УДК 008.5

Е.В. Колесникова,
к.т.н., доцент,
Одеський національний
політехнічний
університет
e-mail: amberk4@gmail.com

ПРИКЛАДНЫЕ АСПЕКТЫ ПРИМЕНЕНИЯ ЦЕПЕЙ МАРКОВА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СЛАБО СТРУКТУРИРОВАННЫХ СИСТЕМ ПРОЕКТНОГО УПРАВЛЕНИЯ

***Е.В. Колесникова.* Прикладные аспекты применения цепей Маркова для моделирования слабо структурированных систем проектного управления.** Разработан унифицированный алгоритм моделирования марковских цепей, которому присущи достаточная простота математического аппарата и высокая достоверность отображения феноменологических свойств системы.

***E.V. Kolesnikova*. Applied aspects of the use of Markov chains to model weakly structured project management systems.** A unified simulation algorithm of Markov chains, which is subject to sufficient simplicity of the mathematical apparatus and the high accuracy of the display phenomenological properties of the system.

Введение. Марковские случайные процессы названы в честь выдающегося русского математика А.А. Маркова (1856-1922), впервые начавшего изучение вероятностных связей случайных величин и создавшего теорию, которую можно назвать “динамикой вероятностей” [1]. Эти исследования стали основой общей теории случайных процессов. В настоящее время цепи Маркова широко применяются в различных областях науки, таких как механика, физика, химия, моделирование систем, управление проектами и др.

Из-за простоты математического аппарата, высокой достоверности описания феноменологических свойств и точности получаемых решений особый интерес цепи Маркова вызывают у специалистов, занимающихся исследованием слабо структурированных организационно-технических и социальных систем проектного управления [2 – 5].

Цель публикации. Обобщение и разработка прикладных аспектов применения цепей Маркова для представления и моделирования слабо структурированных систем проектного управления.

Свойства цепей Маркова. Множество факторов в слабо структурированных системах образует сложную «паутину» связей между состояниями, которые изменяются во времени в зависимости от структуры системы и факторов внутреннего и внешнего окружения. Развитие проектов в такой многофакторной системе часто удается представить только в форме качественных моделей [6 – 13]. Вместе с тем, применение цепей Маркова позволяет перейти к количественным оценкам хода и результатов проектов [3, 5, 10]. При моделировании сложных систем проектного управления ключевым является отображение структуры взаимодействия процессов проекта с помощью ориентированного взвешенного графа, в котором [2]:

– вершины соответствуют базисным факторам (состояниям) проекта;
– непосредственные связи между состояниями отображают причинно-следственные цепочки, по которым распространяются влияния некоторого фактора на другие факторы.

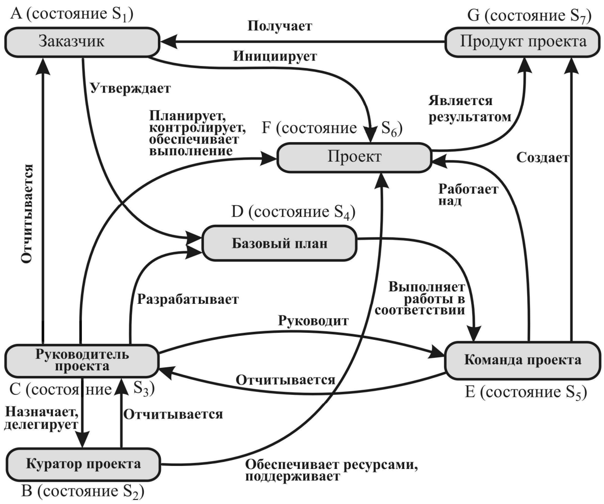

Рис. 1. Схема взаимодействия участников проекта [11]*: A, B, … G – идентификаторы состояний*

Примем в качестве базовой структуру состояний проекта (рис. 1), приведенную в стандарте Р 54869-2011 [14].

Цепи Маркова отображают случайный процесс, удовлетворяющий свойству Маркова и принимающий конечное или счетное число значений (состояний). Существуют цепи Маркова, как с дискретным, так и с непрерывным временем. В данной статье рассматривается дискретный случай.

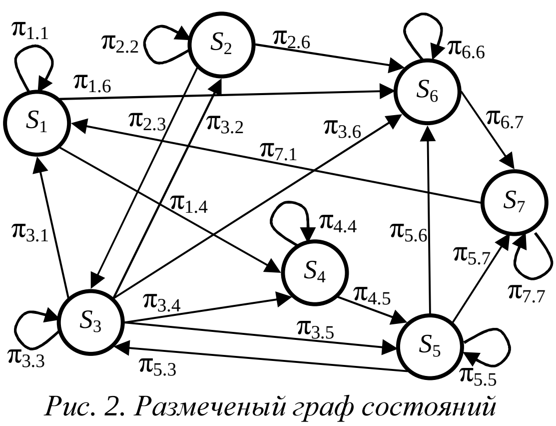

Рис. 2. Размеченый граф состояний цепи Маркова

Схема взаимодействия учасников проектов, приведення на рис. 1, может бать трансформирована в цепь Маркова. Обозначим через S_i $\{i=1, 2,\ldots, 7\}$ возможные состояния системы, существующие в проекте: S_1 = A; S_2 = B; S_3 = C; S_4 = D; S_5 = E; S_6 = F; S_7 = G (рис. 2).

Последовательность дискретных случайных величин $\{S_k\}_k$ называется цепью Маркова с дискретным временем, если

$$P(S_{k+1}=i_{k+1}|\, S_k=i_k;\, S_{k-1}=i_{k-1};\, \ldots,\, S_0=i_0) = P(S_{k+1}=i_{k+1}|\, S_k=i_k).$$

В простейшем случае условное распределение последующего состояния цепи Маркова зависит только от текущего состояния и не зависит от всех предыдущих состояний. Область значений случайных величин $\{S_k\}$ называется пространством состояний цепи, а номер k — номером шага.

Сумма вероятностей всех состояний $p_i(k)$ на каждом шаге k равна [1]:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i(k) = 1,$$

где $p_i(k)$ вероятность i-го состояния на шаге k.

Ориентированный граф переходов является наиболее распространенным и удобным способом визуального представления цепи Маркова. Вершины этого графа соответствуют состояниям цепи Маркова, а ориентированные ребра проходят от вершины $i\{i=1, 2, \ldots, m\}$ в вершину $j\{j=1, 2, \ldots, m\}$ только в том случае, когда вероятность перехода π_{ij} между соответствующими состояниями $i \to j$ не равна нулю. Эти вероятности перехода на размеченном графе указываются у соответствующего ребра (рис. 2).

Топология ориентированного графа может быть представлена с помощью матрицы смежности

$$\left\| c_{i.j} \right\| = \begin{Vmatrix} c_{1.1} & 0 & 0 & c_{1.4} & 0 & c_{1.6} & 0 \\ 0 & c_{2.2} & c_{2.3} & 0 & 0 & c_{2.6} & 0 \\ c_{3.1} & c_{3.2} & c_{3.3} & c_{3.4} & c_{3.5} & c_{3.6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{4.4} & c_{4.5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{5.3} & 0 & c_{5.5} & c_{5.6} & c_{5.7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{6.6} & c_{6.7} \\ c_{7.1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{7.7} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Каждый элемент матрицы смежности c_{ij} отличный от нуля и равный 1 означает наличие прямой связи между состояниями $i \to j$. Значения элементов главной диагонали c_{ii}= 1 указывают на наличие петли перехода, когда система остается в том же состояние.

Каждая строка матрицы смежности отображает наличие переходов в другие состояния системы. Как известно, все возможные переходы из некоторого состояния в другие состояния составляют полную группу событий – один из переходов должен быть реализован. Это позволяет ввести норму для каждой строки матрицы $\|c_{ij}\|$ с заменой значений c_{ij}=1 на переходные вероятности π_{ij}>0 с выполнением условия, справедливого для полной группы событий:

$$\sum_{j=1}^{m} \pi_{ij} = 1, \quad \{i = 1, 2, \cdots, m\},$$

где m = 7 - число возможных состояний системы.

Матрица переходных вероятностей запишется следующим образом:

$$\left\|\pi_{i.j}\right\| = \left\| \begin{matrix} \pi_{1.1} & 0 & 0 & \pi_{1.4} & 0 & \pi_{1.6} & 0 \\ 0 & \pi_{2.2} & \pi_{2.3} & 0 & 0 & \pi_{2.6} & 0 \\ \pi_{3.1} & \pi_{3.2} & \pi_{3.3} & \pi_{3.4} & \pi_{3.5} & \pi_{3.6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{4.4} & \pi_{4.5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{5.3} & 0 & \pi_{5.5} & \pi_{5.6} & \pi_{5.7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{6.6} & \pi_{6.7} \\ \pi_{7.1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{7.7} \end{matrix} \right\|.$$

Элементами матрицы являются вероятности перехода из i-го в j-е состояние за один шаг, при этом $\forall\nabla\pi_{ij} \geq 0$. Матрица, обладающая такими свойствами называется стохастической.

В марковской цепи с изменением времени (шага k) распределение вероятностей состояний $\{p_1(k), p_2(\mathrm{k}), \ldots p_m(k)\}$ изменяется. При этом вычисление распределения вероятностей на следующем (k+1) выполняется по известной формуле полной вероятности

$$\left\| \begin{matrix} p_1(k+1) \\ p_2(k+1) \\ p_3(k+1) \\ p_4(k+1) \\ p_5(k+1) \\ p_6(k+1) \\ p_7(k+1) \end{matrix} \right\|^{\mathrm{T}} = \left\| \begin{matrix} p_1(k) \\ p_2(k) \\ p_3(k) \\ p_4(k) \\ p_5(k) \\ p_6(k) \\ p_7(k) \end{matrix} \right\|^{\mathrm{T}} \cdot \left\| \begin{matrix} \pi_{1.1} & 0 & 0 & \pi_{1.4} & 0 & \pi_{1.6} & 0 \\ 0 & \pi_{2.2} & \pi_{2.3} & 0 & 0 & \pi_{2.6} & 0 \\ \pi_{3.1} & \pi_{3.2} & \pi_{3.3} & \pi_{3.4} & \pi_{3.5} & \pi_{3.6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \pi_{4.4} & \pi_{4.5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_{5.3} & 0 & \pi_{5.5} & \pi_{5.6} & \pi_{5.7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{6.6} & \pi_{6.7} \\ \pi_{7.1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \pi_{7.7} \end{matrix} \right\|. \quad (1)$$

Следовательно, если задана матрица переходных вероятностей $\|\pi_{ij}\|$ и известно распределение вероятностей состояний $\{p_1(k), p_2(k), \ldots p_m(k)\}$ на шаге k, то новое распределение вероятностей состояний $\|p_i(k+1);\ i = 1, 2, \ldots, m\|$ может быть найдено из (1). В большинстве публикаций по применению цепей Маркова на этом этапе исследования останавливаются, поскольку получен алгоритм для практического расчета. Вместе с тем, представленное решение может быть преобразовано к несколько иному виду. Для этого воспользуемся методом индукции при анализе выражений для вычисления распределения вероятностей состояний на 1-ом и 2-ом шагах:

$$\|p_i(1);\ i = 1, 2, \ldots, m\|^{\mathbf{T}} = \|p_i(0);\ i = 1, 2, \ldots, m\|^{\mathbf{T}}\|\pi_{ij}\|; \quad (2)$$

$$\|p_i(2);\ i = 1, 2, \ldots, m\|^{\mathbf{T}} = \|p_i(1);\ i = 1, 2, \ldots, m\|^{\mathbf{T}}\|\pi_{ij}\|; \quad (3)$$

где $\|\pi_{ij}\|$ - матрица переходных вероятностей;

Т – индекс транспонирования столбца $\|p_i(k+1);\ i = 1, 2, \ldots, m\|$.

Распределение вероятностей состояний $\{p_1(k), p_2(\mathrm{k}), \ldots p_m(k)\}$ однородной цепи Маркова с дискретным временем характеризуют феноменологическое отображение системы то, чем объект проявляет себя.

Нетрудно видеть, что после подстановки (2) в (3) получим:

$$\|p_i(2);\ i = 1, 2, \ldots, m\|^{\mathbf{T}} = \|p_i(0);\ i = 1, 2, \ldots, m\|^{\mathbf{T}}\cdot\|\pi_{ij}\|\cdot\|\pi_{ij}\|= \quad (4)$$

$$\|p_i(2);\ i = 1, 2, \ldots, m\|^{\mathbf{T}} = \|p_i(0);\ i = 1, 2, \ldots, m\|^{\mathbf{T}} \cdot \|\pi_{ij}\|^2 \qquad (5)$$

Поэтому можно записать для любого шага k:

$$\|p_i(k);\ i = 1, 2, \ldots, m\|^{\mathbf{T}} = \|p_i(0);\ i = 1, 2, \ldots, m\|^{\mathbf{T}} \cdot \|\pi_{ij}\|^k \qquad (6)$$

Из (6) следует, что распределение вероятностей состояний $\{p_1(k), p_2(k), \ldots p_m(k)\}$ на шаге k зависит только от начального распределения при $k = 0$ и матрицы переходных вероятностей в k-ой степени $\|\pi_{ij}\|^k$. Поэтому цепь Маркова считается заданной, если определены такие параметры:

- имеется совокупность переходных вероятностей в виде матрицы $\|\pi_{ij}\|$;
- известно некоторое начальное распределение вероятностей состояний

$$\|p_i(0);\ i = 1, 2, \ldots, m\| = \{\ p_1(0), p_2(0), \ldots p_m(0)\}. \qquad (7)$$

В зависимости от структуры и значений переходных вероятностей $\|\pi_{ij}\|$ цепи Маркова могут обладать следующими свойствами: невозвратность, возвратность, эргодичность, поглощение.

Невозвратное множество характеризуется возможностью любых переходов внутри этого множества. При этом система может покинуть это множество, но не может вернуться в него.

Возвратное множество характеризуется возможностью любых переходов внутри этого множества. Система может войти в это множество, но не может покинуть его.

Эргодическое множество. В случае эргодического множества возможны любые переходы внутри множества, но исключены переходы из множества и в него. Эргодические цепи могут быть регулярными или циклическими. Отличие последних состоит в том, что в процессе переходов через определенное число шагов (циклов) происходит возврат в некоторое состояние. Регулярные цепи этим свойством не обладают.

Поглощающее множество. Попадание системы в это множество приводит к завершению процесса.

Кроме описанной выше типов множеств различают: *существенное состояние* - возможны переходы из S_i в S_i и обратно; *несущественное состояние* - возможен переход из S_i в S_j, но невозможен обратный.

В некоторых случаях, несмотря на случайность процесса, имеется возможность до определенной степени управлять законами распределения или параметрами переходных вероятностей. Очевидно, что с помощью управляемых цепей Маркова особенно эффективным становится процесс принятия решений.

В реальных процессах детерминированность временных интервалов между отдельными шагами часто не соблюдается, и интервалы оказываются случайными с некоторым законом распределения, хотя марковость процесса сохраняется. Такие случайные последовательности называются полумарковскими.

Выводы. Выполнен анализ применения цепей Маркова для моделирования слабо структурированных систем проектного управления. Разработан унифицированный алгоритм моделирования марковских цепей, которому присущи достаточная простота математического аппарата и высокая достоверность отображения феноменологических свойств системы. Полученная модель позволяет исследовать слабо структурированные организационно-технические и социальные системы.

Література

1. Марков, А. А. Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга [Текст] // Известия физико-математического общества при Казанском университете. — 2-я серия. — Том 15. (1906) — С. 135—156.

2. Оборская, А.Г. Модель эффектов коммуникаций для управления рекламными проектами [Текст] / А.Г. Оборская, В.Д. Гогунский. // Тр. Одес. политехн. ун-та. - Одесса : ОНПУ, 2005. - С. 31 – 34.

3. Колеснікова, К.В. Розробка марківської моделі станів проектно керованої організації [Текст] / К.В. Колеснікова. В.О. Вайсман, С.О. Величко // Сучасні технології в машинобудуванні: зб. наук. праць. – Вип. 7 / редкол. : В.О. Федорович (голова) [та ін.]. Харків : НТУ «ХПІ», 2012. – С. 217 – 222.

4. Яковенко, В.Д. Прогнозування стану системи керування якістю навчального закладу [Текст] / В.Д. Яковенко, В.Д. Гогунський // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2009. -- № 2. –- С. 50 – 57.

5. Власенко, О.В. Модель «ДІАМАНТ» оцінки внутрішніх комунікацій в Європейських проектах [Текст] / О.В. Власенко, Д.В. Лук'янов, В.Д. Гогунський // Вост.-Европ. журнал передовых технологий. – 2013. - № 1/10 (61). — С. 86 – 88

6. Белощицкий, А. А. Управление проблемами в методологии проектно-векторного управления образовательными середами [Текст] / А. А. Белощицкий // Управління розвитком складних систем. -– 2012. - № 9. – С. 104 – 107.

7. Рач, В.А. Побудова термінологічної системи організації наукового знання [Текст] / В. Рач, О. Россошанська, О. Медведєва // Науковий світ. – 2011. - № 4. – С. 13 – 16.

8. Гогунский, В. Д. Основные законы проектного менеджмента [Текст] / В.Д. Гогунский, С.В. Руденко // IV міжнар. конф.: «Управління проектами: стан та перспективи». — Миколаїв : НУК, 2008. — С. 37 – 40.

9. Бушуев, С.Д. Напрями дисертаційних наукових досліджень зі спеціальності «Управління проектами та програмами» [Текст] / С.Д. Бушуев, В.Д., Гогунський, К.В. Кошкін // Управління розвитком складних систем. – 2012. - № 12. – С. 6 – 9.

10. Колеснікова, К. В. Моделювання стратегічного управління міжнародною діяльністю університету [Текст] / К. В. Колеснікова, С. М. Гловацька, С. В. Руденко // Проблеми техніки. – 2013. - № 1.– С. 95 – 101.

11. Тесленко, П.А. Эволюционная парадигма проектного управления / П.А. Тесленко, В.Д. Гогунский // Управління проектами: стан та перспективи : Міжнар. наук.-практ. конф. – Миколаїв : НУК, 2010. – С. 114 – 117.

12. Олех, Т.М. Оценка эффективности экологических проектов / Т.М. Олех, С.В. Руденко, В.Д. Гогунский // Вост.-Европ. журнал передовых технологий. - № 1/10 (61). – Харьков : Технолог. центр, 2013 – С. 79 – 82.

13. Колеснікова, К.В. Оптимізація структури управління проектно керованої організації К.В. Колеснікова, В.О. Вайсман // Вісник СевНТУ: зб. наук. пр. - Вип. 125/2012. Серія: Автоматизація процесів та управління. — 2012. – С. 218 – 221.

14. ГОСТ Р 54869 — 2011 Проектный менеджмент. Требования к управлению проектом [Текст]. — М. : Стандартинформ, 2011. – 10 с.