

УДК 004.315: 681.325

О. Н. Паулин, д-р техн. наук

РАСШИРЕНИЕ ПРИНЦИПА ПОКРЫТИЯ ПРИ ПОСТРОЕНИИ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ЛОГИЧЕСКИХ МОДУЛЕЙ НА ОСНОВЕ СИММЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Аннотация. Предлагается расширение понятия «покрытие», которое основано на отношении «объект-условие». В качестве примера применения предлагаемого понятия рассматривается метод синтеза блока формирования настроек универсального симметрического логического модуля на основе специальной таблицы покрытия. При этом вводится набор базовых функций равнозначности двух аргументов таких, что их аргументы образуют цепочку, в которой соседние функции равнозначности имеют общий аргумент. Приводится теорема о формировании составной функции равнозначности нескольких аргументов.

Ключевые слова: расширенное понятие «покрытие», специальная таблица покрытия, симметрическая функция, логическая функция «равнозначность», универсальный симметрический логический модуль, синтез, блок формирования настроек

O. N. Paulin, ScD.

EXTENSION OF THE “COVERAGE” PRINCIPLE IN THE CONSTRUCTION OF UNIVERSAL LOGIC MODULES BASED ON THE BASE OF SYMMETRICAL FUNCTIONS

Abstract. The extension of the term “covering” that based upon the “object-condition” relation is proposed. As examples of the proposed concept application, a method of synthesis of the forming of setting block of the universal symmetric logic module based on the special covering table are considered. This introduces a set of basic functions of equivalence of two arguments, such that they form the chain case in which the neighbor functions have a common argument. The theorem of the construction of the compound functions of equivalence of several arguments.

Keywords: extended concept “covering”, special covering table, symmetrical function, universal symmetric logic module, basic function of equivalence, compound function of equivalence, synthesis, forming of setting block

O. M. Паулін, д-р техн. наук

РОЗШИРЕННЯ ПРИНЦИПУ ПОКРИТТЯ ПРИ ПОБУДОВІ УНІВЕРСАЛЬНИХ ЛОГІЧНИХ МОДУЛІВ НА ОСНОВІ СИМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Анотація. Пропонується розширення поняття «покриття», основою якого є відношення «об'єкт-умова». Як приклад застосування запропонованого поняття розглядається метод синтезу блока формування налаштувань універсального симетричного логічного елементу на основі спеціальної таблиці покриття. При цьому вводится набір базових функцій рівнозначності двох таких аргументів, що їх аргументи утворюють ланцюжок, в якому сусідні функції рівнозначно мають спільний аргумент. Наводиться теорема про формування складової функції рівнозначності декількох аргументів.

Ключові слова: розширене поняття «покриття», спеціальна таблиця покриття, симетрична функція, логічна функція «рівнозначності», універсальний симетричний логічний модуль, синтез, блок формування налаштувань

Введение

Важнейшей проблемой при проведении эффективной обработки больших потоков данных является достижение максимальной её производительности либо минимальной сложности устройства обработки в случае, если повышение производительности более не представляется возможным. В работе под потоком данных понимаются арифметические многорядные двоичные коды (МРК), а под их обработкой – свёртка МРК [5].

Решение проблемы эффективности обработки включает в себя разработку, как ме-

тодов, так и средств обработки. В отличие от общепринятой обработки [1, 2 и др.], в данной работе методы обработки основаны на применении симметрических функций (СФ).

Начало развития теории СФ положено работой [11] и в дальнейшем развито в работах [7–10 и др.], а также, в последнее время, в работе [6]. Автором проведена [3] систематизация известных результатов, а также получены новые результаты, в том числе относительно особых СФ – нечётность, мажоритарность и равнозначность, которые наиболее часто встречаются при описании процесса свёртки многорядных кодов [5].

© Паулин О.Н., 2013

Под средствами обработки ниже понимаются компоненты компьютерных систем, а именно: универсальные симметрические логические модули (УСЛМ).

Вопросам синтеза УСЛМ посвящено много работ; укажем на обстоятельную работу [2], выполненную Мищенко В.А. и его сотрудниками. Здесь для синтеза УСЛМ предложен метод построения универсальных логических модулей, реализующих все возможные булевы функции n переменных, в частности, симметрических модулей с использованием функций равнозначности.

Особенностью метода [2] является информационно-зависимое управление, при котором часть входных аргументов используется для формирования настроек УСЛМ, а также использование первообразной функции вида

$$Y = \bigvee_{i=0}^t u_i Q_i, \quad (1)$$

где \bigvee – символ логического сложения, $t=2^{n-1}-1$; Q_i – функции равнозначности n аргументов, включающие конstituенты единицы n входных аргументов из множества $X=\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$; i – десятичный номер набора базовых функций равнозначности, соответствующий данной функции Q ; u_i – коэффициенты первообразной функции из множества $U=\{u_0, u_1, \dots, u_t\}$, реализующие функции настройки с алфавитом

$$u_i = \{0, 1, \bar{x}, x\}, \quad x \in \overline{\{x_1, x_n\}}; \quad (2)$$

алфавит для u_i задаётся исходя из того, что при логическом умножении Q на управляющий аргумент x выделяется один из двоих термов Q .

Однако не все вопросы построения эффективных УСЛМ решены. В частности, при таком построении не проработан в общем виде вопрос синтеза блок формирования настроек (БФН) модуля.

Цель данной работы – расширение понятия «покрытие» и построение специальной таблицы покрытия, пригодной для синтеза БФН УСЛМ.

Задача о покрытии множеств. Пусть [1] $B=\{b_1, \dots, b_n\}$ – опорное множество. Имеется множество A , состоящее из m подмножеств A_i ($A=\{A_1, \dots, A_m\}$) множества B таких,

что $A_i \subseteq B, \bigcup_{i=1}^m A_i = B$. В общем случае каждому подмножеству A_i сопоставлено число c_i , называемое *ценой*; в данной работе вопрос цены A_i игнорируется.

Множество $P=\{A_{k_1}, \dots, A_{k_l}\}$ ($k_i \in \{1, \dots, m\}, l \leq m, k$ – номер варианта выборки подмножеств), называется *решением задачи о покрытии* или просто *покрытием*, если выполняется условие

$$\bigcup_{i=1}^l A_{k_i} = B. \quad (3)$$

Термин покрытие означает, что совокупность подмножеств A_i ($A=\{A_1, \dots, A_m\}$) содержит все элементы множества B , т.е. «покрывает» множество B .

Определение 1. Покрытие P называется *кратчайшим*, если l – наименьшее среди всех покрытий данной задачи.

Удобным и наглядным представлением исходных данных и их преобразований в задаче о покрытии является *таблица покрытий*. Таблица покрытий – это матрица T отношения принадлежности элементов множеств $A_i \in A$ опорному множеству B ; столбцы матрицы T сопоставлены элементам b_j множества B , строки – элементам A_i множества A :

$$T = \begin{cases} 1, & \text{если } b_j \in A_i \\ 0, & \text{если } b_j \notin A_i \end{cases}. \quad (4)$$

Нули в матрице T не проставляются.

Имеются следующие варианты формулировки задачи о покрытии: требуется найти *все* покрытия; *только* кратчайшие покрытия; *одно* кратчайшее покрытие.

В [1] приведены примеры применения принципа покрытия в задачах

Исходные положения синтеза УСЛМ.

В [4] при синтезе УСЛМ использован метод [2] построения УСЛМ. Однако специфика симметрических функций [3] (конstituенты единиц этих функций обладают инвариантом) позволила модифицировать известный метод.

Рассмотрим кратко исходные положения, на которых основан метод синтеза настраиваемого УСЛМ.

Определение 2. *Цепочкой* m аргументов называется последовательность пар аргумен-

тов, таких, что соседние пары имеют общие аргументы: $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \dots, (x_{m-1}, x_m)$.

Введём следующие обозначения для функций равнозначности R и Q , аргументы которых связаны в цепочку:

R – функция равнозначности двух аргументов, $R_j = x_j x_{j+1} \vee \bar{x}_j \bar{x}_{j+1}$;

Q – функция равнозначности нескольких аргументов, $Q_l = T_l \vee T_{\bar{l}}$;

где T_i и $T_{\bar{i}}$ – термы, равные единице на противоположных наборах;

i и \bar{i} – десятичные номера термов (наборов);

l – десятичный номер функции.

Будем называть функции равнозначности R базовыми, а Q – составными.

Функция Q является конъюнкцией базовых функций R (в прямой либо инверсной форме), причём аргументы функции Q представляют собой цепочку, начиная с x_1 . Тогда l – десятичный эквивалент двоичного набора кода совокупности функций R . Так, $Q_5 = R_3 \bar{R}_2 R_1$.

Метод синтеза УСЛМ существенно опирается на следующую теорему.

Теорема. Конъюнкция m базовых функций равнозначности (в прямой либо инверсной форме в любом сочетании), причём аргументы конъюнкции составляют цепочку, представляет собой составную функцию равнозначности $m+1$ аргументов.

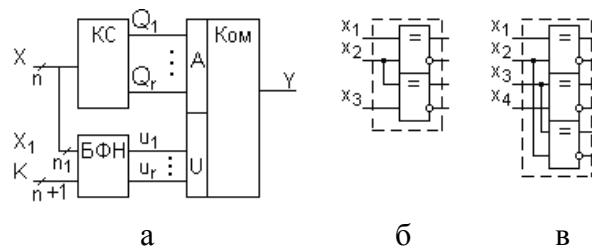
Таким образом, каждое логическое домножение Q на R увеличивает на единицу число аргументов Q .

Структура настраиваемого УСЛМ Y_n^1 (рис. 1, а) содержит следующие блоки: КС – комбинационная схема; БФН – блок формирования настроек; Ком – коммутатор. На вход модуля поступает множество входных переменных X (аргументов функций равнозначности), $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$; X_l – подмножество управляющих аргументов, $X_l \subset X$; а также локальный код K выборки совокупности СФ (в частных случаях – какой-либо одной, фундаментальной СФ), $K = k_n \dots k_1 k_0$. Выходная функция Y выбирается из множества возможных в соответствии с кодом K . При формировании настроек используются $n_l = n - 2$ управляющих аргументов X_l .

Схема КС модуля включает в себя совокупность двухвходовых элементов равнозначности; на рисунок 1, б и 1, в показаны два варианта реализации КС. Коммутатор представляет собой логическую схему И-ИЛИ, реализующую функцию (3); при этом $r=t+1$. Блок БФН, формирующий функции u_i управления коммутатором (выбора СФ), также представляет собой логическую схему И-ИЛИ. Синтез последнего и является наиболее интересным и важным.

Выходная функция Y и функции управления коммутатором U определяются выражениями: $Y = \varphi(U, R)$, где $U = f(X_l, K)$, $R = \lambda(X)$.

При формировании соответствующих настроек из $r=2^{n-1}$ пар термов собираются термы конкретной СФ $H_n(a_1, a_2, \dots)$, где a_j – индексы СФ, принимающие значение из множества $\{0, 1, \dots, n\}$. Выбор нужной СФ осуществляется БФН заданием локального кода K выбора СФ на основе таблицы его функционирования [4].



Настраиваемый УСМ:

а – структура; б – КС для $n = 3$;

в – КС для $n = 4$

Синтез модуля проводится на основе специальным образом построенной таблицы покрытия (ТП): строки именуются фундаментальными СФ, а столбцы – составными функциями равнозначности Q . Обе эти функции содержат определённые термы n аргументов. В ячейках таблицы размещаются десятичные номера термов, из которых состоят фундаментальные СФ и которые собираются из термов функций Q . В нижней строке таблицы помещены переменные (в прямой либо инверсной форме) из алфавита настройки, с помощью которых осуществляется выбор нужных термов СФ.

Отличие предложенной ТП от стандартной ТП, в ячейках которой размещаются

единицы в случае принадлежности элемента опорного множества B рассматриваемому множеству A , заключается в том, что отношение принадлежности отмечается непосредственным указанием элементов (десятичных эквивалентов термов), которые входят в множество, определяющего фундаментальные СФ.

На основе ТП строится таблица функционирования БФН и проводится синтез его схемы с использованием мультиплексоров [4], что обеспечивает минимальную сложность БФН и, соответственно, сложность модуля.

Пример 1. Рассмотрим синтез трёхвходового УСЛМ Y_3^1 .

1). Базовыми функциями равнозначности для Y_3^1 являются

$$R_1 = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2, \quad R_2 = x_2 x_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3.$$

2). Составные функции равнозначности Q_i имеют вид

$$Q_0 = \bar{R}_2 \wedge \bar{R}_1, \quad Q_1 = \bar{R}_2 \wedge R_1, \quad Q_2 = R_2 \wedge \bar{R}_1, \quad Q_3 = R_2 \wedge R_1.$$

3). Строим таблицу покрытия (табл. 1) для фундаментальных СФ (ФСФ).

1. Покрытие термами СФ Y_3^1

ФСФ	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3
H(0)				0
H(1)	2	4	1	
H(2)	5	3	6	
H(3)				7
U	\tilde{x}_1	\tilde{x}_1	\tilde{x}_1	\tilde{x}_1

2. Стандартная ТП для УСЛМ Y_3^1

ФСФ	T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7
H(0)	1							
H(1)		1	1		1			
H(2)				1		1	1	
H(3)								1

Пример 2. Синтезируем четырёхвходовой УСЛМ Y_4^1 .

1). Базовые функции равнозначности –

$$R_1 = x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2, \quad R_2 = x_2 x_3 \vee \bar{x}_2 \bar{x}_3, \\ R_3 = x_3 x_4 \vee \bar{x}_3 \bar{x}_4.$$

2). Составные функции равнозначности Q_i имеют вид

$$Q_0 = \bar{R}_1 \bar{R}_2 \bar{R}_3; \quad Q_1 = \bar{R}_1 \bar{R}_2 R_3; \quad Q_2 = \bar{R}_1 R_2 \bar{R}_3; \quad Q_3 = \bar{R}_1 R_2 R_3; \\ Q_4 = R_1 \bar{R}_2 \bar{R}_3; \quad Q_5 = R_1 \bar{R}_2 R_3; \quad Q_6 = R_1 R_2 \bar{R}_3; \quad Q_7 = R_1 R_2 R_3.$$

3). Строим таблицу покрытия (табл. 3) термами для фундаментальных СФ (ФСФ).

4). Анализ ТП (табл. 3) показывает, что некоторые столбцы имеют одинаковое управление, поэтому возможно объединение столбцов:

$$S_1 = Q_0 \vee Q_2 = \bar{R}_1 \bar{R}_3; \quad S_2 = Q_1 \vee Q_3 = \bar{R}_1 R_3; \quad S_3 = Q_4 \vee Q_6 = R_1 \bar{R}_3;$$

$$S_4 = Q_5 = R_1 \bar{R}_2 R_3; \quad S_5 = Q_7 = R_1 R_2 R_3.$$

$$w_1 = u_{2,0}; \quad w_2 = u_{3,1} \quad w_3 = u_5 \quad w_4 = u_{6,4} \quad w_5 = u_7.$$

Тогда формула (1) принимает вид

$$Y = w_1 S_1 \vee w_2 S_2 \vee w_3 S_3 \vee w_4 S_4 \vee w_5 S_5.$$

3. Покрытие термами СФ четырёх аргументов

ФСФ	Q_0	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6	Q_7
H(0)								0
H(1)		4		8	2		1	
H(2)	5,		6,			3,		
H(3)		11		7	13		14	
H(4)								15
U	1	\tilde{x}_3	1	\tilde{x}_3	\tilde{x}_2	1	\tilde{x}_2	\tilde{x}_2

Заключение

В структуре универсальных симметрических модулей ключевую роль играет блок формирования настроек, который формирует информационно-зависимое управление $U=f(X_i, K)$ коммутатором. Коммутатор выбирает из составных функций равнозначности Q те термы, которые составляют заданную СФ Y . Само формирование конкретных переменных управления u_i осуществляется в БФН на основе специальной таблицы покрытия, в которой отношение принадлежности отмечается непосредственным указанием десятичных эквивалентов термов, составляющих фундаментальные СФ. Для выбора необходимых термов в такой таблице предусмотрена строка управления.

Построение ТП рассматривается на двух примерах при $n = 3, 4$. Этот же подход может быть использован и при больших значениях n , однако при $n \geq 6$ ТП становится громоздкой и тогда необходима деком-

позиция аргументов УСЛМ. Последняя требует отдельного рассмотрения.

Схема БФН, следовательно, и всего модуля обладает минимальной сложностью. Задержка построенного УСЛМ составляет 5τ , где τ – задержка логического вентиля, что соответствует лучшим известным решениям.

Универсальные симметрические логические модули могут быть применены в устройствах обработки дискретной информации, в частности, при построении цифровых фильтров.

Список использованной литературы

1. Закревский, А. Д. Логический синтез каскадных схем / А. Д. Закревский – М. : Наука, 1981. – 416 с.

2. Мищенко, В. А. Логическое проектирование БИС [В. А. Мищенко, А. И. Аспидов, В. В. Витер и др.]: Под ред. В.А. Мищенко. – М. : Радио и связь, 1984. – 312 с.

3. Paulin, O. N. On construction of the symmetric Boolean functions theory / O. N. Paulin // *Материалы Международной научной конференции «Интеллектуальные и многопроцессорные системы-2005»*. – Таганрог : Изд-во ТРТУ. – 2005. – Т. 1. – С. 195 – 199.

4. Паулин, О. Н. Метод построения универсальных симметрических логических модулей / О. Н. Паулин // *Искусственный интеллект*. — № 4. — 2008. — Донецк : ИПШ, Наука і освіта. – 2008. – С. 125 – 132.

5. Paulin, O. N. Some aspects of hardware implementation of digital filters / O. N. Paulin // *Proceedings of the XIth International Conference “Speech and Computer” SPECOM’2006*. –St. Petersburg : Anatolya Publishers. – 2006. – P. 232 – 236.

6. Рицар, Б. Є. Теоретико-множинні оптимізаційні методи логікового синтезу комбінаційних мереж: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня д-ра техн. наук : спец. 05.12.13 «Радіотехнічні пристрої та засоби телекомунікацій» / Б. Є. Рицар. – Львів : Національний ун-т «Львівська політехніка». – Львів, 2004. – 34 с.

7. Arnold, R. Algebraic properties of symmetric and partially symmetric boolean functions / R. Arnold, P. Harrison // *IEEE Trans. Comput.* – 1963. – EC – 12. – № 6.

8. Curtis, H. A. A new approach to the design of switching circuits / H. A. Curtis.– N.J. : Princeton, Toronto : – 1962. – 635 p.

9. Das, S. On detection of total or partial symmetry of switching functions / S. Das, C. Sheng // *IEEE Trans. on EC.* – 1971. –Vol. EC-20. – № 3.

10. Karnaugh, M. The Map Method for Synthesis of Combinational Logic Circuits / M. Karnaugh // *Trans. AIEE.* – 1953. – No 72.

11. Shannon, C. E. A symbolic analysis of relay and switching circuits / C. E Shannon // *Trans. AIEE* – 1938. – № 57. – P. 713 – 722 (русский перевод в сб. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике. – М. : ил. – 1963. – С. 9 – 45.

Получено 23.04.2013

References

1. Zakrevskiy, A. D. Logical synthesis of cascade schemes / A. D. Zakrevskiy – Moscow : Nauka, 1981. – 416 c. [in Russian].

2. Logical design BIS [V. A. Mischenko, A. I. Aspidov, V. V. Viter i dr.] / Pod red. V.A. Mischenko. – Moscow : Radio I svjaz, 1984. – 312 p. [in Russian].

3. Paulin, O. N. On construction of the symmetric Boolean functions theory / O. N. Paulin // *Materialy Mejdunarodnoy nauchnoy konferenciyi «Intellectualnye i mnogoprocessornye sistemy-2005»*. – Taganrog : Izd-vo TRTU. – 2005. – T.1. – P. 195 – 199 [in Russian].

4. Paulin, O. N. Method of universal symmetric logical modules building / O. N. Paulin // *Isskustvennyy intellekt*. –Donetsk : IPII. "Nauka i osvita". – 2008. –№ 4. – P. 125 – 132 [in Russian].

5. Paulin, O. N. Some aspects of hardware implementation of digital filters / O. N. Paulin // *Proceedings of the XIth International Conference “Speech and Computer” SPECOM’2006*. –St.-Petersburg : Anatolya Publishers. – 2006. – P. 232 – 236 [in Russian].

6. Rycar, B. E. Combinational networks theoretical and dozen optimization methods of combinational networks logical synthesis: av-toref. dis.: spec. 05.12.13 «Radiotehnichni prystroji ta zasoby telekomunikacij» / B. E. Rycar // Nacionalnyy Universitet «Lvivska Politehnika» – Lviv, 2004. – 34 c. [in Ukrainian].

7. Arnold, R. Algebraic properties of symmetric and partially symmetric boolean functions / R. Arnold, P. Harrison // IEEE Trans. Comput. – 1963. – EC-12. – № 6 [in English].

8. Curtis, H. A. A new approach to the design of switching circuits / H. A. Curtis – N.J. : Princeton, Toronto : –1962. –635 p. [in English].

9. Das, S. On detection of total or partial symmetry of switching functions / S. Das, C. Sheng // IEEE Trans. on EC. – 1971. – V. EC-20. – № 3 [in English].

10. Karnaugh, M. The Map Method for Synthesis of Combinational Logic Circuits / M. Karnaugh // Trans. AIEE. – 1953. – No 72. [in English].

11. Shannon, C. E. A symbolic analysis of relay and switching circuits / C. E. Shannon // Trans. AIEE – 1938. – № 57. –P. 713 – 722 [in English].



Паулин Олег
Николаевич,
канд. техн. наук,
доц., каф СПО,
Одесского нац. по-
литехн. ун-та,
Одесса, ул. Акаде-
мика Королева, 2,
кв. 137,
тел. (0482) 44-22-89
paulin@te.net.ua