УДК 681.513

Informatics and Mathematical Methods in Simulation
Vol. 4 (2014), No. 3, pp. 250-255

РЕАЛИЗАЦИЯ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ, ПРЕДСТАВЛЕННЫХ В ВИДЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Д. Э. Контрерас, С. А. Положаенко

Одесский национальный политехнический университет
просп. Шевченко, 1, Одесса, 65044, Украина; e-mail: polozhaenko@mail.ru

Рассмотрена постановка r-точечной краевой задачи при описании динамики объектов в виде нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Предложен итерационный подход к решению данной задачи, основанный на методе Ньютона.

Ключевые слова: динамический объект, краевая задача, итерационный процесс, метод Ньютона, шаг дискретизации, погрешность решения

Введение

Достаточно широкий класс динамических объектов с требуемой для практики степенью адекватности может быть описан моделями в виде интегро-дифференциальных уравнений. К таким динамическим объектам, прежде всего, относятся объекты «с памятью» или «с последействием» [1]. Для случая распределенных систем интегро-дифференциальные уравнения динамики дополняются соответствующими краевыми условиями. В работе [2] показана возможность решения нелинейной r-точечной краевой задачи методом Ньютона на аналого-цифровых вычислительных системах. В данной работе рассматривается метод Ньютона в сочетании с квадратурно-разностными методами для решения нелинейной r-точечной краевой задачи в среде Matlab.

Постановка задачи

Рассмотрим r-точечную краевую задачу [2], представленную уравнением

$$L_y y = \lambda T_y y + f(t) \tag{1}$$

и краевыми нелинейными условиями

$$g\left(y(0), y(t_1), \dots, y(t_{r-1}) \right) = d\,, \tag{2}$$

где L_y – дифференциальный оператор порядка n; λ – вещественный параметр; d – n-мерный вектор;

$$T_y = \int_0^t K\left(t, s, y, y', \ldots, y^{(m)}\right) ds .$$

Решение данной задачи будем производить путем итерационного определения вектора начальных условий $y(0)$.

Нелинейная краевая задача (1) – (2) эквивалентна системе нелинейных алгебраических уравнений

$$\left.\begin{aligned} &q(y_0) = d; \\ &q(y_0) = g\left[\varphi(t_0, y_0), \varphi(t_1, y_0), \ldots, \varphi(t_r, y_0)\right] \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

и задаче Коши

$$L_y y = \lambda T_y y + f(t), \; y(0) = y_0 , \tag{4}$$

где $\varphi(t, y_0)$ – решение задачи (1) в форме Коши.

Вектор начальных условий определяется из системы (3). Для решения этой системы можно применить итерационный метод Ньютона. В явном виде система (3), как правило, неизвестна, поскольку неизвестна в явном виде функция $\varphi(t, y_0)$. Однако, может быть указан алгоритм для вычисления $g(y)$ при заданном y. Итерационный процесс будет иметь следующий вид ($y^0(0)$ задается произвольно)

$$\left.\begin{aligned} &L_y y^k = \lambda T_y y^k + f(t); \\ &\Gamma\left(y_0^k\right) z^k = q\left(y_0^k\right) - d; \\ &y_0^{k+1} = y_0^k - z^k, \; k = 0,1,2,\ldots, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где Γ – матрица Якоби вектор-функции $g(y)$.

Описание метода решения

Процесс решения (5) заключается в следующем. Задается k-е приближение вектора начальных условий, решается задача Коши интегро-дифференциального уравнения и определяются функции $\varphi(t, y_0^k)$. Затем решается система нелинейных уравнений и определяется $k+1$ приближение вектора начальных условий.

Так как система (3) в явном виде не задана, то при практических вычислениях по методу Ньютона производные, входящие в матрицу $\Gamma\left(y^k\right)$, заменяют приближенными к ним разностями. Разностный аналог матрицы Якоби вектор-функции $g(y)$ имеет вид [2]:

$$R\left(h_k, y^k\right) = \left(\frac{g\left(y_0^k + h_k e_1\right) - g\left(y_0^k\right)}{h_k}, \cdots, \frac{g\left(y_0^k + h_k e_n\right) - g\left(y_0^k\right)}{h_k} \right),$$

где e_i – i-й координатный орт, т.е. вектор размерности n, у которого i-я компонента равна единице, а все остальные компоненты равны нулю. Для обеспечения квадратичной сходимости h_k определяется по формуле

$$h_k \le \max_i \left| g_i \left\{ \varphi\left(t_0, y_0^k\right), \varphi\left(t_1, y_0^k\right), \ldots, \varphi\left(t_{r-1}, y_0^k\right) \right\} \right| .$$

Введем обозначение $y_{t_s}^{i,k} = y^{i,k}(t_s),\ (s = 1, \ldots r)$. Тогда вычислительная схема решения нелинейной краевой задачи примет вид [2]

$$\left.\begin{aligned}
& L_y y^k = \lambda T_y y^k + f(t); \\
& h_k \le \max_i \left| g_i\left(y_0^{0,k}, y_{t_1}^{0,k}, \ldots, y_{t_r}^{0,k}\right) - d_i \right|, (i = 0,1,2,\ldots,n); \\
& R\left(h_k, y^k\right) = \left(\frac{g\left(y_0^{1,k}, y_{t_1}^{1,k}, \ldots, y_{t_r}^{1,k}\right) - g\left(y_0^{0,k}, y_{t_1}^{0,k}, \ldots, y_{t_r}^{0,k}\right)}{h_k}, \ldots, \right. \\
& \qquad \left. \ldots \frac{g\left(y_0^{n,k}, y_{t_1}^{n,k}, \ldots, y_{t_r}^{n,k}\right) - g\left(y_0^{0,k}, y_{t_1}^{0,k}, \ldots, y_{t_r}^{0,k}\right)}{h_k} \right); \\
& R z^k = g\left(y_0^{0,k}, y_{t_1}^{0,k}, \ldots, y_{t_r}^{0,k}\right) - d; \\
& y_0^{k+1} = y_0^k - z^k,\ k = 0,1,2,\ldots .
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Для вычисления якобиана, на каждом шаге необходимо решать $n+1$ задачу Коши. В работе [2] для этого использовались аналоговые вычислительные системы. Ниже предлагается использовать квадратурно-разностные методы решения интегро-дифференциальных уравнений, основанные на сочетании разностных методов известных из теории дифференциальных уравнений и квадратурных методов аппроксимации интегрального оператора используемых при численном решении интегральных уравнений. Рассмотрим эти методы применительно к уравнению (4), записав его в виде

$$\begin{gathered}
y^{(n)}(t) = F(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)) + \int_0^x K(t, s, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n-1)}(t))\, ds, \\
y^{(i)}(0) = y_{i0}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1 .
\end{gathered} \qquad (7)$$

Заменой переменных $y = y_1,\ y' = y_2,\ \ldots,\ y^{(n-1)} = y_n$ получаем систему уравнений первого порядка

$$\begin{cases}
\dfrac{dy_1}{dt} = y_2, \\
\dfrac{dy_2}{dt} = y_3, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dfrac{dy_n}{dt} = F(t, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) + \displaystyle\int_0^x K(t, s,\ y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})\, ds.
\end{cases} \qquad (8)$$

Используя метод Рунге-Кутты четвертого порядка в сочетании с методом трапеций либо с обобщенным методом Симпсона, получаем следующий алгоритм решения системы (8)

$$\begin{cases} k_1^{(i)} = h\, f(t_i, Y_i), \\ k_2^{(i)} = h\, f(t_i + \frac{h}{2},\ Y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}), \\ k_3^{(i)} = h\, f(t_i + \frac{h}{2},\ Y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}), \\ k_4^{(i)} = h\, f(t_i + h,\ Y_i + k_3^{(i)}). \end{cases} \tag{9}$$

$$Y_{i+1} = Y_i + \Delta Y_i, \quad \Delta Y_i = \tfrac{1}{6}(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}) \qquad i = 0,1,2\ldots, \tag{10}$$

где $Y_i = (y_{1i}, y_{2i}, \ldots, y_{ni})$,

$$f(t_i, Y_i) = (y_{2i}, y_{3i}, \ldots, F(t_i, y_{1i}, y_{2i}, \ldots, y_{ni}) + h\sum_{j=0}^{i} A_j \cdot K(t_i, s_j,\ y_{1j}, y_{2j}, \ldots, y_{nj})),$$

$$A_1 = A_i = 1/2, A_2 = A_3 = \cdots = A_{i-1} = 1 \text{ для метода трапеций,}$$

$$A_j = \begin{cases} 1/3,\ 4/3, 2/3, \ldots, 4/3, 1/3 & (j = 2m+1, m = 1,2,\ \ldots) \\ 1/3,\ 4/3, 2/3, \ldots, 4/3, 5/6, 1/2 & (j = 2m, m = 1,2,\ \ldots) \end{cases} \text{ для метода Симпсона.}$$

Недостатком данного метода является необходимость многократного вычисления интеграла на каждом шаге, что существенно замедляет время счета и делает затруднительными вычисления на большем числе узлов.

В этом случае эффективным оказывается использование многошаговых методов. Например, многошаговый алгоритм, основанный на методе Адамса в сочетании с методом трапеций либо с обобщенным методом Симпсона, имеет вид

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{h}{24} \cdot (55 f_i - 59 f_{i-1} + 37 f_{i-2} - 9 f_{i-3}), \tag{11}$$

$$Y_{i+1} = Y_i + \frac{h}{24} \cdot (9 f_{i+1} 19 f_i + 5 f_{i-1} + f_{i-2}), \qquad i = 0,1,2\ldots, \tag{12}$$

где $f_i = f(t_i, Y_i)$.

Данный метод не является самостартующим, т.е. необходимо знание начального отрезка решения (в первых четырех точках) для вычисления которого могут быть использованы описанный выше метод Рунге-Кутты, либо метод Адамса первого порядка.

Алгоритм решения

Таким образом, алгоритм решения нелинейной краевой задачи (1) примет следующий вид.

1. Ввод исходных данных о решаемой задаче, начального приближения $y^0(0)$ и требуемой точности решения δ.
2. Решение задачи (1) в форме Коши, используя методы (9)-(10) либо (11)-(12) и определение g_i.

3. Определение величины h_k из условия (6).

4. Решение n задач Коши для определения $y_{t_s}^{i,k}$, $(i = 1,\dots n,\ s = 1,\dots r)$, используя методы (9)-(10) либо (11)-(12).

5. Вычисление якобиана R по формуле (6).

6. Вычисление поправки z^k, путем решения системы линейных алгебраических уравнений и определение вектора начальных условий y_0^{k+1} .

7. Если выполняется условие $\left\| z^k \right\| \le \delta$, то итерационный процесс заканчивается, в противном случае повторяются шаги 2 — 7.

Решение тестовой задачи

Проиллюстрируем описанный метод результатами численных экспериментов. При этом, для сравнения, будем решать ту же задачу, что и в работе [2]

$$y'' + 2y' - 0.2y^2 - \int_0^x \cos x e^{-s} (y' + y)\, ds,$$

с краевыми условиями

$$0.3y(0) + 0.3[y'(0)]^2 + y(1) + y'(1) + y(2) + y'(2) = 0.1674,$$

$$0.1y(0) + 0.2[y'(0)]^2 + y(1) + y'(1) + y(2) + y'(2) = -0.1326.$$

Точное решение $y(x) = e^{-x} \cos x$.

В качестве нулевого приближения возьмем значения $y(0) = 0.6$, $y'(0) = -0.6$, при которых, как показано в [2], итерационный процесс решения на аналого-цифровых вычислительных комплексах расходится.

Результаты численного решения данной задачи, реализующего описанный алгоритм в среде Matlab, приведены в таблице 1. При этом задача Коши решалась методом Рунге-Кутта в сочетании методом трапеций (9)-(10), причем шаг дискретизации составил $h = 0.01$, а заданная погрешность – $\delta = 0.001$.

Таблица 1.

Результаты численного решения задачи

Номер итерации	$y(0)$	$y'(0)$	δ
0	0.6000	-0.6000	–
1	0.6912	-1.6816	1.0816
2	0.9802	-1.1120	0.5696
3	0.9969	-1.0074	0.1047
4	0.9992	-1.0008	0.0066
5	0.9992	-1.0008	2.4×10^{-5}

Относительная погрешность решения составила 0.08%.

Выводы

Таким образом, рассмотренный метод, при удачном выборе начального приближения, обеспечивает высокую точность и быструю сходимость решения и может быть эффективным средством реализации динамических объектов, представленных моделями в виде нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с краевыми условиями.

Список литературы

1. Верлань, А. Ф. Математическое моделирование непрерывных динамических систем / А. Ф. Верлань, С. С. Москалюк. — К.: Наукова думка, 1988. — 287 с.
2. Верлань, А. Ф. Решение нелинейных интегро-дифференциальных уравнений на аналого-цифровых вычислительных системах типа АЦВС-32 / А. Ф. Верлань, В. А. Краснокутский // Вопросы радиоэлектроники. - Вып. 2,1984, С. 92 — 99.
3. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений / Под ред. Дж. Холла, Дж.Уатта. — М.: Наука, 1979. — 385 с.

РЕАЛІЗАЦІЯ МОДЕЛЕЙ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ, ПРЕДСТАВЛЕНИХ У ВИГЛЯДІ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

Д. Е. Контрерас, С. А. Положаєнко

Одеський національний політехнічний університет,
просп. Шевченка, 1, Одеса, 65044, Україна; e-mail: polozhaenko@mail.ru

Розглянуто постановку r-точкової крайової задачі при описі динаміки об'єктів у вигляді нелінійних інтегро-диференційних рівнянь. Запропоновано ітераційний підхід щодо розв'язання даної задачі, заснований на методі Ньютона.
Ключові слова: динамічний об'єкт, крайова задача, ітераційний процес, метод Ньютона, крок дискретизації, похибка рішення

IMPLEMENTATION OF DYNAMIC OBJECT MODELS PRESENTED AS NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH BOUNDARY CONDITIONS

D.E. Contreras, S. A. Polozhaenko

Odesa National Polytechnic University,
1 Shevchenko Str., Odesa, 65044, Ukraine; e-mail: polozhaenko@mail.ru

The definition of an r-point boundary-value problem for the description of object dynamics with nonlinear integro-differential equations was discussed. To solve this problem, an iterative approach was proposed based on the Newton method.
Keywords: dynamic object, boundary-value problem, iterative process, Newton method, sampling interval, solution error.