $G_d(j\omega) = G_d(-j\omega)$, то

$$a_k = a_{-k} = \frac{T}{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{T}} G_d(j\omega) (e^{j\omega k T} + e^{-j\omega k T}) d\omega = \frac{T}{2\pi} 2 \int_0^{\frac{\pi}{T}} G_d(j\omega) \cos(k\omega T) d\omega. \quad (5.4)$$

Коли $G_d(j\omega)$ – непарна, $G_d(j\omega) = -G_d(-j\omega)$, то

$$a_k = -a_{-k} = \frac{T}{2\pi} 2j \int_0^{\frac{\pi}{T}} G_d(j\omega) \sin(k\omega T) d\omega. \quad (5.5)$$

Розрахунок коефіцієнтів фільтру.

Визначимо коефіцієнти ідеального фільтру низької частоти (ФНЧ) з передавальною функцією $G_d(j\omega) = 1$ при $|\omega| \leq \omega_g$ и $G_d(j\omega) = 0$ при $|\omega| > \omega_g$; $G_d(j\omega)$ – парна. Використавши (5.5) отримаємо:

$$a_k = a_{-k} = \frac{T}{\pi} \int_0^{\omega_g} 1 \cdot \cos(k\omega T) d\omega = \frac{T}{\pi} \frac{\sin(k\omega_g T)}{kT}. \quad (5.6)$$

Тобто коефіцієнти фільтру залежать від граничної частоти і частоти дискретизації $f_D = 1/T$, тому при визначенні параметрів фільтру визначаємо нормовану *граничну кругову частоту*:

$$\Omega_g = \frac{\omega_g}{f_D} = 2\pi \frac{f_g}{f_D}, \quad (5.7)$$

Рівняння для обчислення коефіцієнтів ФНЧ буде:

$$a_k = a_{-k} = \frac{\Omega_g}{\pi} \frac{\sin(k\Omega_g)}{k\Omega_g}. \quad (5.8)$$

Приклад:

Розрахувати фільтр низьких частот, коли $N = 5$, $f_g = 25\text{Гц}$, $f_D = 100\text{Гц}$.

$$1) \Omega_g = 2\pi \frac{f_g}{f_D} = 0.5\pi;$$

$$2) k = 0 \quad a_0 = \frac{1}{2};$$

$$k = 1 \quad a_1 = a_{-1} = \frac{0.5\pi \sin(1 \cdot 0.5 \cdot \pi)}{\pi \cdot 1 \cdot 0.5 \cdot \pi} = \frac{1}{\pi};$$

$$k = 2 \quad a_2 = a_{-2} = 0.5 \cdot \frac{\sin(2 \cdot 0.5 \cdot \pi)}{2 \cdot 0.5 \cdot \pi} = 0;$$

$$k = 3 \quad a_3 = a_{-3} = 0.5 \frac{\sin(3 \cdot 0.5 \cdot \pi)}{3 \cdot 0.5 \cdot \pi} = -\frac{1}{3\pi};$$

$$k = 4 \quad a_4 = a_{-4} = 0.5 \frac{\sin(4 \cdot 0.5 \cdot \pi)}{4 \cdot 0.5 \cdot \pi} = 0;$$

$$k = 5 \quad a_5 = a_{-5} = 0.5 \frac{\sin(5 \cdot 0.5 \cdot \pi)}{5 \cdot 0.5 \cdot \pi} = \frac{1}{5\pi}.$$

Рівняння фільтру 10-го порядку ($2N = 2 \cdot 5 = 10$) виглядає таким чином:

$$\begin{aligned}
 y_n &= \frac{1}{5\pi} x_{n+5} - \frac{1}{3\pi} x_{n+3} + \frac{1}{\pi} x_{n+1} + \frac{1}{2} x_n + \frac{1}{\pi} x_{n-1} - \frac{1}{3\pi} x_{n-3} + \frac{1}{5\pi} x_{n-5} = \\
 &= \frac{1}{2} x_n + \frac{1}{\pi} (x_{n+1} + x_{n-1}) - \frac{1}{3\pi} (x_{n+3} + x_{n-3}) + \frac{1}{5\pi} (x_{n+5} + x_{n-5}),
 \end{aligned}$$

Передавальна точна функція:

$$G_d(j\omega) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(1 \cdot \omega T) - \frac{2}{3\pi} \cos(3 \cdot \omega T) + \frac{2}{5\pi} \cos(5 \cdot \omega T).$$

Для порівняння на рис. 5.4 наведені графік передавальної функції $G_d(j\omega)$ і бажаної передавальної функції $G_w(j\omega)$.

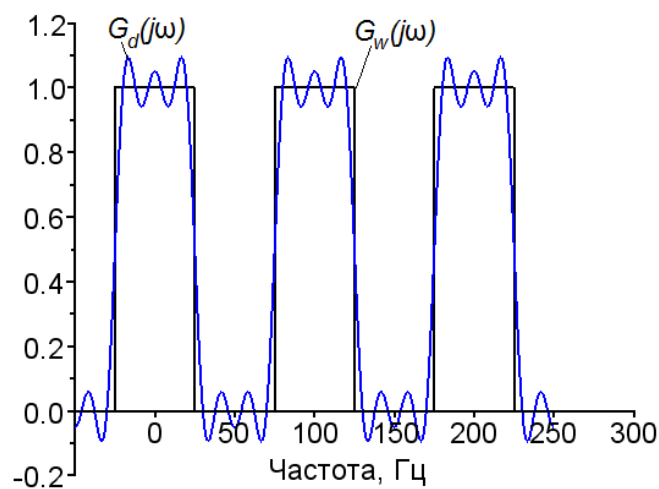


Рисунок 5.4 – Передавальна функція ФНЧ, параметри котрого визначені по методу найменших квадратів

Отриману передавальну функцію фільтру можна побудувати в Scilab для ланки частот від 0 до $f_d/2$ (рис. 5.5) з використанням функції `frmag`:

```
clear();
```

```
fg=25;//гранична частота фільтру НЧ
```

```
wg=2*%pi*fg;//кругова гранична частота фільтру НЧ
```

```
fd=100;//частота дискретизації
```

```
//wd=2*%pi*fd;//кругова частота дискретизації
```

```
N=5;//порядок фільтру n=2*N=10, звідси N=n/2=5
```

```
k=-N:N;//індексы коефіцієнтів фільтру
```

```
Omegag=wg/fd;//нормирована гранична кругова частота
```

```
Ak1=Omegag/%pi*sinc(k*Omegag);//коефіцієнти фільтру НЧ
```

```
[hzm,fr]=frmag(Ak1,256);//hzm – відліки амплітуд модуля //синтезованої передавальної функції фільтру
```

//fr – вектор частот в долях від частоти дискретизації f_D //від 0 до 1/2 (256 значень)

plot(fr*fd,hzm);xgrid;

//fr*fd – вектор частот від 0 до $f_D/2$

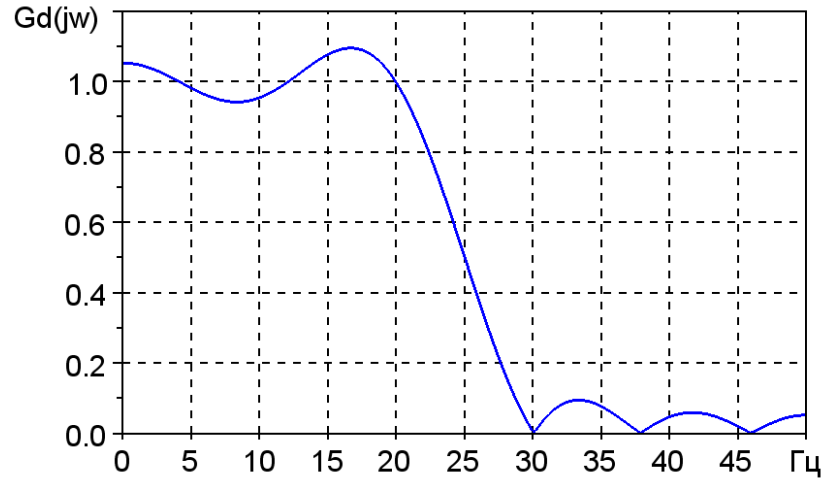
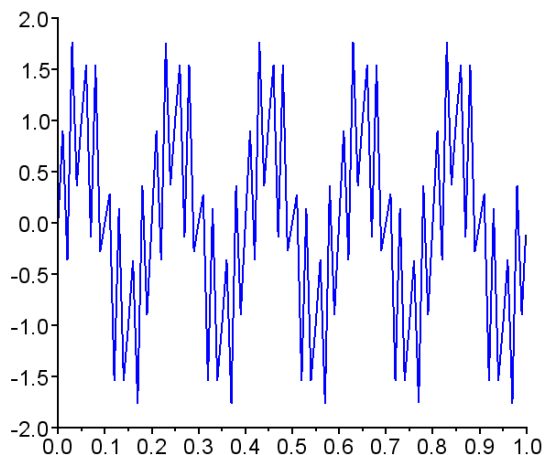


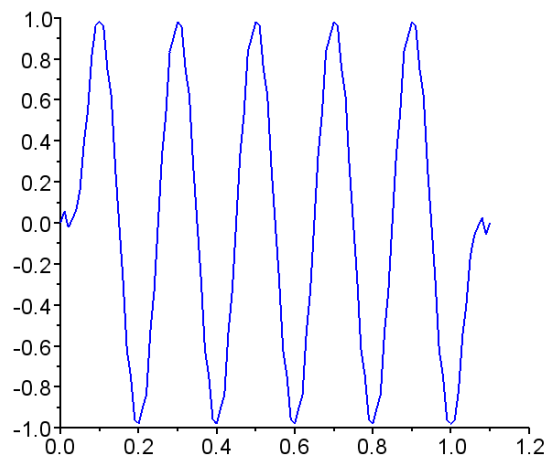
Рисунок 5.5 – Передавальна функція ФНЧ, з параметрами, визначеними по методу найменших квадратів, побудована з допомогою функції fitmag.

Для перевірки якості отриманого фільтру синтезуємо сигнал $s = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$, зі складовими $f_1 = 5 \text{ Гц} < f_g = 25 \text{ Гц}$ та $f_2 = 40 \text{ Гц} > f_g = 25 \text{ Гц}$. Отримуємо відліки цього сигналу на відрізку часу від 0 до 1с з частотою дискретизації $f_D = 100 \text{ Гц}$. Графік цього сигналу - на рис. 5.6, а. Графік сигналу, пропущеного через фільтр з отриманими коефіцієнтами, наведено на рис. 5.6, б. Цей сигнал є згорткою дискретизованого сигналу $s(nT)$ і отриманого вектора коефіцієнтів $A_k = [1/5\pi; 0; -1/3\pi; 0; 1/\pi; 1/2; 1/\pi; 0; -1/3\pi; 0; 1/5\pi]$.

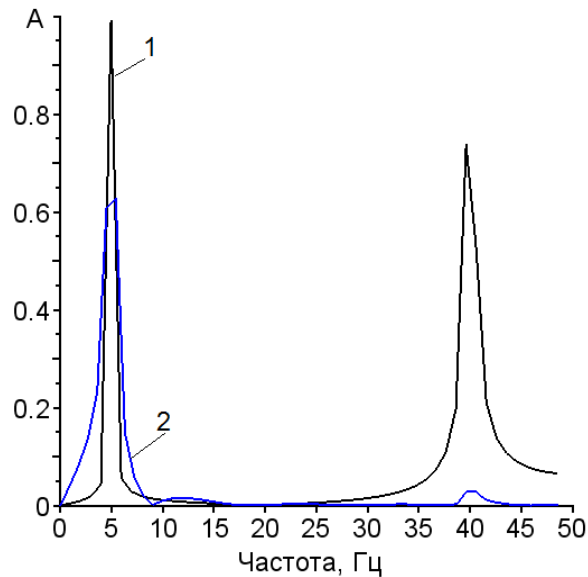
Як витікає з рис. 5.6 в результаті фільтрації складова з частотою $f_2 = 40 \text{ Гц} > f_g = 25 \text{ Гц}$ придушується, що витікає і з перетворення Фур'є вихідного та відфільтрованого сигналу (рис. 5.6, в). Через недостатню частоту дискретизації амплітуда перетворення Фур'є сигналу після фільтрації відрізняється від 1.



а



б



в

Рисунок 5.6. Фільтрація сигналу $s = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$ спроектованим фільтром: а – вихідний сигнал, б – відфільтрований сигнал, в – спектр вихідного сигналу (крива 1), спектр відфільтрованого сигналу (крива 2)

Текст програми для отримання рис. 5.6 наведений нижче.

```
clear();//очищення пам'яті
fg=25;//гранична частота фільтру НЧ
wg=2*%pi*fg;//кругова гранична частота фільтру НЧ
fd=100;//частота дискретизації
wd=2*%pi*fd;//кругова частота дискретизації
T=1/fd;//період дискретизації
dw=2*%pi/200//крок змінення кругової частоти для розрахунку
//передавальної функції
M=3;//M - у скільки разів діапазон частот перевищує
//частоту дискретизації
w=-wd/2:2*%pi/100:(M-0.5)*wd;//діапазон змінення
//кругової частоти для розрахунку передавальної функції
Gw=zeros(1,length(w));//ініціалізація значення бажаної
// передавальної функції
//розрахунок значення бажаної передавальної функції
for j=0:M-1
    Gw=Gw+(abs(w-j*wd)<=wg);
```

```

end
plot(w/(2*%pi),Gw);// побудова Gw
N=5;//порядок фільтру n=2*N=10, звідси N=n/2=5
k=-N:N;//індекси коефіцієнтів фільтру
Omegag=wg/fd;//нормирована гранична кругова частота
Ak1=Omegag/%pi*sinc(k*Omegag);// коефіцієнти фільтру НЧ
// розрахунок значення отриманої передавальної функції Gd
p=1;
for k1=-N:N
    Gd1(p,1:length(w))=Ak1(p)*cos(k1*w*T);
    p=p+1;
end
Gd=sum(Gd1,1);
plot(w/(2*%pi),Gd);//побудова Gd
//перевірка працездатності фільтру
t=0:T:1;//інтервал часу з кроком дискретизації T=1/fd
f1=5;//частота першої синусоїдальної складової
f2=40;//частота другої синусоїдальної складової
s=sin(2*%pi*f1*t)+sin(2*%pi*f2*t);// вихідний дискретизований сигнал
fs=conv(Ak1,s);//результат фільтрації
xset('window',1);
subplot(1,2,1);plot(t,s);// вихідний сигнал
subplot(1,2,2);plot((0:length(fs)-1)*T,fs);// відфільтрований сигнал
sps=dft(s,-1);//ДПФ вихідного сигналу
Ns=length(s);//довжина вихідного сигналу
Fs=(0:Ns-1)/(Ns)*fd;//діапазон частот для вихідного сигналу
Ls=floor(size(Fs,2)/2);//половина діапазону частот
//(до fd/2)для вихідного сигналу
spfs=dft(fs,-1);//ДПФ відфільтрованого сигналу
Nfs=length(fs);// довжина відфільтрованого сигналу
Ffs=(0:Nfs-1)/(Nfs)*fd;//діапазон частот для відфільтрованого сигналу
Lfs=floor(size(Ffs,2)/2);//половина діапазону частот
//(до fd/2) для відфільтрованого сигналу

```

```

xset('window',2);
plot(Fs(1:Ls),2*abs(sps(1:Ls))/Ns);//модуль ДПФ вихідного сигналу
plot(Ffs(1:Lfs),2*abs(spfs(1:Lfs))/Nfs,'r');//модуль ДПФ відфільтрованого сигналу
Важливо! В версії 5.5.x Scilab функцію dft надо підключити як зовнішню функцію dft.sci
при допомозі команди ехес. Альбо використати напряду в коді (см. help fft). Текст
функції:
// Scilab ( http://www.scilab.org/ ) - This file is part of Scilab
// Copyright (C) INRIA - 1988 - C. Bunks
//
// This file must be used under the terms of the CeCILL.
// This source file is licensed as described in the file COPYING, which
// you should have received as part of this distribution. The terms
// are also available at
// http://www.cecill.info/licences/Licence\_CeCILL\_V2-en.txt
function xf=dft(x,flag);
//xf=dft(x,flag);
//macro which computes dft of vector x
// x :input vector
// flag :indicates dft or idft
// xf :output vector
//!
n=maxi(size(x));
arg=(0:n-1);
am=-2*%pi*%i*arg'*arg/n;
if flag==1 then,
    am=-am;
end,
xf=exp(am)*matrix(x,n,1);
if flag==1 then,
    xf=xf/n;
end
endfunction

```

5 Зміст звіту

Мета і стислий зміст роботи, результати розрахунків, висновки.

Контрольні запитання

1. Критерії вікна. Функції вікна та їхні спектри.
2. Цифровий фільтр.
3. Імпульсна і передатна характеристики фільтра.
4. Порядок розрахунку цифрових фільтрів.
5. Ефект Гіббса.

Література / 1-5 /.

Додаток 5.

Д5.1. Відповідно до варіанту (табл. Д 5.1) розрахувати коефіцієнти цифрового фільтра.

Д5.2. Використовуючі стандартні функції середовища SciLab сформувати віконні функції (blackman, hamming), підрахувати згладжуючі коефіцієнти .

Д5.3. Сформувати відповідну вхідну функцію, за допомогою якої можливо перевірити роботу синтезованого фільтра.

Д5.4. Промоделювати роботу синтезованого фільтра. Зробити відповідні графіки.

Д5.5. Зробити висновки.

Таблиця Д5.1

№ варіанта	Тип фільтра	Функція вікна	Порядок фільтра	Частота вибірок (f_a)	Смуга частот f_g
1	ВЧ	Блекмана	9	80	>20
2	ПЧ	Хеммінга	11	260	10-60
3	РФ	Ганна	30	300	40-100
4	ВЧ	Ганна	19	120	>30
5	ПЧ	Хеммінга	17	200	10-50
6	РФ	Ганна	11	320	40-80

Лабораторна робота № 6

Кореляційні функції. Застосування кореляційного аналізу в інформаційних системах

1. Мета лабораторного заняття

Набуття навичок проведення розрахунку автокореляційної функції і взаємкореляційної функції, і застосування кореляційного аналізу при розв'язанні задач в інформаційних системах.

2 Вихідні дані

2.1 Набір початкових даних (додаток 6, таблиця Д 6.1).

2.2 Умови проведення дослідження.

3 Зміст лабораторного заняття

- 3.1. Про моделювати періодичний сигнал і обчислити його автокореляційну функцію і автоспектральну щільність потужності, побудувати графіки сигналів.
- 3.2. Обчислити взаємкореляційну функцію сигналів.

4 Основи розробки алгоритму і програмної реалізації

Кореляція (correlation), і її окремий випадок для центрованих сигналів – коваріація, є відомим методом аналізу сигналів. Такий аналіз використовують для детермінованих та стохастичних, дискретних та неперервних сигналів.

Неперервні кореляційні функції

Такий аналіз дозволяє кількісно порівняти ступінь схожості різних сигналів. Для цього обчислюють кореляційні функції (КФ; з англійської – correlation function, CF). КФ детермінованого сигналу з скінченною енергією – це інтеграл від добутку двох копій сигналу s , зсунутих відносно один одного на час τ :

$$\Phi_{ss}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau)dt. \quad (6.1)$$

КФ показує ступінь схожості між сигналом і його зсунутою копією – чим більше значення КФ, тим схожість сильніша. Така КФ зветься *автокореляційною* (АКФ) і володіє наступними властивостями:

1. Значення АКФ при $\tau=0$ дорівнює енергії сигналу

$$\Phi_{ss}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = E. \quad (6.2)$$

2. АКФ – парна функція свого аргументу τ :

$$\Phi_{ss}(\tau) = \Phi_{ss}(-\tau). \quad (6.3)$$

3. Значення АКФ при $\tau=0$ є максимально можливим значенням:

$$\Phi_{ss}(\tau) \leq \Phi_{ss}(0). \quad (6.4)$$

4. Зі зростанням τ АКФ сигналу з кінцевою енергією згасає:

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} \Phi_{ss}(\tau) = 0 \quad (6.5)$$

5. Коли сигнал $s(t)$ не містить особливостей у вигляді дельта-функцій, його АКФ не може мати розривів (тобто неперервна функція).

6. Коли сигнал – напруга, то розмірність його АКФ - В²с.

Обчислимо АКФ прямокутного імпульсу s довжиною $2T$, заданого виразом

$$s(t) = \begin{cases} A, & -T \leq t \leq T; \\ 0, & |t| > T. \end{cases} \quad (6.6)$$

При $0 \leq \tau \leq T$

$$\Phi_{ss}(\tau) = \int_{\tau}^T A^2 dt = A^2(T - \tau).$$

При $-T \leq \tau < 0$

$$\Phi_{ss}(\tau) = \int_0^{T+\tau} A^2 dt = A^2(T + \tau).$$

При $|\tau| > T$ $\Phi_{ss}(\tau) = 0.$

Тобто можна записати

$$\Phi_{ss}(\tau) = \begin{cases} A^2(T - |\tau|), & |\tau| \leq T \\ 0, & |\tau| > T \end{cases} \quad (6.7)$$

Графік АКФ прямокутного імпульсу показаний на рис. 6.1.

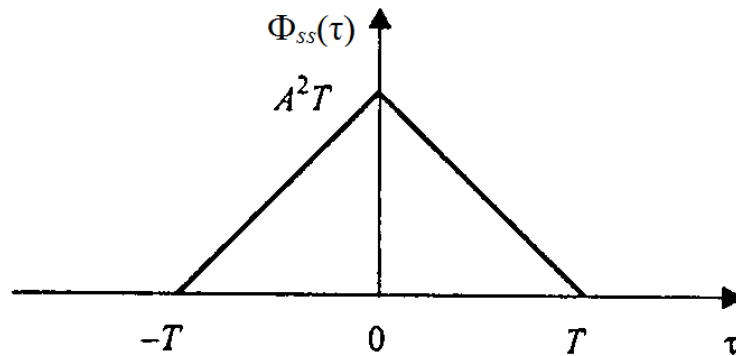


Рисунок 6.1 – Кореляційна функція прямокутного імпульсу

Для періодичного сигналу АКФ з періодом T обчислюють інакше:

$$\Phi_{ss}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s(t)s(t-\tau)dt. \quad (6.8)$$

Набір властивостей такої АКФ дещо зміниться.

1. Значення при $\tau=0$ дорівнює не енергії, а *середній потужності* сигналу, що аналізується:

$$\Phi_{ss}(0) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t)dt = P_{cp}. \quad (6.9)$$

2. Властивість парності збережеться:

$$\Phi_{ss}(\tau) = \Phi_{ss}(-\tau). \quad (6.10)$$

3. Значення АКФ при $\tau=0$ і тепер буде максимально можливим:

$$\Phi_{ss}(\tau) \leq \Phi_{ss}(0). \quad (6.11)$$

4. АКФ періодичного сигналу буде періодичною функцією з періодом, як у сигналу:

$$\Phi_{ss}(\tau + T) \leq \Phi_{ss}(\tau). \quad (6.12)$$

5. Коли сигнал не містить особливостей у вигляді дельта-функцій, його АКФ не може мати розривів (тобто неперервна функція).

6. Розмірність АКФ періодичного сигналу – квадрат розмірності сигналу (V^2 , якщо сигнал – напруга).

Обчислимо АКФ гармонічного сигналу з частотою ω_0

$$s(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Обчислимо кореляційний інтеграл з періодом $2\pi/\omega_0$:

$$\Phi_{ss}(\tau) = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) A \cos(\omega_0(t - \tau) + \varphi_0) dt = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) \quad (6.13)$$

Як можна побачити, АКФ гармонічного сигналу також є гармонічною функцією. Результат не залежить від початкової фази гармонічного сигналу (параметр φ_0 у виразі не ввійшов).

Взаємна кореляційна функція

Взаємна КФ (ВКФ; з англійської – cross-correlation function, CCF) дозволяє вимірювати аналогічну величину для зсунених екземплярів двох різних сигналів (під інтегралом – добуток двох сигналів, один з котрих затриманий на час τ):

$$\Phi_{s_1 s_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t - \tau) dt. \quad (6.14)$$

Тобто АКФ є окремим випадком ВКФ, коли сигнали однакові $s_1(t) = s_2(t) = s(t)$.

Як приклад обчислимо ВКФ прямокутного $s_1(t)$ і трикутного $s_2(t)$ імпульсів:

$$s_1(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq T; \\ 0, & t < 0, \quad t > T. \end{cases} \quad s_2(t) = \begin{cases} A \frac{t}{T}, & 0 \leq t \leq T; \\ 0, & t < 0, \quad t > T. \end{cases}$$

При $0 \leq \tau \leq T$

$$\Phi_{s_1 s_2}(\tau) = \int_{\tau}^T s_1(t) s_2(t - \tau) dt = \int_{\tau}^T A^2 \frac{t - \tau}{T} dt = \frac{A^2}{2T} (T - \tau)^2;$$

При $-T \leq \tau \leq 0$

$$\Phi_{s_1 s_2}(\tau) = \int_0^{T+\tau} s_1(t) s_2(t - \tau) dt = \int_0^{T+\tau} A^2 \frac{t - \tau}{T} dt = \frac{A^2}{2T} (T^2 - \tau^2);$$

При $|\tau| > T$

$$\Phi_{s_1 s_2}(\tau) = 0.$$

З об'єднанням результатів можна записати

$$\Phi_{s_1 s_2}(\tau) = \begin{cases} \frac{A^2}{2T}(T - \tau)^2, & 0 \leq \tau \leq T; \\ \frac{A^2}{2T}(T^2 - \tau^2), & -T \leq \tau < 0; \\ 0, & |\tau| > T. \end{cases} \quad (6.15)$$

Графік отриманої ВКФ представлено на рис. 6.2 .

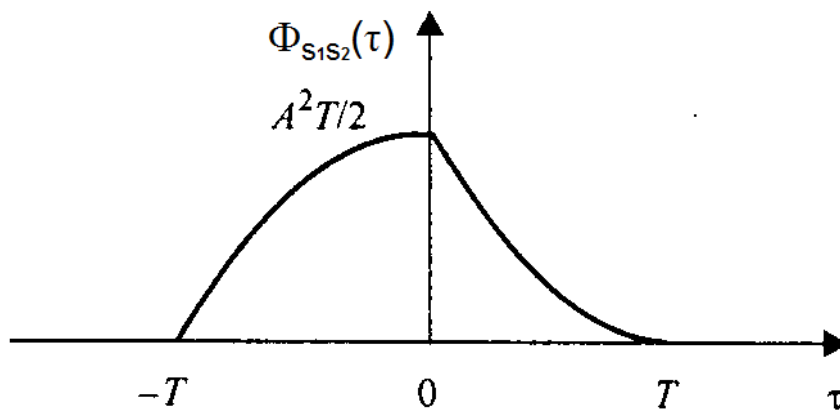


Рисунок 6.2 – ВКФ прямокутного $s_1(t)$ і трикутного $s_2(t)$ імпульсів

Властивості ВКФ дещо відрізняються від властивостей АКФ:

1. $|\Phi_{s_1 s_2}(\tau)| \leq \sqrt{E_1 E_2}$, де E_1 і E_2 – енергії сигналів $s_1(t)$ і $s_2(t)$.
2. $\Phi_{s_1 s_2}(-\tau) = \Phi_{s_2 s_1}(\tau)$, тобто зміна знаку τ рівносильна взаємній перестановці сигналів.
3. Значення ВКФ при $\tau = 0$ нічим не виділяється; максимум може бути розташований в будь-якому місті вісі τ .
4. Зі зростанням абсолютного значення τ ВКФ сигналів з скінченною енергією згасає:

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} \Phi_{s_1 s_2}(\tau) = 0.$$
5. Коли сигнали $s_1(t)$ і $s_2(t)$ не містять особливостей у вигляді дельта-функцій, їх ВКФ не може мати розривів (тобто неперервна функція).
6. Якщо сигнали – напруга, то розмірність їх ВКФ дорівнює $V^2 \cdot c$.

Іноді також використовують термін *коваріантність* між сигналами $s_1(t)$ і $s_2(t)$:

$$\sigma_{s_1 s_2} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (s_1(t) - \bar{s}_1) \cdot (s_2(t) - \bar{s}_2) dt. \quad (6.16)$$

У випадку знакозмінних величин з нульовим середнім значенням ($\bar{s}_1 = 0$ и $\bar{s}_2 = 0$) коваріантність визначається

$$\sigma_{s_1 s_2} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T s_1(t) s_2(t) dt. \quad (6.17)$$

Зустрічається і таке визначення кореляційних функцій

$$\Phi_{ss}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T s(t) s(t - \tau) dt \quad (6.18)$$

$$\Phi_{s_1 s_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T s_1(t) s_2(t - \tau) dt. \quad (6.19)$$

Для нормованої ВКФ будемо мати:

$$\Phi_{\text{норм}}(\tau) = \frac{\Phi_{s_1 s_2}(\tau)}{\sqrt{\Phi_{s_1 s_1}(0) \cdot \Phi_{s_2 s_2}(0)}}. \quad (6.20)$$

Зв'язок між кореляційними функціями і спектрами сигналів

Для визначення такого зв'язку піддамо ВКФ перетворенню Фур'є (при цьому хай сигнали $s_1(t)$ і $s_2(t)$ мають спектральні функції $\dot{S}_1(\omega)$ і $\dot{S}_2(\omega)$):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{s_1 s_2}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t - \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) e^{-j\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} s_2(t - \tau) e^{-j\omega(t - \tau)} d(t - \tau) = \dot{S}_1(\omega) \dot{S}_2^*(\omega). \end{aligned} \quad (6.21)$$

Тобто ВКФ пов'язана з перетворенням Фур'є так званим *взаємним спектром* сигналів ($\dot{S}_{12}(\omega)$ для сигналів $s_1(t)$ и $s_2(t)$) і буде добутком їх спектральних функцій, одна з котрих піддана комплексному спряженню:

$$\dot{S}_{12}(\omega) = \dot{S}_1(\omega) \dot{S}_2^*(\omega). \quad (6.22)$$

Звідси висновок: коли спектри сигналів не перекриваються, то їх взаємний спектр дорівнює нулю на всіх частотах, а тоді дорівнює нулю їх ВКФ при будь-яких часових зсувах τ . Таким чином, *сигнали з не перекриваючимися спектрами є некорельованими*.

Прийнявши $s_1(t) = s_2(t) = s(t)$, можна отримати аналогічний результат для АКФ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ss}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(t)s(t-\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau) e^{-j\omega(t-\tau)} d(t-\tau) = \dot{S}(\omega) \dot{S}^*(\omega) = |\dot{S}(\omega)|^2. \quad (6.23)$$

Тобто АКФ сигналу пов'язана перетворенням Фур'є з квадратом модулю спектральної функції, чи з енергетичним спектром сигналу. Ще один факт: АКФ сигналу не залежить від його фазового спектру. Відповідно, сигнали, амплітудні спектри котрих однакові, а фазові різні, будуть мати однакову АКФ. Ще один наслідок у тому, що по АКФ не можна відновити вихідний сигнал.

Енергетичні розрахунки в спектральній області

Як відомо, ВКФ двох сигналів пов'язана перетворенням Фур'є з їх взаємним спектром, а саме:

$$\Phi_{s_1 s_2}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{12}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (6.24)$$

Тепер підставимо в формулу значення $\tau = 0$ і після деяких перетворень отримуємо співвідношення, яке зветься *теоремою Релея*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_1(t)s_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_1(\omega) \dot{S}_2^*(\omega) d\omega \quad (6.25)$$

Якщо прийняти сигнали однаковими ($s_1(t) = s_2(t) = s(t)$), отримуємо вираз, який дозволить обчислювати енергію сигналу як у часовій, так і в частотній області (*рівність Парсеваля*):

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega. \quad (6.26)$$

Можна показати, що для періодичного сигналу у вигляді ряду Фур'є $s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{C}_k e^{j\frac{2\pi k}{T}t}$ середня потужність за період через коефіцієнти ряду буде

$$P_{cp} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\dot{C}_k|^2. \quad (6.27)$$

Тобто - середня потужність періодичного сигналу дорівнює сумі квадратів модулів його коефіцієнтів ряду Фур'є.

Теорема Вінера-Хінчина

Кореляційні функції залежать від часу. Їх можна трансформувати в частотну область.

При цьому отримують *автоспектральну щільність потужності (АСЩМ)* $\dot{S}_{ss}(\omega)$, *взаємоспектральну щільність потужності (ВСЩМ)* $\dot{S}_{s_1s_2}(\omega)$. Справедливо і зворотнє перетворення:

$$\begin{aligned}\dot{S}_{ss}(\omega) &= F(\Phi_{ss}(\tau)) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ss}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau \\ \dot{S}_{s_1s_2}(\omega) &= F(\Phi_{s_1s_2}(\tau)) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{s_1s_2}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ \Phi_{ss}(\tau) &= F^{-1}(\dot{S}_{ss}(\omega)) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{ss}(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega \\ \Phi_{s_1s_2}(\tau) &= F^{-1}(\dot{S}_{s_1s_2}(\omega)) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{s_1s_2}(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega\end{aligned}\quad (6.28)$$

Таким чином, між кореляційними функціями і спектральними щільностями наявні такі перетворення (*теорема Вінера – Хінчина*).

$$\text{АКФ } \Phi_{ss}(\tau) \Leftrightarrow \dot{S}_{ss}(\omega) \text{ АСЩМ}$$

$$\text{ВКФ } \Phi_{xy}(\tau) \Leftrightarrow S_{s_1s_2}(\omega) \text{ ВСЩМ}$$

Рівність Парсеваля встановлює, що АСЩМ дорівнює квадрату амплітудного спектру, поділеного на інтервал спостереження.

$$S_{ss}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\dot{S}(\omega)|^2}{2T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \dot{S}(\omega) \cdot \dot{S}^*(\omega). \quad (6.29)$$

Аналогічно для ВКФ:

$$\dot{S}_{s_1s_2}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \cdot \dot{S}_1(\omega) \cdot \dot{S}_2^*(\omega). \quad (6.30)$$

Використання теореми Вінера-Хінчина

Функції перетворення в часовій і спектральній областях наведені в табл. 6.1.

Для визначення кореляційних коефіцієнтів є два шляхи. По функції $s(t)$, що залежить від часу, з допомогою перетворення Фур'є обчислюють спектральну функцію $\dot{S}(\omega)$. Тобто стає відомим амплітудний спектр.

Тепер можна отримати АСЩМ.

По функції $s(t)$, що залежить від часу, обчислюють відразу АКФ.

Таблиця 6.1. Трансформації між функціями часової і спектральної областей.

Часова область	Спектральна область
$s(t)$ $s(t) = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ $\Phi_{ss}(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{ss}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$ $\Phi_{ss}(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) s(t-\tau) dt$	$\dot{S}(\omega)$ $\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$ $\dot{S}_{ss}(\omega) = \frac{ \dot{S}(\omega) ^2}{2T}$ $\dot{S}_{ss}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{ss}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$

Виділення корельованих складових сигналів

Хай на сигнал s_0 , додаються завади $S_1(t)$ і $S_2(t)$:

$$\begin{aligned} s_1(t) &= s_0 + S_1(t) \\ s_2(t) &= s_0 + S_2(t) \end{aligned} \quad (6.31)$$

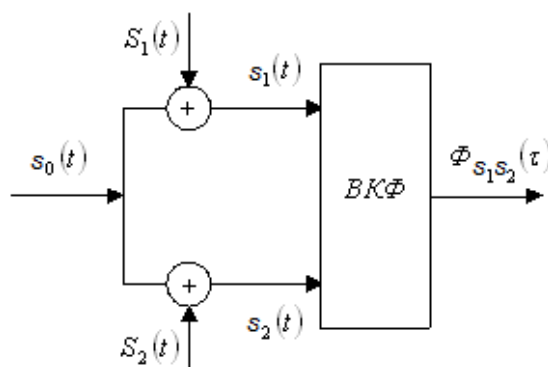


Рисунок 6.3 – Виділення корельованих складових сигналу.

$s_0(t)$ – смодельований вхідний сигнал;

$S_1(t), S_2(t)$ – некорельовані завади;

$s_1(t), s_2(t)$ – результуючі сигнали;

$\Phi_{s_1 s_2}(\tau)$ – ВКФ.

Знайдемо ВКФ:

$$\Phi_{s_1 s_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T s_1(t) s_2(t-\tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (s_0(t) + S_1(t))(s_0(t-\tau) + S_2(t-\tau)) dt =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[\int_{-T}^T (s_0(t) + s_0(t - \tau)) dt + \int_{-T}^T S_1(t) S_2(t - \tau) dt \right] + \\ + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \left[\int_{-T}^T S_1(t) x_0(t - \tau) dt + \int_{-T}^T S_2(t - \tau) x_0(t) dt \right].$$

Приймемо, що $S_1(t)$ і $S_2(t)$ не мають постійної складової, тоді

$$\Phi_{s_1 s_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T s_0(t) s_0(t - \tau) dt.$$

З результатів видно, що ВКФ не залежить від завад, тобто при обчисленні взаємної кореляції двох сигналів зберігаються тільки корельовані складові, а шум в значному ступеню усувається.

Дискретні кореляційні функції

Згадаємо деякі положення математичної статистики.

Хай для послідовностей $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$, де $n = \overline{1, N}$, відомі середні значення:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n, \quad \bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n, \quad (6.32)$$

і дисперсії:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})^2, \quad \sigma_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (y_n - \bar{y})^2. \quad (6.33)$$

Мерою зв'язку цих послідовностей є **коваріантність** σ_{xy} :

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y}). \quad (6.34)$$

У випадку знакозмінної величини, тобто $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = 0$:

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n y_n. \quad (6.35)$$

Коефіцієнтом кореляції двох випадкових величин є **нормована коваріантність**:

$$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}, \quad -1 < r < 1. \quad (6.36)$$

Послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$, можуть бути отримані як вибірка, що залежить від часу а саме $x(t)$ і $y(t)$, тобто. $x_n = x(nT)$ і $y_n = y(nT)$, де T – період дискретизації.

Можна також визначити функцію, що залежить від затримки kT . Вона зветься **взаємкореляційною функцією (ВКФ)** і може бути записана в різних формах:

$$\Phi(kT) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(nT)y((n-k)T), \quad (6.37)$$

$$\Phi(kT) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x(n)y(n-k), \quad (6.38)$$

$$\Phi_{xy}(kT) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n y_{n-k}. \quad (6.39)$$

Кореляція **не залежить** від обраної нульової точки на вісі часу, тому:

$$\begin{aligned} \sum x_n y_{n-k} &= \sum x_{n+k} y_n; \\ \sum x_n y_{n+k} &= \sum x_{n-k} y_n. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Якщо замість y_n затримати x_n , то ВКФ дзеркально відображається:

$$\Phi_{xy}(kT) = \Phi_{xy}(-kT). \quad (6.41)$$

Можливе також вивчення залежності певного сигналу від його попередніх значень, у такому випадку отримуємо **автокореляційну функцію (АКФ)**:

$$\Phi_{xx}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n x_{n-k}, \quad \Phi_{yy}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N y_n y_{n-k}. \quad (6.42)$$

Приклад:

Надане: $\{x_n\} = \{1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 2\}$, $\{y_n\} = \{4 \ 2 \ 1\}$.

Знайти: $\Phi_{xx} - ?$, $\Phi_{yy} - ?$, $\Phi_{xy} - ?$.

Будемо вважати, що послідовності не періодичні, тобто тоді зліва і справа можна додавати довільну кількість нулів. Також вважаємо, що для $k < 0$ зсув відбувається вліво, а для $k > 0$ – зсув відбувається вправо на k позицій.

Для Φ_{xx}

$$k = -5: \quad \Phi_{xx}(-5) = \frac{1}{5} (1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0) = 0;$$

$$k = -4: \quad \Phi_{xx}(-4) = \frac{1}{5} (1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0) = 0.4;$$

$$k = -3: \quad \Phi_{xx}(-3) = \frac{1}{5}(1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0) = 1.6;$$

$$k = -2: \quad \Phi_{xx}(-2) = \frac{1}{5}(1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0) = 3.4;$$

$$k = -1: \quad \Phi_{xx}(-1) = \frac{1}{5}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 0) = 5.6;$$

$$k = 0: \quad \Phi_{xx}(0) = \frac{1}{5}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2) = 6.8;$$

$$k = 1: \quad \Phi_{xx}(1) = \frac{1}{5}(1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot 4) = 5.6;$$

$$k = 2: \quad \Phi_{xx}(2) = \frac{1}{5}(1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3) = 3.4;$$

$$k = 3: \quad \Phi_{xx}(3) = \frac{1}{5}(1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2) = 1.6;$$

$$k = 4: \quad \Phi_{xx}(4) = \frac{1}{5}(1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 1) = 0.4;$$

$$k = 5: \quad \Phi_{xx}(5) = \frac{1}{5}(1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0) = 0;$$

Для Φ_{yy}

$$k = -3: \quad \Phi_{yy}(-3) = \frac{1}{3}(4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0) = 0;$$

$$k = -2: \quad \Phi_{yy}(-2) = \frac{1}{3}(4 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0) = 1.3333;$$

$$k = -1: \quad \Phi_{yy}(-1) = \frac{1}{3}(4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = 3.3333;$$

$$k = 0: \quad \Phi_{yy}(0) = \frac{1}{3}(4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1) = 7;$$

$$k = 1: \quad \Phi_{yy}(1) = \frac{1}{3}(4 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2) = 3.3333;$$

$$k = 2: \quad \Phi_{yy}(2) = \frac{1}{3}(4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4) = 1.3333;$$

$$k = 3: \quad \Phi_{xx}(3) = \frac{1}{3}(4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0) = 0;$$

Для Φ_{xy}

$$k = -5: \quad \Phi_{xy}(-5) = \frac{1}{5}(1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0) = 0.$$

$$k = -4: \quad \Phi_{xy}(-4) = \frac{1}{5}(1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0) = 0;$$

$$k = -3: \quad \Phi_{xy}(-3) = \frac{1}{5}(1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0) = 0;$$

$$k = -2: \quad \Phi_{xy}(-2) = \frac{1}{5}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0) = 0.2;$$

$$k = -1: \quad \Phi_{xy}(-1) = \frac{1}{5}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0) = 0.8;$$

$$k = 0: \quad \Phi_{xy}(0) = \frac{1}{5}(1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0) = 2.2;$$

$$k = 1: \quad \Phi_{xy}(1) = \frac{1}{5}(1 \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = 3.6;$$

$$k = 2: \quad \Phi_{xy}(2) = \frac{1}{5}(1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1) = 4.4;$$

$$k = 3: \quad \Phi_{xy}(3) = \frac{1}{5}(1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2) = 4;$$

$$k = 4: \quad \Phi_{xy}(4) = \frac{1}{5}(1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 4) = 1.6;$$

$$k = 5: \quad \Phi_{xy}(5) = \frac{1}{5}(1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0) = 0.$$

Графіки відповідних кореляційних функцій наведені на рис. 6.4. Для побудови використані функції **plot(Фхх,'o')** і **plot2d3(Фхх)**

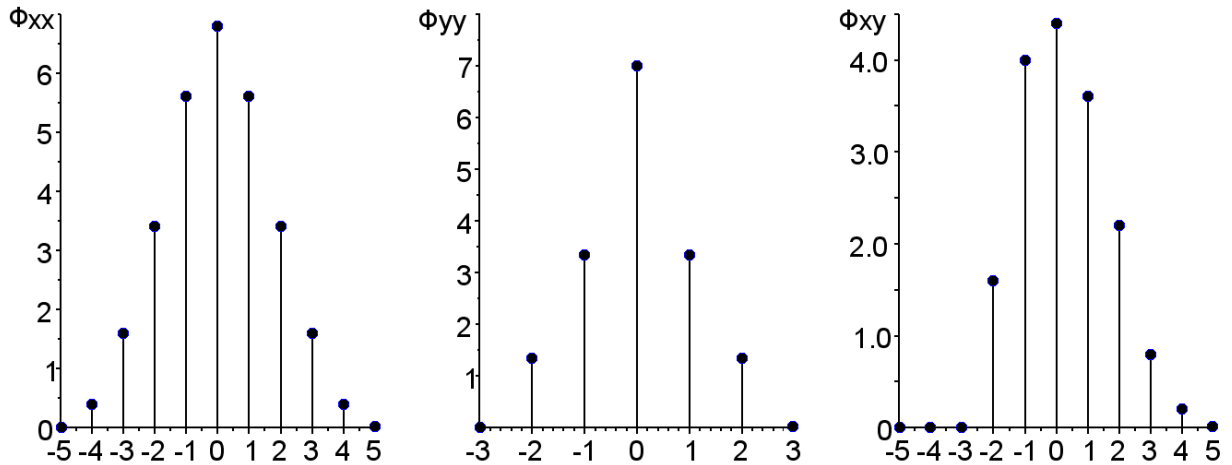


Рисунок 6.4 – Графіки кореляційних функцій

В Scilab для отримання автокореляційної функції послідовності $x=[1\ 1\ 1\ 1]$ можна використати фрагмент коду

```
-->x=[1 1 1 1];
//«перевертання» сигналу x, щоб отримати x1
-->N=size(x,2);for k=1:N;x1(k)=x(N-k+1);end
//можна також використати функцію flipr(x)
-->conv(x,x1)//згортка вихідного і «перевернутого» сигналів
ans =
    1.  2.  3.  4.  3.  2.  1.
-->conv(x,x1)/N // з урахуванням множника 1/N, де N=4
//– довжина вихідної послідовності
ns =
    0.25  0.5  0.75  1.  0.75  0.5  0.25
```

Для випадку періодичних послідовностей автокореляційну функцію розглядають на інтервалі, що кратний періоду послідовності. Для отримання АКФ використовується кругова згортка, що реалізована функціями *fft* чи *dft*. Використання функції *corr* в Scilab передбачає, що за межами інтервалу, що розглядаємо, аналізована функція дорівнює нулю, що призводить до згасання АКФ. Нижче - код на Scilab та отримані АКФ.

```
clear();
x=sin(0:2*%pi/100:6*%pi);//синусоїдальний сигнал (три
//періоди при частоті дискретизації 100/2π Гц)
N=length(x);//довжина сигналу – кількість відліків
z=corr(x,x,N)//автокореляційна функція (для
```

//обчислення АКФ можна використати функцію `xcorr` бо //середнє значення синусоїди на фрагменті, //кратном його періоду, дорівнює 0).

`subplot(1,3,1);`

`plot(0:2*%pi/100:6*%pi,z);`*//графік АКФ, отриманий з допомогою `xcorr`*

`for k=1:N;`

`x1(1,k)=x(N-k+1);`*// «перевертання» сигналу `x`*

`end`

`z1=conv(x,x1)/N;`*//лінійна згортка сигналів `x` і `x1`*

`subplot(1,3,2);`

`plot((-6*%pi:2*%pi/100:6*%pi),z1);`*//графік АКФ, що отримано завдяки функції `conv`*

`zf=fft(x,-1);`*//перетворення Фурє вихідного сигналу (отрим_спектральної функції)*

`zf=fft(x1,-1);`*// перетворення Фурє «перевернутого»*

//сигналу (отримання спектральної функції)

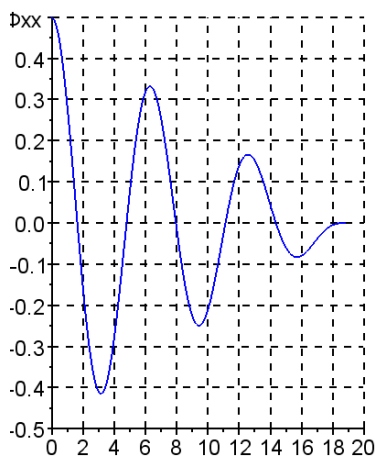
`zff=zf.*zf;`*//добуток спектральних функцій*

`z2=fft(zff,1);`*//обернене перетворення Фурє*

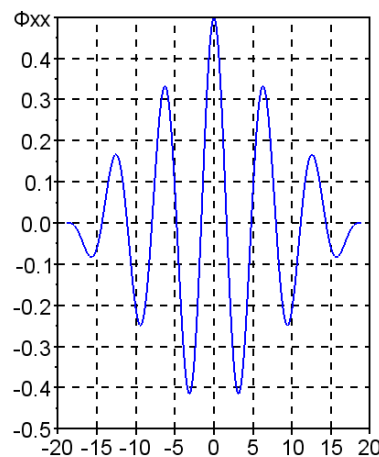
// отримання АКФ з допомогою кругової згортки

`subplot(1,3,3);`

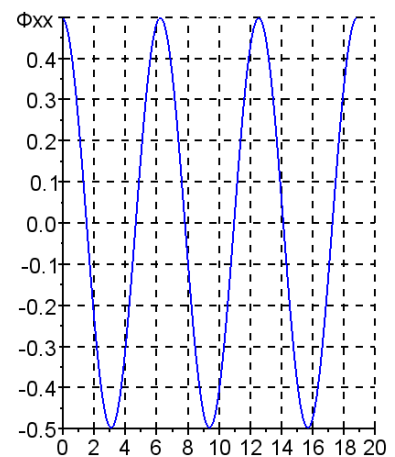
`plot(0:2*%pi/100:6*%pi,z2);`*// графік АКФ, отрим_ з допомогою кругової згортки*



а



б



в

Рисунок 6.5 – АКФ періодичних сигналів, отримані з допомогою різних функцій: а – з `corr`, б – з `conv` (лінійна згортка), в – з `fft` (кругова згортка).

Нехай послідовності вважаються періодичними $\{x_n\} = \{1\ 2\ 3\ 4\ 2\}$, $\{y_n\} = \{4\ 2\ 1\}$.

В цьому випадку автокореляційні функції будуть:

Для Φ_{xx}

$$k = -5: \quad \Phi_{xx}(-5) = \frac{1}{5}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2) = 6.8;$$

$$k = -4: \quad \Phi_{xx}(-4) = \frac{1}{5}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1) = 6;$$

$$k = -3: \quad \Phi_{xx}(-3) = \frac{1}{5}(1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3) = 5;$$

$$k = -2: \quad \Phi_{xx}(-2) = \frac{1}{5}(1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2) = 5;$$

$$k = -1: \quad \Phi_{xx}(-1) = \frac{1}{5}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1) = 6;$$

$$k = 0: \quad \Phi_{xx}(0) = \frac{1}{5}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2) = 6.8;$$

$$k = 1: \quad \Phi_{xx}(1) = \frac{1}{5}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1) = 6;$$

$$k = 2: \quad \Phi_{xx}(2) = \frac{1}{5}(1 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 3) = 5;$$

$$k = 3: \quad \Phi_{xx}(3) = \frac{1}{5}(1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot 2) = 5;$$

$$k = 4: \quad \Phi_{xx}(4) = \frac{1}{5}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1) = 6;$$

$$k = 5: \quad \Phi_{xx}(5) = \frac{1}{5}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2) = 6.8;$$

Для Φ_{yy}

$$k = -3: \quad \Phi_{yy}(-3) = \frac{1}{3}(4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1) = 7;$$

$$k = -2: \quad \Phi_{yy}(-2) = \frac{1}{3}(4 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2) = 4.6667;$$

$$k = -1: \quad \Phi_{yy}(-1) = \frac{1}{3}(4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4) = 4.6667;$$

$$k = 0: \quad \Phi_{yy}(0) = \frac{1}{3}(4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1) = 7;$$

$$k = 1: \quad \Phi_{yy}(1) = \frac{1}{3}(4 \cdot 1 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2) = 4.6667;$$

$$k = 2: \quad \Phi_{xx}(2) = \frac{1}{3}(4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4) = 4.6667;$$

$$k = 3: \quad \Phi_{xx}(3) = \frac{1}{3}(4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1) = 7;$$

Графіки АКФ для періодичних сигналів представлені нижче (рис. 6.6).

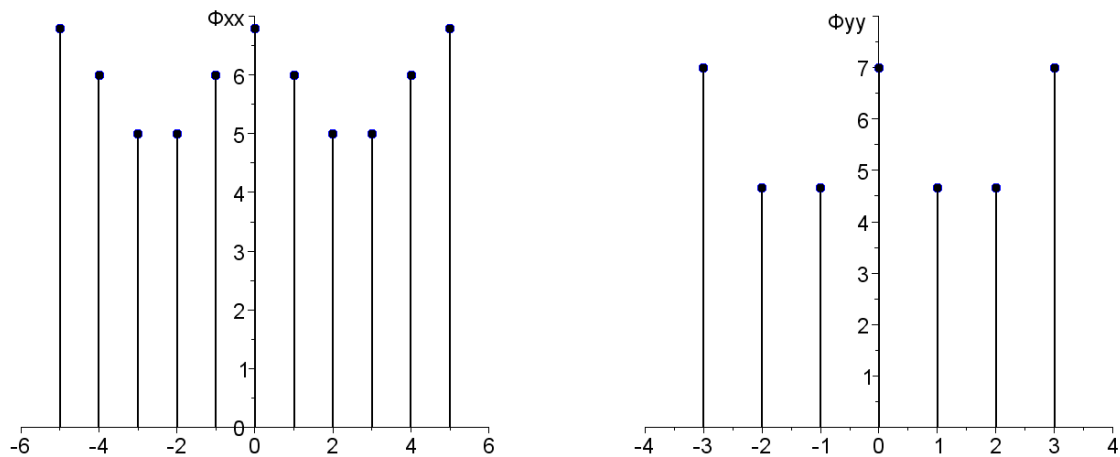


Рисунок 6.6 – Графіки АКФ для періодичних сигналів

Як можна побачити, АКФ періодичного сигналу також періодичні і з тим же періодом, що і сам сигнал.

5 Зміст звіту

Мета і стислий зміст роботи, результати розрахунків, висновки.

Контрольні запитання.

1. Коефіцієнти кореляції, нормовані коефіцієнти кореляції.
2. Дискретні кореляційні функції.
3. Безперервні кореляційні функції.
4. АКФ, ВКФ. Їхні властивості.
5. АСЦП, ВСЦП.
6. Кореляційний аналіз у інформаційних системах. Вимір часу затримки, визначення місця розташування, вимір швидкості.

Література / 1-5 /.

Додаток 6.

Д 6.1. Промодельовати періодичний сигнал і обчислити його АКФ і автоспектральну щільність потужності (АСЩП). Побудувати графіки сигналів.

Д 6.2. Обчислити ВКФ 2-х сигналів згідно з варіантом (табл. Д 6.1.) і АКФ сигналу $X(t)$, які отримані таким чином (рис. Д 6.1).

Д 6.3. Навести графіки. Зробити висновки.

Д 6.4. Порівняти результати пп. Д6.1 і Д6.2. Зробити висновки.

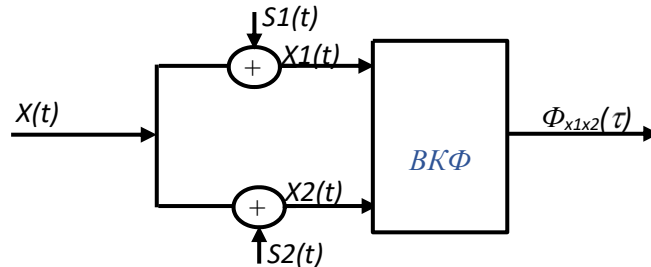


Рисунок Д 6.1.

На рис. Д.6.1: $X(t)$ - вхідний сигнал; $S1(t), S2(t)$ - некорельовані завади, що формуються за допомогою $random()$; $X1(t), X2(t)$ - результуючі сигнали; $\Phi_{x1x2}(\tau)$ - ВКФ.

Таблиця Д 6.1.

№	$X(t)$	$S1(t)$		$S2(t)$			
		тип	парам.		тип	парам.	
1	$A1\sin(2\pi ft + \varphi)$;	<i>beta</i>	2	1	<i>norm</i>	0	0.2
2	$A1\cos(2\pi ft + \varphi)e^{t/T}$;	<i>norm</i>	0	0.3	<i>exp</i>	0.08	
3	$A1\sin(2\pi f1t + \varphi1) + A2\sin(2\pi f2t + \varphi2)$;	<i>Poisson</i>	0.05		<i>beta</i>	1.5	3.6
4	$A1\sin(2\pi ft + \varphi) + C$;	<i>rayl</i>	0.3		<i>logn</i>	0	0.6
5	$A1\cos(2\pi f1t) + A2\sin(2\pi f2t + \varphi)$;	<i>Gamma</i>	1	0.6	<i>Binomial</i>	4	0.07
6	$A1\cos(2\pi ft + \varphi) + C$;	<i>Exp</i>	0.8		<i>poiss</i>	1	

Лабораторна робота № 7

Застосування кореляційного аналізу в інформаційних системах

1. Мета лабораторного заняття

Набуття навичок проведення розрахунку взаємкореляційної функції, і застосування кореляційного аналізу при розв'язанні задач в інформаційних системах.

2 Вихідні дані

2.1 Набір початкових даних (додаток 6, таблиця Д 6.1).

2.2 Умови проведення дослідження.

3 Зміст лабораторного заняття

3.1. Промодлювати періодичні сигнали, побудувати графіки сигналів.

3.2. Обчислити взаємкореляційну функцію сигналів.

4 Основи розробки алгоритму і програмної реалізації

Взаємна кореляційна функція

Взаємна КФ (ВКФ; з англійської – cross-correlation function, CCF) дозволяє вимірювати аналогічну величину для зсунених екземплярів двох *різних* сигналів (під інтегралом – добуток двох сигналів, один из котрих затриманий на час τ):

$$\Phi_{s_1 s_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(t - \tau) dt. \quad (7.1)$$

Тобто АКФ є окремим випадком ВКФ, коли сигнали однакові $s_1(t) = s_2(t) = s(t)$.

Як приклад обчислимо ВКФ прямокутного $s_1(t)$ і трикутного $s_2(t)$ імпульсів:

$$s_1(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq T; \\ 0, & t < 0, \quad t > T. \end{cases} \quad s_2(t) = \begin{cases} A \frac{t}{T}, & 0 \leq t \leq T; \\ 0, & t < 0, \quad t > T. \end{cases}$$

При $0 \leq \tau \leq T$

$$\Phi_{s_1 s_2}(\tau) = \int_{\tau}^T s_1(t) s_2(t - \tau) dt = \int_{\tau}^T A^2 \frac{t - \tau}{T} dt = \frac{A^2}{2T} (T - \tau)^2;$$

При $-T \leq \tau \leq 0$

$$\Phi_{s_1 s_2}(\tau) = \int_0^{T+\tau} s_1(t) s_2(t - \tau) dt = \int_0^{T+\tau} A^2 \frac{t - \tau}{T} dt = \frac{A^2}{2T} (T^2 - \tau^2);$$

При $|\tau| > T$

$$\Phi_{s_1 s_2}(\tau) = 0.$$

З об'єднанням результатів можна записати

$$\Phi_{s_1 s_2}(\tau) = \begin{cases} \frac{A^2}{2T}(T - \tau)^2, & 0 \leq \tau \leq T; \\ \frac{A^2}{2T}(T^2 - \tau^2), & -T \leq \tau < 0; \\ 0, & |\tau| > T. \end{cases} \quad (7.2)$$

График отриманої ВКФ представлено на рис.7.1 .

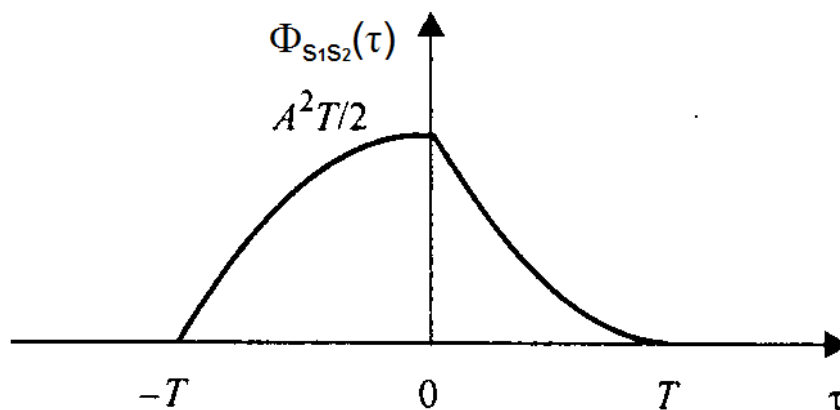


Рисунок 7.1 – ВКФ прямокутного $s_1(t)$ і трикутного $s_2(t)$ імпульсів

Властивості ВКФ дещо відрізняються від властивостей АКФ:

1. $|\Phi_{s_1 s_2}(\tau)| \leq \sqrt{E_1 E_2}$, де E_1 і E_2 – енергії сигналів $s_1(t)$ і $s_2(t)$.
2. $\Phi_{s_1 s_2}(-\tau) = \Phi_{s_2 s_1}(\tau)$, тобто зміна знаку τ рівносильна взаємній перестановці сигналів.
3. Значення ВКФ при $\tau = 0$ нічим не виділяється; максимум може бути розташований в будь-якому місці вісі τ .
4. Зі зростанням абсолютного значення τ ВКФ сигналів з скінченною енергією згасає:

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} \Phi_{s_1 s_2}(\tau) = 0.$$
5. Коли сигнали $s_1(t)$ і $s_2(t)$ не містять особливостей у вигляді дельта-функцій, їх ВКФ не може мати розривів (тобто неперервна функція).
6. Якщо сигнали – напруга, то розмірність їх ВКФ дорівнює V^2c .

5 Зміст звіту

Мета і стислий зміст роботи, результати розрахунків, висновки.

Контрольні запитання.

1. Коефіцієнти кореляції, нормовані коефіцієнти кореляції.
2. Дискретні кореляційні функції.
3. Безперервні кореляційні функції.
4. АКФ, ВКФ. Їхні властивості.
5. АСЦП, ВСЦП.
6. Кореляційний аналіз у інформаційних системах. Вимір часу затримки, визначення місця розташування, вимір швидкості.

Література / 1-5 /.

Лабораторна робота № 8

Підрахунок об'єктів на бінарному зображенні

1. Мета лабораторного заняття

Набуття навичок підрахунку об'єктів на бінарному зображенні при розв'язанні задач в інформаційних системах.

2 Вихідні дані

- 2.1 Набір початкових даних.
- 2.2 Умови проведення дослідження.

3 Зміст лабораторного заняття

- 3.1. На основі прикладу реалізувати програму підрахунку об'єктів на бінарному зображенні.
- 3.2. Для тестових даних використати довільну матрицю 20x20.
- 3.3. При необхідності виправити алгоритм таким чином, щоб підрахунок об'єктів йшов по порядку.

4 Основи розробки алгоритму і програмної реалізації

На практиці розпізнавання образів часто виконують шляхом наступної послідовності (див. рис. 8.1): отримання зображення, бінарізація, морфологія, розмітка, збирання ознак. На рисунку 8.1 зображені фрагменти зображення після бінарізації і серії морфологічних операцій (рис.8.1, а) і результат розмітки (рис. 8.1, б).

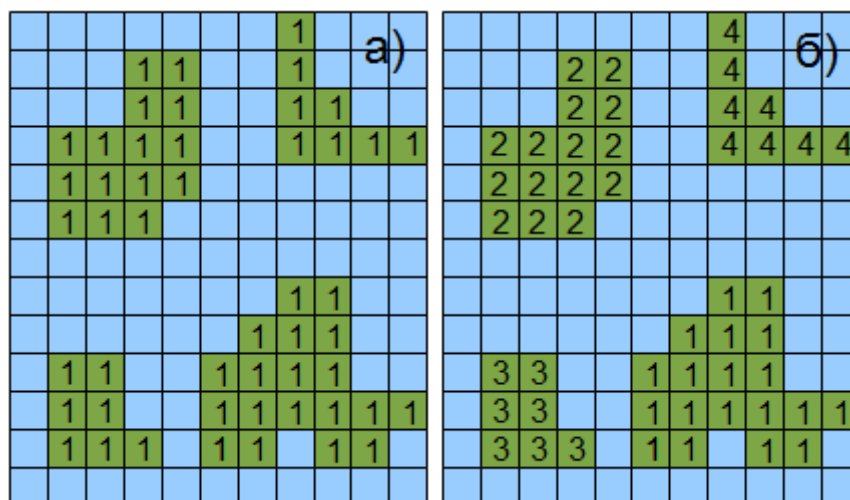


Рисунок 8.1 — а) бінарізоване зображення, б) зображення з розміченими об'єктами.

Алгоритм розміщення з одним проходом (без рекурсії)

Ідея алгоритму у використанні кутової АВС-маски (рис. 8.2)



Рис. 8. 2 — АВС маска і напрям послідовного сканування зображення

Прохід по зображенню даною маскою здійснюється зліва-направо і зверху- донизу. Вважають, що за границею зображення об'єктів нема, тому, коли туди попадають В чи С — це потребує додаткової перевірки при скануванні. На рисунку 8.3 зображені 5 можливих позицій маски на зображенні.

Позиція під номером 0, коли не розмічені всі три компоненти маски — в цьому випадку пропускають піксель. Далі розглянемо наступні варіанти, що виникають при обході:

1. Позиція під номером 1, коли помічений тільки елемент А — створюється новий об'єкт і — новий номер.
2. Позиція під номером 2, коли помічений елемент В — помічаємо поточний піксель А міткою, що розташована в В.
3. Позиція під номером 3, коли помічений С — помічаємо поточний піксель А міткою, що розташована в С.
4. Позиція під номером 4, тоді мітки (номери об'єктів) В і С пов'язані — тобто еквівалентні і піксель А може бути помічений або як В або як С. Ми будемо діяти так — у випадку, коли В не дорівнює С то перенумеруємо всі оброблені пікселі помічені як С в мітку В.



Рисунок 8. 3 — П'ять можливих позицій АВС-маски

Реалізація:

Створимо тестові дані - матрицю Image з нулів та одиниць.

```
Image = [0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0;
         0 0 0 1 1 0 0 1 0 0 0;
         0 0 0 1 1 0 0 1 1 0 0;
         0 1 1 1 1 0 0 1 1 1 1;
         0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0;
         0 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0;
         0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
         0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0;
         0 0 0 0 0 0 1 1 1 0 0;
         0 1 1 0 0 1 1 1 1 0 0;
         0 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1;
         0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0;
         0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0]
Matplot(Image*255) // Огляд результату
[m,n]=size(Image); // Визначення горизонтального і вертикального розміру
матриці
km = 0; kn = 0; // Службові змінні
cur = 1; // Змінна для підрахунку об'єктів
```

Проведемо серію перевірок.

```
// Цикл по пікселям зображення
for i = 1:1:m
  for j = 1:1:n
    kn = j - 1;
    if kn <= 0 then
      kn = 1;
      B = 0;
    else
      B = Image(i,kn); // (рисунок 8.2)
    end
    km = i - 1;
    if km <= 0 then
      km = 1;
      C = 0;
    else
      C = Image(km,j); // (рисунок 8.2)
    end
    A = Image(i,j); // (рисунок 8.2)
    if A == 0 then // Коли в поточному пікселі пусто — нічого не робимо
      elseif B == 0 & C == 0 then // Коли навкруги нашого пікселя пусто, а він не
пустий — то це привід визначитись з новим об'єктом
        cur = cur + 1;
        Image(i,j) = cur;
      elseif B ~= 0 & C == 0 then
        Image(i,j) = B;
      elseif B == 0 & C ~= 0 then
        Image(i,j) = C;
      elseif B ~= 0 & C ~= 0 then
        if B == C then
```

```

    Image(i,j) = B;
else
    Image(i,j) = B;
    Image(Image == C) = B;
end
end
end
end
end

```

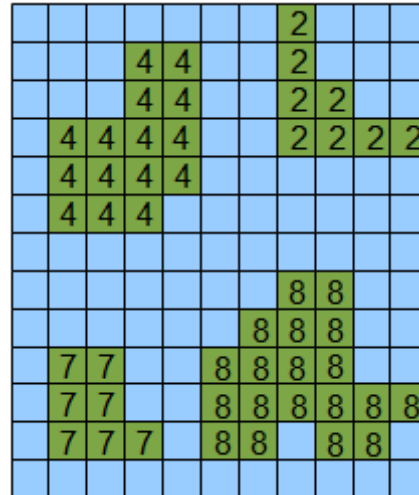


Рисунок 8. 4 — Результат виконання коду

Результатом виконання коду буде розмічена матриця (див. рис.8.4). Недолік цього алгоритму — номери об’єктів не послідовні.

5 Зміст звіту

Мета і стислий зміст роботи, результати розрахунків, висновки.

Контрольні запитання.

1. Види алгоритмів підрахунку об’єктів
2. Основні етапи розпізнавання образів на зображенні.

Література / 1-7/.

6. РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна література

1. Обробка випадкових сигналів та процесів: навч. посібник / А. Н. Беседін, А. А. Зеленський, Г. П. Кулемін, В. В. Лукин; под ред. : А. А. Зеленського, Г. П. Кулеміна. – Х. : ХАИ, 2017. – 469 с.
2. Рибальченко М.О., Єгоров О.П., Зворикін В.Б. Цифрова обробка сигналів. Навчальний посібник. – Дніпро: НМетАУ, 2018. – 79 с.

3. Основи та методи цифрової обробки сигналів: від теорії до практики: навч. посібник / уклад. : Ю.О. Ушенко, М.С. Гавриляк, М.В. Талах, В.В. Дворжак. – Чернівці : Чернівецький нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2021. – 308 с.

4. Теорія інформації та обробка сигналів 1: навч. посіб. для студентів спеціальності 171 «Електроніка» освітньої програми «Електронні компоненти і системи»/ КПІ ім. Ігоря Сікорського: уклад.: Ю. С. Ямненко, К. С. Клен. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 120 с.

Додаткова література

5. Цифрова обробка аудіо- та відеоінформації у мультимедійних системах: Навчальний посібник / О.В. Дробик, В.В. Кідалов, В.В. Коваль, Б.Я. Костік, В.С. Лазебний, Г.М. Розорінов, Г.О. Сукач. – К.: Наукова думка, 2020. – 144 с.

6. Наконечний А. Й. Обробка сигналів : навч. посіб. / А. Й. Наконечний, Р. І. Стахів, Р. А. Наконечний. Нац. ун-т «Львівська політехніка». – Львів : Растр-7. – 2017. – 217 с.

7. Gonzales R.C., Woods R.E. Digital image processing. – Pearson Education, Inc, publishing as Prentis Holl. – 2017. – 1192 p.