

**СИНТЕЗ ТА МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНОЇ  
ЗА ШВИДКОДІЄЮ СЛІДКУЮЧОЇ СИСТЕМИ**

С.О. Бобріков, Л.Л. Прокоф'єва, А.А. Савельєв

---

Національний університет «Одеська політехніка»,  
Проспект Шевченка, 1, Одеса, 65044, Україна; E-mail:  
bobrikov1932@gmail.com, luleopro@gmail.com, sanp277@gmail.com

---

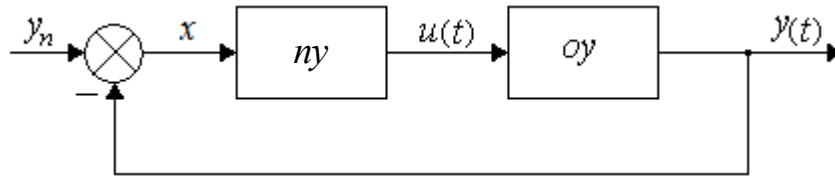
Запропоновано метод побудови і розрахунку структурної схеми системи управління об'єктом, який конструктивно утворено послідовним з'єднанням аперіодичної ланки першого порядку та інтегратором, а формалізовано описано математичною моделлю у вигляді добутку відповідних передаточних функцій. Поширеною типовою реалізацією зазначеного об'єкта управління може слугувати електричний двигун з джерелом вхідної напруги. Запропонований метод дозволяє побудувати систему управління, близьку до оптимальної за швидкодією. Причому оптимальність, в даному випадку, визначається тим, що об'єкт в процесі функціонування вмикається в релейному режимі. Перехідний процес для визначеного об'єкта управління, в умовах оптимального режиму, являє собою два етапи: розгону та гальмування, які здійснюються за максимальних значень вхідного впливу — тобто вхідної напруги. Для визначення моментів перемикання вхідного впливу (сигналу) використано метод фазової площини, а фазовими координатами при цьому виступають: по осі абсцис — вихідна величина (для наведеного прикладу — частота обертання валу двигуна), а по осі ординат — швидкість зміни вихідної величини (або похідна від частоти обертання валу двигуна, тобто відповідне прискорення). Розроблено структурну схему системи управління, що забезпечує розгін та гальмування об'єкта при максимальних значеннях вхідного сигналу ( $U_{\max}^+$  та  $U_{\max}^-$ ). Оптимальність перехідного процесу забезпечується тим, що похибка управління порівнюється з сигналом, що надходить від ланки, налаштованої лінії перемикання. Наведено формули обчислення лінії перемикання на фазовій площині, а також програму розрахунку лінії перемикання, написану в середовищі MATLAB у форматі m-file. Проведено моделювання системи у пакеті MATLAB-Simulink, що підтверджує оптимальність процесу управління.

**Ключові слова:** структурна схема, система управління, передаточна функція,

**Вступ.** Розглянемо оптимальні системи, в яких критерієм оптимальності є мінімальний час відпрацювання системою заданого сигналу. В якості об'єкта управління приймаємо виконавчий пристрій (наприклад, двигун постійного струму) з підсилювачем потужності. Вважаємо, що рівняння об'єкта управління (тобто його математична модель) має вигляд:

$$T_0 \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} = W_0 u(t), \quad (1)$$

Функціональну схему замкнутої оптимальної за швидкодією системи наведено на рис.1. Приймаємо умову, що об'єкт управління ОУ описується диференціальним рівнянням (1) і що корені характеристичного рівняння речові та недодатні.



**Рис. 1.** Функціональна схема замкнутої системи.  
 $ny$  — управляючий пристрій;  $ou$  — об'єкт управління

Відповідно до теореми про  $n$ -інтервалів [1] для забезпечення максимальної швидкодії в такій системі сигнал управління  $u(t)$  повинен мати два гранично допустимі значення:  $U_{\max}^+$  та  $U_{\max}^-$ , а перехідний процес при цьому складається з двох частин: розгону та гальмування.

Задачею оптимального за швидкістю управління в постановці, яка розглядається, є переведення вихідного сигналу (або — в термінах теорії управління — «вихідної координати») об'єкта (для наведеного прикладу — частоти обертання валу двигуна) з початкового стану (наявної частоти обертання на початок моменту управління) в кінцевий стан (до бажаного значення частоти обертання за наслідками управління) за мінімальний час. Алгоритм оптимального управління зводиться до визначення моментів перемикання сигналу управління  $u(t)$  зі значення  $U_{\max}^+$  (тобто з режиму розгону) у значення  $U_{\max}^-$  (тобто у режим гальмування). Моменти перемикання можна визначити, розв'язуючи відповідні диференціальні рівняння. Слід зазначити, що спільне розв'язування системи диференціальних рівнянь (визначення періоду часу, що відповідає режиму розгону та періоду часу, що відповідає режиму гальмування) призводить до необхідності розв'язувати трансцендентні рівняння [1 — 4].

Нижче показано, що побудувати систему, близьку до оптимальної можна, не визначаючи моменти перемикання.

**Мета роботи.** Метою роботи є розробка управляючого пристрою оптимальної за швидкістю системи, його структурної схеми та методу розрахунку, причому такого, що останній не вимагає визначення моментів перемикання керуючого сигналу і виконання, у зв'язку з цим, громіздких обчислень, пов'язаних з розв'язком трансцендентних рівнянь.

**Основна частина.** Сигнал управління  $u(t)$  (рис.1) повинен змінюватися за релейним законом, отже, така система є суттєво нелінійною. Для опису та розрахунку такої системи використаємо метод *фазової площини*. При цьому розглядатимемо фазову площину, по координатних осях якої відкладено: похибку управління  $x(t) = y_n - y(t)$  — вісь абсцис, і швидкість зміни похибки  $\varepsilon(t) = dx(t)/dt$  — вісь ординат.

Рівняння (1), записане щодо похибки, набуває вигляду:

$$T_0 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt} = -k_0 u(t). \quad (2)$$

Щоб перейти від диференціального рівняння системи (2) до рівняння в координатах фазової площини, потрібно з рівняння (2) виключити незалежний параметр — час  $t$ . Для цього представимо другу похідну змінної  $x(t)$  наступним чином:

$$\frac{d^2x(t)}{dt} = \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \cdot \frac{dx(t)}{dx(t)} = \frac{\varepsilon(t)d\varepsilon(t)}{dx(t)} \text{ або (спрощено) } \frac{d^2x(t)}{dt} = \frac{\varepsilon d\varepsilon}{dx}.$$

Підставляючи в рівняння (2) першу та другу похідні змінної  $x(t)$  отримаємо, у координатах фазової площини  $(x(t), \varepsilon(t))$  або  $(x, \varepsilon)$ , наступне:

$$T_0 \frac{\varepsilon d\varepsilon}{dx} + \varepsilon = -k_0 u(t). \quad (3)$$

Рівняння (3) являє собою диференційне рівняння «зі змінними, що розділяються». Після очевидних перетворень, отримаємо:

$$dx = -T_0 \frac{\varepsilon d\varepsilon}{\varepsilon + k_0 u}.$$

В останньому рівнянні справа — табличний інтеграл. В результаті інтегрування, маємо:

$$x = -T_0 \varepsilon + T_0 k_0 u \times \ln|k_0 u + \varepsilon| + C_1, \quad (4)$$

де  $C_1$  — постійна інтегрування.

По суті, вираз (4) описує сімейство рівнянь — фазових траєкторій, кожне з яких визначається постійною інтегрування  $C_1$  і залежить від початкових умов (які, в свою чергу, власно і визначають конкретне значення постійної інтегрування  $C_1$ ). Визначимо рівняння фазової траєкторії, яка проходить через центр координат. Для цього прийнемо кінцеві умови перехідного процесу:  $x_{\text{кін}} = \dot{x}_{\text{кін}} = \varepsilon_{\text{кін}} = 0$ .

Підставивши кінцеві умови в рівняння (4) визначимо значення постійної інтегрування  $C_1$ :

$$C_1 = -T_0 k_0 u(t) \times \ln|k_0 u(t)|. \quad (5)$$

Далі, підставляючи значення  $C_1$  у рівняння (4), отримаємо:

$$x = -T_0 \varepsilon + T_0 k_0 u(t) \times \ln|k_0 u(t) + \varepsilon| - T_0 k_0 u(t) \times \ln|k_0 u(t)|. \quad (6)$$

Рівняння (6) — це рівняння фазових траєкторій, які проходять через центр координат, тобто:  $x = \varepsilon = 0$ .

Розглянемо два випадки.

1. Нехай при  $t = 0$ ,  $y(t) = 0$  на вхід подано сигнал  $y_n$ . При цьому похибка управління дорівнює  $x(t) = y_n$ , управляючий пристрій видає сигнал  $U_{\text{max}}^+ = U_{\text{max}}$ . Рівняння фазової траєкторії, що відповідає цьому режиму, отримаємо з рівняння (6), підставивши  $u(t) = U_{\text{max}}$ . Для цього режиму введемо позначення:  $x(t) = x_1 > 0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_1 < 0$ ,  $-k_0 U_{\text{max}} \leq \varepsilon_1 \leq 0$ . Рівняння (6) набуває вигляду:

$$x_1 = -T_0 \varepsilon_1 + T_0 k_0 U_{\text{max}} \times \ln|k_0 U_{\text{max}} + \varepsilon_1| - T_0 k_0 U_{\text{max}} \times \ln|k_0 U_{\text{max}}|. \quad (7)$$

2. Нехай при  $t = 0$ ,  $y(t) = 0$  на вхід подано сигнал  $-y_n$ . При цьому похибка управління дорівнює  $x(t) = -y_n$ , управляючий пристрій видає сигнал  $U_{\text{max}}^- = -U_{\text{max}}$ . Як і у попередньому випадку, для цього режиму введемо позначення:  $x(t) = x_2 < 0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_2 > 0$ ,  $0 \leq \varepsilon_2 \leq k_0 U_{\text{max}}$ . Тоді рівняння фазової траєкторії, що відповідає цьому режиму, набуває вигляду:

$$x_2 = -T_0 \varepsilon_2 - T_0 k_0 U_{\max} \times \ln|-k_0 U_{\max} + \varepsilon_1| + T_0 k_0 U_{\max} \times \ln|-k_0 U_{\max}|. \quad (8)$$

Розглянемо приклад. Нехай параметри об'єкта управління мають значення:  $k_0 = 0,25$ ;  $T_0 = 0,5c$ ;  $U_{\max} = \pm 220V$ .

Для побудови та розрахунку лінії перемикання за формулами (7) та (8) скористаємося програмою, наведеною нижче. Програму складено за допомогою платформи MATLAB [5] та представлено у форматі m-file:

```
T=0.5; k=0.25; Um=220; ku=k.*Um
e1=[-55:0.1:0];
x1=-T.*e1-T.*ku.*log(abs(-ku+e1))+T.*ku.*log(ku);
e2=[0:0.1:55];
x2=-T.*e2+T.*ku.*log(abs(+ku+e2))-T.*ku.*log(ku);
e=[e1,e2];
x=[x1,x2];
plot(x,e); grid
```

На рис.2 показано лінія перемикання фазової площини для заданої системи.

На рис.3 показано фазовий портрет замкнутої слідкуючої системи. Лінія перемикання *MON* поділяє всю фазову площину на дві частини. Праворуч від лінії перемикання  $u(t) = +U_{\max}$ , ліворуч від лінії перемикання  $u(t) = -U_{\max}$ . Перехідний процес у системі відображається на фазовій площині рухом зображуючої точки фазової траєкторії. Кожна траєкторія залежить від початкових умов. Потрапивши на фазову траєкторію, зображуюча точка рухається строго по ній. Перехід на іншу траєкторію можливий лише лінії перемикання, якою є лінія *MON*. У верхній частині фазової площини  $\varepsilon(t) = (dx(t)/dt) > 0$  напрямок руху становить «зліва-направо», у нижній частині — «справа-наліво».

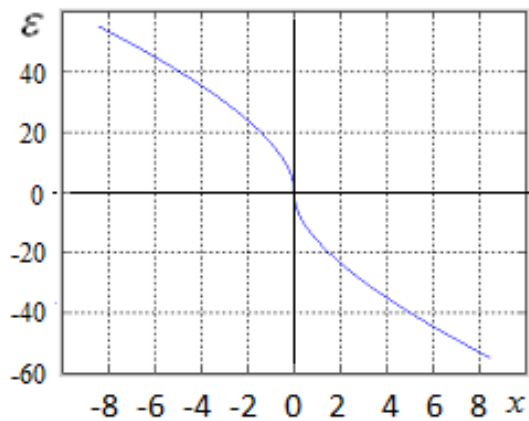


Рис. 2. Лінія перемикання на фазовій площині

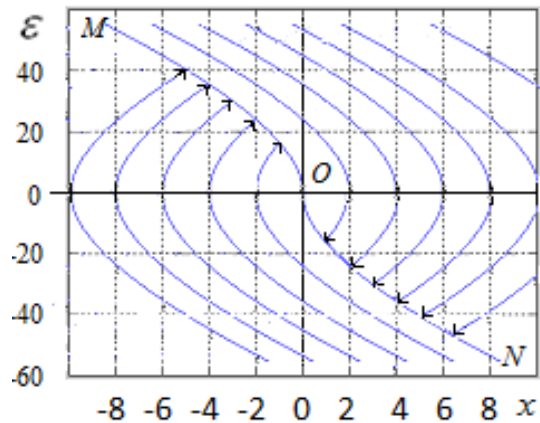


Рис. 3. Фазовий портрет слідкуючої системи

Щоб отримати алгоритм функціонування оптимальної за швидкодією системи необхідно забезпечити рух зображуючої точки з максимальною швидкістю по будь-якій траєкторії до перетину з лінією перемикання.

На фазовому портреті видно, що кожна фазова траєкторія перетинається з лінією перемикання. Потрапивши на лінію перемикання, зображуюча точка неминуче рухається до центру координат з максимальною швидкістю. Таким чином, управляючий пристрій повинен вмикати сигнал управління в релейному режимі  $u(t) = \pm U_{\max}$  (залежно від початкових умов) і в момент попадання зображуючої точки на лінію перемикання релейний пристрій повинен перемикати

поточний сигнал управління на зворотний за знаком. Такий алгоритм управління можна отримати, якщо порівнювати похибку управління з величиною, що відповідає лінії перемикання, і давати сигнал на перемикання у разі, якщо похибка не дорівнює нулю.

Структурну схему замкненої оптимальної за швидкістю системи показано на рис.4. На схемі (рис.4) представлено наступні блоки: блок 1 — реле, блок 2 — функціональний блок, який формує лінію перемикання. Цей блок забезпечує залежність вихідної величини блоку (на схемі позначено як  $[x]$ ) від похідної вихідної величини системи  $\varepsilon(t)$ .

Для того, щоб уникнути можливих автоколивань у релейній системі, потрібно ввести в релейну характеристику зону нечутливості. При цьому зменшується точність роботи слідкуючої системи, оскільки вхідні сигнали, які менші за величину зони нечутливості, така система не сприймає. Тому, щоб, з одного боку — уникнути можливості автоколивань, а з іншого — забезпечити відсутність у системі зони нечутливості, релейну характеристику побудовано за допомогою двох елементів, увімкнутих послідовно: пропорційної ланки з великим коефіцієнтом підсилення та нелінійної ланки типу «насичення».

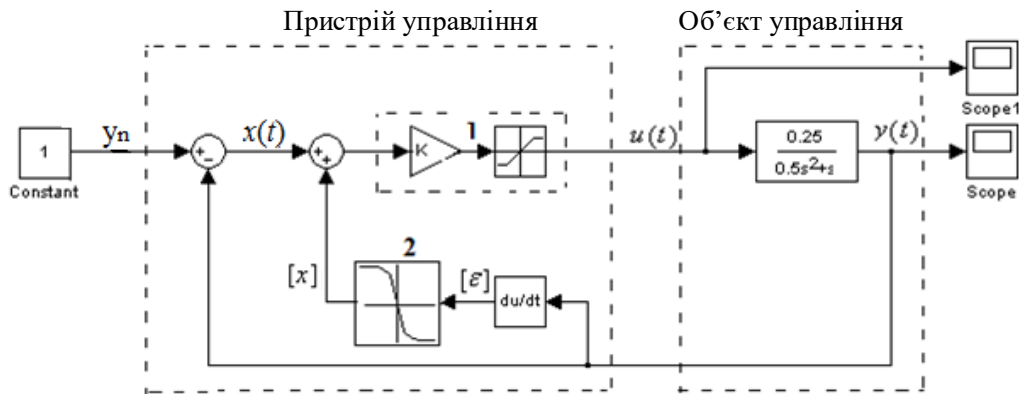


Рис. 4. Структурна схема оптимальної за швидкістю слідкуючої системи

Числовим експериментом встановлено [6 — 9], що коефіцієнт посилення пропорційної ланки слід прийняти у діапазоні  $(10^5 \dots 10^6)$ , а величину насичення нелінійної ланки обрати як  $u(t) = \pm U_{\max}$ .

На рис. 5-7 наведено результат моделювання системи, побудованої у відповідності до структурної схеми, представленої на рис. 4.

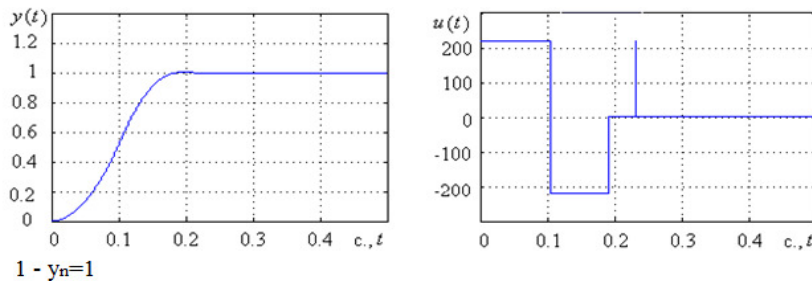
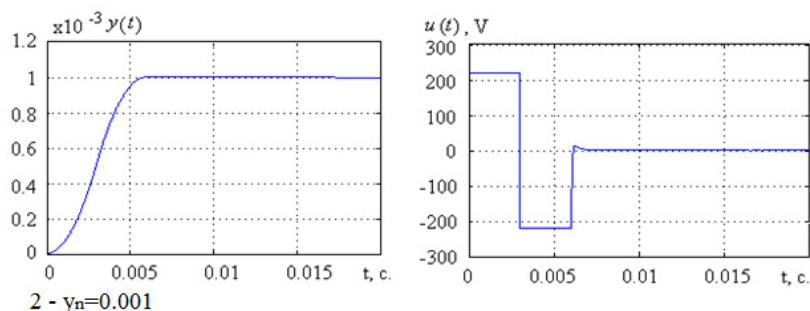
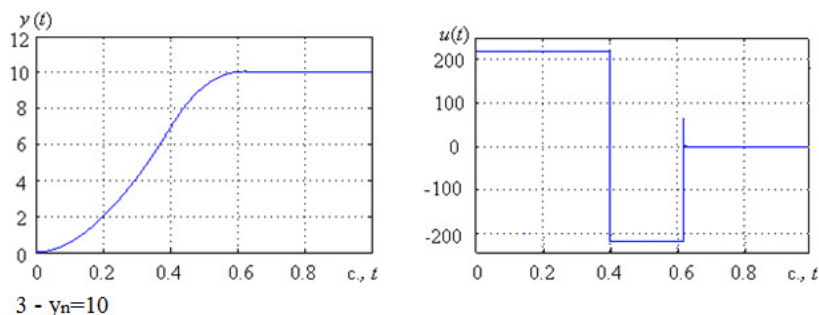


Рис. 5. Результати моделювання оптимальної за швидкістю системи для  $1 - y_n = 1$ ;



**Рис. 6.** Результати моделювання оптимальної за швидкістю системи для 2 -  $y_n = 0,001$ ;



**Рис. 7.** Результати моделювання оптимальної за швидкістю системи для 3 -  $y_n = 10$

За графіками рис. 5-7 можна дійти висновку, що система зберігає властивості оптимальної по швидкістю у широкому діапазоні змін задаючого сигналу. Оптимальність процесу підтверджується графіками змін сигналу управління  $u(t) = \pm U_{\max}$ .

**Висновки.** Розроблено структурну схему і метод розрахунку управляючого пристрою для об'єкта управління другого порядку в слідкуючій системі, яка є оптимальною за швидкістю. Розглянутий метод дозволяє розрахувати оптимальну систему без виконання громіздких розрахунків. У роботі наведено програму, що дозволяє виконати нескладні обчислення для побудови управляючого пристрою, по виду заданого диференціального рівняння незмінної частини системи (суть — об'єкта управління) або за відповідною передаточною функцією.

#### Список літератури

1. Писаренко А.В., Репнікова Н.Б. Оптимальні та адаптивні системи. Методи теорії оптимального керування. К.: НТУУ «КПІ ім. І. Сікорського», 2013. 128с.
2. Луцька Н.М., Ладанюк А.П. Оптимальні та робастні системи керування технологічними об'єктами. К.: Ліра, 2015. 288 с.
3. Albertos P., Sala A. Multivariable control systems: an engineering approach. Valencia: Polytechnic University of Valencia, 2004. 339 p.
4. Краснопрошина А.А., Репнікова Н.Б., Ильченко А.А. Современный анализ систем управления с применением MATLAB, Simulink, Control System. К.: Корнійчук, 1999. 144 с.
5. Бобриков С.А., Пичугин Е.Д. Оптимальная настройка ПИ-регулятора с одноёмкостным объектом // Электромашиностроение и электрооборудование. К.: Техніка. 2009, №72. С.179-181.
6. Бобриков С.А., Пичугин Е.Д. Оптимальное цифровое управляющее устройство в системе с запаздыванием при заданном коэффициенте

усилення. *Електротехнічні та комп'ютерні системи*. 2010. № 01 (77). С. 49–52.

7. Бобриков, С.А. Пичугин Е.Д. Оптимальная настройка цифрового регулятора для объекта высокого порядка с запаздыванием. *Електромашинобудування та електрообладнання*. 2010, № 75. С.57–61.
8. Бобриков С.А. Пичугин Е.Д., Бабийчук О.Б. Оптимальная настройка цифрового регулятора для системы управления с астатизмом второго порядка. *Електричні та комп'ютерні системи*. 2015. №17(93). С.80-86.

## SYNTHESIS AND SIMULATION OF THE OPTIMUM ACCORDING TO THE SPEED OF THE TRACKING SYSTEM

S. O. Bobrikov, L. L. Prokofieva, A. A. Saveliev

National Odesa Polytechnic University , Shevchenko str., 1, Odesa, 65044  
bobrikov1932@gmail.com, luleopro@gmail.com, sanp277@gmail.com

A method of construction and calculation of the structural scheme of the facility management system is proposed, which is constructively formed by the serial connection of the first-order aperiodic link and the integrator, and is formally described by a mathematical model in the form of a product of the corresponding transfer functions. An electric motor with an input voltage source can serve as a common typical implementation of the specified control object. The proposed method makes it possible to build a control system that is close to optimal in terms of speed. Moreover, optimality, in this case, is determined by the fact that the object in the process of functioning is turned on in relay mode. The transient process for a defined control object, under the conditions of the optimal mode, is two stages: acceleration and braking, which are carried out at the maximum values of the input influence - that is, the input voltage. To determine the switching moments of the input influence (signal), the phase plane method is used, and the phase coordinates are: on the abscissa axis, the output value (for the given example, the frequency of rotation of the motor shaft), and on the ordinate axis, the rate of change of the output value (or derivative from the rotation frequency of the motor shaft, i.e. the corresponding acceleration). A structural diagram of the control system was developed, which ensures acceleration and braking of the object at the maximum values of the input signal. The optimality of the transition process is ensured by the fact that the control error is compared with the signal coming from the link of the configured switching line. Formulas for calculating the switching line on the phase plane are presented, as well as the program for calculating the switching line, written in the MATLAB environment in m-file format. The system was modeled in the MATLAB-Simulink package, which confirms the optimality of the control process.

**Keywords:** structural diagram, control system, transfer function, optimal system, speed, relay mode, phase plane, switching line, control error, simulation.