

УДК [624.074.43:620.174]:517.3

А.Б. Козин, канд. физ.-мат. наук, доц., Нац. ун-т
“Одесская юридическая академия”,
О.Б. Папковская, канд. физ.-мат. наук, доц.,
Одес. нац. политехн. ун-т

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРУЕМОЕ СОСТОЯНИЕ ОБОЛОЧКИ С ВКЛЮЧЕНИЕМ ПРИ ИЗГИБЕ

Введение. Задачи расчета напряженно-деформированного состояния (НДС) тел с жесткими включениями приобретают особую актуальность в связи с бурным развитием технологии создания новых композиционных материалов, обладающих рядом преимуществ перед традиционными сплавами. При построении методов расчета конструктивных элементов из композитов возникает необходимость в изучении взаимодействия матрицы заполнителя и армирующих волокон, изучении влияния геометрии расположения волокон и т.д. Наличие армирующих волокон ребер и других неоднородностей значительно усложняет расчет, т.к. перечисленные элементы являются концентраторами напряжений. Поэтому разработка эффективных методов определения НДС конструкций с концентраторами напряжений такого рода является важной проблемой как с теоретической, так и с практической точки зрения.

Анализ последних исследований и публикаций. Одним из методов решения такого класса задач является метод, основанный на сведении задач к системам интегральных уравнений относительно контактных усилий [1...4]. Метод обобщенных интегральных преобразований [1] получил дальнейшее развитие в решении задачи изгиба ортотропной пластины с криволинейной произвольно ориентированной неоднородностью [2]. Точное решение задачи изгиба бесконечной пологой оболочки при наличии винклеровской полубесконечной опоры путем сведения к задаче Римана известно [3]. Задача напряженно-деформированного состояния пологой оболочки с включением при изгибе сведена к системе интегральных уравнений, исследовано асимптотическое поведение функций, входящих в эти уравнения [4]. В настоящей работе предлагается дальнейшая разработка и детализация метода решения задач изгиба пологих оболочек с тонким жестким линейным включением, а именно, получение численного решения задачи [4], и его оценка.

Целью работы является разработка на базе метода сингулярных интегральных уравнений методики расчетной оценки напряженно-деформированного состояния пологой оболочки, содержащей тонкое жесткое включение, а также исследование влияния геометрических параметров включения, жесткостных и геометрических параметров оболочки на величину прогиба включения.

Изложение основного материала. В работе рассматривается задача расчёта напряженно-деформированного состояния, возникающего при изгибе свободно опертой, прямоугольной в плане пологой оболочки с конечномерным тонким жестким включением. Методом обобщенных интегральных уравнений краевая задача сводится к системе сингулярных интегральных уравнений. На основании полученной асимптотики решений этой системы предлагается метод построения эффективного приближенного решения. Решение строится путем сведения задачи к системе линейных алгебраических уравнений, которая решается численно.

Практическая значимость состоит в предложенной методике решения и полученных численных результатах, которые дают возможность проводить эффективный анализ НДС конструктивных элементов пологих оболочек с тонкими жесткими включениями.

DOI 10.15276/opus.2.44.2014.04

© А.Б. Козин, О.Б. Папковская, 2014

Математическая постановка задачи об изгибе свободно опертой, прямоугольной в плане ($0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$) полой оболочки с тонким жестким включением, расположенным на отрезке $y = b/2 \equiv l$, $c_1 \leq x \leq d$ ($0 < c_1$; $d < a$) дана в работе [4]. В этой же работе задача сведена к системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{-2c}{aEh} \int_{c_1}^d \sum_{n=1}^{\infty} X_6(t) \sin(\alpha t) \sin(\alpha x) \ast \mathfrak{a}_{1n} dt + \frac{2}{aD} \int_{c_1}^d \sum_{n=1}^{\infty} \psi(t) \sin(\alpha t) \ast \sin(\alpha x) \ast \mathfrak{a}_{2n} dt = \omega \ast(x), \\ \frac{-2}{a} \int_{c_1}^d \sum_{n=1}^{\infty} X_6(t) \sin(\alpha t) \ast \sin(\alpha x) \ast \mathfrak{a}_{3n} dt + \frac{2Eh}{acD} \int_{c_1}^d \sum_{n=1}^{\infty} \psi(t) \sin(\alpha x) \ast \sin(\alpha t) \ast \mathfrak{a}_{4n} dt = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\alpha = \pi n a^{-1}$, $\mathfrak{a}_{1n} = \text{Im } G_{\alpha}^{0,2}(l, l) + \nu \alpha^2 \text{Im } G_{\alpha}(l, l) + c k_1 \text{Re } G_{\alpha}(l, l)$,

$$\mathfrak{a}_{2n} = \text{Re } G_{\alpha}(l, l), \mathfrak{R}_{4n} = \text{Im } G_{\alpha}^{2,0}(l, l) + \nu \alpha^2 \text{Im } G_{\alpha}(l, l),$$

$$\mathfrak{a}_{3n} = \text{Re } G_{\alpha}^{2,2}(l, l) + c k_2 \text{Im } G_{\alpha}^{2,0}(l, l) + \nu \alpha^2 \text{Re } G_{\alpha}^{2,0}(l, l),$$

$$\mathfrak{a}_{4n} = \nu \alpha^2 \text{Re } G_{\alpha}^{0,2}(l, l) + \nu c k_2 \alpha^2 \text{Im } G_{\alpha}(l, l) + \alpha^4 \nu^2 \text{Re } G_{\alpha}(l, l),$$

$$G_{\alpha}(y, \eta) = \frac{-\alpha^{-3}}{(\lambda^2 - \mu^2)} \left(\frac{sh(\alpha \lambda \tau_1(\eta)) sh(\alpha \lambda \tau_2(y))}{\lambda \ast sh(\alpha \lambda b)} - \frac{sh(\alpha \mu \tau_1(\eta)) sh(\alpha \mu \tau_2(y))}{\mu \ast sh(\alpha \mu b)} \right),$$

$$\tau_1(\eta) = \begin{cases} b - \eta, & y < \eta \\ \eta, & y > \eta \end{cases}, \quad \tau_2(y) = \begin{cases} y, & y < \eta \\ b - y, & y > \eta \end{cases}, \quad c = \frac{\sqrt{12(1 - \eta^2)}}{h}, \quad X_6(x) = \int X_3(x) dx,$$

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \sqrt{1 - \frac{ick_1}{2\alpha^2} \pm \sqrt{ic(k_2 - k_1) - \frac{c^2 k_1^2}{4\alpha^2}}}, \quad G_{\alpha}^{m,n}(l, l) = \frac{\partial G_{\alpha}(x, y)}{\partial x^m \partial y^n} \quad \text{при } x = l, y = l,$$

$\langle S_y \rangle = -X_3(x)$ — скачки касательных усилий при переходе через включение;

$\langle V_y \rangle = \psi(x)$ — скачки обобщенных поперечных сил;

w — перемещения точек срединной поверхности в направлении оси z ;

E — модуль Юнга;

ν — коэффициент Пуассона;

i — комплексная мнимая единица;

h — толщина оболочки;

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad \text{— изгибная жесткость;}$$

k_1, k_2 — главные кривизны оболочки вдоль осей x и y соответственно ($k_1 = 1/R_1$, $k_2 = 1/R_2$);

φ — функция напряжений оболочки;

$\text{Re } G_{\alpha}(l, l)$ — действительная часть функции;

$\text{Im } G_{\alpha}(l, l)$ — мнимая часть функции $G_{\alpha}(l, l)$.

На основании [4], можем эффективно решить эту систему следующим приближенным численным методом. Введем обозначения

$$\bar{R}_1 = a^2 / (h \ast R_1); \quad \bar{R}_2 = a^2 / (h \ast R_2);$$

$$\lambda_1 = a / b;$$

$$f_1(\bar{R}_1, \bar{R}_2, \lambda_1) = \frac{2^{-1}}{(\lambda^2 - \mu^2)} \left(\lambda^{-1} th \left(\frac{n \lambda \lambda_1}{2\pi^{-1}} \right) - \mu^{-1} th \left(\frac{n \mu \lambda_1}{2\pi^{-1}} \right) \right);$$

$$f_2(\bar{R}_1, \bar{R}_2, \lambda_1) = \frac{2^{-1}}{(\lambda^2 - \mu^2)} \left(\lambda \ast th \left(\frac{n \lambda \lambda_1}{2\pi^{-1}} \right) - \mu \ast th \left(\frac{n \mu \lambda_1}{2\pi^{-1}} \right) \right);$$

$$\begin{aligned} \bar{R}_{11} &= \frac{\bar{R}_1 \sqrt{12(1-v^2)}}{2\pi^2 n^2}; \\ f_6(\bar{R}_1, \bar{R}_2, \lambda_1) &= \frac{2^{-1}}{(\lambda^2 - \mu^2)} \left(\lambda^3 th \left(\frac{n\lambda\lambda_1}{2\pi^{-1}} \right) - \mu^3 th \left(\frac{n\mu\lambda_1}{2\pi^{-1}} \right) \right); \\ \mathfrak{a}_{6n} &= \operatorname{Re} f(\bar{R}_1, \bar{R}_2, \lambda_1); \\ \mathfrak{a}_{7n} &= \operatorname{Re} f_6(\bar{R}_1, \bar{R}_2, \lambda_1) + 2\bar{R}_{11} \operatorname{Im} f_2(\bar{R}_1, \bar{R}_2, \lambda_1) + 2v \operatorname{Re} f_2(\bar{R}_1, \bar{R}_2, \lambda_1) + \\ &\quad + 2v\bar{R}_{11} \operatorname{Im} f(\bar{R}_1, \bar{R}_2, \lambda_1) + v^2 \operatorname{Im} f(\bar{R}_1, \bar{R}_2, \lambda_1); \\ \mathfrak{a}_{5n} &= \operatorname{Im} f_2(\bar{R}_1, \bar{R}_2, \lambda_1) + v \operatorname{Im} f(\bar{R}_1, \bar{R}_2, \lambda_1) + \bar{R}_{11} \operatorname{Re} f(\bar{R}_1, \bar{R}_2, \lambda_1); \\ \mathfrak{a}_{8n} &= \operatorname{Im} f_2(\bar{R}_1, \bar{R}_2, \lambda_1) + v \operatorname{Im} f(\bar{R}_1, \bar{R}_2, \lambda_1); \\ t &= \frac{d-c_1}{2} \tau + \frac{d+c_1}{2}; \quad x = \frac{d-c_1}{2} z + \frac{d+c_1}{2}; \\ \Psi_R(\tau) &= (d-c_1)\Psi(t); \quad X_R(\tau) = X_6(t); \\ \varepsilon &= (d-c_1)a^{-1}; \quad \sigma = \pi n \varepsilon 2^{-1}; \quad H = h^* a^{-1} (12(1-v^2))^{-1/2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Предполагая, что включение расположено симметрично относительно прямой $x=a/2$ и внешняя нагрузка приложена симметрично относительно этой прямой, получаем, что $\Psi_R(\tau)$ и $X_R(\tau)$ являются четными по τ , а

$$\omega^*(x) = -\frac{W_0 \sqrt{R_1^2 - (x-a/2)^2}}{R_1} \approx -W_0.$$

С учетом (2) система (1)

$$\begin{aligned} -\pi^2 H \varepsilon \int_{-1}^1 X_R(\tau) \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \cos(\sigma z) \cos(\sigma \tau) \frac{\mathfrak{a}_{5n}}{n} d\tau + \int_{-1}^1 \Psi_R(\tau) \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \cos(\sigma z) \cos(\sigma \tau) \frac{\mathfrak{a}_{6n}}{n^3} d\tau &= -W_0 \pi^3 a^{-2} D, \\ -\pi^2 H \varepsilon \int_{-1}^1 X_R(\tau) \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \cos(\sigma z) \cos(\sigma \tau) n \mathfrak{a}_{7n} d\tau + \int_{-1}^1 \Psi_R(\tau) \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \cos(\sigma z) \cos(\sigma \tau) \frac{\mathfrak{a}_{8n}}{n} d\tau &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

На основании асимптотических оценок, полученных в [4], решения системы (3) ищем в виде рядов [1]:

$$\Psi_R(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j p_j(\tau); \quad X_R(\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \chi_j R_j(\tau); \quad (4)$$

$$p_0(\tau) = (1-\tau^2)^{-1/2}; \quad p_j(\tau) = \frac{2(2j)! \sqrt{\pi} P_{2j}^{-3/2, -3/2}(\tau)}{\Gamma(2j-1/2)(1-\tau^2)^{3/2}}; \quad (j = \overline{1, \infty}); \quad R_j(\tau) = \sqrt{1-\tau^2} U_{2j}(\tau),$$

где $P_j^{\alpha, \beta}(\tau)$ — многочлены Якоби;

$U_j(\tau)$ — многочлены Чебышева второго рода;

ψ_j, χ_j — неизвестные постоянные.

Подставляя (4) в (3), домножая первое уравнение системы (3) на $p_m(z)$, второе — на $R_m(z)$ и интегрируя обе части по z от -1 до 1 , получаем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений с учетом формул полученных [1]

$$\sum_{j=0}^{\infty} \chi_j e_{mj} + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j c_{mj} = -W_0 \pi^2 a^{-2} D \delta_{0m} \equiv f_m, \quad (m = \overline{0, \infty}),$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \chi_j h_{mj} + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j s_{mj} = 0, \quad (m = \overline{0, \infty}), \quad (5)$$

где $c_{00} = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} J_0^2(\sigma) \frac{\mathfrak{a}_{6n}}{n^3}$, $c_{0j} = c_{j0} = (-1)^j \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sigma J_0(\sigma) J_{2j-1}(\sigma) \frac{\mathfrak{a}_{6n}}{n^3}$, ($j \geq 1$);

$$c_{mj} = (-1)^{m+j} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sigma^2 J_{2j-1}(\sigma) J_{2j-1}(\sigma) \frac{\mathfrak{a}_{6n}}{n^3}, \quad (m, j \geq 1);$$

$$e_{0j} = e_{j0} = \frac{\varepsilon H \pi^2}{(-1)^{j+1} (2j+1)^{-1}} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} J_0(\sigma) J_{2j+1}(\sigma) \sigma^{-1} \frac{\mathfrak{a}_{5n}}{n}, \quad (j \geq 0);$$

$$e_{mj} = \frac{\varepsilon H (2j+1)}{\pi^{-2} (-1)^{m+j+1}} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} J_{2m+1}(\sigma) J_{2j+1}(\sigma) \sigma^{-1} \frac{\mathfrak{a}_{5n}}{n}, \quad (m \geq 1, j \geq 0);$$

$$s_{m0} = (-1)^m (2m+1) \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} J_0(\sigma) J_{2m+1}(\sigma) \sigma^{-1} \frac{\mathfrak{a}_{8n}}{n}, \quad (m \geq 0);$$

$$s_{mj} = (-1)^{m+j} (2m+1) \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} J_{2m+1}(\sigma) J_{2j+1}(\sigma) \frac{\mathfrak{a}_{8n}}{n}, \quad (m \geq 0, j \geq 1);$$

$$h_{mj} = \frac{\varepsilon H (2j+1)(2m+1)}{\pi^{-2} (-1)^{m+j+1}} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} J_{2m+1}(\sigma) J_{2j+1}(\sigma) \sigma^{-2} n \mathfrak{a}_{7n}, \quad (m \geq 0, j \geq 0).$$

Условия равновесия для включения

$$\int_{c_1}^d \langle S(x, l) \rangle dx = 0; \quad \int_{c_1}^d \Psi(\xi) d\xi = P. \quad (6)$$

Первое условие из (6) выполняется тождественно в силу симметрии задачи, второе условие из (6) с учетом (2) и (4) дает

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Psi_R(\xi) d\xi = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \int_{-1}^1 p_j(\tau) d\tau = \frac{\pi}{2} \psi_0 = P. \quad (7)$$

Как видно из (5), искомые коэффициенты пропорциональны величине $W_0 Da^{-2}$, т.е. $\psi_j = \tilde{\alpha} D W_0 a^{-2}$, ($j = \overline{0, \infty}$). Таким образом, решая систему (5), с ее правой частью, равной $-\pi^2 \delta_{0m}$, $m = \overline{0, \infty}$, величину W_0 находим из условия равновесия включения (7) с помощью

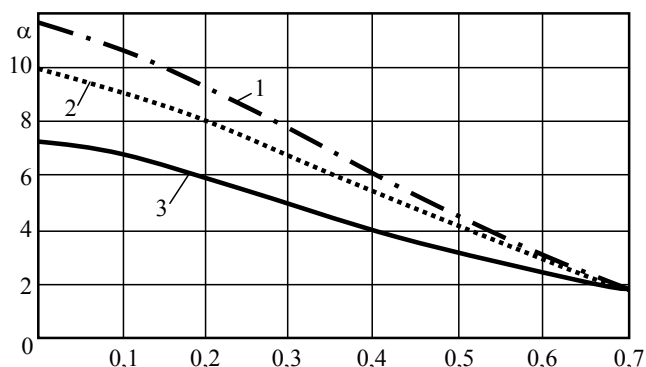
$$W_0 = a^2 D^{-1} 2P \pi^{-1} \tilde{\alpha}_0^{-1} = a^2 D^{-1} P \alpha,$$

где $\alpha = 2\pi^{-1} \tilde{\alpha}_0^{-1}$.

На этом завершается реализация алгоритма построения приближенного решения данной задачи.

Результаты. Для системы (5) методом редукции проведен численный расчет. Вычислялся коэффициент $\alpha = \alpha(\bar{R}_1, \bar{R}_2, \lambda, \varepsilon)$ в формуле $W_0 = 10^{-3} P a^2 D^{-1} \alpha$, где $\alpha = 2\pi^{-1} \tilde{\psi}_0^{-1}$. $\tilde{\psi}_0^{-1}$ — нулевой коэффициент ряда для $\Psi_R(\tau)$ из (4), который находится из решения системы (5), когда правая часть ее равна $-\pi^2 \delta_{0m}$, $m = \overline{0, \infty}$. Коэффициент Пуассона ν принимался равным 1/3.

Результаты расчётов отражены на графике ($\bar{R}_1 = 0$). Достаточная точность вычислений 0,001 получена при сохранении семи-восьми уравнений в системе (5), что показывает высокую эффективность данного метода решения задачи. Результаты расчетов при $\bar{R}_1 = \bar{R}_2 = 0$ (оболочка вырождается в пластину) совпали с известными [1].



Результаты расчётов коэффициента α методом редукции при $\bar{R}_2 = 0$ (1); 5 (2); 10 (3)

Выводы. Таким образом, полученные результаты показывают, что предложенный метод является эффективным численным методом для решения данного класса задач изгиба пологих оболочек с включениями.

Литература

1. Попов, Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений / Г.Я. Попов. — М.: Наука, 1982. — 342 с.
2. Папковская, О.Б. Математическая модель изгиба ортотропной пластины с криволинейной произвольно ориентированной неоднородностью / О.Б. Папковская, А.Б. Козин, Д. Камара // Пр. Одес. політехн. ун-ту. — 2008. — Вип. 1(29). — С. 237 — 241.
3. Красный, Ю.П. Изгиб бесконечной пологой оболочки при наличии винклеровской полубесконечной опоры / Ю.П. Красный, А.Б. Козин, О.Б. Папковская // Наук. вісн. Міжнар. гуманіт. ун-ту. Серія: Інформаційні технології та управління проектами. — 2012. — № 4. — С. 29 — 32.
4. Козин, А.Б. О решении краевых задач изгиба композитных пологих оболочек / А.Б. Козин, О.Б. Папковская // Сб. науч. тр. SWorld: материалы междунар. науч.-практ. конф. "Перспективные инновации в науке, образовании, производстве и транспорте 2013", 17–26 дек. 2013 г., Одесса. — Одесса: КУПРИЕНКО, 2013. — Т. 4: Физика и математика. — С. 33 — 37.

References

1. Popov, G.Ya. (1982). *Concentration of Elastic Stresses near Stamps, Cuts, Thin Inclusions and Reinforcements*. Moscow: Nauka.
2. Papkovskaya, O.B., Kozin, O.B. and Camara, D. (2008). Mathematical model of the flexion of orthotropic plate with curvilinear and arbitrarily oriented heterogeneity of structure. *Odes'kyi Politechnichnyi Universytet. Pratsi*, 1, 237-241.
3. Krasniy, J.P., Kozin, A.B. and Papkovsky, O.B. (2012). Bend infinite shallow shell if Winkler semiinfinite supports. *Herald of International Humanitarian University: Information Technologies and Project Management*, 4, 29-32.
4. Kozin, A.B. and Papkovskaya, O.B. (2013). About solving boundary value problems of the bending composite shallow shells. In S.V. Kuprienko (Ed.), *Proceedings of International Science and Practical Conference on Perspective Innovations in Science, Education, Production and Transport '2013* (pp. 33-37). Odessa: KUPRIENKO.

АНОТАЦІЯ / ANNOTATION / ABSTRACT

О.Б. Козин, О.Б. Папковська. **Напружено-деформований стан оболонки з включенням при вигині.** В даний час істотно зріс інтерес до вивчення властивостей композитних матеріалів, що зумовлено значним розширенням сфери їх застосування. Метою дослідження є розробка на базі методу сингулярних інтегральних рівнянь методики розрахункової оцінки напружено-деформованого стану пологої оболонки, що містить тонке жорстке включення; а також дослідження впливу геометричних параметрів включення, жорсткісних і геометричних параметрів оболонки

на величину прогину включення. Цінність проведеного дослідження полягає в подальшому розвитку і деталізації використовуваних методів рішення задачі пружності для композитних матеріалів. Отримані в роботі результати можуть бути використані при визначенні міцності елементів конструкцій, що складаються з композитних матеріалів. Чисельна схема методу розв'язання задачі може застосовуватися для комп'ютерного моделювання вирішення проблеми прогнозування механічної міцності композиту.

Ключові слова: вигин, полого оболонка, включення, інтегральне рівняння, крайова задача.

А.Б. Козин, О.Б. Папковская. **Напряженно-деформируемое состояние оболочки с включением при изгибе.** В настоящее время существенно возрос интерес к изучению свойств композитных материалов, что обусловлено значительным расширением области их применения. Целью исследования является разработка на базе метода сингулярных интегральных уравнений методики расчетной оценки напряженно-деформированного состояния пологой оболочки, содержащей тонкое жесткое включение; а также исследование влияния геометрических параметров включения, жесткостных и геометрических параметров оболочки на величину прогиба включения. Ценность проведенного исследования заключается в дальнейшем развитии и детализации используемых методов решения задачи упругости для композитных материалов. Полученные в работе результаты могут быть использованы при определении прочностных характеристик элементов конструкций, состоящих из композитных материалов. Численная схема метода решения задачи может применяться для компьютерного моделирования решения проблемы прогнозирования механической прочности композита.

Ключевые слова: изгиб, полая оболочка, включение, интегральное уравнение, краевая задача.

A.B. Kozin, O.B. Papkovskaya. **Intensely deformed state of the shell with the inclusion in bending.** Currently interest in the study of the properties of composite materials significantly increases due to the expansion of their application. The aim research is to develop a technique based on singular integral equations method of estimation of the stress-strain state of shallow shell with a thin rigid inclusion; as well as the study of the influence of geometrical parameters of inclusion, stiffness and geometric parameters of the shell on the value of inclusion bending. The value of the study is in further development and specification of used methods for solving the problem of elasticity of composite materials. The obtained results can be used in determining the strength properties of construction elements consisting of composite materials. The numerical scheme for problem solving can be used for computer simulation of solving the problem of predicting the mechanical strength of the composite.

Keywords: bending, shallow shell, inclusion, integral equation, boundary value problem.

Рецензент д-р техн. наук., проф. Одес. нац. политехн. ун-та Сурьянинов Н.Г.

Поступила в редакцию 23 октября 2014 г.