

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ОДЕСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

На правах рукопису

УДК 518.5+531.2



Чудак Наталія Олександрівна

**БАГАТОЧАСТИНКОВІ ПОЛЬОВІ ОПЕРАТОРИ ЯК МЕТОД
ОПISУ РОЗСІЯННЯ АДРОНІВ**

01.04.16 – фізика ядра, елементарних частинок
і високих енергій

Дисертація

на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико – математичних наук

Науковий керівник -

кандидат фізико–математичних наук,

доцент **Шарф І.В.**

Одеса – 2017

ЗМІСТ

	Стор.
ВСТУП.....	4
РОЗДІЛ 1. ЛІТЕРАТУРНИЙ ОГЛЯД І ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ.....	11
1.1. Проблеми опису зв'язаних станів в релятивістській теорії.....	11
1.2. Нерелятивістські моделі і ґраткові методи знаходження потенціалу.....	33
1.3. Висновки по літературному огляду і постановка задачі дослідження	52
РОЗДІЛ 2. ПЕРЕТВОРЕННЯ СТАНУ НЕРЕЛЯТИВІСТСЬКОЇ СИСТЕМИ ПРИ ПЕРЕХОДІ З ОДНІЄЇ ІНЕРЦІЙНОЇ СИСТЕМИ ДО ІНШОЇ.....	54
2.1. Наближення генераторів перетворення Лоренца диференціальними операторами.....	65
2.2. Наближення генераторів перетворення Лоренца в представленні вторинного квантування.....	68
2.3. Задача про перетворення стану із загальних теоретико-групових міркувань.....	82
2.4. Висновки до розділу 2.....	83
РОЗДІЛ 3. БАГАТОЧАСТИНКОВІ ПОЛЬОВІ ОПЕРАТОРИ В КВАНТОВІЙ ТЕОРІЇ ПОЛЯ.....	86
3.1. Двочастинкове скалярне поле.....	95
3.2. Псевдоскалярні мезонні поля, побудовані з двох біспінорних полів	102
3.3. Тричастинкове біспінорне поле.....	110
3.4. Двочастинкове глюонне поле.....	116
3.5. Квантування багаточастинкових полів.....	142
3.6. Висновки до розділу 3.....	149

РОЗДІЛ 4. РОЗРАХУНОК ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ПЕРЕРІЗУ ПРУЖНОГО РОЗСІЯННЯ АДРОНІВ ЗА ПЕРЕДАНИМ ЧОТИРИІМПУЛЬСОМ В МЕЖАХ ТЕОРІЇ ЗБУРЕНЬ.....	150
4.1. Розрахунок внеску в диференціальний переріз пружного розсіяння від найпростішої діаграми пружного розсіяння.....	150
4.2. Розрахунок внеску в амплітуду пружного розсіяння протонів від стрибків на розрізах, що відповідають пороговій точці розгалуження для пружного розсіяння.....	152
4.3. Висновки до розділу 4.....	166
ВИСНОВКИ.....	168
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	170

ВСТУП

Існуючі польові теорії розглядають багаточастинкові стани з простору Фока, але польові оператори є суто одночастинковими. Як наслідок, всі відомі квантові польові теорії формулюються в термінах чисел заповнення одночастинкових станів. Така ситуація є прийнятною для теорій (наприклад, КЕД), в яких в початковому і кінцевому станах присутні кванти тих самих полів, між якими відбувається взаємодія. Але при опису процесів розсіяння адронів виникає відома проблема, яка полягає в тому, що взаємодія відбувається між кварками, які складають адрони шляхом обміном глюонами, але в початковому та кінцевому станах процесу розсіяння можуть спостерігатися лише їх зв'язані стани - адрони. Це призводить до того, що, розглядаючи процес взаємодії кварків і глюонів, ми не можемо ані «вмикати» взаємодію на початковій стадії процесу розсіяння, ані «вимикати» її - на кінцевій, як це робиться при звичайному \hat{S} - матричному розгляді. Тобто асимптотичні кваркові і глюонні стани не є одночастинковими і внаслідок вимоги релятивістської інваріантності принципово не можуть бути виражені через одночастинкові стани. Дійсно, в релятивістській теорії неможливо реалізувати чисто просторовий зсув, тому кожен одночастинковий стан не може характеризуватися лише імпульсом частинки, а повинен характеризуватися чотирирівектором енергії-імпульсу. Тому в результаті роботи з числами заповнення таких станів матимемо закон збереження енергії-імпульсу для чотириімпульсів кварків і глюонів, а не адронів, як це є в експерименті.

Зазвичай ці проблеми обходять шляхом застосування партонної моделі [1], де адрон представляється сукупністю невзаємодіючих між собою точкових складових – партонів, між якими розподіляється енергія-імпульс адрону. Такий підхід є ефективним при розгляді процесів, які можна розглядати як такі, що відбуваються за участі невеликої кількості партонів і коли можна не цікавитись, що при цьому відбувається з рештою партонів, як, наприклад, у випадку глибоко непружного розсіяння лептонів на нуклонах. Якщо ж пот-

рібний повний багатопартонний опис, виникають суттєві проблеми з встановленням виду багатопартонних розподілів [2].

В дисертаційній роботі зазначені проблеми ми пропонуємо розв'язати за допомогою моделі багаточастинкових полів. Як відомо, кваркові поля приймають значення в лінійному просторі, який перетворюється за тензорним добутком біспінорного представлення групи Лоренца і фундаментальних представлень груп $SU_c(3)$ і $SU_f(3)$. Багаточастинкові поля реалізують відображення з тензорного добутку декількох просторів Мінковського, звуженого на підмножину, яка відповідає одночасному відносно спостерігача вимірюванню координат кварків – в інваріантний підпростір тензорного добутку областей значень одночастинкових полів, на якому реалізується певне незвідне представлення групи Лоренца (відповідно до спіну складеного адрону) і тривіальне представлення групи $SU_c(3)$ (відповідно до безколірності адрону). При цьому ароматові індекси приймають значення, що відповідають кваркам, які складають адрон.

В дисертації показано, що після квантування операторно-значні функції багаточастинкових полів описують народження і знищення адронів, що призводить до того, що при описанні процесів з ними за допомогою цих операторів зберігається саме енергія-імпульс адронів, а не складаючих їх частинок, як і повинно бути. Розгляд багаточастинкових калібрувальних полів дозволяє при цьому описати взаємодію адронів, а також конфайнмент кварків і глюонів.

Актуальність теми. На сьогоднішній день не існує опису процесів розсіяння адронів з перших принципів. Причиною такої ситуації є неможливість нехтувати сильною взаємодією кварків і глюонів навіть у якості початкового наближення, що спричиняє відому і не розв'язану проблему опису адронізації. Запропонований в дисертації метод багаточастинкових полів, з самого початку враховує взаємодію кварків і глюонів. Отримані в дисертації

результати дозволяють розглядати його як ефективний метод розв'язання проблеми опису розсіяння адронів з перших принципів.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Робота виконувалась у відповідності до держбюджетних науково-дослідних робіт “Розрахунок перерізів непружного розсіяння адронів методом Лапласа” (№ державної реєстрації 0116U004527), “Надповільне нейтронно-ядерне горіння торій-уранового середовища, що поділяється” (№ державної реєстрації 0116U004532) та “Розробка фізичних основ надтеплого ядерного реактора на бігучій хвилі ядерного горіння” (№ державної реєстрації 0116U004540) згідно з програмою науково-дослідних робіт МОН України, програми досліджень за міжнародними договорами про науково-технічне співробітництво між ОНПУ та Інститутом експериментальної фізики Словацької Академії наук, Інститутом ядерних досліджень та ядерної енергетики Болгарської академії наук, а також планами науково-дослідної роботи кафедри теоретичної та експериментальної ядерної фізики ОНПУ на 2014-2017 рр.

При виконанні цих науково-дослідних робіт роль автора дисертації полягала в розробці багаточастинкових моделей адронів для подальшого опису їх розсіяння, а також у врахуванні залежності пружного розсіяння нейтронів на протонах та спінових властивостей частинок, що розсіюються, при описі уповільнення нейтронів в реакторах.

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є побудова моделі розсіяння адронів, яка враховує їх кваркову структуру і водночас дозволяє враховувати закон збереження енергії-імпульсу для адронів, а не для частинок, що їх складають.

Для досягнення сформульованої мети необхідно розв'язати такі задачі:

- знайти закон перетворення стану нерелятивістської квантової системи з кількох взаємодіючих частинок з її системи центру мас до довільної системи відліку, відносно якої імпульс системи, що розглядається, може бути релятивістським;

- побудувати з одночастинкових біспінорних полів, що відповідають кваркам, двочастинкові псевдоскалярні поля, які відповідають мезонам, і тричастинкові біспінорні поля для опису баріонів і, зокрема, протонів;

- знайти динамічні рівняння для цих багаточастинкових полів, які відповідають загальним фізичним принципам – принципу відносності, принципу локальної калібрувальної інваріантності та іншим принципам квантової теорії поля;

- побудувати динамічні рівняння для двочастинкового глюонного поля;

- знайти і фізично інтерпретувати розв'язки цих рівнянь, застосувати процедуру квантування для розглянутих багаточастинкових полів.

- сформулювати принцип побудови амплітуд пружного та непружного розсіяння для розглянутих багаточастинкових полів.

Об'єкт дослідження – взаємодія адронів як систем зв'язаних кварків.

Предмет дослідження – процеси релятивістського розсіяння адронів.

Методи дослідження: метод вторинного квантування для нерелятивістського наближення компонент тензору моменту імпульсу як генератору перетворення стану при переході з однієї інерційної системи відліку до іншої; метод Лагранжа в теорії полів для побудови динамічних характеристик багаточастинкових полів; методи теорії представлень груп для виділення інваріантних підпросторів, які становлять області значень адронних багаточастинкових польових функцій; релятивістський метод квантування полів М.М. Боголюбова для квантування і фізичної інтерпретації багаточастинкових польових операторів; чисельні методи розв'язку нелінійних диференціальних рівнянь для розрахунку потенціалу взаємодії між кварками; метод діаграм Р. Фейнмана для побудови амплітуди пружного розсіяння адронів; метод спінової матриці густини для описання розсіяння неполяризованих потоків протонів, методи теорії функцій комплексної змінної для розрахунку унітарних поправок до амплітуди пружного розсіяння.

Наукова новизна одержаних результатів полягає в тому що:

1. Вперше доведено, що внутрішній стан квантової нерелятивістської системи у випадку, коли він є основним, не змінюється при переході в систему відліку, відносно якої повний імпульс системи є релятивістським.

2. Запропоновано нову модель багаточастинкових полів, в межах якої побудовані динамічні рівняння для двочастинкових псевдоскалярних мезонних полів, біспінових тричастинкових баріонних полів, скалярного двочастинкового глюонного поля і проведено квантування цих полів. Отримано часткові розв'язки рівнянь двочастинкового глюонного поля, які описують конфайнмент кварків і глюонів, а також їх асимптотичну свободу, і одночасно моделі без конфайнменту для інших калібрувальних теорій.

3. Вперше запропоновано модель адронів в процесах розсіяння, яка призводить до матричних елементів оператора розсіяння, що містять закон збереження енергії-імпульсу для чотириімпульсів адронів, а не складаючих їх частинок.

4. Вперше визначено роль спінових властивостей протонів в наявності максимуму диференційного перерізу пружного розсіяння протонів при великих значеннях квадрату переданого чотириімпульсу.

5. Вперше в межах однієї й тієї ж моделі описується як утримання кварків всередині адронів, так і взаємодія між кварками різних адронів, що дозволяє описати процеси їх розсіяння.

Практичне значення одержаних результатів полягає в тому що:

- запропоновано метод описання адронів в процесах пружного й непружного розсіяння, який далі можна використовувати для розрахунків в межах теоретичних моделей різних характеристик розсіяння: повних, диференційних та інклюзивних перерізів, топологічних перерізів непружного розсіяння, кореляційних характеристик тощо;

- отримані в дисертації результати можуть бути використані для написання програм для Монте-Карло генераторів процесів розсіяння;

- розроблено комп'ютерні програми для розрахунку диференційного перерізу пружного розсіяння адронів по квадрату переданого чотириімпульсу.

Особистий внесок здобувача. Всі результати, що складають основний зміст дисертації, отримано особисто автором, а саме:

- сформульоване нерелятивістське наближення для генератору буста на двочастинковому підпросторі простору Фока,

- розраховано комутатор внутрішнього гамільтоніану двочастинкової системи з цим генератором, показано, що ці оператори комутують і внаслідок цього основний внутрішній стан адрону не змінюється при переході з однієї інерційної системи відліку до іншої;

- отримано динамічні рівняння для багаточастинкових скалярних і псевдоскалярних полів, модифіковане доведення і результати теореми Нетер для цих полів; на основі цих результатів проведено квантування багаточастинкових полів релятивістським методом М.М. Боголюбова;

- отримано частковий розв'язок динамічного рівняння для двочастинкового калібрувального поля і показано, що цей розв'язок описує конфайнмент кварків і глюонів та їх асимптотичну свободу;

- побудовано модель пружного розсіяння протонів з урахуванням їх спінових властивостей;

Разом з Меркотаном К.К., Пташинським Д.А. і Потієнком О.С. показано, що а) діаграми з глюонними петлями з утворенням масивних вторинних частинок еквівалентні діаграмам з обміном масивними віртуальними частинками [3]; б) рівняння для двочастинкового глюонного поля призводять до конфайнменту глюонів [4]; в) координатна частина внутрішнього стану системи нерелятивістських кварків є власною функцією операторів просторово-часових компонент моменту імпульсу системи, якщо ці оператори розглядати в нерелятивістському наближенні в системі спокою, складеної з кварку і антикварку частинки [5] і розраховано матрицю других похідних від логарифму часткової суми інтерференційних внесків, на підставі якої були отримані чи-

сельні результати щодо розрахунків інклюзивних розподілів вторинних піонів по бистротах [6]. Спільно з Меркотаном К.К. було побудовано динамічні рівняння для тричастинкових біспінорних полів [4] і розраховано згортки по спінорним індексам [7, 8]. Динамічні рівняння для двочастинкового глюонного поля побудовано спільно з Меркотаном К.К. і Пташинським Д.А. [4]. Разом з Волкотрубом Ю.В., Меркотаном К.К., Пташинським Д.А., Потієнко О.С. були згенеровані інклюзивні перерізи по бистротах вторинних адронів [9].

Апробація результатів дисертації. Основні положення і результати дисертації доповідалися й обговорювалися на 4-th International Conference Current Problems in Nuclear Physics and Atomic Energy (Київ, 2012), International conference “Large Hadron Collider Physics Conference” - LHCP 2013 (Барселона, Іспанія 2013), Trans-European School of High Energy Physics (Харків, 2013), міжнародній конференції молодих учених та аспірантів (Ужгород, 2015), міжнародній конференції студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики “ЕВРИКА” (Львів 2012, 2014), International Symposium “Frontier of Theoretical Physics in Western China” (Ланчжоу, Китай, 2016).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи викладено в 15 публікаціях, 6 з яких індексуються в наукометричній базі Scopus, у тому числі в 9 статтях у наукових фахових виданнях України та інших держав і додатково висвітлено в 3 статтях і 3 тезах доповідей в збірниках наукових праць міжнародних конференцій.

РОЗДІЛ 1

ЛІТЕРАТУРНИЙ ОГЛЯД І ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Метою даної роботи є опис розсіяння адронів як зв'язаних станів кварків. У зв'язку з цим виникають дві проблеми. Перша – як описати адрон в початковому або кінцевому станах розсіяння, коли він ще або вже не взаємодіє з іншими частинками. Інша проблема полягає в тому, як описати взаємодію адронів через взаємодію кварків, що їх складають. В нашій роботі ми пропонуємо певний спосіб розв'язку цих проблем. Тому в огляді літератури ми розглядаємо існуючі підходи до розв'язання подібних проблем і пояснюємо, в чому полягає відмінність підходу, що пропонується в цій роботі від вже існуючих підходів до опису зв'язаних станів і процесів з ними.

1.1. Проблеми опису зв'язаних станів в релятивістській теорії.

Аналіз існуючих підходів до опису зв'язаних станів в релятивістських квантових теоріях породжує принципове питання: яким чином повинен описуватись стан системи релятивістських взаємодіючих між собою квантових частинок?

Польові оператори, що з'являються в процесі квантування полів, діють на елемент простору Фока [10-16]:

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1(t, \vec{r}_1) \\ \Psi_2(t, \vec{r}_1, \vec{r}_2) \\ \vdots \\ \Psi_n(t, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

В той же час, підходи до опису релятивістських зв'язаних станів, що базуються на рівнянні Бете-Солпитера [17], користуються новими визначен-

нями релятивістської амплітуди ймовірності. Вже в самій роботі [17], як зазначається у вступі до неї, стан системи двох взаємодіючих біспінорних частинок (як і в статті, називатимемо їх 1 і 2) пропонується описувати сукупністю 16 функцій $\psi_{s_1 s_2}(x_1, x_2)$ від двох просторово-часових чотиривекторів x_1, x_2 ($s_1, s_2 = 1, 2, 3, 4$ - біспінорні індекси). В роботі [17] сукупність цих функцій не визначається і фізично не інтерпретується, вона з'являється виключно з аналогії з наведеним в роботі [18] розв'язком рівняння Дірака, записаним за допомогою функції Гріна. На відміну від компонент стовпця (1.1), вона залежить від двох часів x_1^0, x_2^0 і ніяк не пов'язується з цими компонентами. В роботі [19] розглядається визначення величини $\psi_{s_1 s_2}(x_1, x_2)$, що задовольняє рівнянню Бете-Солпітера в вигляді

$$\psi_{s_1 s_2}(x_1, x_2) = \langle 0 | T(\hat{\Psi}_{s_1}(x_1) \hat{\Psi}_{s_2}(x_2)) | \Psi^{(2)} \rangle. \quad (1.2)$$

Тут $|\Psi^{(2)}\rangle$ - стан двох вільних частинок, $\hat{\Psi}_{s_1}(x_1)$ і $\hat{\Psi}_{s_2}(x_2)$ - польові оператори біспінорного поля в представленні Гейзенберга, $|0\rangle$ - вакуумний стан, T - символ хронологічного впорядкування.

З визначення (1.2) видно, що $\psi_{s_1 s_2}(x_1, x_2)$ є скалярним добутком елементів простору Фока, але не самим елементом цього простору. Оскільки $\hat{\Psi}_{s_1}(x_1)$ і $\hat{\Psi}_{s_2}(x_2)$ - є гейзенбергівськими операторами, вони задовольняють нелінійним рівнянням, тому $\psi_{s_1 s_2}(x_1, x_2)$ взагалі не є елементом якогось лінійного простору. Для такої функції не визначена дія операторів фізичних величин. До того ж, внаслідок невизначеності хронологічного впорядкування при збігу часів [14] функції $\psi_{s_1 s_2}(x_1, x_2)$ також є невизначеними в цьому випадку.

Таким чином, спроба описати стан квантової двочастинкової релятивістської системи функціями $\psi_{s_1 s_2}(x_1, x_2)$ фактично суперечить постулатам

квантової механіки та означає побудову якоїсь «нової» квантової механіки. Окрім цього, спроба описувати стан релятивістської квантової двочастинкової системи за допомогою функції $\psi_{s_1 s_2}(x_1, x_2)$ призводить до ряду відомих проблем, які перелічені, наприклад, в роботі [20] і тому докладний розгляд їх не має сенсу на фоні сформульованої основної проблеми. Звернемо тільки увагу на проблему з практичним використанням результатів теорії Бете-Солпитера. В цій теорії зв'язані стани розглядаються як полюси амплітуди розсіяння двох частинок в початковому стані в дві частинки в кінцевому. Але ніяких можливостей для розгляду задачі про розсіяння цих зв'язаних станів один на одному ця теорія не дає. Зокрема, з теорії ніяк не впливає як такі полюси взаємодіють між собою і взагалі, як таку взаємодію можна в принципі описати.

Зазначені проблеми намагалися розв'язати в межах методу квазіпотенціалу шляхом проектування $\psi_{s_1 s_2}(x_1, x_2)$ на деяку просторово-подібну поверхню [19-23]. Але, вочевидь, це не розв'язує основну проблему, що $\psi_{s_1 s_2}(x_1, x_2)$ не є елементом простору Фока і не може використовуватись для опису стану зв'язаної системи.

Інше важливе, з нашої точки зору, питання, яке постає з аналізу робіт, в яких стан описувався елементом простору Фока: Чи можливі в квантовій механіці багаточасові амплітуди ймовірності? Такі амплітуди ймовірності розглядалися в роботах [24-37]. Сенс, який надається багаточасовій амплітуді ймовірності $\Psi(t_1, \vec{r}_1, t_2, \vec{r}_2, \dots, t_n, \vec{r}_n)$, є аналогічним тому, що надається «звичайній» амплітуді ймовірності. А саме, $|\Psi(t_1, \vec{r}_1, t_2, \vec{r}_2, \dots, t_n, \vec{r}_n)|^2$ - є сумісна густина ймовірності того, що при вимірюванні в момент часу t_1 перша частинка буде виявлена в околі точки з радіус-вектором \vec{r}_1 і при цьому при вимірюванні в момент часу t_2 друга частинка буде виявлена в околі точки з радіус-вектором \vec{r}_2 і т.д. (питання врахування тотожності частинок розглядається,

наприклад в [37, 38], але для нас воно є несуттєвим, як буде видно з наведених далі міркувань). Для аргументів багаточасової амплітуди ймовірності повинні виконуватись умови:

$$\frac{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|}{|t_a - t_b|} > 1, a, b = 1, 2, \dots, n, a \neq b. \quad (1.3)$$

Тут і далі ми користуємось системою одиниць, в якій c - гранична швидкість розповсюдження взаємодії і \hbar - постійна Планка дорівнюють одиниці. Умови (1.3) потрібні для того, щоб процеси вимірювання, які відповідають різним точкам простору-часу, можна було вважати взаємно незалежними. Наведений сенс багаточасової амплітуди ймовірності явно формулюється в роботах [24, 30] і менш явно в роботі [34].

Зазначимо, що в роботі [30] багаточасова амплітуда ймовірності визначається аналогічно (1.2), але з використанням довільної кількості польових операторів і без їх хронологічного впорядкування. Проте, на відміну від підходу Бете-Солпітера таке визначення ніяк не використовується в цій роботі для побудови динамічних рівнянь для відповідної багаточасової функції. Тому можна казати, що для цієї роботи таке визначення є несуттєвим. Це видно з того, що аналогічні динамічні рівняння використовуються і в [34], але визначення багаточасової функції є іншим. Зокрема, розглянемо звичайну амплітуду ймовірності $\Psi(t, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n)$ в деякій системі відліку і проведемо одночасне відносно цієї системи вимірювання радіус-векторів частинок. Якщо при цьому вимірюванні частинки будуть виявлені в околах точок $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$, то виявлення кожної частинки в момент часу t в околі відповідної точки становить подію, яку позначатимемо $(t, \vec{r}_a), a = 1, 2, \dots, n$. Отже матимемо у системі відліку, що розглядається, сукупність подій $(t, \vec{r}_1), (t, \vec{r}_2), \dots, (t, \vec{r}_n)$ з однаковою часовою координатою. Інтервали між цими подіями вочевидь задовольняють вимогам (1.3). Якщо розглянути ту ж сукупність подій з точки зору іншого інерційного спостерігача, то, застосовуючи до кожної з вихідних по-

дій перетворення Лоренца, отримаємо сукупність неодноразових відносно нової системи відліку подій $(t'_1, \vec{r}'_1), (t'_2, \vec{r}'_2), \dots, (t'_n, \vec{r}'_n)$, де

$$\begin{pmatrix} t'_a \\ x'_a \\ y'_a \\ z'_a \end{pmatrix} = \hat{\Lambda} \begin{pmatrix} t \\ x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Тут $\hat{\Lambda}$ - матриця відповідного перетворення Лоренца.

Внаслідок (1.4) події $(t'_1, \vec{r}'_1), (t'_2, \vec{r}'_2), \dots, (t'_n, \vec{r}'_n)$ також задовольняють вимозі (1.3). Оскільки мова йде про одні й ті ж самі події, то їх ймовірність повинна бути однаковою. Тому в [34] пропонується визначити багаточасову амплітуду ймовірності таким чином:

$$\Psi'(t'_1, \vec{r}'_1, t'_2, \vec{r}'_2, \dots, t'_n, \vec{r}'_n) = \Psi(t, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n). \quad (1.5)$$

Тобто по суті, як вже зазначалося, визначення (1.5) співпадає із визначенням в роботі [24].

На наш погляд, використання багаточасових амплітуд ймовірності є переглядом постулатів квантової механіки, тобто «новою» квантовою механікою, що пропонується в згаданих роботах і відрізняється за змістом від традиційної квантової механіки. Пояснимо таке твердження докладніше. При цьому, як нам здається, треба розглянути трохи більш широке питання – чи можливе в квантовій механіці використання амплітуди ймовірності, яка описує неодноразові в певній системі відліку вимірювання. Тобто амплітуда ймовірності, наприклад, в гейзенберзькому представленні, взагалі може не залежати від часу, але її квадрат модуля все одно описує результат вимірювань динамічних змінних декількох частинок і тому все одно виникає питання, чи повинні бути ці вимірювання одночасними.

На наш погляд, розгляд амплітуди ймовірності для неодноразових вимірювань не враховує впливу процесу вимірювання на стан, який для довільної

квантової системи повинен бути суттєвим [39]. Коли ми в звичайній квантовій механіці розглядаємо одночасні вимірювання, ми можемо не описувати явно зміну стану при вимірюванні, описуючи лише сукупність динамічних змінних, яка отримана в певній реалізації процесу вимірювання. Але при не-одночасних вимірюваннях нам доведеться це робити, бо від меншого моменту часу до більшого буде еволюціонувати стан вже змінений вимірюванням. Більш того, на цьому проміжку часу доведеться явно описувати взаємодію з вимірювачем. Розглянемо, як найпростіший приклад, систему з двох частинок. Якщо її стан описувати звичайною одночасовою амплітудою ймовірності $\Psi(t, \vec{r}_1, \vec{r}_2)$, то ймовірність виявити при вимірюванні в момент часу частинку 1 (для спрощення поки будемо вважати частинки нетотожними) в околі dV_1 навколо точки $\vec{r}_1^{(0)}$ буде дорівнювати:

$$dP(t_1, \vec{r}_1^{(0)}, dV_1) = \left(\int \left| \Psi(t_1, \vec{r}_1^{(0)}, \vec{r}_2) \right|^2 dV_2 \right) dV_1. \quad (1.6)$$

При цьому взаємодія з приладом змінить стан $\Psi(t, \vec{r}_1, \vec{r}_2)$ до деякого нового стану, який позначимо як $\Psi_1(t_1, \vec{r}_1^{(0)}; t, \vec{r}_1, \vec{r}_2)$. Дійсно, якщо вихідний стан $|\Psi\rangle$ представити в виді розкладу по власних станів для пари радіус-векторів \vec{r}_1 і \vec{r}_2 , які позначатимемо $|\vec{r}_1, \vec{r}_2\rangle$:

$$|\Psi\rangle = \int dV_1 dV_2 \Psi(t, \vec{r}_1, \vec{r}_2) |\vec{r}_1, \vec{r}_2\rangle, \quad (1.7)$$

то після вимірювання, що призводить до виявлення частинки 1 в околі dV_1 точки $\vec{r}_1^{(0)}$, з розкладу (1.7) щонайменше треба вилучити внески всіх станів $|\vec{r}_1, \vec{r}_2\rangle$, яким відповідають значення \vec{r}_1 , що не потрапляють у вказаний окіл, і перенормувати амплітуду ймовірності, отримавши таким чином

$\Psi_1(t_1, \vec{r}_1^{(0)}; t, \vec{r}_1, \vec{r}_2)$ [39]. Далі, амплітуда ймовірності в момент часу $t_2 > t_1$ матиме вигляд:

$$\Psi_1(t_1, \vec{r}_1^{(0)}; t_2, \vec{r}_1, \vec{r}_2) = \int dV_1' dV_2' G(t_2 - t_1, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_1', \vec{r}_2') \Psi_1(t_1, \vec{r}_1^{(0)}; t, \vec{r}_1, \vec{r}_2). \quad (1.8)$$

Тут dV_1' і dV_2' - елементи об'ємів для радіус-векторів \vec{r}_1' і \vec{r}_2' , а $G(t_2 - t_1, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_1', \vec{r}_2')$ - функція Гріна, яка окрім інших взаємодій повинна містити інформацію про взаємодію із приладом, яким проводилося вимірювання в момент t_1 . Наприклад, ця взаємодія після моменту вимірювання t_1 може вимикатися, або навпаки, підтримуватися незмінною, або частинка взагалі може вилучатися з системи тощо. Звичайно, в цих випадках матимемо різну динаміку розвитку стану після моменту t_1 . Величину

$$dP(t_1, \vec{r}_1^{(0)} | t_2, \vec{r}_2^{(0)}) = \left(\int dV_1 \left| \Psi_1(t_1, \vec{r}_1^{(0)}; t_2, \vec{r}_1, \vec{r}_2^{(0)}) \right|^2 \right) dV_2, \quad (1.9)$$

можна розглядати як умовну ймовірність виявити частинку 2 в околі dV_2 точки $\vec{r}_2^{(0)}$, якщо вимірювання проводити в момент t_2 за умови, що в момент t_1 частинка 1 була виявлена при вимірюванні в околі dV_1 точки $\vec{r}_1^{(0)}$. Відповідно сумісна ймовірність при вимірюванні в момент t_1 виявити частинку 1 в околі точки $\vec{r}_1^{(0)}$ і при вимірюванні в момент t_2 виявити частинку 2 в околі точки $\vec{r}_2^{(0)}$ дорівнюватиме:

$$dP(t_1, \vec{r}_1^{(0)}, t_2, \vec{r}_2^{(0)}) = \left(\int dV_1 \left| \Psi_1(t_1, \vec{r}_1^{(0)}; t_2, \vec{r}_1, \vec{r}_2^{(0)}) \right|^2 \right) \times \left(\int \left| \Psi(t_1, \vec{r}_1^{(0)}, \vec{r}_2) \right|^2 dV_2 \right) dV_1 dV_2. \quad (1.10)$$

З формули (1.10) видно, що якщо вдається описати вплив вимірювання на стан, то результат вимірювань в різні моменти часу можна описати за до-

помогою звичайної одночасової амплітуди ймовірності $\Psi(t, \vec{r}_1, \vec{r}_2)$. На нашу думку, це є аргумент на користь того, що стан релятивістської квантової системи повинен описуватись сукупністю саме одночасових амплітуд ймовірності типу (1.1). Якщо вплив вимірювання на стан описати не вдасться, то ніякого динамічного способу описати таке багаточасове вимірювання не існує. Єдина можливість – описаний в [34] перерахунок результатів вимірювання з тієї системи відліку, в якій вимірювання відбувалися одночасно. Але результат такого багаточасного вимірювання для спостерігача, для якого це вимірювання неодноразове, не описуватиме динаміку стану, бо вона буде «зіпсована» взаємодією з приладом, пов'язаною із попереднім виміром.

Окрім того, маємо порушення принципу відносності: один інерційний спостерігач буде проводити вимірювання одночасно відносно себе, а другий – ні. Відносно обох спостерігачів вимір суттєво змінює стан, але той, хто проводить одночасний вимір, може не описувати цю зміну стану, а інший – повинен її описувати. Така ситуація виникає тому, що взаємодія із вимірювальним приладом миттєво впливає на стан. Дійсно, якщо при вимірюванні в момент часу t_1 з'ясується, що частинка 1 виявлена в околі точки $\vec{r}_1^{(0)}$, то в той самий момент часу з'ясується, що її не має в околах інших, скільки завгодно віддалених точок, і тому в той самий момент часу відповідні цим точкам власні стани повинні бути вилучені із розкладу (1.7). Тобто, як бачимо, відповідна інформація не повинна розповсюджуватись до цих точок із швидкістю не більше ніж 1 і умови (1.3) не «рятують». При цьому серед вилучених станів будуть стани $|\vec{r}_1, \vec{r}_2\rangle$, що відповідають таким парам \vec{r}_1 і \vec{r}_2 , що не відповідають умові (1.3), і в таких станах частинки могли б обмінюватися іншими частинками, тобто на проміжку $[t_1, t_2]$ віртуально переходити в стани, що містять більш ніж дві частинки. Після вимірювання, що вилучає ці стани, такі процеси стають неможливими. Тобто динаміка двочастинкового

стану із вилученням станів і без нього будуть різними навіть, якщо для результатів вимірювання буде виконуватись вимога (1.3).

Дотепер ми розглядали багаточасові амплітуди ймовірності в координатно-часовому представленні. Якщо ж розглянути одночасову амплітуду ймовірності $\Psi_n(t, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n)$ в імпульсному представленні, то при переході до іншої системи відліку незрозуміло чим доповнювати тривимірні імпульси до чотиривекторів, до яких можна було б застосувати перетворення Лоренца аналогічно [34]. Дійсно, ми розглядаємо систему взаємодіючих частинок, в якій не існує енергій окремих частинок, а існує лише власне значення енергії системи в цілому. З іншого боку, якщо розглянути в новій системі відліку багаточасову амплітуду ймовірності $\Psi(t_1, t_2, \dots, t_n, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n)$, то представляючи її в виді перетворення Фур'є:

$$\begin{aligned} \Psi(t_1, t_2, \dots, t_n, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) &= \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int \left(\prod_{a=1}^n dE_a d\vec{p}_a \right) \times \\ &\times \Psi(E_1, E_2, \dots, E_n, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n) \prod_{a=1}^n \exp\left(-i(E_a t_a - (\vec{p}_a \cdot \vec{r}_a))\right), \end{aligned} \quad (1.11)$$

бачимо, що величини E_a доведеться інтерпретувати саме як енергії окремих частинок. Окрім того, якщо зсунути цей стан в часі на Δt матимемо:

$$\begin{aligned} \Psi(t_1 + \Delta t, t_2 + \Delta t, \dots, t_n + \Delta t, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) &= \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int \left(\prod_{a=1}^n dE_a d\vec{p}_a \right) \times \\ &\times \exp\left(-i\left(\sum_{a=1}^n E_a\right)\Delta t\right) \Psi(E_1, E_2, \dots, E_n, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n) \prod_{a=1}^n \exp\left(-i(E_a t_a - (\vec{p}_a \cdot \vec{r}_a))\right). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Тобто енергія системи взаємодіючих частинок, яка характеризує поведінку стану при часовому зсуві, виявляється сумою одночастинкових енергій, що неможливо в системі взаємодіючих частинок.

З наведених міркувань ми пропонуємо в цій роботі стати на ту точку зору, що описання стану квантової системи можливо тільки за допомогою фоківських стовпців типу (1.1), компоненти яких відповідають одночасним вимірюванням. Тобто кожний інерційний спостерігач має вимірювати координати, імпульси, числа заповнення, або інші динамічні змінні одночасно відносно себе. Як видно з наведених вище міркувань, таке вимірювання не «влаштує» іншого інерційного спостерігача. Тому він не може просто перерахувати результати цього вимірювання за допомогою перетворень Лоренца до своєї системи відліку, а повинен провести своє незалежне вимірювання в тому ж самому стані, але одночасне відносно себе. Наприклад, розглянемо двох інерційних спостерігачів, що користуються системами відліку, які позначимо як K і K' . Деякий один і той самий стан релятивістської квантової системи описуватиметься в них стовпцями:

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1(t, \vec{r}_1) \\ \Psi_2(t, \vec{r}_1, \vec{r}_2) \\ \vdots \\ \Psi_n(t, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n) \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}, |\Psi'\rangle = \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi'_1(t', \vec{r}'_1) \\ \Psi'_2(t', \vec{r}'_1, \vec{r}'_2) \\ \vdots \\ \Psi'_n(t', \vec{r}'_1, \vec{r}'_2, \dots, \vec{r}'_n) \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

Тоді $|\Psi_n(t, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n)|^2 \prod_{a=1}^n dV_a$ - ймовірність сукупності подій $(t, \vec{r}_1), (t, \vec{r}_2), \dots, (t, \vec{r}_n)$ (в тих позначеннях, як це було оговорено вище, тобто $(t, \vec{r}_a), a = 1, 2, \dots, n$, означає подію, яка полягає в тому, що при вимірюванні a -та частинка виявлена в околі dV_a точки \vec{r}_a). Відповідно $|\Psi'_n(t', \vec{r}'_1, \vec{r}'_2, \dots, \vec{r}'_n)|^2 \prod_{a=1}^n dV'_a$ - ймовірність сукупності подій $(t', \vec{r}'_1), (t', \vec{r}'_2), \dots, (t', \vec{r}'_n)$. Оскільки події $(t, \vec{r}_1), (t, \vec{r}_2), \dots, (t, \vec{r}_n)$ є одночасними

відносно системи відліку K , а події $(t', \vec{r}'_1), (t', \vec{r}'_2), \dots, (t', \vec{r}'_n)$ є одночасними відносно системи відліку K' - це є різні сукупності подій. Тобто у кожного з спостерігачів є свій квантовий ансамбль однакових для обох спостерігачів систем, в якому кожен з них проводить свої вимірювання одночасно відносно себе. При цьому суттєво, що на відміну від нерелятивістської теорії, якщо розглядати взаємодію релятивістської квантової системи або із зовнішнім полем, або із іншою релятивістською квантовою системою, то в існуючих квантово-польових теоріях [14, 15, 40-49] компоненти фоківського стану (1.1) явно не входять в оператор взаємодії. Цей оператор виражається через польові оператори, але не через стан системи. Тому якщо залишатися в межах існуючих польових теорій, то запропонований розв'язок проблеми одночасності не впливатиме на опис взаємодії релятивістської квантової системи із іншими подібними системами.

Але описана ситуація призводить до ряду наслідків. Оскільки $(t, \vec{r}_1), (t, \vec{r}_2), \dots, (t, \vec{r}_n)$ і $(t', \vec{r}'_1), (t', \vec{r}'_2), \dots, (t', \vec{r}'_n)$ є різні сукупності подій, то їх просторово-часові координати не можна зв'язати перетвореннями Лоренца, бо перетворення Лоренца зв'язують між собою лише просторово-часові координати однієї й тієї ж події, але виміряні різними інерційними спостерігачами. Взагалі аргументи функцій $\Psi_n(t, \vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n)$ і $\Psi'_n(t', \vec{r}'_1, \vec{r}'_2, \dots, \vec{r}'_n)$ не можуть бути пов'язані ніяким чином, бо вони відповідають не пов'язаним між собою подіям. Це означає, що в такому випадку для квантових релятивістських систем неможливо робити висновки, засновані на перетвореннях Лоренца. Зокрема, про скорочення довжини [50-53] і уповільнення часу [54]. Знаючи, що подібне твердження вже зустрічалося в літературі [55, 56], але без будь-якого обґрунтування.

Питання одночасності квантомеханічних вимірювань розглядалось в роботі [57]. Однак в цій роботі пропонується забезпечувати одночасність вимірювань лише в системі центру мас частинок, що входять в квантовий стан, не заперечуючи при цьому зв'язок між аргументами амплітуди ймовірності

згідно з перетвореннями Лоренца. Такий підхід призводить до того, що в інших системах відліку ми будемо мати знов багаточасову амплітуду ймовірності. Також питання «одного часу для всієї зв'язаної системи» обговорювалося в роботі [55], але, як вже зазначалося, без будь яких обґрунтувань.

Аналогічні міркування можна віднести й до інших робіт із застосуванням методу квазіпотенціалу [21-23, 58-62], а також не пов'язаних із методом квазіпотенціалу робіт, в яких амплітуда ймовірності розглядається не для одночасних подій, а для подій, розташованих на деякій просторово-подібній поверхні, наприклад, [24-28, 63]. В цих роботах розглядається множина просторово-подібних тривимірних поверхонь в просторі Мінковського. А часоподібний параметр вводиться як такий, що зіставляється кожній із цих поверхонь. Для такого параметру можна знайти таку систему відліку, в якій він буде співпадати із часом, але в довільній інерційній системі відліку так не буде і знов неявно вводиться багаточасова амплітуда ймовірності. В роботах [20, 61] в межах методу квазіпотенціалу справді розглядається одночасова функція (на нашу думку, її не можна назвати одночасовою амплітудою ймовірності, бо вона отримується з рівняння Бете – Солпітера), але не розглядається питання про її перетворення до іншої системи відліку.

Аналогічні міркування стосуються, на наш погляд, методів описання зв'язаних станів за допомогою теорій поля на світловому фронті. Ці роботи базуються на роботі [64]. Мета цієї роботи як раз полягає в тому, щоб відійти від часового опису фізичних явищ. Зокрема, при розгляді форми динаміки на світловому фронті замість звичайних координат події в просторі Мінковського (x^0, x^1, x^2, x^3) пропонується ввести нові координати (x^+, x^1, x^2, x^-) , які називають координатами світлового фронту і які вводяться згідно із співвідношеннями:

$$x^+ = x^0 + x^3, x^- = x^0 - x^3. \quad (1.14)$$

Одну з цих змінних приймають за нову часову координату. Дійсно, якщо ми розглянемо систему відліку, що може бути отримана з вихідної системи відліку шляхом буста з бистротою Y уздовж вісі 3 у від'ємному напрямку цієї вісі, то

$$x'^0 = \text{ch}(Y)x^0 + \text{sh}(Y)x^3. \quad (1.15)$$

При наближенні Y до нескінченості матимемо [65]

$$x'^0 \rightarrow \frac{\exp(Y)(x^0 + x^3)}{2} = \frac{\exp(Y)x^+}{2}. \quad (1.16)$$

Тобто змінна x^+ з точністю до постійного множника співпадає із часовою змінною в розглянутій системі відліку. Якщо розглянути систему відліку, що рухається відносно вихідної системи в додатному напрямку вісі 3 з бистротою, яка наближається до нескінченості, то з точністю до множника із часовою змінною співпадає x^- . В моделях, які розглядають динаміку на світловому фронті [65-71], одна з цих змінних приймається як аналог часу [72]. Тобто розглядається еволюція не в часі, а наприклад, по змінній x^+ . Квантовопольові рівняння можуть бути переписані в змінних (x^+, x^1, x^2, x^-) , і розв'язані в тих же наближеннях, що й в змінних (x^0, x^1, x^2, x^3) , але амплітуди ймовірності для фоківських станів, які розглядаються в згаданих роботах, знов виявляються неодноточасними, бо, як видно з попередніх міркувань, одноточасними вони будуть лише в системі відліку, що рухається із нескінченною бистротою. Автори роботи [66] звертають увагу на цю обставину, але неодноточасність виміру розглядається ними як експериментальна перевага, а не як теоретична проблема. Автор роботи [71] також аналізує переваги динаміки на світловому конусі перед одночасним описанням, ігноруючи при цьому описані вище проблеми з неодноточасними амплітудами ймовірності.

Повертаючись до проблеми перетворення фоківського стану типу (1.1) при переході від однієї інерційної системи відліку до іншої, маємо звернути увагу на ще одну важливу проблему. Розглянуті вище проблеми з одночасністю виміру вочевидь мають місце лише для компонент стовпця, що відповідають кількості частинок, більшої за одну. Для одночастинкових компонент $\Psi_1(t, \vec{r}_1)$ і $\Psi'_1(t', \vec{r}'_1)$ такої проблеми не виникає і тому спостерігачі в різних інерційних системах відліку можуть скористатись однією й тією ж реалізацією процесу вимірювання. Якщо один з спостерігачів при вимірюванні в момент часу t виявляє частинку в околі точки \vec{r} , то інший може розглянути ту ж подію лише перерахувавши її час, координати і міру околу до своєї системи відліку. При цьому на відміну від інших компонент фоківського стовпця, аргументи $\Psi_1(t, \vec{r}_1)$ і $\Psi'_1(t', \vec{r}'_1)$ пов'язуються перетвореннями Лоренца. Різні закони перетворення одночастинкових і багаточастинкових амплітуд ймовірності призводять до наступної проблеми. В нерелятивістській теорії багаточастинкові амплітуди ймовірності можуть бути представлені в виді рядів по симетризованим або антисиметризованим добуткам одночастинкових функцій, що є основою для розгляду представлення чисел заповнення [73]. Внаслідок цього, як показано в [73], багаточастинкові оператори представляються як лінійні комбінації добутків операторів, що змінюють числа заповнення одночастинкових станів. Але з огляду на різні закони перетворення одночастинкових і багаточастинкових станів для системи взаємодіючих частинок такий розклад неможливий.

З іншого боку, можливість застосування перетворень Лоренца до одночастинкових амплітуд ймовірності призводить до того, що на відміну від нерелятивістської теорії, ми не можемо незалежно від системи відліку відділити часову залежність одночастинкового стану від координатної. Тому в релятивістській теорії ми не можемо розкласти багаточастинковий стан в лінійну комбінацію симетризованих або антисиметризованих добутків одночастинкових станів, не нав'язуючи при цьому певної залежності стану від часу. Зок-

рема, в усіх відомих нам польових теоріях у якості базису в просторі Фока використовується базис вигляду [13-15]:

$$|n, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \prod_{a=1}^n \hat{a}^+ \left(p_{0,a} = \sqrt{m^2 + \vec{p}_a^2}, \vec{p}_a \right) |0\rangle, \quad (1.17)$$

де $|0\rangle$ - вакуумний стан, що не містить жодної частинки, а $\hat{a}^+ \left(p_{0,a} = \sqrt{m^2 + \vec{p}_a^2}, \vec{p}_a \right)$ - оператори народження частинок з енергіями-імпульсами $p_{0,a}, a = 0, 1, 2, 3$, у яких енергія $p_{0,a}$ пов'язана із імпульсом \vec{p}_a умовою масової поверхні $p_{0,a} = \sqrt{m^2 + \vec{p}_a^2}$. У співвідношенні (1.17) ми не звертаємо увагу на внутрішні змінні частинок (спіральності, аромати, кольори, тощо), бо вони не мають значення для наших міркувань. Якщо розглянути загального виду стан релятивістської квантової системи

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \int \left(\prod_{a=1}^n d\vec{p}_a \right) \Psi_n(t, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n) \times \prod_{a=1}^n \hat{a}^+ \left(p_{0,a} = \sqrt{m^2 + \vec{p}_a^2}, \vec{p}_a \right) |0\rangle, \quad (1.18)$$

то маємо таке протиріччя. При переході до іншої системи відліку аргументи операторів народження з (1.18) перетворюються як компоненти чотиривектора, бо функції $\hat{a}^+ \left(p_{0,a} = \sqrt{m^2 + \vec{p}_a^2}, \vec{p}_a \right)$ пов'язані з розв'язками Лоренц-інваріантних польових рівнянь. Аргументи ж функцій $\Psi_n(t, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n)$ в різних системах відліку натомість неможливо пов'язати ніяким чином. Зокрема, ця проблема проявилася при описанні релятивістських зв'язаних станів методом Тамма – Данкоффа [74-77]. Суть методу полягає в тому, що для системи взаємодіючих полів за лагранжіаном будується гамільтоніан. Далі розглядається базис типу (1.17), але можливо із різними типами операторів народження (тобто такими, які з'являються при квантуванні різних полів). Такий

базис будується для всіх можливих кількостей частинок кожного сорту з усіма можливими імпульсами і при всіх можливих значень внутрішніх індексів. Далі можна розглянути матрицю гамільтоніану взаємодіючих полів в цьому базисі. Вона буде нескінченною як по кількості частинок, так і по імпульсам, по яким вона буде до того ще й нерозривною, тобто її потрібно розглядати по імпульсах як інтегральне ядро. В методі Тамма – Данкоффа цю матрицю замінюють конечною матрицею, яка її наближає і знаходять власні значення і власні вектори цієї матриці. Розглядаючи далі лінійну комбінацію базисних станів з коефіцієнтами, що складаються з компонент власного вектору, що відповідає найменшому власному значенню, можна отримати наближення для елемента простору Фока, який наближено описує відповідний власний стан. Звичайно, власні значення гамільтоніану довільної системи полів не можуть бути Лоренц-інваріантними, і власні стани повинні перетворюватись за допомогою відповідних генераторів групи Пуанкаре. Але, як видно з роботи [77], спроби придати розрахункам Лоренц-інваріантний вид призвели знов до багаточасових амплітуд ймовірностей. На наш погляд, задача придання методу Тамма-Данкоффа не повинна була ставитись. Такий розрахунок зручно провести в системі центру мас зв'язаної частинки, а потім перетворити фоківський стан і власне значення до потрібної системи відліку. При цьому перетворення фоківського стану не означає, як зазначалося вище, застосування перетворення Лоренца до аргументів його компонент. Згідно із постулатом квантування в [14] при бусті уздовж, наприклад, вісі 3 (при обертах проблеми одночасності не виникає і до того ж в миттєвій формі динаміки [64] генератори оберту не містять взаємодії), маємо закон перетворення

$$|\Psi'\rangle = \exp(-i\hat{M}_{03}Y)|\Psi\rangle, \quad (1.19)$$

де $|\Psi\rangle$ і $|\Psi'\rangle$ - фоківські стани в двох системах відліку, \hat{M}_{03} - компонента тензору моменту імпульсу системи полів – генератор групи Пуанкаре, що відповідає бусту, Y - бистрота буста. Тут виникає проблема, яка полягає в тому,

що при миттєвій формі динаміки генератор буста містить взаємодію, тому при дії оператору $\exp(-i\hat{M}_{03}Y)$ на фоківський стан, n -частинкова компонента вихідного стовпця може переводитись в компоненти з іншою кількістю частинок, на що звертається увага, наприклад, в [71] і що вважається недоліком миттєвої форми динаміки і перевагою динаміки на світловому конусі, бо генератор буста залишає незмінним світловий конус і у відповідній формі динаміки не містить взаємодію. Щоправда, це компенсується тим, що в такій формі динаміки взаємодія міститиметься в генераторах обертів, які вже не залишають світловий конус інваріантним. Але, якщо повернутися до проблеми незбереження числа частинок при дії оператора в (1.19), то тут можна запропонувати такий вихід. Якщо позначити генератори просторово-часового зсуву, як зазвичай, $\hat{P}_a, a = 0, 1, 2, 3$, то можемо розглянути оператор $\hat{P}^2 = g^{ab} \hat{P}_a \hat{P}_b$. Виходячи з комутаційних співвідношень для генераторів групи Пуанкаре, цей оператор комутує із всіма 10 генераторами. З іншого боку, він співпадає з квадратом гамільтоніану частинки, що є зв'язаним станом в її системі спокою, тобто в системі центру мас, складаючих частинки. Тому цей оператор природно назвати квадратом внутрішнього гамільтоніану складеної частинки. Тоді в базисі типу (1.17) можна побудувати матрицю цього оператора і діагоналізувати її. Але оскільки \hat{P}^2 комутує із іншими генераторами, то разом із цією матрицею можна діагоналізувати ще якісь. Зокрема, в роботі [78] пропонується розглядати стани власні окрім \hat{P}^2 для трьох генераторів обертів і суми їх квадратів. Зауважимо, що в роботі [78] розглядається інший метод побудови зв'язаного стану, не заснований на польовій теорії, але ми тут хочемо акцентувати увагу на повному наборі операторів, для яких зв'язаний стан буде власним. Генератори буста не комутують з операторами обертів. Але це залишає варіант розглядати їх спільний власний стан, що відповідає нульовим власним значенням всіх операторів. Підкреслимо, що мова йде саме про внутрішній стан складеної частинки, тобто стан, власний для

квадрату внутрішнього гамільтоніану \hat{P}^2 , а не для гамільтоніану \hat{P}_0 , залежного від системи відліку. Якщо він відповідатиме нульовим власним значенням генераторів бустів $\hat{M}_{01}, \hat{M}_{02}, \hat{M}_{03}$ і генераторів обертів, то, з одного боку, він буде сферично симетричним, бо не змінюватиметься при обертах, а, з іншого, як видно з (1.19), він не буде змінюватися при бустах. Тобто взагалі такий внутрішній стан не змінюватиметься при переході від однієї інерційної системи відліку до іншої. Це, з нашої точки, зору є фізично обґрунтованим, бо, якщо б внутрішній стан частинки змінювався б при переході від однієї системи відліку до іншої, то тоді змінювався б внутрішній момент імпульсу, а відтак – спін частинки в різних системах відліку виявлявся б різним. При цьому виникає проблема як описати спін складеної частинки. Можливий спосіб розв'язку цієї проблеми буде запропонований в цій роботі далі. Також далі буде розглянута задача перетворення стану з однієї інерційної системи відліку до іншої. Зауважимо, що оскільки внутрішній стан не змінюється, то й зазначеної проблеми із зміною кількості частинок в різних системах відліку не існуватиме.

Як вже зазначалося, ми не можемо розглядати розклад типу (1.18), не нав'язуючи певної залежності базисних функцій від часу. Зокрема, релятивістські оператори не можуть народжувати або знищувати частинку із імпульсом \vec{p} , вони можуть народжувати або знищувати лише частинку із чотириімпульсом $p^a = \left(p^0 = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}, p^1, p^2, p^3 \right)$, що ми й відобразили в позначеннях в (1.17) і (1.18). Тому базисні стани (1.17) фактично залежать від часу (якщо їх розглянути не в представленні чисел заповнення, а в координатному представленні) через одночастинкові енергії. В той же час, зв'язаний стан не повинен залежати від одночастинкових енергій, а повинен змінюватись із часом згідно з власним значенням енергії цього стану, яке ніяк не пов'язано із одночастинковими енергіями. Суто теоретично можлива така модель, яка приводила б до таких функцій $\Psi_n(t, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n)$ в (1.18), залежність яких

від часу компенсувала б одночастинкові залежності базисних станів і містила б «правильну» залежність від власного значення енергії зв'язаного стану. Проте існуючі моделі, основані на розкладах типу (1.18), як, наприклад, [71, 79, 80], призводять в дусі партонних моделей [54, 81-85] к представленню зв'язаного стану, як сукупності ефективних не взаємодіючих між собою частинок. В цьому сенсі на ці моделі схожа модель квазінезалежних кварків [86, 87], в якій по аналогії з методом Хартрі-Фока [88, 89] в атомній фізиці кварки в адроні розглядаються як не взаємодіючі, але поміщені у зовнішнє самоузгоджене поле. Звичайно, при такому підході виникає проблема із Лоренц-інваріантністю рівнянь для одночастинкових станів кварків. І також енергія зв'язаного стану кварків в такій моделі є сумою енергій одночастинкових станів кварків. Окрім того, опис стану адрону в такій моделі важко поєднати з подальшим описом розсіяння адрону на адроні.

Звернемо увагу на ще одну проблему, пов'язану не з описом зв'язаних станів як таких, а з описом процесів розсіяння цих зв'язаних станів. Ця проблема також пов'язана із розкладом (1.18). Якщо виходити з звичайної \hat{S} матричної постановки задачі розсіяння, то коефіцієнти розкладу (1.18) $\Psi_n(t, \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n)$ повинні мати певні границі при $t \rightarrow \pm\infty$. Але тоді асимптотично матимемо лінійну комбінацію станів з певними числами заповнення одночастинкових станів і з коефіцієнтами, які не залежать від часу (знов ж таки асимптотично). Залежність коефіцієнтів від часу «прибирається» за рахунок того, що розклад (1.18) відповідає розгляду процесу розсіяння в представленні взаємодії. Але це означає, що при переході в представлення Шредінгера стан залежатиме від часу таким чином, що його енергія представлятиметься сумою одночастинкових енергій. Тоді закон збереження енергії-імпульсу буде накладатися на чотири вектори енергій-імпульсів окремих частинок. У випадку квантової хромодинаміки це будуть кварки і глюони. В той же час, в експерименті спостерігається процес з адронами і закон збереження енергії-імпульсу повинен накладатися на чотири імпульси адронів. Фізично

це пов'язано з тим, що незмінність стану із часом в представленні взаємодії відповідає «відключенню» взаємодії. Тобто фізично маємо процес переходу з одного стану вільних кварків і глюонів в інший стан вільних кварків і глюонів, що, вочевидь, не відповідає експерименту. Якщо ж розглядати процес розсіяння адронів, як це є в експерименті, то взаємодія не «відключається» ні на якій стадії процесу в тому числі й при $t \rightarrow \pm\infty$. Але це означає, що в представленні взаємодії коефіцієнти розкладу (1.18) суттєво залежатимуть від часу і не матимуть, взагалі кажучи, якихось певних границь при $t \rightarrow \pm\infty$. Тобто \hat{S} -матрична постановка задачі не може в принципі описати процес утворення адронів в результаті часової еволюції кваркових і глюонних полів. І цей висновок, як видно з наведених міркувань, не залежить від наближення, яким ми користуємось при розгляді цієї еволюції, наприклад, теорії збурень [44-46, 48, 49, 90-92] чи граткових наближень [48, 93-98] тощо. Розклад типу (1.18) застосовується для представлення \hat{S} -оператора системи взаємодіючих полів в виді функціонального інтегралу [11, 13, 49]. Зазвичай акцентується увага на складнощах розрахунку цього функціонального інтегралу. Однак з наведених міркувань видно, що навіть, якщо б ми могли б точно розрахувати негаусівський функціональний інтеграл, ми б все одно не описали б адронізацію і отримали б \hat{S} -оператор, матричні елементи якого містили б закон збереження енергії-імпульсу не для адронів, а для кварків і глюонів. Вочевидь, аналогічна проблема виникла б і в квантовій електродинаміці, якщо б ми розглянули б, наприклад, процес зіткнення потоку протонів з потоком електронів з утворенням атомів водню. Тобто це саме проблема релятивістського опису утворення зв'язаних станів незалежно від типу взаємодії.

На наш погляд, ця проблема «запрограмована» використанням локальної теорії поля. Після квантування такої теорії ми отримуємо оператори, які змінюють числа заповнення одночастинкових станів. Локальність лагранжіану взаємодії призводить до того, що зміна чисел заповнення одночастинкових станів повинна відбуватися таким чином, щоб зберігалася сума одночас-

тинкових чотириімпульсів. Відповідно, маючи динамічні оператори, що змінюють одночастинкові числа заповнення, ми повинні початковий та кінцевий стани задавати за допомогою таких операторів. Тому варто очікувати, що при використанні локальної теорії ми будемо отримувати матричні елементи, що задовольняють закону збереження суми одночастинкових чотириімпульсів. При цьому навіть наближення часу до плюс- або мінус-нескінченості, яке ми використали в попередніх міркуваннях, видається несуттєвим, бо найбільш суттєвим фактом є те, що лагранжіан взаємодії полів є функцією від однієї просторово-часової точки, що призводить до закону збереження суми одночастинкових чотириімпульсів.

При опису релятивістських зв'язаних станів розглядалися й нелокальні поля [86, 99-103]. В цих роботах розглядалися поля залежні від декількох просторово-часових точок. При цьому вводилися чотиривимірні координати Якобі, тобто координати, від яких залежать поля розділялися на координати центру мас «зовнішні» і відносні координати «внутрішні». Подібного підходу ми будемо притримуватись далі в нашій роботі. Але є суттєва відмінність підходу, який ми будемо розглядати далі, від того, що розглядався у вказаних роботах. Ця відмінність полягає в тому, що у вказаних роботах принципово потрібно забезпечити інваріантність динамічних рівнянь відносно перетворень Лоренца як для зовнішніх, так і для внутрішніх координат. При нашому ж підході (подібно до роботи [55]) вимагається лише Лоренц-інваріантність відносно зовнішніх змінних. При цьому, як буде видно з подальшого розгляду, перетворення Лоренца для зовнішніх координат не є наслідком перетворень Лоренца для координат окремих частинок, бо, як вже зазначалося, між цими координатами немає ніякого зв'язку. Також й внутрішні ж змінні, як це обговорювалося вище, взагалі не можуть бути пов'язані ніяким чином. Залежність полів від них, як буде показано далі, є власною функцією генераторів бустів на просторі Фока. Тому залежність від внутрішніх змінних виявляється однаковою в різних інерційних системах відліку, чим і забезпечується від-

повідність принципу відносності. Окрім того, в роботі [99] обмеженість в просторі зв'язаного стану вводиться шляхом постулювання певного виду рівняння для залежності від внутрішніх змінних. В нашій моделі вона з'явиться як наслідок взаємодії між кварками, яка вводиться звичайним способом шляхом подовження похідних і вимоги локальної $SU_c(3)$ -симетрії.

Бажання дотримуватися інваріантності відносно перетворень Лоренца для внутрішніх змінних призводить до опису взаємодії між частинками за допомогою аналогу потенційної енергії, але залежної від Лоренц-інваріанту $(x_{(2)}^0 - x_{(1)}^0)^2 - (x_{(2)}^1 - x_{(1)}^1)^2 - (x_{(2)}^2 - x_{(1)}^2)^2 - (x_{(2)}^3 - x_{(1)}^3)^2$, де $x_{(1)}^a, x_{(2)}^a, a = 0, 1, 2, 3$ - просторово-часові координати точок від яких залежить нелокальне поле. Зокрема, подібні моделі розглядаються в [86, 102-104]. До них подібні моделі релятивістського гармонійного осцилятора [105, 106]. На наш погляд, ці моделі не мають належного фізичного інтерпретування. Так, характерна для них гаусівська залежність стану від часу вочевидь суперечить умові унітарності.

Отже, з наведених міркувань видно, що опис релятивістських зв'язаних станів містить багато проблем. Проте, виникає питання, наскільки необхідним є саме релятивістський підхід для опису зв'язаних станів кварків. Оскільки кожен адрон складається з певної кількості конститuentних кварків певних ароматів, то при описі внутрішнього стану адрону ми не маємо необхідності описувати народження і знищення конститuentних кварків. Існування адрону як зв'язаної системи кварків можна описати, уникаючи розглянутих труднощів в нерелятивістському наближенні. Якщо ж для якихось питань суттєвими є релятивістські властивості кварків, то їх можна враховувати як релятивістські поправки довільного порядку до нерелятивістського наближення подібно до того, як це робиться для систем важких кварків в підході, що називається «нерелятивістською КХД» [107-109]. Тому далі розглянемо нерелятивістські моделі зв'язаних станів кварків.

1.2. Нерелятивістські моделі і ґраткові методи знаходження потенціалу

Як відомо, кваркові моделі адронів з'явилися з теоретико–групових міркувань [110-113].

Успіхи класифікації адронів в межах кваркових моделей стали основою для розгляду динамічних моделей, в яких адрони розглядаються як зв'язані стани кварку та антикварку (мезони) або трьох кварків (баріони). При цьому характеристики внутрішнього стану адрону описуються за допомогою рівняння Шредінґера для двох або трьох нерелятивістських частинок, взаємодія між якими описується за допомогою певної потенційної енергії [114-123] і з можливими релятивістськими поправками різних порядків [124-132], що дозволяє уникнути оговорених в попередньому розділі труднощів релятивістського опису. Саме за принципом потенціального опису взаємодії ми розглядаємо такі моделі як нерелятивістські. Тому хоча в роботах [115-118] розглядається не рівняння Шредінґера, а рівняння Солпітера, яке відрізняється від рівняння Шредінґера заміною нерелятивістського гамільтоніану вільної частинки $\left(\vec{p}^2/2m\right)$ (в імпульсному представленні) на релятивістський вираз $\sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$, ми відносимо ці роботи до нерелятивістських моделей, бо взаємодія в них описується потенційною енергією, а стан описується амплітудою ймовірності для певної кількості частинок, а не фоківським стовпцем.

При подібному описанні адронів як зв'язаних станів кварків виникає дві проблеми. Перша стосується того, що нерелятивістська модель розглядається в системі спокою зв'язаної частинки. Враховуючи, що в процесі розсіювання беруть участь кілька адронів, ми не можемо обрати систему відліку так, щоб вона була системою спокою для всіх адронів. Окрім того, відносно обраної системи відліку невзаємодіючі адрони в початковому та кінцевому ста-

нах розсіяння можуть мати релятивістські енергії-імпульси, тобто $|\vec{p}| \gg m$, де m - маса адрону, а $|\vec{p}|$ - його імпульс в розглядуваній системі відліку.

Таким чином, виникає задача перетворення зв'язаного стану нерелятивістських конститuentних кварків від системи спокою адрону (тобто системи центру мас кварків), до системи відносно якої адрон як ціле має релятивістський імпульс. Інша проблема - яким чином можна описати взаємодію адронів між собою як наслідок взаємодії між нерелятивістськими конститuentними кварками, що їх складають. В дисертації далі розглядаються обидві задачі.

Оскільки при розгляді нерелятивістських моделей складний польовий опис взаємодії замінюється на значно простіший опис за допомогою потенційної енергії, то суттєвим моментом таких теорій є задання цієї потенційної енергії. Зазвичай при розгляді потенціалу між кваркової взаємодії користуються результатами розрахунків в граткових моделях [48, 93-98, 133-135], тому що такі розрахунки призводять до потенціалів, що описують конфайнмент кварків. В нашій роботі далі буде розраховано потенціал міжкваркової взаємодії, який також описує конфайнмент та асимптотичну свободу кварків. Цей потенціал відрізняється від потенціалу, отриманого гратковими методами, тим, що він значно різкіше наближається до нескінченості при зростанні відстані між кварками. Тому ми спробуємо проаналізувати можливі причини цих відмінностей. Для цього розглянемо граткові моделі більш докладно.

Ідея граткового методу полягає в наступному. Як відомо, розрахунок спостережуваних величин потребує розрахунку континуального інтегралу по кваркових і глюонних полях [44-46, 48, 49]. Для того, щоб можна було б розрахувати цей континуальний інтеграл, реальний нерозривний простір-час замінюється на гратку з деяким ребром a [133, 134], тобто простір Мінковського замінюється дискретною множиною впорядкованих четвірок чисел

$$x^b(n) = n^b a, b = 0, 1, 2, 3, \quad (1.20)$$

де кожна компонента n^b незалежно від інших компонент «пробігає» множини цілих чисел.

Тоді, якщо ґратка буде скінчена, нескінченновимірний континуальний інтеграл наближено зводиться до інтегралу скінченої розмірності, до якого можна застосовувати чисельні методи розрахунку.

Перехід від полів, заданих на нерозривному просторі-часі, до полів на ґратці породжує ряд суттєвих проблем із досягненням локальної $SU_c(3)$ інваріантності. Щоб пояснити в чому полягають ці труднощі розглянемо неабелеве калібрувальне глюонне поле

$$\hat{A}_b(x) = A_{b,g_1}(x) \hat{\lambda}^{g_1}, \quad (1.21)$$

де $b = 0, 1, 2, 3$ - Лоренцев індекс, $g_1 = 1, 2, \dots, 8$ - внутрішній індекс (по індексу, що повторюється двічі, тут і далі буде матися на увазі сума), $\hat{\lambda}^{g_1}$ - матриці Гел-Манна, $A_{b,g_1}(x)$ - польові функції глюонного поля. При локальному $SU_c(3)$ -перетворенні, що описується матрицею $\hat{U}(x) = \exp(i\theta_{g_1}(x)\hat{\lambda}^{g_1})$, де $\theta_{g_1}(x)$ - залежні від просторово-часових координат параметри цього локального перетворення, матриця $\hat{A}_b(x)$, перетворюється за законом [44, 45, 49], (g - константа сильної взаємодії):

$$\hat{A}'_b(x) = \hat{U}(x) \hat{A}_b(x) \hat{U}^{-1}(x) - \frac{i}{g} \frac{\partial \hat{U}(x)}{\partial x^b} \hat{U}^{-1}(x) \quad (1.22)$$

Суттєвою відмінністю закону перетворення цього поля від законів перетворення інших полів (наприклад, біспінових) при локальних калібрувальних перетвореннях є те, що цей закон містить похідну. Тобто за термінологією М.М. Боголюбова [14] він є не локальним а «квазілокальним». Ця квазілокальність проявляється при переході до дискретної множини (1.20). Тоді похідна в (1.22) замінюється виразом

$$\frac{\partial \hat{U}(x)}{\partial x^b} \rightarrow \frac{\hat{U}(x(n+\Delta n)) - \hat{U}(x(n))}{a}, \quad (1.23)$$

де $\Delta n^c = \delta_b^c$, а δ_b^c - дельта-символ Кронекера. Тоді замість (1.22) отримаємо:

$$\begin{aligned} \hat{A}'_b(x(n), x(n+\Delta n)) = & \hat{U}(x(n)) \hat{A}_b(x(n)) \hat{U}^{-1}(x(n)) - \\ & - \frac{i}{g} \left(\frac{\hat{U}(x(n+\Delta n)) - \hat{U}(x(n))}{a} \right) \hat{U}^{-1}(x(n)). \end{aligned} \quad (1.24)$$

З (1.24) бачимо, що при дискретному аналогу локального $SU_c(3)$ -перетворення закон перетворення для величини $\hat{A}_b(x(n))$ містить величини, визначені не тільки в точці $x(n)$, але й в сусідніх вузлах ґратки $x(n+\Delta n)$. Іншими словами, якщо, не змінюючи положення вузла $x(n)$, змінювати ґратку так, щоб змінювалося положення вузла $x(n+\Delta n)$ (наприклад, обираючи різні значення сталої ґратки a), то при довільній функції $\hat{U}(x)$ значення поля \hat{A}'_b після перетворення буде змінюватись. Це ми й відобразили в позначеннях в (1.24), позначаючи отримані після перетворення польові функції $\hat{A}'_b(x(n), x(n+\Delta n))$.

Таким чином, можемо зробити висновок, що локальна $SU_c(3)$ інваріантність ґраткової моделі не може бути збережена, якщо калібрувальне поле задавати на множині вузлів ґратки (1.20). Як видно з (1.24), певне значення ґраткового калібрувального поля можна зіставити парі сусідніх вузлів $(x(n), x(n+\Delta n))$, тобто – ребру ґратки. Тому ґраткові калібрувальні поля на відміну від інших полів задаються на множині саме ребер, а не вузлів.

Але у зв'язку з тим виникає питання, яким чином таке «реберне» поле повинне бути пов'язане із звичайним калібрувальним полем $\hat{A}_b(x)$ і який повинен бути закон перетворення цього поля при локальному $SU_c(3)$ -пере-

творенні. Для того, щоб сформулювати відповіді на ці питання в межах ґраткових моделей скористаємось тим, що формула (1.22) з урахуванням визначення похідної після невеликих перетворень може бути переписана в виді:

$$\lim_{\Delta x^b \rightarrow 0} \left(\hat{E} - ig\hat{A}'_b(x)\Delta x^b \right) = \lim_{\Delta x^b \rightarrow 0} \hat{U}(x + \Delta x) \left(\hat{E} - ig\hat{A}_b(x)\Delta x^b \right) \hat{U}^{-1}(x). \quad (1.25)$$

Вирази $\hat{E} - ig\hat{A}'_b(x)\Delta x^b$ і $\hat{E} - ig\hat{A}_b(x)\Delta x^b$ можна розглядати як перші члени розкладу в ряд Тейлора відповідних експонент. За наявності граничного переходу $\lim_{\Delta x^b \rightarrow 0}$ вони є набагато більші ніж решта членів розкладу і тому за-

мість (1.25) можемо написати

$$\lim_{\Delta x^b \rightarrow 0} \exp\left(-ig\hat{A}'_b(x)\Delta x^b\right) = \lim_{\Delta x^b \rightarrow 0} \hat{U}(x + \Delta x) \exp\left(-ig\hat{A}_b(x)\Delta x^b\right) \hat{U}^{-1}(x). \quad (1.26)$$

Розглянемо тепер в просторі Мінковського підмножину чотири векторів

$$x^a = x^a(\tau), a = 0, 1, 2, 3, \tau \in [\tau_0, \tau_1], \quad (1.27)$$

де $x^a(\tau)$ - довільні функції від довільного параметру τ , який змінюється на інтервалі $[\tau_0, \tau_1]$. Цю підмножину стовпців будемо називати кривою C в просторі Мінковського. Розіб'ємо відрізок $[\tau_0, \tau_1]$ точками

$$y_0 = \tau_0, y_1, \dots, y_n = \tau_1. \quad (1.28)$$

Тоді точки $x^a_{(b)} = x^a(y_b), a = 0, 1, 2, 3, b = 0, 1, \dots, n$ утворюють деяке розбиття кривої C . Розглянемо тепер границю добутку

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max |x^b(y_{a+1}) - x^b(y_a)| \rightarrow 0}} \prod_{a=0}^{n-1} \exp\left(-ig\hat{A}_b(x_{(a)})\Delta x^b\right), \Delta x^b = x^b(y_{a+1}) - x^b(y_a). \quad (1.29)$$

Тобто границя добутку

$$\begin{aligned} & \prod_{a=0}^{n-1} \exp\left(-ig\hat{A}_b\left(x_{(a)}\right)\Delta x^b\right) = \\ & = \exp\left(-ig\hat{A}_b\left(x_{(n-1)}\right)\Delta x^b\right) \dots \exp\left(-ig\hat{A}_b\left(x_{(1)}\right)\Delta x^b\right) \exp\left(-ig\hat{A}_b\left(x_{(0)}\right)\Delta x^b\right) \end{aligned} \quad (1.30)$$

при нескінченному збільшенні кількості точок розбиття кривої C та нескінченному зближенні між собою (в сенсі близькості відповідних координат) точок розбиття. Формулою (1.30) ми звертаємо увагу на певний порядок множників в добутку, тобто такий порядок, при якому множник, що містить матрицю $\hat{A}_b\left(x_{(a)}\right)$ з більшим значенням індексу a , обов'язково повинен знаходитись лівіше за множник з меншим індексом a .

Матриці в показниках експонент в (1.29) не комутують між собою, тому добуток експонент неможливо замінити однією експонентою від суми показників. Проте, можемо ввести оператор \hat{P} впорядкування по кривій. Цей оператор визначається таким чином, що, діючи на довільний добуток довільної кількості матриць $\hat{A}_b\left(x_{(i_1)}\right)\hat{A}_b\left(x_{(i_2)}\right)\dots\hat{A}_b\left(x_{(i_k)}\right)$, він розставляє їх в порядку зростання індексів так, ніби ці матриці комутували б:

$$\begin{aligned} & \hat{P}\left(\hat{A}_b\left(x_{(i_1)}\right)\hat{A}_b\left(x_{(i_2)}\right)\dots\hat{A}_b\left(x_{(i_k)}\right)\right) = \\ & = \hat{A}_b\left(x_{(j_1)}\right)\hat{A}_b\left(x_{(j_2)}\right)\dots\hat{A}_b\left(x_{(j_k)}\right), j_1 > j_2 > \dots > j_k. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Тоді матриці під знаком оператора \hat{P} поведуться подібно до комутуючих.

Якщо розглянути вираз (1.30), то в ньому порядок матриць «правильний», тому можемо записати:

$$\prod_{a=0}^{n-1} \exp\left(-ig\hat{A}_b\left(x_{(a)}\right)\Delta x^b\right) = \hat{P}\left(\prod_{a=0}^{n-1} \exp\left(-ig\hat{A}_b\left(x_{(a)}\right)\Delta x^b\right)\right). \quad (1.32)$$

Враховуючи, що під знаком оператора \hat{P} матриці поводяться як комутуючі, можемо записати:

$$\prod_{a=0}^{n-1} \exp\left(-ig\hat{A}_b(x_{(a)})\Delta x^b\right) = \hat{P}\left(\exp\left(-ig\sum_{a=0}^{n-1}\hat{A}_b(x_{(a)})\Delta x^b\right)\right). \quad (1.33)$$

Переходячи до границі (1.29), отримаємо

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max|x^b(y_{a+1}) - x^b(y_a)| \rightarrow 0}} \prod_{a=0}^{n-1} \exp\left(-ig\hat{A}_b(x_{(a)})\Delta x^b\right) = \hat{P}\left(\exp\left(-ig\int_C \hat{A}_b(x)dx^b\right)\right). \quad (1.34)$$

Тоді для кожного ребра ґратки можемо ввести матрицю

$$\hat{U}(x(n), x(n + \Delta n)) = \hat{P}\left(\exp\left(-ig\int_{C(x(n), x(n + \Delta n))} \hat{A}_b(x)dx^b\right)\right), \quad (1.35)$$

де позначення $C(x(n), x(n + \Delta n))$ означає, що інтегрування проводиться по ребру ґратки.

Формула (1.35) визначає зв'язок між калібрувальним полем та його реберною ґратковою реалізацією. Тобто при ґраткових розрахунках в якості динамічних змінних, що характеризують калібрувальне поле, замість матриць $\hat{A}_b(x)$ використовують матриці $\hat{U}(x(n), x(n + \Delta n))$. З (1.34) видно, що матриця $\hat{U}(x(n), x(n + \Delta n))$ є добутком $SU_c(3)$ матриць, тому вона сама є $SU_c(3)$ - матрицею. Таким чином, інтегрування по польових конфігураціях калібрувального поля замінюється інтегруванням по групі $SU_c(3)$. Така заміна має дуже суттєві наслідки. Розглянемо це більш детально.

Як відомо, елементи унітарної матриці є комплексними числами, які за модулем не перевищують одиницю, в той час, як компоненти глюонного по-

ля $A_{b,g_1}(x)$ з формули (1.21) можуть змінюватись від $-\infty$ до $+\infty$. У випадку граткової моделі всі наближення обґрунтовуються тим, що при розкладі динамічних змінних в ряд Тейлора по постійній гратки a отримуються «правильні» формули континуальної моделі. В той же час, граткові величини містять величину a в вигляді добутку $aA_{b,g_1}(x)$, тому розклад в ряд Тейлора можливий лише при малих значення цього добутку. Враховуючи, що граткові розрахунки проводяться при скінченних значеннях параметру a , завжди знайдуться такі великі значення поля $A_{b,g_1}(x)$, при яких такий розклад буде неможливий. При цьому основний висновок граткових моделей про конфайнмент пов'язаний з нескінченним зростанням потенційної енергії міжкваркової взаємодії, тобто саме з великими значеннями полів. Як вже зазначалося вище, відмінність результатів, які будуть наведені далі в дисертації, від результатів граткових моделей також проявляється в різкості наближення потенційної енергії до нескінченності, тобто саме при великих значеннях полів.

Найбільш суттєвим наслідком заміни калібрувального поля $A_{b,g_1}(x)$ реберною змінною (1.35) є те, що замість обчислення континуального інтегралу по некомпактній множині значень глюонних полів $A_{b,g_1}(x)$ розраховується інтеграл по компактній групі $SU(3)$ [136], тобто по такій групі, елементи якої можна представити як аналітичні функції від параметрів, що змінюються в деякій скінченній області. Щоб пояснити в чому полягає суттєвість цієї заміни і до яких наслідків вона призводить розглянемо, що являє собою інтеграл по групі $SU(3)$.

Як відомо, довільний елемент групи $SU(3)$ може бути заданий як функція від восьми параметрів [44, 45, 90, 137]. Позначатимемо ці параметри як $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8$, а всю їх сукупність – однією буквою α . Отже довільна $SU(3)$ -матриця \hat{U} може бути представлена як функція $\hat{U}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8) \equiv \hat{U}(\alpha)$. Можна показати, що параметри α можуть бути введені таким чином, що елеме-

нти довільної $SU(3)$ - матриці є деякими поліномами від синусів та косинусів величин $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8$, тобто вони є аналітичними функціями від цих параметрів. При цьому деякі з цих величин змінюються на проміжках $[0, \pi]$, а деякі – на проміжках $[0, 2\pi]$ для того, щоб елемент $\hat{U}(\alpha)$ пробігав всю групу $SU(3)$. Внаслідок цих властивостей група $SU(3)$ є компактною. Якщо ми розглянемо добуток двох елементів групи, що відповідають сукупностям параметрів β і α , ми повинні отримати деякий елемент тієї ж групи і відповідно певну сукупність параметрів γ , яка відповідає цьому елементу [136]:

$$\hat{U}(\beta)\hat{U}(\alpha) = \hat{U}(\gamma(\beta, \alpha)). \quad (1.36)$$

Функція $\gamma(\beta, \alpha)$ визначає закон множення в групі і внаслідок групових аксіом має ряд важливих властивостей. Зокрема в [136] розглядаються матриці

$$S_{ab}(\hat{U}(\beta), \hat{U}(\alpha)) = \frac{\partial \gamma_a(\beta, \alpha)}{\partial \beta_b}, S'_{ab}(\hat{U}(\beta), \hat{U}(\alpha)) = \frac{\partial \gamma_a(\beta, \alpha)}{\partial \alpha_b}. \quad (1.37)$$

Групові аксіоми [138] стверджують, що для кожного елемента групи в тій самій групі є правий обернений елемент, а як наслідок цих аксіом в [138] показується, що правий обернений елемент є одночасно й лівим оберненим елементом. Це дозволяє розглядати співвідношення (1.36) не тільки як визначення функції $\gamma(\beta, \alpha)$, а й, наприклад, як визначення функції $\alpha(\gamma, \beta)$. Дійсно, зафіксуємо в (1.36) певний набір параметрів γ і певний набір β . Тоді співвідношення $\hat{U}(\beta)\hat{U}(\alpha) = \hat{U}(\gamma)$ однозначно визначає набір α , який йому задовольняє:

$$\hat{U}(\alpha(\beta, \gamma)) = \hat{U}^{-1}(\beta)\hat{U}(\gamma). \quad (1.38)$$

Якщо функцію $\alpha(\gamma, \beta)$, що визначається (1.38), підставити в вираз $\gamma(\beta, \alpha)$, який визначається (1.36), отримаємо тотожність:

$$\gamma_a(\beta, \alpha(\beta, \gamma)) = \gamma_a, a = 1, 2, \dots, 8. \quad (1.39)$$

Диференціюючи її по γ_b , отримаємо:

$$\frac{\partial \gamma_a(\beta, \alpha(\beta, \gamma))}{\partial \alpha_c} \frac{\partial \alpha_c(\beta, \gamma)}{\partial \gamma_b} = \delta_{ab}, a, b, c = 1, 2, \dots, 8. \quad (1.40)$$

Тут δ_{ab} - дельта-символ Кронекера.

Співвідношення (1.40) показує, що матриця $S'_{ab}(\hat{U}(\beta), \hat{U}(\alpha))$ з (1.37) для будь-яких параметрів α і β , що відповідають елементам групи, має обернену матрицю. Аналогічно, розглядаючи функцію $\beta(\gamma, \alpha)$

$$\hat{U}(\beta(\gamma, \alpha)) = \hat{U}(\gamma(\beta, \alpha))\hat{U}^{-1}(\alpha), \quad (1.41)$$

дістанемо висновку, що і матриця $S_{ab}(\hat{U}(\beta), \hat{U}(\alpha))$ також для всіх значень її аргументів завжди має обернену. Це означає, що детермінанти цих матриць всюди на групі не обертаються в нуль.

Крім того, в околі одиничного елементу групи функції $\gamma(\beta, \alpha)$ повинні мати щонайменше другі похідні, бо через них виражаються структурні константи групи [136]. Але окіл одиничного елементу може бути взаємно – однозначно відображений на окіл довільного елементу. Тому другі похідні у функції $\gamma(\beta, \alpha)$ повинні існувати для довільних значень аргументів. Тоді елементи матриць (1.37) є нерозривними функціями від параметрів групи. Наслідком цього є нерозривність детермінантів цих матриць як функцій від параметрів групи.

Отже, детермінанти є нерозривними і не обертаються на групі в нуль. Це призводить до висновку, що ці детермінанти для всіх значень параметрів елементів групи приймають значення одного знаку. Якщо, як зазвичай, вважати, що нульовим значенням параметрів відповідає одиничний елемент групи, то з (1.36) матимемо:

$$\gamma_a(\beta=0, \alpha) = \alpha_a, \gamma_a(\beta, \alpha=0) = \beta_a. \quad (1.42)$$

Тоді

$$\begin{aligned} S_{ab}(\hat{U}(\beta), \hat{E}) &= \frac{\partial \gamma_a(\beta, \alpha=0)}{\partial \beta_b} = \delta_{ab}, \\ S'_{ab}(\hat{E}, \hat{U}(\alpha)) &= \frac{\partial \gamma_a(\beta=0, \alpha)}{\partial \alpha_b} = \delta_{ab}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Тут \hat{E} позначено одиничний елемент групи $SU(3)$. З (1.43) маємо

$$\det(\hat{S}(\hat{U}(\beta), \hat{E})) = \det(\hat{S}'(\hat{E}, \hat{U}(\alpha))) = 1. \quad (1.44)$$

Враховуючи попередній висновок, що детермінанти всюди на групі приймають значення одного знаку, робимо висновок, що для всіх значень параметрів групи

$$\begin{aligned} \det(\hat{S}(\hat{U}(\beta), \hat{U}(\alpha)\hat{E})) &> 0, \\ \det(\hat{S}'(\hat{U}(\beta), \hat{U}(\alpha))) &> 0. \end{aligned} \quad (1.45)$$

В [136] розглядаються інтеграли, які визначаються наступним чином:

$$\begin{aligned} \int f(\hat{U}(\alpha))(dU(\alpha))_L &\equiv \int f(\hat{U}(\alpha)) \det(\hat{S}'(\hat{U}^{-1}(\alpha), \hat{U}(\alpha))) d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_8, \\ \int f(\hat{U}(\alpha))(dU(\alpha))_R &\equiv \int f(\hat{U}(\alpha)) \det(\hat{S}(\hat{U}(\alpha), \hat{U}^{-1}(\alpha))) d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_8, \end{aligned} \quad (1.46)$$

де $f(\hat{U}(\alpha))$ - довільна функція від елементу групи, що приймає числові значення та інтегрування проводиться по такій області зміни параметрів $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8$, щоб матриця $\hat{U}(\alpha)$ «пробігла» всю групу. Ці інтеграли називають відповідно лівоінваріантним і правоінваріантним інтегралами по групі $SU(3)$. Це пов'язано з тим, що якщо замість першого з інтегралів (1.46) розглянути вираз

$$\begin{aligned} & \int f(\hat{U}(\beta)\hat{U}(\alpha))(dU(\alpha))_L = \\ & = \int f(\hat{U}(\beta)\hat{U}(\alpha))\det(\hat{S}'(\hat{U}^{-1}(\alpha), \hat{U}(\alpha)))d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_8 = \\ & = \int f(\hat{U}(\gamma(\beta, \alpha)))\det(\hat{S}'(\hat{U}^{-1}(\alpha), \hat{U}(\alpha)))d\alpha_1 d\alpha_2 \dots d\alpha_8, \end{aligned} \quad (1.47)$$

де враховано (1.36), то, як показано в [136], після заміни змінних інтегрування від α на γ отримаємо:

$$\begin{aligned} & \int f(\hat{U}(\beta)\hat{U}(\alpha))(dU(\alpha))_L = \\ & = \int f(\hat{U}(\gamma))\det(\hat{S}'(\hat{U}^{-1}(\gamma), \hat{U}(\gamma)))d\gamma_1 d\gamma_2 \dots d\gamma_8. \end{aligned} \quad (1.48)$$

При цьому, якщо $\hat{U}(\alpha)$ «пробігає» всю групу, то при будь-яких фіксованих значеннях параметрів β , $\hat{U}(\gamma) = \hat{U}(\beta)\hat{U}(\alpha)$ також пробіжить всю групу. Тому параметри $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_8$ в (1.48) повинні змінюватись в тій самій області, що й параметри $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8$ в (1.46). Таким чином, інтеграл (1.48) відрізняється від першого з інтегралів (1.46) лише позначенням змінної інтегрування. Тому маємо рівність

$$\int f(\hat{U}(\beta)\hat{U}(\alpha))(dU(\alpha))_L = \int f(\hat{U}(\alpha))(dU(\alpha))_L. \quad (1.49)$$

З аналогічних міркувань, як показано в [136], має місце рівність

$$\int f(\hat{U}(\alpha)\hat{U}(\beta))(dU(\alpha))_R = \int f(\hat{U}(\alpha))(dU(\alpha))_R. \quad (1.50)$$

Для розгляду інтегралів по групі суттєве значення має, чи є група компактною. Групу називають компактною, якщо її елементи можна представити в виді матриць, компоненти яких є аналітичними функціями від параметрів, які змінюються в обмеженій області, і до того ж аналітичність не повинна порушуватися на границі області.

У випадку компактної групи, враховуючи обмеженість області інтегрування і аналітичність підінтегральних виразів в (1.46), не виникає проблеми із існуванням інтегралу. Окрім того, для компактних груп в [136] доводиться рівність:

$$S_{ab}(\hat{U}^{-1}(\alpha), \hat{U}(\alpha)) = S'_{cb}(\hat{U}(\alpha), \hat{U}^{-1}(\alpha)). \quad (1.51)$$

З урахуванням виразів (1.46) рівність (1.51) означає, що для компактної групи вираз для правоінваріантного інтегралу такий самий, як для лівоінваріантного інтегралу:

$$\int f(\hat{U}(\alpha))(dU(\alpha))_L = \int f(\hat{U}(\alpha))(dU(\alpha))_R \equiv \int f(\hat{U})d\hat{U}. \quad (1.52)$$

Як буде обговорюватись далі, в ґраткових розрахунках важливу роль грають інтеграли (1.52) вигляду:

$$I = \int d\hat{U} U_{a_1 b_1} U_{a_2 b_2} \dots U_{a_n b_n}. \quad (1.53)$$

Техніка обчислення таких інтегралів була запропонована в роботах [139, 140]. Зокрема, для їх обчислення вводиться твірна функція $f(\hat{B})$ від елементів довільної 3×3 матриці \hat{B} . Ця твірна функція визначається наступним чином:

$$\int d\hat{U} U_{a_1 b_1} U_{a_2 b_2} \cdots U_{a_n b_n} = \frac{\partial f(\hat{B})}{\partial B_{b_1 a_1} \partial B_{b_2 a_2} \cdots \partial B_{b_n a_n}} \Big|_{\hat{B}=0}, \quad (1.54)$$

$$f(\hat{B}) = \int d\hat{U} \exp(Sp(\hat{B}\hat{U})).$$

Внаслідок правої та лівої інваріантності інтегралу $\int d\hat{U} \exp(Sp(\hat{B}\hat{U}))$ маємо

$$f(\hat{B}) = f(\hat{U}_1 \hat{B}) = f(\hat{B} \hat{U}_1). \quad (1.55)$$

В роботі [139] доводиться, що внаслідок співвідношень (1.55) функція $f(\hat{B})$ може бути лише аналітичною функцією від детермінанту $\det(\hat{B})$ матриці \hat{B} і при цьому вона виражається таким рядом Тейлора:

$$f(\hat{B}) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\det(\hat{B}))^n}{n!(n+1)!(n+2)!}. \quad (1.56)$$

Детермінант матриці 3×3 є однорідним многочленом третього ступеню по елементах цієї матриці. Тому розклад (1.56) не містить одночленів першого і другого ступенів по елементам матриці \hat{B} . Тоді внаслідок (1.54) маємо

$$\int d\hat{U} U_{a_1 b_1} = 0, \int d\hat{U} U_{a_1 b_1} U_{a_2 b_2} = 0. \quad (1.57)$$

З іншого боку, якщо розглянути інтеграл $\int d\hat{U} U_{a_1 b_1} U_{a_2 b_2}^+$, то враховуючи, що $U_{a_2 b_2}^+ = U_{a_2 b_2}^{-1}$ і $\det(\hat{U}) = 1$, а також, що елемент $U_{a_2 b_2}^{-1}$ дорівнює алгебраїчному доповненню до $U_{b_2 a_2}$, маємо:

$$U_{a_2 b_2}^+ = \frac{1}{2!} \varepsilon_{b_2 c_2 c_3} \varepsilon_{a_2 d_2 d_3} U_{c_2 d_2} U_{c_3 d_3}. \quad (1.58)$$

Тому

$$\int d\hat{U} U_{a_1 b_1} U_{a_2 b_2}^+ = \frac{1}{2!} \varepsilon_{b_2 c_2 c_3} \varepsilon_{a_2 d_2 d_3} \int d\hat{U} U_{a_1 b_1} U_{c_2 d_2} U_{c_3 d_3}. \quad (1.59)$$

Виходячи з (1.54), маємо:

$$\int d\hat{U} U_{a_1 b_1} U_{a_2 b_2}^+ = \frac{1}{2!} \varepsilon_{b_2 c_2 c_3} \varepsilon_{a_2 d_2 d_3} \left. \frac{\partial}{\partial B_{b_1 a_1}} \frac{\partial}{\partial B_{d_2 c_2}} \frac{\partial}{\partial B_{d_3 c_3}} f(\hat{B}) \right|_{\hat{B}=0}. \quad (1.60)$$

Враховуючи (1.56), бачимо, що ненульовий внесок в (1.60) може дати лише доданок, що відповідає $n=1$, бо при $n=0$ доведеться диференціювати константу, а при $n>1$ матимемо одночлени старших ніж третій ступень по елементах матриці \hat{B} . Тому три диференціювання в (1.60) залишать одночлени щонайменше третього ступеню по B_{ab} , які при $\hat{B}=0$ дорівнюватимуть нулю. Тому

$$\int d\hat{U} U_{a_1 b_1} U_{a_2 b_2}^+ = \frac{1}{2!3!} \varepsilon_{b_2 c_2 c_3} \varepsilon_{a_2 d_2 d_3} \frac{\partial}{\partial B_{b_1 a_1}} \frac{\partial}{\partial B_{d_2 c_2}} \frac{\partial}{\partial B_{d_3 c_3}} (\det(\hat{B})). \quad (1.61)$$

Безпосереднє обчислення похідних в виразі в правій частині рівності (1.61) з подальшим згортанням із символами Леві-Чівітта призводить до результату [139]:

$$\int d\hat{U} U_{a_1 b_1} U_{a_2 b_2}^+ = \frac{1}{3} \delta_{a_2 b_1} \delta_{b_2 a_1}. \quad (1.62)$$

Співвідношення (1.57) і (1.62) є наслідками результату (1.56), при доведенні якого в [139] використовується властивість інваріантності (1.55), які в свою чергу є наслідками інваріантності інтегрування по групі (1.49)-(1.50) та збігу право- і лівоінваріантного інтегралів (1.52). Цей збіг є наслідком компактності групи $SU(3)$, а відтак – заміни інтегрування по компонентах глюонних полів інтегруванням по групі $SU(3)$ в сенсі (1.46). Окрім того, заміна (1.35) глюонного поля $\hat{A}_b(x)$ на матрицю $\hat{U}(x(n), x(n+\Delta n))$ призво-

дить до ще однієї властивості, якої не було у вихідного поля $\hat{A}_b(x)$. Як видно з (1.35), якщо проходити те ж саме ребро у зворотному напрямку, матриця $\hat{U}(x(n), x(n + \Delta n))$ змінюється на ермітово-спряжену:

$$\hat{U}(x(n + \Delta n), x(n)) = \left(\hat{U}(x(n), x(n + \Delta n)) \right)^\dagger. \quad (1.63)$$

При цьому вважається, що, якщо ребро проходиться в додатному напрямку координатної вісі, то йому зіставляється матриця $\hat{U}(x(n), x(n + \Delta n))$, а, якщо у від'ємному, то її ермітово-спряжена матриця [133, 134].

Розглянемо, до яких фізичних наслідків призводять ці особливості ґраткових моделей. Якщо вийти з деякого вузла ґратки, і по замкненому контуру, утвореному з чотирьох ребер, повернутися в той самий вузол, то отримаємо квадрат, який називають гранню ґратки. Кожній грані ґратки можна присвоїти певний номер p . Множачи матриці, які відповідають ребрам грані з номером p у порядку обходження цієї грані, і з урахуванням правила, що ребру, спрямованому в додатному напрямку, зіставляється матриця $\hat{U}(x(n), x(n + \Delta n))$, а у від'ємному – її ермітово-спряжена матриця, отримаємо матрицю $\hat{U}(p)$. Вираз [133, 134]

$$S = \beta \left(\frac{1}{2} \sum_p \left(1 - \frac{1}{3} Sp(\hat{U}(p)) \right) + \left(1 - \frac{1}{3} Sp(\hat{U}^\dagger(p)) \right) \right), \beta \equiv \frac{6}{g^2}, \quad (1.64)$$

не змінюється при локальному перетворенні (1.22) і при наближенні ребра ґратки до нуля наближається до виразу для дії калібрувального поля. При цьому символ \sum_p означає, що сума розраховується по всіх гранях ґратки.

Тому цей вираз називають вільсонівською або ґратковою дією.

Потенціал міжкваркової взаємодії зазвичай пов'язують із величиною [93, 96]

$$W(C) = Sp \left(\hat{P} \left(\exp \left(-ig \oint_C \hat{A}_b(x) dx^b \right) \right) \right), \quad (1.65)$$

зінтегрованою по всіх калібрувально нееквівалентних польових конфігураціях із ваговим множником $\exp \left(iS \left(\hat{A}_b(x), \partial \hat{A}_b(x) / \partial x^d \right) \right)$, де $S \left(\hat{A}_b(x), \partial \hat{A}_b(x) / \partial x^d \right)$ - функціонал дії калібрувального поля. Тут позначення \oint_C , як зазвичай, означає інтегрування по замкненому контуру C . В ґратковому наближенні замкнений контур C повинен складатися з ребер ґратки. Тоді матриця, від якої розраховується слід в (1.65), є добутком відповідних реберних матриць типу (1.35), які множаться згідно із символом \hat{P} в (1.65) відповідно до порядку обходу контуру C . Функціонал дії при усередненні замінюється на (1.64).

Розглянемо вираз для ґраткового середнього від $W(C)$. Оскільки при реальних розрахунках ґратка містить скінчену кількість ребер, кожному з них можна присвоїти відповідний номер. Тоді кількість ребер позначатимемо N_e , а матрицю $\hat{U}(x(n), x(n + \Delta n))$ або $(\hat{U}(x(n), x(n + \Delta n)))^\dagger$ (в залежності від напрямку), що відповідає ребру з номером $i, i = 1, 2, \dots, N_e$, будемо позначати коротко $\hat{U}(i)$. Замість інтегрування по калібрувально нееквівалентних конфігураціях глюонних полів $\hat{A}_b(x)$ матимемо інтеграл $\int \prod_{i=1}^{N_e} d\hat{U}(i)$. Тобто кожному ребру зіставляється $SU(3)$ -матриця $\hat{U}(i)$ і по елементах цієї матриці проводиться інтегрування по групі $SU(3)$ в тому сенсі, як це розглядалося вище стосовно формули (1.46). Якщо контур C складається з N_c ребер із номерами i_1, i_2, \dots, i_{N_c} , розставленими згідно з дією оператора \hat{P} , тобто в по-

рядку обходу петлі, то ґраткове усереднення величини (1.65) (позначатимемо це усереднення дужками $\langle \rangle$) має вигляд

$$\begin{aligned} \langle W(C) \rangle = & \int \left(\prod_{i=1}^{N_e} d\hat{U}(i) \right) (U(i_1))_{a_1 a_2} (U(i_2))_{a_2 a_3} \dots (U(i_{N_c}))_{a_{i_{N_c}} a_1} \times \\ & \times \exp \left(i\beta \left(\frac{1}{2} \sum_p \left(1 - \frac{1}{3} Sp(\hat{U}(p)) \right) + \left(1 - \frac{1}{3} Sp(\hat{U}^\dagger(p)) \right) \right) \right). \end{aligned} \quad (1.66)$$

По індексах, що повторюються як зазвичай, розраховується сума. Якщо б не експоненціальний множник в (1.66), то внаслідок (1.57), виділяючи з міри інтегрування інтеграл по будь-якій змінній $d\hat{U}(i_1), d\hat{U}(i_2) \dots d\hat{U}(i_{N_c})$, ми отримали б нульовий множник та інтеграл дорівнював би нулю. Виходячи з (1.62), бачимо, що на кожний множник $(U(j))_{c_1 d_1}$ в підінтегральному виразі в цьому ж виразі повинен знаходитись множник $(U^\dagger(j))_{c_2 d_2}$. Такі множники можна отримати з розкладу експоненти в (1.66) у ряд Тейлора. Але оскільки в експоненту ці множники входять четвірками відповідно граням ґратки, то «компенсуючи» множниками $(U^\dagger(i_k))_{cd}$ множники, що походять від контуру C в (1.66), ми отримаємо матриці, які відповідають ребрам граней, що увійшли в розклад. Щоб отримати ненульовий результат потрібно, щоб ці множники теж «компенсувалися». Ця вимога накладає умову на найменший ступінь доданку у розкладі експоненти, починаючи з якого інтегрування в (1.66) почне давати ненульовий результат [46, 48, 133, 134, 141]. Дійсно, доданок n -го порядку в розкладі експоненти з (1.66) окрім інших містить внески ви-

$$\left(\frac{1}{2} \sum_p \left(1 - \frac{1}{3} Sp(\hat{U}(p)) \right) + \left(1 - \frac{1}{3} Sp(\hat{U}^\dagger(p)) \right) \right)^n = \quad (1.67)$$

$$= \dots + Sp(\hat{U}(p_1)) Sp(\hat{U}(p_2)) \dots Sp(\hat{U}(p_n)) + \dots,$$

де p_1, p_2, \dots, p_n - номери граней. Якщо ці грані будуть такими, що їх ребра, що співпадають з ребрами контуру, будуть проходитись в напрямі, протилежному напрямку при обході контуру, і вони повністю заповнюють контур C , то інтегрування по групі, що відповідає кожному ребру контуру і кожному ребру всередині контуру, буде відбуватись у відповідності з (1.62) і не дорівнюватиме нулю. Якщо в (1.46) покласти $f(\hat{U}(\alpha))=1$, то з (1.45) видно, що $\int d\hat{U} > 0$ і, умножуючи міру інтегрування на відповідну константу, можна покласти $\int d\hat{U} = 1$. Це визначення враховане в (1.56). Таким чином, інтегрування по групі $SU(3)$, що відповідає тим ребрам, які не представлені множниками в підінтегральному виразі, також не дає нуля. Отже бачимо, якщо показник n в (1.67) буде меншим за кількість граней, що заповнюють контур C , інтеграл (1.66) від відповідного доданку ряду Тейлора для експоненти дорівнюватиме нулю. Тобто найменше n , для якого існує ненульовий внесок, дорівнює площі контуру, виміряної в площах граней. Враховуючи визначення (1.64), параметр β і велике значення константи сильної взаємодії, можна сказати, що основний внесок в інтеграл (1.66) буде визначатися саме таким n . В цьому полягає закон площ для величини $\langle W(C) \rangle$:

$$\langle W(C) \rangle \sim \beta^{A(C)} = \exp(A(C) \ln(\beta)), \quad (1.68)$$

де $A(C)$ - площа контуру, виміряна в площах граней.

Цей закон площ є основним фізичним наслідком тих нових визначень, які застосовані в ґраткових моделях. Саме його наслідком є висновок про конфайнмент кварків [48, 93-96] і про лінійне зростання потенціалу міжквар-

кові взаємодії на нескінченості [96, 133, 134]. Ми докладно зупинилися на описанні ґраткових моделей, щоб показати, що закон площ є наслідком співвідношень (1.57) і (1.62), які, в свою чергу, як вже обговорювалося вище, є наслідком заміни інтегрування по польових конфігураціях, інтегруванням по компактній групі $SU(3)$. Тобто можна сказати, що і висновок про конфайнмент, і висновок про лінійне зростання потенціалу закладені у модель саме заміною (1.35) і тому залишається питання, наскільки це відповідає властивостям самої вихідної континуальної моделі. В той же час, існують моделі конфайнменту [142], які допускають різкіше ніж лінійне зростання міжкваркового потенціалу.

1.3. Висновки по літературному огляду і постановка задачі дослідження

Як впливає із приведеного літературного огляду, на сьогоднішній день не існує задовільного методу описання зв'язаних станів релятивістських частинок. При цьому мова йде саме про опис станів як елементів простору Фока, а не тільки про власні значення енергій таких станів. В той же час, такий опис необхідний для опису процесів розсіяння адронів як зв'язаних станів кварків.

Існує також проблема перетворення стану з однієї інерційної системи відліку до іншої. Пряме застосування перетворень Лоренца до аргументів компонент фоківського стовпця призводить до теорій з багаточасовими амплітудами ймовірностей, які не узгоджуються ані з принципами квантової механіки, ані з принципом відносності.

Існуючі польові теорії, основані на опису зміни чисел заповнення одностинкових станів, призводять до моделей розсіяння адронів, в яких закон збереження енергії-імпульсу накладається на чотириімпульси складаючих адрони частинок, а не на чотириімпульси самих адронів, як це є в експериме-

нті. Такі локальні одночастинкові теорії в принципі не можуть описати утворення зв'язаних станів, тобто стадію адронізації. Для цього потрібні нелокальні теорії. Такі теорії застосовувалися для опису станів адронів, але із багаточасовим описом, про який йшлося вище.

Опис адронів як зв'язаних станів невеликої кількості конститuentних кварків в нерелятивістському наближенні дозволяє оминати проблеми релятивістського опису зв'язаних станів. Але такий опис не розв'язує проблему перетворення нерелятивістського зв'язаного стану при переході від однієї інерційної системи відліку до іншої. Окрім того, виникає проблема задання потенціалу міжкваркової взаємодії. Граткові методи, які зазвичай використовують для розрахунку цього потенціалу, мають ряд суттєвих недоліків. Вони пов'язані як із локально-одночастинковим характером динаміки, закладеним в цих розрахунках, так і з штучною заміною інтегрування по некомпактній множині конфігурацій калібрувального поля інтегруванням по компактній групі $SU(3)$. Основний фізичний результат граткової моделі – закон площ – є результатом саме цієї заміни і саме штучної компактності множини інтегрування. Тому достовірність лінійно зростаючого потенціалу між кварковою взаємодією є сумнівною.

Для опису розсіяння адронів як зв'язаних станів кварків потрібна модель, яка одночасно, з одного боку, описувала б в нерелятивістському наближенні взаємодію кварків всередині адрону з утворенням зв'язаного стану і конфайнмент, а, з іншого боку, дозволяла б релятивістський опис взаємодії між кварками різних адронів з можливим утворенням нових адронів. При цьому модель повинна призводити до динаміки, яка б забезпечувала збереження сумарного чотиривектору енергії-імпульсу саме адронів, а не частинок, що їх складають. Спроба розробити таку модель і є метою цієї роботи.

РОЗДІЛ 2

ПЕРЕТВОРЕННЯ СТАНУ НЕРЕЛЯТИВІСТСЬКОЇ СИСТЕМИ ПРИ ПЕРЕХОДІ З ОДНІЄЇ ІНЕРЦІАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ДО ІНШОЇ

В роботі [143] було показано, що процеси непружного розсіяння адронів можуть бути описані за допомогою методу Лапласу. Втім розрахунки там проводилися лише для модельних скалярних теорій, що дозволило відтворити результати експерименту лише на якісному рівні [6, 144, 145]. Тому виникає задача застосувати цей метод в межах більш реалістичної теорії – КХД [146]. При цьому виникає відома проблема, яка полягає в тому, що на діаграмах ми маємо кваркові і глюонні лінії, у той час як в початковому і кінцевому станах маємо зв'язані стани кварків - адрони. Це призводить до того, що на відміну від «звичайної» теорії розсіяння для кварків взаємодія не «вмикається» і не «вимикається». Внаслідок цього ані стан, ані гамільтоніан системи частинок, що розсіюються, не наближаються асимптотично до відповідних величин для вільних кварків. Таким чином, існує дві проблеми, пов'язані відповідно із станом і гамільтоніаном. Перша з них полягає в тому, яким чином задати початковий і кінцевий стани розсіяння з урахуванням взаємодії між кварками. Друга - в тому, що, розглядаючи амплітуду розсіяння в межах діаграмної техніки, суттєво пов'язаної із «вмиканням» і «вимиканням» взаємодії, ми отримаємо закон збереження енергії-імпульсу, який накладатиметься на чотириімпульси кварків, а не адронів, як це є в експерименті.

В цьому розділі ми розглядаємо саме проблему станів. Розв'язання проблеми «правильного» виду закону збереження енергії-імпульсу розглядається в іншій роботі [4], результати якої суттєво спираються на висновки, отримані далі в цьому розділі.

Зазвичай адрони в процесах розсіяння описуються в межах партонної моделі [1]. Однак релятивістський опис внутрішнього стану адрону, якщо тільки ми не збираємось обмежуватись інклюзивним описом, потребує

задання великої кількості багатопартонних функцій розподілу, що суттєво ускладнює задачу [2]. Спростити розв'язок цієї проблеми можна за допомогою наступних міркувань.

Якщо ми говоримо, що вільний адрон в початковому або кінцевому стані розсіяння складається з певної кількості певних конститuentних кварків, то це означає, що внаслідок взаємодії цих кварків нові конститuentні кварки народжуватись не можуть. Це дає змогу припустити, що, принаймні, деякі ефекти пружного та непружного розсіяння адронів можуть бути описані, якщо розглядати внутрішній стан вільного адрону в системі спокою цього адрону в нерелятивістському наближенні, що не заперечує того, що деякі специфічні ефекти, як зазначається, наприклад, в [102] можуть потребувати суто релятивістського опису. Підкреслимо, що мова йде саме про вільний адрон до чи після розсіяння. Взаємодія між кварками різних адронів в процесі розсіяння безумовно повинна описуватись релятивістськи, але такий опис не є предметом цієї роботи і розглянуто в [4]. Проте початковий і кінцевий стани процесу розсіяння містять по декілька адронів, тому, взагалі кажучи, ми не можемо обрати систему відліку таким чином, щоб вона була системою спокою для всіх цих адронів, або, принаймні, так, щоб всі адрони в цій системі відліку були нерелятивістськими.

Тому виникає проблема перетворення нерелятивістських внутрішнього стану і гамільтоніану при переході з системи спокою частинки в систему відліку, в якій ця частинка є релятивістською. Сутність цієї задачі можна пояснити на такому простому прикладі. Припустимо, що в нас є найпростіша квантова нерелятивістська система - атом водню, яка знаходиться, в сферично симетричному основному стані. Відносно цієї системи немає сумнівів в можливості описати її властивості в нерелятивістському наближенні, якщо атом водню розглядається в його системі спокою. Припустимо також, що є інерційний спостерігач, який рухається відносно цього атому водню із релятивістською швидкістю. Ми хочемо з'ясувати який результат отримає цей спос-

терігач, якщо він буде вимірювати координати або імпульси частинок, з яких складається ця система. Іншими словами, якою амплітудою ймовірності можна описати результати його вимірювання і як вона пов'язана із амплітудою ймовірності в системі спокою атому водню, тобто системою центру мас частинок, які його складають?

Якщо б атом водню можна було розглядати з точки зору класичної, а не квантової механіки, то ми могли б діяти наступним чином. Спочатку розв'язати в його системі спокою звичайну задачу двох тіл, що взаємодіють посередництвом заданої потенційної енергії. Потім в системі відліку, відносно якої він рухається із релятивістською швидкістю, можна не розглядати релятивістську задачу про взаємопов'язану динаміку трьох взаємодіючих об'єктів: ядра, електрону та електромагнітного поля, динамічні характеристики кожного з яких вже не є заданими і повинні знаходитись в процесі розв'язку задачі, а застосувати перетворення Лоренца до результатів розв'язку в системі спокою. Таким чином, вдалося б уникнути необхідності релятивістського польового опису взаємодії між ядром та електроном.

Нашою метою в цьому розділі є розробити подібний підхід, але вже у випадку квантової, а не класичної механіки, тобто скористатися в системі центру мас двочастинкової системи рівнянням Шредінгера із певною потенційною енергією та уникнути квантовопольового опису з народженням і знищенням віртуальних частинок в системі, що рухається відносно системи центру мас із релятивістською швидкістю, шляхом перетворення стану, знайденого в системі центру мас.

Враховуючи, що нас цікавлять саме адрони, далі ми будемо розглядати як приклад не атом водню, а мезон як двочастинкову систему кварка та антикварка, а потім розглянемо застосування отриманих результатів для більш складних трикваркових систем (баріонів), припускаючи, що внутрішні стани цих частинок, подібно до атому водню, можуть бути описані в нерелятивістському наближенні в їх системах спокою. Приклад з атомом водню ми наве-

ли для того, щоб підкреслити те, що ми не обговорюємо в цій роботі можливість застосування нерелятивістського наближення в системі спокою зв'язаної частинки, як це непотрібно було б робити у випадку з атомом водню. Ми розглядаємо питання в такій постановці: якщо дано, що внутрішній стан складеної частинки в її системі спокою є нерелятивістським, то треба знайти яким буде цей стан в системі відліку, що рухається відносно цієї системи спокою із релятивістською швидкістю.

Ця задача є дещо нетиповою, тому як зазвичай ми маємо справу з тим, що відносно різних систем відліку вимірюються величини, пов'язані із однією й тією ж подією. У випадку із амплітудою ймовірності багаточастинкової системи маємо іншу ситуацію. Якщо є два різних інерційних спостерігача, яких назовемо «без штриха» і «зі штрихом», то амплітуда ймовірності, наприклад, двочастинкової системи відносно спостерігача «без штриха» (позначимо її $\Psi(t, \vec{r}_1, \vec{r}_2)$) описує результат вимірювання координат частинок, одночасного відносно системи «без штриха» і здійсненого в момент часу t за годинником цієї системи. Аналогічно, амплітуда ймовірності $\Psi'(t', \vec{r}'_1, \vec{r}'_2)$ відносно спостерігача «зі штрихом» описує результат вимірювання координат, одночасний відносно цього спостерігача, в момент часу t' за його годинником. Але вимірювання, одночасні відносно одного спостерігача, не будуть такими відносно іншого і навпаки. В цьому полягає суттєва відмінність розглядуваної задачі у порівнянні із класичною задачею про лоренцеве скорочення, де вимірювання координат кінців стрижню повинне бути одночасним у системі відліку, відносно якої стрижень рухається, але може бути неодноточним в системі спокою стрижню. Завдяки цьому довжина стрижня може бути розрахована по координатах одних і тих самих подій, але в різних системах відліку. В нашому ж випадку амплітуди ймовірності $\Psi(t, \vec{r}_1, \vec{r}_2)$ і $\Psi'(t', \vec{r}'_1, \vec{r}'_2)$ пов'язані із різними реалізаціями процесу вимірювання. Внаслідок цього між значеннями t і t' не може бути встановлено ніякого зв'язку, бо такий зв'язок може бути лише між часовими координатами однієї й тієї ж події, виміряни-

ми відносно різних систем відліку. Відповідно неможливо встановити ніякого зв'язку між значеннями \vec{r}_1 і \vec{r}_2 , з одного боку, і \vec{r}'_1 , \vec{r}'_2 - з іншого. Тобто між аргументами амплітуд ймовірності в обох системах відліку немає ніякого зв'язку на зразок перетворень Лоренца. Тому втрачають силу висновки про скорочення довжин або подовження проміжків часу, які є наслідками перетворень Лоренца.

Висновок про те, що аргументи, від яких залежить багаточастинкові амплітуди ймовірності, в різних системах відліку не можуть бути пов'язані ані перетворенням Лоренца, ані будь-яким іншим чином суттєво відрізняє підхід, застосований в цій роботі, від підходів в інших відомих нам роботах на цю тему, бо там явно або не явно вважається, що аргументи багаточастинкових амплітуд ймовірності в різних системах відліку можна пов'язати перетвореннями Лоренца. Зокрема, зазначена проблема з одночасністю вже розглядалася в літературі [57]. Однак в цій роботі пропонується визначити «інваріантну відносно перетворень Лоренца одночасність» як одночасність в системі центру мас. В найбільш відомій роботі на цю тему [17] аналог двочастинкової амплітуди ймовірності вводиться як матричний елемент добутку двох одночастинкових операторів народження в представленні Гейзенберга. Аргументи цих двох операторних функцій розглядаються як чотиривектори відносно перетворень Лоренца, що породжує відому проблему відносних часів. Подальше проектування функції Бете-Солпітера на певну просторово-подібну гіперповерхню в просторі Мінковського, яке використовується в методі квазіпотенціалу [21], має на меті уникнути проблеми відносних часів шляхом введення інваріантної часоподібної змінної, тобто знов передбачає, що аргументи амплітуди ймовірності можна пов'язати між собою перетвореннями Лоренца. Теж саме стосується робіт, в яких розглядається динаміка світлового фронту, наприклад [67, 147]. В основоположній роботі [64] цього напрямку відмова від одночасного опису розглядалась як основна мета. Однак в цій роботі мова йшла про побудову

виразів для генераторів групи Пуанкаре. В той же час, розгляд фронтової форми динаміки з точки зору простору станів [67], на якому діють ці генератори, знов призводить до «light-cone wave functions», аргументи яких знову ж таки вважаються пов'язаними перетвореннями Лоренца.

Звернемо увагу на те, що наведені вище міркування щодо неможливості пов'язати між собою аргументи багаточастинкової амплітуди ймовірності, ніяк не пов'язані із нашим наміром застосувати нерелятивістське наближення в одній із систем відліку. В релятивістській ситуації, коли стан описується стовпчиком Фока [13, 14], розглянута проблема з одночасністю виміру виникне для всіх компонент цього стовпця, починаючи з другої. Тому з тих самих міркувань, що були викладені вище, ми знов дістанемо висновку, що аргументи, від яких залежать компоненти фоківських стовпців, що описують один і той самий стан релятивістської квантової системи в різних системах відліку, не можуть бути ніяким чином пов'язані між собою.

Принциповий метод розв'язку задачі про перетворення фоківського стану при переході з однієї інерційної системи до іншої дає постулат квантування полів, прийнятий в [14]. Згідно із цим постулатом генераторами представлення групи Лоренца на просторі Фока є компоненти оператора моменту імпульсу відповідної релятивістської системи. Більш детально для нашої ситуації це означає наступне.

Як відомо, перехід від однієї інерційної системи до іншої можна представити як добуток двох обертів і буста. У випадку обертів, вочевидь, не виникає зазначеної проблеми з одночасністю і, відповідно, не виникає проблеми із перетворенням стану. Тому далі розглядатимемо лише випадок буста. Враховуючи, що нам достатньо розглядати буст лише уздовж однієї з координатних осей, розглянемо випадок буста уздовж вісі OZ . Бистроту цього буста позначатимемо Y . Згідно з постулатом квантування [14], генератором перетворення стану в цьому випадку є оператор компоненти моменту імпульсу \hat{M}_{03} . Тобто стан $|\Psi'\rangle$ (нерелятивістська амплітуда ймовірності, або ре-

лятивістський фоківський стовпець) відносно системи відліку «зі штрихом» пов'язаний із відповідним станом $|\Psi\rangle$ відносно системи відліку без штриха співвідношенням:

$$\begin{aligned} |\Psi'\rangle &= \hat{U}(Y)|\Psi\rangle, \\ \hat{U}(Y) &= \exp(i\hat{M}_{0,3}Y). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Генератор \hat{M}_{03} є операторно-значним функціоналом від операторів народження і знищення, що діють на просторі Фока. Якщо польові оператори і фоківський стан $|\Psi\rangle$ розглядати в представленні Гейзенберга, то внаслідок теореми Нетер генератор \hat{M}_{03} не залежить від часу. Тому, якщо перейти тепер до будь-якого іншого представлення, в якому стан і генератор вже міститимуть залежність від часу, то отримаємо, що значення часу, яке входить до виразу для стану і до виразу для генератора, буде одне й те саме. Окрім того, \hat{M}_{03} є інтегралом по координатах від відповідної густини. Таким чином, дія цього оператора в (2.1) не призведе до появи нових незалежних змінних. Через те, що ми ніяким чином не виражаємо змінні від яких залежать компоненти стовпця $|\Psi\rangle$, отримаємо, що компоненти стовпця $|\Psi'\rangle$ залежать від тих же змінних. Отже, дія оператора $\hat{U}(Y)$ призводить лише до зміни форми залежностей. Таким чином, не маючи змоги встановлювати зв'язок між значеннями амплітуди ймовірності, які відповідають однієї й тієї ж події, при розгляді задачі про її перетворення при переході з однієї інерційної системи відліку до іншої, ми можемо встановлювати зв'язок між цими значеннями при одних і тих самих значеннях аргументів, подібно до того, як це робиться при розгляді внутрішніх симетрій. Тобто, якщо ми розглянемо (2.1), наприклад, в координатному представленні, то в лівій частині рівності час і координати відносяться до деяких подій, одночасних відносно вихідної системи відліку. Тоді в правій частині рівності розглядаються інші події, але такі, які мають ті

самі просторові і часові координати що й в лівій частині, але вже відносно нової системи відліку і одночасні відносно цієї системи відліку.

Виходячи з сказаного, двочастинкову амплітуду ймовірності в системі координат зі штрихом будемо позначати $\Psi'(t, \vec{r}_1, \vec{r}_2)$.

В релятивістській ситуації, окрім зазначених вище труднощів із заданням фоківського стану, маємо ще проблему, яка полягає в тому, що для систем із взаємодією оператор \hat{M}_{03} не буде квадратичним по операторах народження та знищення, тому функціональний інтеграл, що описує його дію на просторі Фока [13], не буде гаусівським. Тобто навіть, якщо ми могли б задати фоківський стан, задача його перетворення (2.1) була б дуже складною. Це є ще одним аргументом на користь того, щоб спробувати спростити ситуацію за рахунок нерелятивістського наближення.

В цьому випадку ми повинні побудувати відповідне нерелятивістське наближення для генератору \hat{M}_{03} . Якщо таке наближення побудувати в системі центру мас зв'язаної системи, то в довільній іншій системі відліку оператор \hat{M}'_{03} можна виразити через \hat{M}_{03} та інші компоненти моменту імпульсу, які теж можна задати в нерелятивістському наближенні, за допомогою тензорного закону перетворення. Власне формулювання таких наближень і складає зміст наступної частини роботи.

Перед тим, як перейти до розв'язання описаної задачі, звернемо увагу на наступну можливість її спрощення. Розглянемо адрон в системі його спокою. В цій системі стан системи повинен бути власним станом для повного імпульсу \hat{P} всіх частинок, які її складають, і відповідати при цьому власному значенню, рівному нулю. Ще до переходу до нерелятивістського наближення розвиток фоківського стану $|\Psi\rangle$ із часом в системі частинок, що утворюють адрон може бути записаний у вигляді:

$$|\Psi(t)\rangle = \exp(-i\hat{H}t)|\Psi(t=0)\rangle, \quad (2.2)$$

де \hat{H} – релятивістський гамільтоніан системи полів, кванти яких утворюють адрон. В системі відліку, яка отримується з вихідної перетворенням буста, згідно з [14] матимемо:

$$|\Psi'(t)\rangle = \hat{U}(Y) \left(\exp(-i\hat{H}t) |\Psi(t=0)\rangle \right). \quad (2.3)$$

Тут через $\hat{U}(Y)$ позначено унітарний [14] оператор перетворення стану внаслідок буста з бистротою Y . Враховуючи, що йдеться про стан, власний для повного імпульсу системи, і такий, що відповідає нульовому власному значенню, співвідношення (2.3) можна переписати у вигляді:

$$|\Psi'(t)\rangle = \hat{U}(Y) \left(\exp\left(-i\left(\hat{H}t - \left(\hat{\vec{P}} \cdot \hat{\vec{R}}\right)\right)\right) |\Psi(t=0)\rangle \right), \quad (2.4)$$

де \vec{R} - сукупність довільних трьох координат, конкретний вибір яких не має значення, внаслідок рівності нулю власного значення оператора $\hat{\vec{P}}$.

Перепишемо вираз (2.4) у вигляді:

$$|\Psi'(t)\rangle = \hat{U}(Y) \hat{u}(x) \hat{U}^{-1}(Y) \hat{U}(Y) |\Psi(t=0)\rangle, \quad (2.5)$$

де введені позначення

$$x \equiv (t, R_x, R_y, R_z), \hat{u}(x) \equiv \exp\left(-i\left(\hat{H}t - \left(\hat{\vec{P}} \cdot \hat{\vec{R}}\right)\right)\right). \quad (2.6)$$

Вираз $\hat{U}(Y) \hat{u}(x) \hat{U}^{-1}(Y)$ формально співпадає із таким, що виникає при перетворенні операторних польових функцій [14]. Тому, позначаючи матрицю буста уздовж вісі OZ через $\Lambda^{(0)}(Y)$, отримаємо

$$\hat{U}(Y) \hat{u}(x) \hat{U}^{-1}(Y) = \hat{u}\left(\Lambda^{(0)}(Y)x\right). \quad (2.7)$$

Тоді замість (2.5), можемо записати:

$$|\Psi'(t)\rangle = \exp\left(-it\left(ch(Y)\hat{H} + sh(Y)\hat{P}_z\right)\right)\exp\left(iR_z\left(sh(Y)\hat{H} + ch(Y)\hat{P}_z\right)\right) \times \quad (2.8) \\ \times \exp\left(i\left(R_x\hat{P}_x + R_y\hat{P}_y\right)\right)\hat{U}(Y)|\Psi(t=0)\rangle.$$

Дотепер у якості \hat{H} і \hat{P} розглядалися релятивістські оператори енергії та імпульсу, але вони віднесені до вихідної системи відліку, в якій ми згідно з розглядуваною задачею, можемо застосувати нерелятивістське наближення. В цьому наближенні ці оператори можна замінити відповідно нерелятивістським внутрішнім гамільтоніаном системи кварків, що утворюють адрон, і нерелятивістським оператором імпульсу цієї системи. Величина $|\Psi(t=0)\rangle$ в такому нерелятивістському наближенні може бути замінена координатною частиною амплітуди ймовірності власного для енергії стану двочастинкової системи кварка та антикварка. Окрім цього, якщо розглянути граничний випадок малих бистрот Y , то бачимо, що у якості довільних координат вектору \vec{R} потрібно обирати координати центру мас:

$$\vec{R} = \vec{R}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (2.9)$$

Як буде показано далі, якщо в якості $|\Psi(t=0)\rangle$ взяти власний для енергії стан двочастинкової зв'язаної системи, що відповідає найменшому власному значенню, то такий стан не змінюється в результаті дії оператора $\hat{U}(Y)$:

$$\hat{U}(Y)|\Psi(t=0)\rangle = |\Psi(t=0)\rangle \quad (2.10)$$

Окрім того, враховуючи, що \hat{H} – гамільтоніан системи зв'язаних частинок в їх системі центру мас, а $|\Psi(t=0)\rangle$ - його власний стан, що відповідає його найменшому власному значенню, маємо:

$$\hat{H}|\Psi(t=0)\rangle = m_\mu|\Psi(t=0)\rangle \quad (2.11)$$

З урахуванням цього і наведених вище міркувань з (2.8) отримаємо в новій системі відліку правильну залежність від часу і координат центру мас відносно цієї системи відліку:

$$|\Psi'(t)\rangle = \exp\left(-i\left(\sqrt{m_\mu^2 + \vec{P}^2}t - (\vec{R}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \cdot \vec{P})\right)\right)|\Psi(t=0)\rangle, \quad (2.12)$$

де \vec{P} - імпульс зв'язаної частинки в системі відліку, що розглядається, а $\vec{R}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ виражається співвідношенням (2.9).

Зауважимо, що така правильна залежність при переході від системи центру мас до іншої інерційної системи з'явилася не за рахунок перетворення координат і часу, як це відбувається в звичайній плоскій хвилі, а виключно за рахунок перетворення форми функції (2.7) від тих самих змінних, як це обговорювалося раніше після формули (2.1). Переходячи з системи центру мас до різних інших інерційних систем відліку, в кожній з них будемо отримувати залежність (2.12) і при цьому, як це обговорювалося раніше, \vec{r}_1 і \vec{r}_2 в кожній системі відліку є координати частинок, виміряні одночасно відносно цієї системи відліку. Таким чином, в різних інерційних системах відліку отримаємо однакову залежність стану від своїх змінних, як того вимагає принцип відносності.

Отже, спрощення, про яке йшлося і яке досягнуте шляхом (2.4)-(2.8), полягає в тому, що нам не потрібно описувати перетворення всієї амплітуди ймовірності власного для енергії стану при переході з системи центру мас кварка та антикварка до іншої системи відліку, а можна обмежитися лише перетворенням координатної частини цієї амплітуди ймовірності. Тому подальший розгляд стосується двох питань: як побудувати нерелятивістське наближення для генератору \hat{M}_{03} і як подіяти оператором $\exp(i\hat{M}_{03}Y)$ на координатну частину внутрішнього стану адрону в його системі спокою.

Ми хотіли б чітко наголосити на тих наближеннях, які ми використовуємо в цій роботі. Зазначимо, що ми ніякою мірою не розглядаємо релятивіст-

ську теорію зв'язаних станів. Ми розглядаємо задачу, в межах якої дано, що в системі відліку центру мас внутрішній стан зв'язаної частинки є нерелятивістський і відомий, а потрібно знайти яким буде цей стан в системі відліку, яка рухається відносно системи центру мас із релятивістською швидкістю. При цьому ми розраховуємо, що в межах такого наближення можна буде далі описати основні властивості релятивістського пружного і непружного розсіювання адронів [4]. В системі спокою адрону його внутрішній стан описується двочастинковою амплітудою ймовірності, що є розв'язком рівняння Шредінгера, а маса адрону є найменшим власним значенням відповідного нерелятивістського гамільтоніану [4]. Також нерелятивістське наближення використовується для компоненти \hat{M}_{03} тензору моменту імпульсу в системі спокою зв'язаної частинки.

2.1. Наближення генераторів перетворення Лоренца диференціальними операторами

Згідно з [14], представлення $\hat{M}_{0,3}$ диференціальними операторами має вигляд:

$$\hat{M}_{0,3} = i \left(t \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial t} \right). \quad (2.13)$$

При цьому зауважимо, що представлення генераторів диференціальними операторами можливо отримати, розглядаючи деяку функцію від координат та часу і роблячи відповідну заміну незалежних змінних в цій функції. Але, як зазначалося в попередньому розділі, в нашому випадку заміна незалежних змінних неможлива. Тому співвідношення (2.13) можна розуміти лише як границю, до якої наближається «правильний» релятивістський оператор $\hat{M}_{0,3}$ при переході до нерелятивістського наближення. Тоді виникає питання, до якої границі повинен наближатися цей оператор у випадку багаточастинкової системи. Враховуючи, що просторові компоненти моменту імпульсу пред-

ставляються сумою відповідних одночастинкових операторів, можна зробити припущення, що й компоненти, в яких один з індексів дорівнює нулю, також є адитивними. Тоді для двочастинкової системи матимемо:

$$\hat{M}_{0,3} = i \left(t \left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2} \right) + (z_1 + z_2) \frac{\partial}{\partial t} \right). \quad (2.14)$$

Як вже зазначалося, величина $|\Psi(t=0)\rangle$, що входить в (2.8), при переході до нерелятивістського наближення, може бути замінена в нашому випадку на координатну частину власного для енергії стану, яку позначимо $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$. Ця функція не залежить від часу і є власною функцією оператора повного імпульсу системи, що відповідає нульовому власному значенню. Якщо врахувати, що оператор (2.14) може бути записаний у вигляді

$$\hat{M}_{0,3} = -t\hat{P}_z + (z_1 + z_2)i\frac{\partial}{\partial t}, \quad (2.15)$$

дістаємо висновок, що функція $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ є також власною функцією й оператора $\hat{M}_{0,3}$, що відповідає нульовому власному значенню.

Це можна пояснити ще й такими міркуваннями. Внаслідок того, що відповідною системою відліку є система центру мас кварка та антикварка маємо:

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi(\vec{r}_2 - \vec{r}_1). \quad (2.16)$$

Якщо у виразі

$$i \left(t \left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2} \right) + (z_1 + z_2) \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi(\vec{r}_2 - \vec{r}_1), \quad (2.17)$$

від \vec{r}_1 і \vec{r}_2 перейти до нових змінних

$$\vec{r}_+ = \vec{r}_1 + \vec{r}_2, \vec{r}_- = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad (2.18)$$

то оператор в (2.17) буде залежати лише від z_+ , а функція, на яку він діє, лише від z_- .

Таким чином, з наведених міркувань можна зробити висновок, що

$$\exp(i\hat{M}_{0,3}Y)\psi(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \psi(\vec{r}_2 - \vec{r}_1). \quad (2.19)$$

Тобто внутрішній стан мезону при переході в нову систему відліку не змінюється.

В усіх попередніх міркуваннях у якості генератора $\hat{M}_{0,3}$ ми розглядали відповідну компоненту тензору орбітального моменту імпульсу. Зауважимо, що для вільного біспінорного поля з явного виду спінового внеску в тензор моменту імпульсу [14] видно, що ці внески обертаються на нуль для компонент тензору, в яких хоча б один з індексів дорівнює нулю. Оператор взаємодії біспінорного поля із калібрувальним полем не містить похідних від компонент біспінорного поля і тому не дає внеску в тензор спінового моменту імпульсу. Тому в «правильному» релятивістському операторі $\hat{M}_{0,3}$ спіновий внесок дорівнює нулю. Це означає, що при переході до нерелятивістської границі ми також можемо розглядати лише орбітальний внесок в $\hat{M}_{0,3}$.

Звідси можна зробити висновок, що всі наведені міркування можна застосувати не тільки до мезонів, а й до баріонів, бо наявність в них ненульового спіну нічого не змінює. Для баріону, приймаючи припущення про адитивність всіх компонент моменту імпульсу, замість (2.14) матимемо:

$$\hat{M}_{0,3} = i \left(t \left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{\partial}{\partial z_3} \right) + (z_1 + z_2 + z_3) \frac{\partial}{\partial t} \right). \quad (2.20)$$

Цей оператор знов виражається через оператор z - компоненти повного імпульсу системи. Тому, діючи цим оператором на власну функцію оператору повного імпульсу, що відповідає нульовому власному значенню, отримаємо нуль.

Наведені в цьому розділі міркування мають два суттєві недоліки. По-перше, «правильний» релятивістський оператор $\hat{M}_{0,3}$ реалізується не диференціальними операторами, а є заданий в представленні вторинного квантування. Тому його нерелятивістську границю доречніше шукати саме в цьому представленні. Окрім цього, ми суттєво використали припущення (2.14) та (2.20). В представленні вторинного квантування внаслідок того, що вираз для операторів не залежить від того чи на одночастинковому, чи на багаточастинковому просторі задані ці оператори такі припущення виявляються непотрібними. Тому наведені в цьому розділі міркування можна розглядати лише як допоміжні. Втім в наступному розділі ми покажемо, що, розглядаючи задачу в представленні вторинного квантування, можна отримати той самий результат.

2.2. Наближення генераторів перетворення Лоренца в представленні вторинного квантування

Будемо позначати через $\hat{q}^+(f, \nu, c, \vec{r})$ - нерелятивістський оператор народження кварка в координатному представленні вторинного квантування. При цьому індекси f, ν, c задають відповідно ароматовий, спіновий та кольоровий стан кварка, який народжується у власному для радіус-вектора стані, що відповідає власному значенню \vec{r} . Оператор народження антикварка в тому ж стані позначатимемо як $\hat{\bar{q}}^+(f, \nu, c, \vec{r})$, а відповідні оператори знищення $\hat{q}^-(f, \nu, c, \vec{r})$ і $\hat{\bar{q}}^-(f, \nu, c, \vec{r})$.

В таких позначеннях координатну частину внутрішнього стану мезона як системи кварка та антикварка можна представити у вигляді:

$$|\mu\rangle = \int d\vec{r}_2 d\vec{r}_1 \psi(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) s(\nu_1, \nu_2) c(c_1, c_2) a(f_1, f_2) \times \hat{q}^+(f_1, \nu_1, c_1, \vec{r}_1) \hat{\bar{q}}^+(f_2, \nu_2, c_2, \vec{r}_2) |0\rangle. \quad (2.21)$$

В цьому співвідношенні ми позначили як $s(\nu_1, \nu_2)k(c_1, c_2)a(f_1, f_2)$ відповідно спінову, кольорову та ароматову частини амплітуди ймовірності, у той час як функція $\psi(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|)$ описує координатну залежність амплітуди ймовірності в системі центру мас кварка та антикварка. Оскільки ми розглядаємо координатну частину стану, власного для енергії, у якості $\psi(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|)$ потрібно розглядати власну функцію нерелятивістського гамільтоніану системи кварка та антикварка. Окрім того, як зазвичай, передбачається складання по індексах, які повторюються. Також використано звичайне позначення вакуумного стану $|0\rangle$.

Враховуючи, що залежність всіх величин від внутрішніх індексів для нас в цьому розділі буде несуттєвою, позначатимемо далі сукупність індексів $\{\nu, c, f\}$ однією буквою ξ , а залежність амплітуди ймовірності від внутрішніх індексів як:

$$s(\nu_1, \nu_2)k(c_1, c_2)a(f_1, f_2) \equiv F(\xi_1, \xi_2). \quad (2.22)$$

Тобто замість (2.21) можемо записати

$$|\mu\rangle = F(\xi_1, \xi_2) \int d\vec{r}_2 d\vec{r}_1 \psi(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) \hat{q}^+(\xi_1, \vec{r}_1) \hat{q}^+(\xi_2, \vec{r}_2) |0\rangle. \quad (2.23)$$

Як відомо, оператор $\hat{M}_{0,3}$ в теорії поля представляється у вигляді:

$$\hat{M}_{0,3} = \int d\vec{r} \left(x_3 \hat{T}_{0,0}(\vec{r}) - x_0 \hat{T}_{3,0}(\vec{r}) \right), \quad (2.24)$$

де $\hat{T}_{0,0}(\vec{r})$ і $\hat{T}_{3,0}(\vec{r})$ - оператори відповідних компонент тензора енергії-імпульсу, $x_0 \equiv t$ - часова компонента координатного чотиривектора, а $x_3 \equiv (-z)$ - його коваріантна компонента уздовж осі OZ . Співвідношення (2.24) вочевидь можна переписати у вигляді:

$$\hat{M}_{0,3} = -t \hat{P}_z + \int d\vec{r} \left(x_3 \hat{T}_{0,0}(\vec{r}) \right), \quad (2.25)$$

де \hat{P}_z - оператор z - компоненти повного імпульсу системи.

Зауважимо, що співвідношення (2.24) та (2.25) є точними і не потребують ніяких припущень і наближень. При цьому залежність від t в (2.25) співпадає з (2.15), у той час як само (2.15) є наслідком припущень (2.14) та (2.20). Таким чином, можемо зробити висновок, що (2.25) доводить правильність цих припущень.

Стан (2.23) є власним станом для повного імпульсу системи, що відповідає нульовому власному значенню, тому дія першого доданку з (2.25) на цей стан є тривіальною і дає нуль. Тому далі розглянемо другий доданок з (2.25). Введемо для нього позначення

$$\hat{M}_{0,3}(\hat{T}_{0,0}) = \int x_3 \hat{T}_{0,0}(\vec{r}) d\vec{r}. \quad (2.26)$$

Для того щоб подіяти цим оператором на стан двочастинкової системи (2.23), ми повинні побудувати нерелятивістське наближення для густини енергії $T_{0,0}(\vec{r})$. Для розв'язку цієї задачі найбільш придатним є саме представлення вторинного квантування, бо в цьому представленні гамільтоніан представляється інтегралом від деякої операторно-значної функції, яку можна прийняти за нерелятивістську границю густини енергії.

Нерелятивістський гамільтоніан системи кварк-антикварк, який в представленні вторинного квантування може бути записаний у вигляді:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}^{(0)} + \hat{H}^{(V)}, \quad (2.27) \\ \hat{H}^{(0)} &= \int d\vec{r} \left(\hat{q}^+(\xi, \vec{r}) \left(-\frac{1}{2m} \Delta \right) \hat{q}^-(\xi, \vec{r}) \right) + \int d\vec{r} \left(\hat{q}^+(\xi, \vec{r}) \left(-\frac{1}{2m} \Delta \right) \hat{q}^-(\xi, \vec{r}) \right), \\ \hat{H}^{(V)} &= \frac{1}{2} \int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 V(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \hat{q}^+(\xi_1, \vec{r}_1) \hat{q}^+(\xi_2, \vec{r}_2) \hat{q}^-(\xi_2, \vec{r}_2) \hat{q}^-(\xi_1, \vec{r}_1), \end{aligned}$$

де $V(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$ - потенційна енергія взаємодії кварку та антикварка, а m - маса кварку та антикварка, яка наближено вважається незалежною від аромату, бо

зв'язаний стан існує за рахунок сильної взаємодії та іншими типами взаємодії ми нехтуємо.

Як відомо, при розгляді представлення двочастинкового гамільтоніану диференціальними операторами шляхом введення координат Якобі

$$\vec{R} = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2), \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \quad (2.28)$$

його вдається представити у вигляді суми двох комутуючих операторів - гамільтоніану центра мас, який залежить тільки від \vec{R} , та внутрішнього гамільтоніану, що залежить лише від \vec{r} . Подібного представлення ми хочемо досягти й у випадку, коли гамільтоніан записано через оператори народження та знищення. З цією метою зручно переписати одночастинкову частину гамільтоніану $\hat{H}^{(0)}$ у вигляді двочастинкового оператора. Щоб це зробити врахуємо, що в нерелятивістському наближенні всі оператори можна розглядати на підпросторі простору Фока з фіксованою кількістю і складом частинок. В нашому випадку ми розглядаємо підпростір станів, які містять один кварк та один антикварк. Базисні стани цього підпростору можна записати у вигляді:

$$|\xi_1, \xi_2, \vec{r}_1, \vec{r}_2\rangle = \hat{q}^+(\xi_1, \vec{r}_1)\hat{q}^+(\xi_2, \vec{r}_2)|0\rangle. \quad (2.29)$$

Якщо на довільну лінійну комбінацію станів (2.29) подіяти оператором

$$\hat{E} = \int d\vec{r} \hat{q}^+(\xi, \vec{r})\hat{q}^-(\xi, \vec{r}), \quad (2.30)$$

то можна переконатися, що на підпросторі станів, які містять один кварк і один антикварк, оператор (2.30) грає роль одиничного. Аналогічну властивість має на тому ж підпросторі оператор

$$\hat{E}' = \int d\vec{r} \hat{q}^+(\xi, \vec{r})\hat{q}^-(\xi, \vec{r}). \quad (2.31)$$

Якщо перший доданок в одночастинковій частині $\hat{H}^{(0)}$ гамільтоніану (2.27) помножити на одиничний оператор (2.31), а другий доданок - на (2.30), то

отримаємо вираз одночастинкової частини в ефективно двочастинковому вигляді

$$\hat{H}^{(0)} = \left(-\frac{1}{2m} \right) \int d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \left(\hat{q}^+ (\xi_1, \vec{r}_1) \hat{q}^+ (\xi_2, \vec{r}_2) \Delta_1 \hat{q}^- (\xi_2, \vec{r}_2) \hat{q}^- (\xi_1, \vec{r}_1) + \right. \quad (2.32)$$

$$\left. + \hat{q}^+ (\xi_1, \vec{r}_1) \hat{q}^+ (\xi_2, \vec{r}_2) \Delta_2 \hat{q}^- (\xi_2, \vec{r}_2) \hat{q}^- (\xi_1, \vec{r}_1) \right).$$

Замінімо тепер одночастинкову частину гамільтоніану (2.27) на (2.32) і в отриманому після цього виразі перейдемо до змінних (2.28). Введемо також позначення

$$\vec{r}_1 (\vec{R}, \vec{r}) = \vec{R} - \frac{1}{2} \vec{r}, \vec{r}_2 (\vec{R}, \vec{r}) = \vec{R} + \frac{1}{2} \vec{r}, \quad (2.33)$$

$$\hat{q}^+ (\xi_1, \vec{r}_1 (\vec{R}, \vec{r})) = \hat{q}^+ (1),$$

$$\hat{q}^+ (\xi_2, \vec{r}_2 (\vec{R}, \vec{r})) = \hat{q}^+ (2),$$

$$\hat{q}^- (\xi_2, \vec{r}_2 (\vec{R}, \vec{r})) = \hat{q}^- (2),$$

$$\hat{q}^- (\xi_1, \vec{r}_1 (\vec{R}, \vec{r})) = \hat{q}^- (1),$$

$$\hat{H}^{(\vec{R})} = \left(-\frac{1}{4m} \right) \int d\vec{R} d\vec{r} \hat{q}^+ (1) \hat{q}^+ (2) \Delta_{\vec{R}} \hat{q}^- (2) \hat{q}^- (1),$$

$$\hat{H}^{(\vec{r}, V)} = \int d\vec{R} d\vec{r} \hat{q}^+ (1) \hat{q}^+ (2) \left(-\frac{1}{m} \Delta_{\vec{r}} + V(\vec{r}) \right) \hat{q}^- (2) \hat{q}^- (1).$$

Оператор $\hat{H}^{(\vec{R})}$ будемо називати гамільтоніаном центру мас, а оператор $\hat{H}^{(\vec{r}, V)}$ - внутрішнім гамільтоніаном системи. При цьому гамільтоніан \hat{H} може бути записаний у вигляді

$$\hat{H} = \int \hat{T}_{00} (\vec{R}) d\vec{R}, \quad (2.34)$$

де оператор густини енергії $\hat{T}_{00} (\vec{R})$ може бути записаний у вигляді:

$$\begin{aligned}
\hat{T}_{00}(\vec{R}) &= T_{00}^{(\vec{R})}(\vec{R}) + T_{00}^{(\vec{r})}(\vec{R}) + T_{00}^{(V)}(\vec{R}), \\
T_{00}^{(\vec{R})}(\vec{R}) &= \left(-\frac{1}{4m}\right) \int d\vec{r} \hat{q}^+(1) \hat{q}^+(2) \Delta_{\vec{R}} \hat{q}^-(2) \hat{q}^-(1), \\
T_{00}^{(\vec{r})}(\vec{R}) &= \left(-\frac{1}{m}\right) \int d\vec{r} \hat{q}^+(1) \hat{q}^+(2) \Delta_{\vec{r}} \hat{q}^-(2) \hat{q}^-(1), \\
T_{00}^{(V)}(\vec{R}) &= \int d\vec{r} \hat{q}^+(1) \hat{q}^+(2) V(\vec{r}) \hat{q}^-(2) \hat{q}^-(1).
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Співвідношення (2.34), (2.35) визначають нерелятивістське наближення для оператора $\hat{T}_{00}(\vec{r})$, яке можна застосувати для побудови нерелятивістського наближення для генератора (2.26). За допомогою цих співвідношень маємо:

$$\begin{aligned}
\hat{M}_{0,3}(\hat{T}_{0,0}) &= \hat{M}_{0,3}^{(\vec{R})} + \hat{M}_{0,3}^{(\vec{r})} + \hat{M}_{0,3}^{(V)}, \\
\hat{M}_{0,3}^{(a)} &= \int d\vec{R} \left(R_3 T_{0,0}^{(a)}(\vec{R}) \right),
\end{aligned} \tag{2.36}$$

а індекс a приймає три можливі значення $a = \vec{R}, \vec{r}, V$.

Маючи нерелятивістське наближення для генератору (2.24), ми можемо подіяти зв'язаним із ним оператором (2.1) на нерелятивістське наближення для стану (2.23) і отримати таким чином амплітуду ймовірності цього стану в новій системі відліку. Для того, щоб спростити дію операторної експоненти (2.1) на (2.23), врахуємо, що стан (2.23) є власним станом для внутрішнього гамільтоніану $\hat{H}^{(\vec{r},V)}$. Нас цікавить основний стан системи зв'язаних кварків, який в системі їх центру мас відповідає власному значенню, рівному масі адрону. Але для основного стану це власне значення є не виродженим. Тому, якщо ми доведемо, що генератор (2.24) комутує з внутрішнім гамільтоніаном, то це буде означати, що стан (2.23) є власним також і для генератору (2.24) і для оператора (2.1).

Тому наша подальша мета - довести, що оператори $\hat{M}_{0,3}(\hat{T}_{0,0})$ і $\hat{H}^{(\vec{r},V)}$ комутують.

Для цього зручно перейти в імпульсне представлення, щоб виконати диференціювання операторних функцій від координат, які входять в оператори Лапласа у виразі для гамільтоніану (2.33). Для переходу в імпульсне представлення запишемо оператори (2.33), а також потенційну енергію у вигляді:

$$\begin{aligned}
\hat{q}^+(1) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{p}_1 \times \hat{q}^+(\xi_1, \vec{p}_1) \exp\left(i\vec{p}_1\left(\vec{R} - \frac{1}{2}\vec{r}\right)\right), \\
\hat{q}^+(2) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{p}_2 \times \hat{q}^+(\xi_2, \vec{p}_2) \exp\left(i\vec{p}_2\left(\vec{R} + \frac{1}{2}\vec{r}\right)\right), \\
\hat{q}^-(2) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{p}_3 \times \hat{q}^-(\xi_2, \vec{p}_3) \exp\left(-i\vec{p}_3\left(\vec{R} + \frac{1}{2}\vec{r}\right)\right), \\
\hat{q}^-(1) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{p}_4 \times \hat{q}^-(\xi_1, \vec{p}_4) \exp\left(-i\vec{p}_4\left(\vec{R} - \frac{1}{2}\vec{r}\right)\right), \\
V(\vec{r}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{k} V(\vec{k}) \exp(i\vec{k}\vec{r}),
\end{aligned} \tag{2.37}$$

де $\hat{q}^+(\xi_1, \vec{p}_1), \hat{q}^+(\xi_2, \vec{p}_2), \hat{q}^-(\xi_2, \vec{p}_3), \hat{q}^-(\xi_1, \vec{p}_4)$ - оператори народження та знищення кварків в станах, власних для імпульсу. Окрім того \vec{r}_1 і \vec{r}_2 позначають функції від $\vec{r}_1(\vec{R}, \vec{r})$ і $\vec{r}_2(\vec{R}, \vec{r})$, що визначаються співвідношенням (2.33).

Аргументи функцій $\vec{r}_1(\vec{R}, \vec{r})$ і $\vec{r}_2(\vec{R}, \vec{r})$ в (2.37) не виписані для скорочення запису і позначають функції, що визначаються співвідношенням (2.33).

Якщо підставити ці вирази в (2.35) і, виконуючи потрібні інтегрування (деталі обчислень наведені в [148]), отримаємо вираз для внутрішнього гамільтоніану $\hat{H}(\vec{r})$:

$$\begin{aligned}
\hat{H}^{(\vec{r})} &= \int T_{00}^{(\vec{r})}(\vec{R}) d\vec{R} = \int d\vec{P} d\vec{p} \left(\frac{\vec{p}^2}{m}\right) \hat{q}^+\left(\xi_1, \vec{p}_1 = \frac{1}{2}\vec{P} - \vec{p}\right) \times \\
&\times \hat{q}^+\left(\xi_2, \vec{p}_2 = \frac{1}{2}\vec{P} + \vec{p}\right) \hat{q}^-\left(\xi_2, \vec{p}_3 = \frac{1}{2}\vec{P} + \vec{p}\right) \hat{q}^-\left(\xi_2, \vec{p}_4 = \frac{1}{2}\vec{P} - \vec{p}\right), \\
\hat{H}^{(V)} &= \int T_{00}^{(V)}(\vec{R}) d\vec{R} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{P} d\vec{p} d\vec{k} V(\vec{k}) \hat{q}^+\left(\xi_1, \vec{p}_1 = \frac{1}{2}\vec{P} - \vec{p}\right) \times \\
&\times \hat{q}^+\left(\xi_2, \vec{p}_2 = \frac{1}{2}\vec{P} + \vec{p}\right) \hat{q}^-\left(\xi_2, \vec{p}_3 = \frac{1}{2}\vec{P} + \vec{p} + \vec{k}\right) \hat{q}^-\left(\xi_2, \vec{p}_4 = \frac{1}{2}\vec{P} - \vec{p} - \vec{k}\right).
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Внутрішній гамільтоніан системи виражається через ці оператори таким чином:

$$\hat{H}(\vec{r}, V) = \hat{H}(\vec{r}) + \hat{H}(V). \quad (2.39)$$

Розглянемо тепер вираз генератора (2.36) в імпульсному представленні.

Для $\hat{M}_{0,3}^{(\vec{R})}$ маємо:

$$\begin{aligned} \hat{M}_{0,3}^{(\vec{R})} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\vec{P}_{12} d\vec{P}_{34} d\vec{p} \left(\frac{(\vec{P}_{34})^2}{4m} \right) \hat{q}^+ \left(\xi_1, \vec{p}_1 = \frac{1}{2} \vec{P}_{12} - \vec{p} \right) \times \\ &\times \hat{q}^+ \left(\xi_2, \vec{p}_2 = \frac{1}{2} \vec{P}_{12} + \vec{p} \right) \hat{q}^- \left(\xi_2, \vec{p}_3 = \frac{1}{2} \vec{P}_{34} + \vec{p} \right) \times \\ &\times \hat{q}^- \left(\xi_2, \vec{p}_4 = \frac{1}{2} \vec{P}_{34} - \vec{p} \right) \int R_3 \exp(i(\vec{P}_{12} - \vec{P}_{34}) \vec{R}) d\vec{R}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Змінну інтегрування \vec{P}_{12} перепозначимо як \vec{P} , а замість \vec{P}_{34} введемо нову змінну інтегрування $\vec{\varepsilon}$ за допомогою співвідношення

$$\vec{P}_{34} = \vec{P} - \vec{\varepsilon}. \quad (2.41)$$

Після цих перетворень:

$$\begin{aligned} \hat{M}_{0,3}^{(\vec{R})} &= -i \int d\vec{P} d\vec{\varepsilon} d\vec{p} \left(\frac{\partial \delta(2\vec{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_3} \right) \left(\frac{(\vec{P} - \vec{\varepsilon})^2}{4m} \right) \hat{q}^+ \left(\xi_1, \vec{p}_1 = \frac{1}{2} \vec{P} - \vec{p} \right) \times \\ &\times \hat{q}^+ \left(\xi_2, \vec{p}_2 = \frac{1}{2} \vec{P} + \vec{p} \right) \hat{q}^- \left(\xi_2, \vec{p}_3 = \frac{1}{2} (\vec{P} - \vec{\varepsilon}) + \vec{p} \right) \times \\ &\times \hat{q}^- \left(\xi_2, \vec{p}_4 = \frac{1}{2} (\vec{P} - \vec{\varepsilon}) - \vec{p} \right). \end{aligned} \quad (2.42)$$

Тут похідна від δ -функції Дірака розуміється в звичайному для узагальнених функцій сенсі інтегрування по частинах [149].

Аналогічно

$$\begin{aligned}
\hat{M}_{0,3}^{(\vec{r})} &= -i \int d\vec{P} d\vec{\varepsilon} d\vec{p} \left(\frac{\partial \delta(2\vec{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_3} \right) \left(\frac{\vec{p}^2}{m} \right) \hat{q}^+ \left(\xi_1, \vec{p}_1 = \frac{1}{2} \vec{P} - \vec{p} \right) \times \\
&\times \hat{q}^+ \left(\xi_2, \vec{p}_2 = \frac{1}{2} \vec{P} + \vec{p} \right) \hat{q}^- \left(\xi_2, \vec{p}_3 = \frac{1}{2} (\vec{P} - \vec{\varepsilon}) + \vec{p} \right) \times \\
&\times \hat{q}^- \left(\xi_2, \vec{p}_4 = \frac{1}{2} (\vec{P} - \vec{\varepsilon}) - \vec{p} \right). \\
\hat{M}_{0,3}^{(V)} &= \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{P} d\vec{\varepsilon} d\vec{p} d\vec{k} \frac{\partial \delta(2\vec{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_3} V(\vec{k}) \hat{q}^+ \left(\xi_1, \vec{p}_1 = \frac{1}{2} \vec{P} - \vec{p} \right) \times \\
&\times \hat{q}^+ \left(\xi_2, \vec{p}_2 = \frac{1}{2} \vec{P} + \vec{p} \right) \hat{q}^- \left(\xi_2, \vec{p}_3 = \frac{1}{2} (\vec{P} - \vec{\varepsilon}) + \vec{p} + \vec{k} \right) \times \\
&\times \hat{q}^- \left(\xi_2, \vec{p}_4 = \frac{1}{2} (\vec{P} - \vec{\varepsilon}) - \vec{p} - \vec{k} \right).
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Маючи вирази для генератора $\hat{M}_{0,3}$ і внутрішнього гамільтоніану, зможемо розрахувати їх комутатор. Враховуючи, що кожен з цих операторів складається з декількох доданків, розглянемо комутатори між цими доданками. Для розрахунку комутаторів добутки операторів в одному та іншому порядку перед тим як знаходити їх різницю, зручно привести до нормальної форми за допомогою теореми Віка.

Раніше ми вже скористалися тим, що всі оператори розглядаються на підпросторі простору Фока, стани якого містить один кварк і один антикварк. Тому оператори, які в нормальній формі містять два або більше кваркових оператори (народження або знищення) чи антикваркових оператори, будуть мати на тому підпросторі простору Фока, який ми розглядаємо, нульові матричні елементи для всіх базисних елементів цього підпростору. Тому такі оператори ми будемо відкидати. Враховуючи, що кожен з розглядуваних операторів містить по одному кварковому та одному антикварковому оператору, їх добуток буде містити по два кваркових оператора та два антикваркових оператора. Тобто цей добуток буде містити «зайві» оператори. Застосовуючи до цього добутку теорему Віка, отримаємо, що ненульові матричні

елементи на розглядуваному просторі матимуть тільки ті доданки, в яких зайві оператори спарені між собою.

Розглянемо добуток $\hat{H}^{(\vec{r})}\hat{M}_{0,3}^{(\vec{R})}$. Після приведення до нормальної форми і відкидання доданків, що мають нульові матричні елементи, цей добуток можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \hat{H}^{(\vec{r})}\hat{M}_{0,3}^{(\vec{R})} = & -i \int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 d\vec{\varepsilon} \left(\frac{\partial \delta(2\vec{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_3} \right) \left(\frac{(\vec{p}_2 - \vec{p}_1)^2}{4m} \right) \left(\frac{(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{\varepsilon})^2}{4m} \right) \times \\ & \times \hat{q}^+(\xi_1, \vec{p}_1) \hat{q}^+(\xi_2, \vec{p}_2) \hat{q}^-\left(\xi_2, \vec{p}_2 - \frac{1}{2}\vec{\varepsilon}\right) \hat{q}^-\left(\xi_1, \vec{p}_1 - \frac{1}{2}\vec{\varepsilon}\right). \end{aligned} \quad (2.44)$$

У випадку множення тих самих операторів в зворотному порядку після аналогічних перетворень маємо:

$$\begin{aligned} \hat{M}_{0,3}^{(\vec{R})}\hat{H}^{(\vec{r})} = & -i \int dp_1 dp_2 d\vec{\varepsilon} \frac{\partial \delta(2\vec{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_3} \frac{(p_2 + p_1 - \varepsilon)^2}{4m} \frac{(p_2 - p_1)^2}{4m} \times \\ & \times \bar{q}^+(\xi_1, p_1) q^+(\xi_2, p_2) \hat{q}^-\left(\xi_2, p_2 - \frac{1}{2}\varepsilon\right) \hat{q}^-\left(\xi_1, p_1 - \frac{1}{2}\varepsilon\right) \end{aligned} \quad (2.45)$$

Якщо тепер в цьому виразі виконати інтегрування по компонентах \vec{p}_3 і \vec{p}_4 , то отримаємо результат, який співпадає з (2.44). Звідси робимо висновок, що оператори $\hat{M}_{0,3}^{(\vec{R})}$ і $\hat{H}^{(\vec{r})}$ комутують між собою. Аналогічно можна показати [148], що оператор $\hat{M}_{0,3}^{(\vec{R})}$ комутує з іншими доданками внутрішнього гамільтоніану і тому він комутує з усім внутрішнім гамільтоніаном зв'язаної системи кварків.

Перейдемо тепер до розрахунку комутаторів оператора $\hat{M}_{0,3}^{(\vec{r})}$ з доданками внутрішнього гамільтоніану. За допомогою перетворень, аналогічних розглянутим вище, добуток $\hat{H}^{(\vec{r})}\hat{M}_{0,3}^{(\vec{r})}$ приводиться до вигляду:

$$\begin{aligned} \hat{H}^{(\vec{r})} \hat{M}_{0,3}^{(\vec{r})} &= -i \int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 d\vec{\varepsilon} \left(\frac{\partial \delta(2\vec{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_3} \right) \left(\frac{(\vec{p}_2 - \vec{p}_1)^2}{4m} \right) \left(\frac{(\vec{p}_2 - \vec{p}_1)^2}{4m} \right) \times \\ &\times \hat{q}^+(\xi_1, \vec{p}_1) \hat{q}^+(\xi_2, \vec{p}_2) \hat{q}^-\left(\xi_2, \vec{p}_3 = \vec{p}_2 - \frac{1}{2}\vec{\varepsilon}\right) \hat{q}^-\left(\xi_1, \vec{p}_4 = \vec{p}_1 - \frac{1}{2}\vec{\varepsilon}\right). \end{aligned} \quad (2.46)$$

До такого самого результату призводить приведення до нормальної форми добутку тих самих операторів в оберненому порядку. Таким чином, $\hat{M}_{0,3}^{(\vec{r})}$ і $\hat{H}^{(\vec{r})}$ комутують між собою.

Розрахунок добутку $\hat{H}^{(V)} \hat{M}_{0,3}^{(\vec{r})}$ призводить до результату

$$\begin{aligned} \hat{H}^{(V)} \hat{M}_{0,3}^{(\vec{r})} &= \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 d\vec{\varepsilon} d\vec{k} \left(\frac{\partial \delta(2\vec{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_3} \right) V(\vec{k}) \left(\frac{(\vec{p}_2 - \vec{p}_1 + 2\vec{k})^2}{4m} \right) \times \\ &\times \hat{q}^+(\xi_1, \vec{p}_1) \hat{q}^+(\xi_2, \vec{p}_2) \hat{q}^-\left(\xi_2, \vec{p}_3 = \vec{p}_2 + \vec{k} - \frac{1}{2}\vec{\varepsilon}\right) \times \\ &\times \hat{q}^-\left(\xi_1, \vec{p}_4 = \vec{p}_1 - \vec{k} - \frac{1}{2}\vec{\varepsilon}\right). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Розрахунок добутку цих самих операторів в оберненому порядку $\hat{M}_{0,3}^{(\vec{r})} \hat{H}^{(V)}$ дає результат, який не співпадає з (2.47), тобто оператори $\hat{M}_{0,3}^{(\vec{r})}$ і $\hat{H}^{(V)}$ не комутують між собою:

$$\begin{aligned} \hat{M}_{0,3}^{(\vec{r})} \hat{H}^{(V)} &= \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 d\vec{\varepsilon} d\vec{k} V(\vec{k}) \left(\frac{\partial \delta(2\vec{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_3} \right) \left(\frac{(\vec{p}_2 - \vec{p}_1)^2}{4m} \right) \times \\ &\times \hat{q}^+(\xi_1, \vec{p}_1) \hat{q}^+(\xi_2, \vec{p}_2) \hat{q}^-\left(\xi_2, \vec{p}_3 = \vec{p}_2 + \vec{k} - \frac{1}{2}\vec{\varepsilon}\right) \times \\ &\times \hat{q}^-\left(\xi_2, \vec{p}_4 = \vec{p}_1 - \vec{k} - \frac{1}{2}\vec{\varepsilon}\right). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Але:

$$\begin{aligned}
\hat{M}_{0,3}^{(V)} \hat{H}^{(\vec{r})} &= \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 d\vec{\varepsilon} d\vec{k} \frac{\partial \delta(2\vec{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_3} V(\vec{k}) \left(\frac{(\vec{p}_2 - \vec{p}_1 + 2\vec{k})^2}{4m} \right) \times \\
&\times \hat{q}^+(\xi_1, \vec{p}_1) \hat{q}^+(\xi_2, \vec{p}_2) \hat{q}^-\left(\xi_2, \vec{p}_3 = \vec{p}_2 + \vec{k} - \frac{1}{2}\vec{\varepsilon}\right) \times \\
&\times \hat{q}^-\left(\xi_1, \vec{p}_4 = \vec{p}_1 - \vec{k} - \frac{1}{2}\vec{\varepsilon}\right).
\end{aligned} \tag{2.49}$$

i

$$\begin{aligned}
\hat{H}^{(\vec{r})} \hat{M}_{0,3}^{(V)} &= \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}} \int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 d\vec{\varepsilon} d\vec{k} \frac{\partial \delta(2\vec{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_3} V(\vec{k}) \left(\frac{(\vec{p}_2 - \vec{p}_1)^2}{4m} \right) \times \\
&\times \hat{q}^+(\xi_1, \vec{p}_1) \hat{q}^+(\xi_2, \vec{p}_2) \hat{q}^-\left(\xi_2, \vec{p}_3 = \vec{p}_2 + \vec{k} - \frac{1}{2}\vec{\varepsilon}\right) \times \\
&\times \hat{q}^-\left(\xi_1, \vec{p}_4 = \vec{p}_1 - \vec{k} - \frac{1}{2}\vec{\varepsilon}\right).
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Враховуючи, що вирази $\hat{H}^{(V)} \hat{M}_{0,3}^{(\vec{r})}$ (2.47) і $\hat{M}_{0,3}^{(V)} \hat{H}^{(\vec{r})}$ (2.49) входять в загальний вираз для комутатору $\left[\hat{H}^{(\vec{r},V)}, \hat{M}_{0,3} \right]$ з протилежними знаками і що те ж саме можна сказати про (2.48) і (2.50), дістаємо висновок:

$$\left[\hat{H}^{(\vec{r})}, \hat{M}_{0,3}^{(V)} \right] + \left[\hat{H}^{(V)}, \hat{M}_{0,3}^{(\vec{r})} \right] = 0. \tag{2.51}$$

Нарешті розрахунки добутків $\hat{M}_{0,3}^{(V)} \hat{H}^{(V)}$ і $\hat{H}^{(V)} \hat{M}_{0,3}^{(V)}$ призводять до одного й того ж самого результату:

$$\begin{aligned}
\hat{M}_{0,3}^{(V)} \hat{H}^{(V)} &= \hat{H}^{(V)} \hat{M}_{0,3}^{(V)} = \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 d\vec{\varepsilon} d\vec{k} d\vec{k}' \frac{\partial \delta(2\vec{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_3} V(\vec{k}) V(\vec{k}') \times \\
&\times \hat{q}^+(\xi_1, \vec{p}_1) \hat{q}^+(\xi_2, \vec{p}_2) \hat{q}^-\left(\xi_2, \vec{p}_3 = \vec{p}_2 + \vec{k}' + \vec{k} - \frac{1}{2}\vec{\varepsilon}\right) \times \\
&\times \hat{q}^-\left(\xi_1, \vec{p}_4 = \vec{p}_1 - \vec{k}' - \vec{k} - \frac{1}{2}\vec{\varepsilon}\right).
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Таким чином, якщо розбити комутатор $[\hat{H}^{(\vec{r},V)}, \hat{M}_{0,3}]$ на доданки, що відповідають доданкам внутрішнього гамільтоніану і генератору, то сума всіх цих доданків дорівнює нулю, тобто

$$[\hat{M}_{0,3}, \hat{H}^{(\vec{r},V)}] = 0. \quad (2.53)$$

Отже, як зазначалося вище, внаслідок того, що стан (2.23) є власним станом для внутрішнього гамільтоніану, який відповідає невідродженому власному значенню, наслідком (2.53) є те, що цей стан повинен бути власним і для генератора буста:

$$\hat{M}_{0,3} |\mu\rangle = m_{0,3} |\mu\rangle, \quad (2.54)$$

де $m_{0,3}$ відповідне стану $|\mu\rangle$ власне значення генератора $\hat{M}_{0,3}$.

Для того, щоб визначити власне значення $m_{0,3}$ скористаємось властивостями симетрії власного стану $|\mu\rangle$. Зокрема, цей стан повинен переходити сам в себе при довільній інверсії координатних осей. Окрім того, якщо вважати потенціал взаємодії між кварком та антикварком сферично симетричним, то й основний стан цієї системи повинен бути сферично симетричним, тобто таким, що переходить сам в себе при довільному оберті. Якщо позначити унітарний оператор, який представляє інверсію або оберт на підпросторі простору Фока, який ми розглядаємо, через $\hat{U}^{(I,R)}$, то маємо

$$\hat{U}^{(I,R)} |\mu\rangle = |\mu\rangle. \quad (2.55)$$

З урахуванням цього, (2.54) можемо переписати

$$\hat{M}_{0,3} \hat{U}^{(I,R)} |\mu\rangle = m_{0,3} \hat{U}^{(I,R)} |\mu\rangle, \quad (2.56)$$

або

$$\left(\hat{U}^{(I,R)}\right)^{-1} \hat{M}_{0,3} \hat{U}^{(I,R)} |\mu\rangle = m_{0,3} |\mu\rangle. \quad (2.57)$$

Оператор $\left(\hat{U}^{(I,R)}\right)^{-1} \hat{M}_{0,3} \hat{U}^{(I,R)}$ пов'язаний з $\hat{M}_{0,3}$ тензорним законом перетворення. Це означає, що якщо обрати інверсію або оберт, який змінює напрям вісі OZ на протилежний, то матимемо:

$$\left(\hat{U}^{(I,R)}\right)^{-1} \hat{M}_{0,3} \hat{U}^{(I,R)} = -\hat{M}_{0,3}. \quad (2.58)$$

Але тоді, підставляючи (2.58) в (2.57), з урахуванням (2.54) отримаємо, що

$$m_{0,3} = 0. \quad (2.59)$$

Таким чином, якщо позначити через $|\mu'\rangle$ стан системи двох зв'язаних частинок відносно системи відліку, яка отримується з системи центру мас цих частинок за допомогою буста уздовж осі OZ з бистротою Y , то матимемо

$$|\mu'\rangle = \exp\left(i\hat{M}_{0,3}Y\right) |\mu\rangle. \quad (2.60)$$

Але з урахуванням (2.54) і (2.59) бачимо, що з усього ряду, який представляє операторну експоненту $\exp\left(i\hat{M}_{0,3}Y\right)$, після дії на стан $|\mu\rangle$ відмінний від нуля результат дасть лише доданок, що містить одиничний оператор. Отже, маємо

$$|\mu'\rangle = |\mu\rangle. \quad (2.61)$$

Цей результат співпадає з отриманим раніше в представленні диференціальними операторами результатом (2.19). Отже, можемо зробити висновок, що внутрішній стан нерелятивістської системи зв'язаних частинок не змінюється у випадку переходу за допомогою буста до системи відліку, відносно якої ця зв'язана система має релятивістську енергію-імпульс. Зазначимо, що цей висновок вже з'являвся в роботі [56], але без будь-яких обґрунтувань.

2.3. Задача про перетворення стану із загальних теоретико-групових міркувань

В попередніх розділах ми розглянули два різних представлення генератору буста $\hat{M}_{0,3}$ та отримали схожі результати. Тому виникає питання, наскільки ці результати можливо узагальнити. Цього узагальнення можна досягти, розглядаючи задачу за допомогою загальних теоретико-групових міркувань.

Розглянемо генератори групи Пуанкаре. Маємо чотири генератори просторово-часових зсувів $\hat{P}_a, a = 0, 1, 2, 3$, та шість лоренцевих генераторів $\hat{M}_{a,b} = -\hat{M}_{b,a}$. Комутаційні співвідношення між цими генераторами залежать тільки від закону групового множення і ті особливості перетворення станів квантових систем взаємодіючих частинок, про які говорилося вище, на ці комутаційні співвідношення не впливають. Також ці комутаційні співвідношення не залежать від представлення генераторів, тому ми їх можемо розглядати без явного виду цих генераторів. Як відомо з [44], оператор $g^{a,b} \hat{P}_a \hat{P}_b$ комутує з усіма генераторами групи Пуанкаре і, зокрема, з потрібним для нас генератором $\hat{M}_{0,3}$. Враховуючи, що згідно з постулатом квантування полів [14], генератор \hat{P}_0 повинен співпадати з повним гамільтоніаном системи, а оператори $\hat{P}_b, b = 1, 2, 3$ - з операторами компонент імпульсу, бачимо що, оператор $g^{a,b} \hat{P}_a \hat{P}_b$ тоді співпадає з квадратом внутрішнього гамільтоніану системи, бо всі власні значення цього оператора дорівнюють квадратам власних значень внутрішньої енергії системи розглядуваних частинок.

Отже, генератор буста комутує з квадратом внутрішнього гамільтоніану незалежно від представлення цих операторів і незалежно від можливості застосувати нерелятивістське наближення в системі центру мас розглядуваних частинок. Якщо таке наближення можливе, як у випадку, який нас цікавить, то тоді власний стан, який відповідає найменшому власному значенню

квадрату внутрішнього гамільтоніану, є таким, що відповідає невиродженому власному значенню. Тоді, внаслідок комутативності операторів $g^{a,b} \hat{P}_a \hat{P}_b$ і $\hat{M}_{0,3}$, отримуємо, що цей стан є власним і для $\hat{M}_{0,3}$, звідки, як ми показали, випливає, що цей стан не змінюється при бусті. Отже, як бачимо, найбільш суттєвим фактом є невиродженість основного стану зв'язаної системи.

Тому можна зробити висновок, що з комутаційних співвідношень між генераторами групи Пуанкаре випливає, що якщо внутрішній стан системи взаємодіючих частинок (тобто власний стан квадрату внутрішнього гамільтоніану системи) є невироджений, то він не змінюватиметься при бусті.

2.4. Висновки до розділу 2

Як відомо, основний стан системи з центральною взаємодією є сферично симетричним. З отриманого результату випливає, що при переході до нової системи він не зміниться, тобто він залишиться сферично симетричним і не піддається лоренцевому скороченню [150]. Як вже зазначалося вище, висновок, подібний до нашого, був зроблений досить давно [56]. Але вказана робота присвячена іншим питанням, тому, мабуть, обґрунтування цього твердження не було метою автора.

Важливість цього висновку полягає в тому, що в багатьох роботах, присвячених побудові феноменологічних моделей розсіяння адронів, факт лоренцева скорочення адрону приймається без обговорення і використовується при побудові цих моделей [53, 83, 151]. При цьому із розгляду виключаються процеси, які відбуваються в повздовжному напрямку і грають важливу роль в механізмах взаємодії адронів [144, 154-156].

Як випливає з результатів цього розділу, суттєва відмінність розглянутої задачі від звичайної задачі про лоренцеве скорочення полягає в тому, що в задачі про скорочення стрижня існує система відліку, відносно якої вимірювання координат стрижню може відбуватися неодноразово. Такою

системою відліку є система спокою стрижня. В нашій задачі такої системи відліку не існує. Це наводить на думку модифікувати класичну задачу про лоренцеве скорочення таким чином, щоб і в тій задачі не існувало системи відліку, відносно якої вимірювання можуть проводитись неодноразово. Для цього в додатку до роботи [152] ми розглянули задачу про залежність відстані між двома класичними (в сенсі не квантовими) релятивістськими частинками, що рухаються по заданим законам в їх системі центру мас. Залежність від часу відстані між тими ж частинками, але виміряна в іншій інерційній системі відліку, вочевидь, може бути розрахована за допомогою самих лише перетворень Лоренца. В роботі [152] показано, що можна задати такий закон руху частинок, що спостерігачі в різних інерційних системах відліку отримуватимуть при вимірюванні одну й ту саму залежність відстані відносно своєї системи відліку від часу відносно цієї системи відліку, тобто в цій задачі також скорочення не відбувається. Цей висновок є таким самим наслідком самих лише перетворень Лоренца, як й існування скорочення в задачі про стрижень.

В задачі про стрижень ніколи не розглядається його внутрішній стан. Зрозуміло, що цей стан не має нічого спільного із станами, розглянутими в цьому розділі. Він не є чистим квантово-механічним станом, і має описуватись матрицею густини, а не амплітудою ймовірності. Відтак, він не є власним станом для компонент моменту імпульсу \hat{M}_{03} і, до того ж, цей стан не є сферично симетричним. Тому й результати цього розділу не мають відношення до перетворення подібних станів.

Окрім наведених вище детальних аргументів на користь зробленого висновку можна також додати ще один аргумент «із загальних міркувань». Якщо ми розглянемо мезон із нульовим спіном, то його внутрішній момент імпульсу повинен дорівнювати нулю. Але це означає, що цей стан має бути сферично симетричним. При цьому внутрішній момент імпульсу мезона повинен залишатись рівним нулю в довільній системі відліку. Але, якщо стан

перестав би бути сферично-симетричним внаслідок лоренцева скорочення, то внутрішній момент імпульсу перестав би дорівнювати нулю. Тобто в новій системі відліку у мезона з'являвся б ненульовий спін.

Результат, отриманий в цій частині дисертації, є важливим для подальшого розгляду. Зокрема, він дозволяє далі розвинути метод багаточастинкових полів для опису адронів в процесах розсіяння [4]. При цьому термін «багаточастинкові поля» розуміється дещо в іншому сенсі, ніж в роботі [153]. В межах цього підходу вдається не тільки розглядати процеси розсіяння адронів як багатокваркових систем, але й описати конфайнмент кварків і глюонів.

РОЗДІЛ 3

БАГАТОЧАСТИНКОВІ ПОЛЬОВІ ОПЕРАТОРИ В КВАНТОВІЙ ТЕОРІЇ ПОЛЯ

В роботах [143, 144, 154-157] було показано, що в межах теорії збурень для модельної теорії ϕ^3 вдається відтворити якісні особливості залежності повного перерізу розсіяння адронів від енергії \sqrt{s} . Був запропонований фізичний механізм, який може пояснити внаслідок чого повні перерізи розсіяння адронів асимптотично зростають із зростанням енергії. Також в межах цих моделей можна відтворити особливості поведінки інклюзивного перерізу розсіяння по швидкості зі зміною енергії [145]. А саме, наявність одного максимуму при малих змінних енергіях і двох симетричних максимумів при зростанні енергії [9]. Але такі моделі дозволяють описувати експериментальні дані лише на якісному, а не на кількісному рівні.

Для переходу на кількісний рівень потрібно провести аналогічні розрахунки в межах КХД. З одного боку, в межах КХД можуть бути застосовані ті ж методи розрахунку та задіяні ті ж самі фізичні механізми [3]. З іншого боку, існує відома проблема, яка полягає в тому, що взаємодія відбувається між кварками за посередництвом глюонів, в той час як в початковому і кінцевому станах присутні їх зв'язані стани - адрони. З точки зору теорії збурень це проявляється в тому, що на діаграмах є кваркові та глюонні лінії, але не має адронних. Якщо розглядати такі діаграми, при побудові амплітуди розсіяння закон збереження енергії-імпульсу буде накладатись на чотири імпульси кварків, а не адронів, як це є в експерименті. Це є наслідком того, що гамільтоніан системи асимптотично не наближається до гамільтоніану вільних частинок теорії, якщо як такі частинки розглядати кварки і глюони. Тобто ми не можемо «вмикати» та «вимикати» взаємодію, як в звичайному \hat{S} – матрич-

ному підході, бо саме ця взаємодія забезпечує існування адронів як зв'язаних станів конститuentних кварків.

На наш погляд, зазначена проблема пов'язана не із застосуванням теорії збурень, а з тим, що в нерелятивістській і релятивістській теоріях маємо різну ситуацію із повнотою системи функцій, побудованих як симетризований чи антисиметризований добуток одночастинкових станів. В нерелятивістській теорії ця система є повною в просторі багаточастинкових станів [73]. В релятивістській же теорії є сумнів щодо повноти цієї системи функцій. Пояснимо це більш детально.

Якщо ми вимірюємо, наприклад, координати декількох взаємодіючих між собою частинок, то ми повинні це робити одночасно відносно тієї системи відліку, відносно якої розглядається стан. Але ми не можемо реалізувати вимірювання, які були б одночасними в різних системах відліку. Тому, коли ми говоримо про сукупність подій, яка полягає в тому, що один інерційний спостерігач при вимірюванні в деякий момент часу виявив частинки в певних елементах об'єму та аналогічну сукупність подій для іншого інерційного спостерігача, то ми вимушені розглядати сукупності різних подій для різних спостерігачів. Тому координати і час цих подій для різних спостерігачів не пов'язані ані перетвореннями Лоренца, ані взагалі якимось чином. Цю ситуацію ми обговорювали більш докладно в [5]. Тобто, коли ми розглядаємо в релятивістській ситуації багаточастинкові компоненти фоківських стовпців, їх аргументи в різних системах відліку не можуть бути пов'язані між собою ніяким чином і перетворення стану можна розглядати тільки як перетворення виду залежності від тих самих аргументів.

Якщо ж ми розглядаємо одночастинковий стан, то зазначеної проблеми з одночасністю не виникає і для різних спостерігачів ми можемо розглядати одну й ту саму подію вимірювання і пов'язувати координати й час цієї події в різних системах відліку перетвореннями Лоренца. Тобто аргументи одночастинкових компонент фоківського стану пов'язані між собою перетвореннями

Лоренца. Аналогічна ситуація має місце для системи декількох невзаємодіючих частинок, бо за відсутності взаємодії одночасність вимірювання координат частинок не є суттєвою. Але компонента фоківського стовпця все одно повинна характеризувати виміри, одночасні в системі відліку, відносно якої задається фоківський стан. Тут можна скористатись тим, що в системі невзаємодіючих частинок маємо симетрію не тільки відносно просторово-часового зсуву всієї системи в цілому, але й відносно просторово-часового зсуву в просторі подій кожної частинки. Тому ми можемо розглядати одні й ті ж події для двох різних інерційних систем відліку, а їх неодноразність відносно однієї з цих систем розглядати як результат зсуву в часі деякої системи одночасних відносно даної системи відліку вимірювань. Тому, якщо ми розглядаємо добуток одночастинкових станів, то аргументи цього добутку в різних системах відліку можна пов'язати перетвореннями Лоренца.

Отже, якщо стан системи взаємодіючих частинок розкладався б по симетризованих чи антисиметризованих добутках одночастинкових станів, то функція, що розкладається, і базисні функції мали б різні закони перетворення при переході з однієї системи відліку до іншої. Тому в релятивістській теорії на відміну від нерелятивістської неможливо довільний багаточастинковий стан «побудувати» з одночастинкових станів.

В той же час, при побудові континуального інтегралу для твірного функціоналу оператора часової еволюції на кожному кроці по часу використовується розклад по базису, отриманому дією добутку одночастинкових операторів народження на вакуумний стан [13]. Відповідно, такий самий розклад стосуватиметься і кінцевого, і початкового станів. Тому незалежно від використання або невикористання теорії збурень енергії-імпульси базисних станів складатимуться з одночастинкових енергій-імпульсів.

Використання базису, побудованого за допомогою одночастинкових операторів народження, є необхідністю, бо в існуючих польових теоріях ми можемо отримувати оператори на просторі Фока лише у вигляді виразів че-

рез одночастинкові польові оператори. Відповідно, щоб такими виразами можна було подіяти на елементи простору Фока, ці елементи повинні виражатися через ті самі оператори.

Отже, є необхідність розгляду багаточастинкових полів та відповідних багаточастинкових польових операторів, що можуть бути отримані за допомогою квантування цих полів. Це й є метою цього розділу.

Окрім описаних проблем є ще одна добре відома проблема, для розв'язання якої багаточастинкові поля можуть бути корисними. З одного боку, опис адронів як систем, складених з невеликої кількості конститuentних кварків, розглядався в великій кількості робіт як в суто нерелятивістському [127], так і в квазірелятивістських наближеннях [22, 86, 102, 107]. З іншого боку, при опису адронів в процесах розсіяння всі ці моделі «забуваються» і використовуються партонні моделі [2, 54, 67]. Проте, система багатопартонних функцій розподілу для адрона в початковому стані розсіяння, коли взаємодії між адронами ще не має, є невідомою та її встановлення вже само по собі є проблемою, що ще більш ускладнює опис процесу розсіяння. Тому ми збираємось показати, що використання багаточастинкових полів дозволяє, з одного боку, описати адрон як систему декількох зв'язаних конститuentних кварків (або кварків та антикварків) і врахувати при цьому непертурбативні ефекти, а далі, використовуючи для опису взаємодії цих полів теорію збурень із відповідною діаграмною технікою, розглядати процеси, аналогічні тим, що виникають при багатопартонному підході, тим самим оминаючи зазначені труднощі цього підходу.

При цьому, якщо ми вважаємо, що адрон в початковому або кінцевому стані розсіяння, тобто до або після його взаємодії із іншими частинками, складається з певної кількості певних конститuentних кварків, то можна спробувати описати внутрішній стан такого адрону в нерелятивістському наближенні. Іншими словами, описувати цей внутрішній стан за допомогою амплітуди ймовірності, яка знаходиться як розв'язок рівняння Шредінгера з

обраним з фізичних міркувань або розрахованим (як ми збираємось зробити далі) потенціалом. Можна показати, що, якщо при розгляді нерелятивістського зв'язаного стану перейти до координат Якобі [158] і відділити внутрішній стан від стану центру мас відносно вихідної системи відліку, то при переході до нової системи відліку внутрішній стан не змінюється [150]. Ці дії не потребують використання теорії збурень і тому вони дають змогу враховувати непертурбативні ефекти, такі як конфайнмент кварків, який автоматично описує й існування адрону як зв'язаного стану кварків або кварків і антикварків.

Отже, далі ми розглядатимемо багаточастинкові польові оператори, які будуть змінювати числа заповнення багаточастинкових адронних станів. При цьому суттєво, що багаточастинкові польові оператори, хоча й народжують та знищують адрони, як буде показано далі, зберігають інформацію про внутрішню кваркову структуру мезонів і баріонів. За рахунок внутрішніх кваркових ступенів свободи безколірні адрони зможуть взаємодіяти з калібрувальним полем і ця взаємодія буде вводиться не феноменологічно, а звичайним способом подовження похідних, зберігаючи тим самим локальну калібрувальну симетрію. В цьому врахуванні внутрішньої структури адронів є суттєва відмінність підходу, що пропонується від підходу релятивістської теорії середнього поля [159], в якій також присутні оператори народження і знищення адронів. Але при цьому в [159] адрони описуються феноменологічними одностинковими полями, які не враховують кваркової структури адронів. Тому взаємодію між цими ефективними адронними полями доводиться вводити також феноменологічним чином через обмін квантами феноменологічних мезонних полів з відповідними властивостями симетрії відносно групи Лоренца і груп внутрішніх симетрій. Але, звичайно, при такому підході неможливо задовольнити принципу локальної калібрувальної симетрії.

Опишемо далі основну ідею побудови багаточастинкових полів.

Конституентні кварки будемо описувати біспіновими полями $\Psi_s(x), \bar{\Psi}_s(x), s = 1, 2, 3, 4$. Областю визначення їх польових функцій є простір Мінковського (позначатимемо його як $M_x, x \in M_x$), а областю значень - лінійний простір, на якому реалізується біспінове представлення групи Лоренца або його діраківськи спряжене представлення (ці простори позначатимемо відповідно як B і \bar{B} , $\hat{\Psi} \in B, \hat{\bar{\Psi}} \in \bar{B}$). Тут введені позначення:

$$\hat{\Psi} = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \\ \Psi_4 \end{pmatrix}, \hat{\bar{\Psi}} = \hat{\Psi}^\dagger \hat{\gamma}^0, \quad (3.1)$$

де $\hat{\gamma}^0$ – матриця Дірака.

Розглянемо тензорний добуток двох $M \otimes M$, або трьох просторів Мінковського $M \otimes M \otimes M$ (відповідно для мезонів та баріонів) і тензорний добуток $\bar{B} \otimes B$ або $B \otimes B \otimes B$. На тензорних добутках $\bar{B} \otimes B$ і $B \otimes B \otimes B$ реалізуються представлення групи Лоренца і, розкладаючи, як зазвичай, ці тензори добутки в прямі суми інваріантних підпросторів відносно цих представлень, можемо привести це представлення до псевдоскалярного у випадку $\bar{B} \otimes B$ і біспінового у випадку $\bar{B} \otimes B$ або $B \otimes B \otimes B$:

$$\begin{aligned} \bar{B} \otimes B &= I \oplus \dots, B \otimes B \otimes B = B \oplus \dots, \\ \bar{B} \otimes \bar{B} \otimes \bar{B} &= \bar{B} \oplus \dots. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Тут через I - позначено інваріантний підпростір, на якому реалізується псевдоскалярне представлення, а через \dots – інші несуттєві для нас інваріантні підпростори.

Далі можемо розглянути відображення $M \otimes M$ в I , які позначатимемо $\phi(x_1, x_2)$ і $\phi^*(x_1, x_2), (x_1, x_2 \in M)$, а також відображення

$\Psi_s(x_1, x_2, x_3), (s = 1, 2, 3, 4, x_1, x_2, x_3 \in M)$ множини $M \otimes M \otimes M$ в B і $\bar{\Psi}_s(x_1, x_2, x_3)$, що відображає $M \otimes M \otimes M$ в \bar{B} .

Після перейдемо до нерелятивістського наближення для внутрішньої динаміки конститuentних кварків. В цьому наближенні польові функції $\phi(x_1, x_2), \Psi_s(x_1, x_2, x_3), \bar{\Psi}_s(x_1, x_2, x_3)$ мають перейти в амплітуди ймовірності, які повинні розраховуватись при однакових значеннях часових координат всіх частинок відносно тієї системи відліку, відносно якої проводиметься вимір. Це питання ми докладно обговорювали в [150], тому ми далі будемо розглядати поля не на всьому тензорному добутку $M \otimes M$, або $M \otimes M \otimes M$, а на його підмножині, що виділяється умовами $x_1^0 = x_2^0$, або $x_1^0 = x_2^0 = x_3^0$. Перехід до цієї множини зручно зробити, вводячи на тензорних добутках до чотиривимірних координат Якобі:

$$\begin{aligned} X^a &= \frac{x_1^a + x_2^a}{2}, y_1^a = x_2^a - x_1^a, \\ X^a &= \frac{x_1^a + x_2^a + x_3^a}{3}, y_1^a = x_3^a - \frac{x_1^a + x_2^a}{2}, \\ y_2^a &= x_2^a - x_1^a, a = 0, 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Тут перша строчка відноситься до випадку двокваркових систем, а друга і третя - до трикваркових. В змінних (3.3) підмножина, на якій ми будемо далі розглядати поля, виділяється умовами:

$$y_1^0 = 0 \quad \text{або} \quad y_1^0 = y_2^0 = 0. \quad (3.4)$$

Змінні

$$\bar{y}_i = (y_i^1, y_i^2, y_i^3), i = 1, 2, \quad (3.5)$$

будемо далі називати внутрішніми змінними, а поля $\phi^*(X, \bar{y}_1), \phi(X, \bar{y}_1), \bar{\Psi}_s(X, \bar{y}_1, \bar{y}_2), \Psi_s(X, \bar{y}_1, \bar{y}_2)$, де введено позначення

$$X \equiv \begin{pmatrix} X^0 \\ X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

- багаточастинковими полями.

Звичайно, умови (3.4) неможливо накласти Лоренц-інваріантним чином. Тобто спостерігачі, що користуються різними інерційними системами відліку, накладаючи умови (3.4), будуть виділяти різні підмножини на відповідних тензорних добутках просторів Мінковського. Але у випадку загального перетворення Лоренца (тобто такого, яке містить буст і не зводиться до чистого оберту) внутрішні змінні в різних інерційних системах відліку не можуть бути зв'язані між собою ані перетвореннями Лоренца, ані якимось іншим чином [150]. У випадку оберту вони поведуться як звичайний тривимірний вектор. Далі, говорячи о перетворенні Лоренца, матимемо на увазі саме таке перетворення, яке не зводиться до оберту. Натомість величина (3.6) перетворюється при перетвореннях Лоренца як контраваріантний чотиривектор. При цьому, як показано в [150], залежність багаточастинкових полів від внутрішніх змінних є однаковою в різних інерційних системах відліку. Тому розглядаючи, наприклад, величину (по чотирьом значенням індексу s , що повторюється, мається на увазі сума)

$$A = \int \bar{\Psi}_s(X, \bar{y}_1, \bar{y}_2) \Psi_s(X, \bar{y}_1, \bar{y}_2) d\bar{y}_1 \bar{y}_2, \quad (3.7)$$

в іншій інерційній системі відліку, матимемо

$$A = \int d\bar{y}'_1 \bar{y}'_2 \bar{\Psi}_{s_1}(X = \Lambda^{-1} X', \bar{y}'_1, \bar{y}'_2) D_{s_1 s}^{-1}(\Lambda) D_{s s_2}(\Lambda) \Psi_{s_2}(X = \Lambda^{-1} X', \bar{y}'_1, \bar{y}'_2). \quad (3.8)$$

Тут Λ - перетворення Лоренца, а $D_{s s_2}(\Lambda)$ і $D_{s_1 s}^{-1}(\Lambda)$ - елементи відповідної перетворенню Λ матриці біспінорного представлення групи Лоренца та оберненої матриці. При цьому величини \bar{y}'_1, \bar{y}'_2 ніяким чином не пов'язуються з

\vec{y}_1, \vec{y}_2 . Враховуючи, що підінтегральні вирази в інтегралах (3.7) і (3.8) є однаковими функціями від внутрішніх змінних, тобто підінтегральний вираз в (3.7) є такою самою функцією від \vec{y}_1, \vec{y}_2 , якою функцією від \vec{y}'_1, \vec{y}'_2 є підінтегральний вираз в (3.8), бачимо, що інтеграли розрізняються лише позначенням змінних інтегрування. Тому величина A приймає однакові значення в різних інерційних системах відліку подібно до того, як величина $\bar{\Psi}_s(X)\Psi_s(X)$ для «звичайного» одночастинкового поля була б Лоренц-інваріантом.

Інтегрування по \vec{y}_1, \vec{y}_2 становиться аналогічним підсумуванню по кольоровим та ароматовим індексам, що виправдовує використання до цих величин терміну «внутрішні змінні», тобто такі, які ніяким чином не пов'язані із перетвореннями Лоренца.

Ці міркування показують, що той факт, що підмножину (3.4) неможливо виділити Лоренц-інваріантним чином, не заважає в кінцевому рахунку узгодити результати із принципом відносності.

Для введених описаним чином багаточастинкових полів далі в роботі пропонуються динамічні рівняння, будуються відповідні лагранжіани та інтеграли руху. Далі проводиться процедура квантування. Суттєву роль в інтерпретації польових операторів як таких що змінюють числа заповнення одночастинкових станів грає їх перетворення при просторово-часовому зсуві [14]. Як видно з означення (3.3), внутрішні координати Якобі залишаються незмінними, в той час як координати X^a перетворюються подібно до звичайних одночастинкових координат. Як буде показано далі, це призводить до того що багаточастинкові польові оператори, що з'являються внаслідок квантування багаточастинкових полів, будуть змінювати енергію-імпульс системи на енергію-імпульс двочастинкової, або тричастинкової системи. Тобто їх можна інтерпретувати як оператори народження та знищення адронів. Тому

розглядаючи теорію з такими операторами отримуватимемо закон збереження вже для чотириімпульсів адронів, як і повинно бути.

Зазначимо з наведеного опису видно, що термін «багаточастинкові поля» використовується тут в дещо іншому сенсі, ніж, наприклад, в [153].

Дотепер для скорочення запису ми не виписували у одночастинкових кваркових полів внутрішні індекси - кольорові c та ароматові f . Внаслідок цього багаточастинкові поля є тензорами відносно глобальних внутрішніх перетворень. Обираючи ці тензори так, щоб при глобальному внутрішньому перетворенні вони переходили самі в себе, опишемо відсутність кольору у адронів. Однак наявність у поля внутрішніх індексів, що є наслідком існування внутрішніх кваркових ступенів свободи, дозволяє ввести взаємодію з калібрувальним полем шляхом звичайного подовження похідних. Вимога одночасності (3.4) призводить до того, що це поле також повинне розглядатися як багаточастинкове, а його оператори, як буде показано нижче, відповідають народженню і знищенню зв'язаних станів глюонів.

Маючи багаточастинкові адронні поля, які можуть взаємодіяти посередництвом багаточастинкового калібрувального поля, яке своєю чергою за рахунок взаємодії з адронними полями може породжувати вторинні частинки, отримуємо спосіб опису процесів пружного і непружного розсіяння адронів з «правильним» законом збереження енергії-імпульсу.

3.1. Двочастинкове скалярне поле

Як найпростіший модельний приклад багаточастинкового поля розглянемо двочастинкове скалярне поле.

Розглянемо систему двох невзаємодіючих скалярних частинок. Зазвичай стан такої системи описують елементом простору Фока:

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Psi_2(t, \vec{r}_1, \vec{r}_2) \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

а динаміку цього стану оператором часової еволюції, побудованим по одночастинковому рівнянню Клейна-Гордона-Фока. Однак внаслідок того, що ми розглядаємо систему невзаємодіючих частинок, двочастинковий стан в процесі динамічної еволюції буде залишатись двочастинковим. Більш того, ми далі збираємось розглядати ситуацію, коли між частинками є взаємодія, однак характерні величини енергії цієї взаємодії та енергії відносного руху цих частинок такі, що їх не вистачає на народження інших частинок і система з такою взаємодією буде залишатися двочастинковою навіть, якщо її розглядати відносно системи відліку, в якій вся система в цілому має релятивістську енергію. Тому ми можемо поставити питання про двочастинковий динамічний оператор в цих випадках.

З іншого боку, фізичний зміст величини $\Psi_2(t, \vec{r}_1, \vec{r}_2)$ полягає в тому, що її квадрат модуля дорівнює сумісній густині ймовірностей для координат двох частинок, якщо вимірювання координат проводити одночасно відносно тієї системи відліку, відносно якої розглядається стан (3.9). Динамічний оператор, побудований за допомогою оператора енергії одночастинкового поля Клейна-Гордона-Фока, ніяким чином не враховує цю одночасність, що також призводить до питання про побудову двочастинкового оператора.

Враховуючи, що ми розглядаємо невзаємодіючі частинки, для кожної з них ми можемо написати «своє» рівняння Клейна-Гордона-Фока і розглянути систему рівнянь:

$$\begin{cases} -g^{ab} \frac{\partial^2 \phi(x_1)}{\partial x_1^a \partial x_1^b} - m^2 \phi(x_2) = 0, \\ -g^{ab} \frac{\partial^2 \phi(x_2)}{\partial x_2^a \partial x_2^b} - m^2 \phi(x_2) = 0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Значення функцій $\phi(x_1)$ і $\phi(x_2)$ в довільних точках x_1 і x_2 є незалежними величинами, тому система рівнянь (3.10) рівносильна рівнянню:

$$\left(-g^{ab} \frac{\partial^2 \phi(x_1)}{\partial x_1^a \partial x_1^b} - m^2 \phi(x_1) \right) \phi(x_2) + \phi(x_1) \left(-g^{ab} \frac{\partial^2 \phi(x_2)}{\partial x_2^a \partial x_2^b} - m^2 \phi(x_2) \right) = 0. \quad (3.11)$$

Введемо тепер двочастинкове скалярне поле $\phi(x_1, x_2)$:

$$\phi(x_1, x_2) = \phi(x_1) \phi(x_2). \quad (3.12)$$

Тоді рівняння (3.11) можна записати у вигляді:

$$-g^{ab} \frac{\partial^2 \phi(x_1, x_2)}{\partial x_1^a \partial x_1^b} - g^{ab} \frac{\partial^2 \phi(x_1, x_2)}{\partial x_2^a \partial x_2^b} - 2m^2 \phi(x_1, x_2) = 0. \quad (3.13)$$

Зауважимо, що внесення функції від x_1 під знак похідної по x_2 і навпаки можливо всюди на області визначення функції (3.12) за виключенням підмножини $x_1 = x_2$. Однак ця підмножина має нульову міру в тензорному добутку двох просторів Мінковського. Враховуючи, що з рівнянь, які розглядатимуться, не витікає існування якихось особливостей двочастинкової функції (3.12) на цій підмножині, вона повинна давати нульовий внесок в інтегралі по області визначення цієї двочастинкової функції, які визначатимуть фізичні величини, що дозволяє нам не зважати на цю підмножину. Тому тут і далі ми будемо робити аналогічні перетворення.

Покажемо, що якщо рівняння (3.13) розглядати як динамічне рівняння для двочастинкового скалярного поля $\phi(x_1, x_2)$, то отримаємо змістовний з фізичної точки зору результат.

Це рівняння може бути отримане як рівняння Лагранжа-Ейлера для лагранжіану:

$$L(x_1, x_2) = \frac{1}{2} \left(g^{ab} \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1^a} \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1^b} + \right. \\ \left. + g^{ab} \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_2^a} \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_2^b} \right) - m^2 \varphi^2(x_1, x_2). \quad (3.14)$$

Переходячи в цьому лагранжіані до двочастинкових чотиривимірних координат Якобі (3.3), отримаємо його у вигляді:

$$L(X, y_1) = \frac{1}{2} g^{ab} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi(X, y_1)}{\partial X^a} \frac{\partial \varphi(X, y_1)}{\partial X^b} + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial \varphi(X, y_1)}{\partial y_1^a} \frac{\partial \varphi(X, y_1)}{\partial y_1^b} \right) - m^2 \varphi^2(X, y_1). \quad (3.15)$$

Розглянемо тепер лагранжіан (3.15) для функцій, визначених на підмножині (3.4). Внаслідок того, що уздовж цієї підмножини функції не залежать від y_1^0 , відповідні похідні дорівнюють нулю і лагранжіан набуває вигляду:

$$L(X, \vec{y}_1) = \frac{1}{4} g^{ab} \frac{\partial \varphi(X, \vec{y}_1)}{\partial X^a} \frac{\partial \varphi(X, \vec{y}_1)}{\partial X^b} - \\ - \sum_{d=1}^3 \left(\frac{\partial \varphi(X, \vec{y}_1)}{\partial y_1^d} \frac{\partial \varphi(X, \vec{y}_1)}{\partial y_1^d} \right) - m^2 \varphi^2(X, \vec{y}_1). \quad (3.16)$$

Зауважимо, що з цього моменту поле $\phi(X, \vec{y})$, взагалі кажучи, перестає бути добутком розв'язків рівнянь (3.13), бо ці рівняння навіть, якщо їх розглядати при однакових значеннях часу $x_1^0 = x_2^0$, містять похідні кожне по «своєму» часу $\partial / \partial x_1^0$ і $\partial / \partial x_2^0$, тоді як при розгляді рівняння для поля $\phi(X, \vec{y})$ ми допустили лише похідну уздовж поверхні одночасності. Фізично це означає, що ми понизили симетрію відносно часового зсуву. Якщо до пе-

реходу на поверхню одночасності можна було зсувати кожну з змінних x_1^0 і x_2^0 незалежно одна від одної, то тепер можна зсувати лише їх спільне значення. Наслідком цього стає те, що замість енергій окремих частинок ми отримуємо енергію всієї двочастинкової системи в цілому. Формально ж можна сказати, що тепер замість двох одночастинкових полів ми отримали окреме від них нове двочастинкове поле.

Відповідну лагранжіану (3.16) дію визначимо як інтеграл від цього лагранжіану по виділеній підмножині:

$$S = \int d^4 X d\vec{y}_1 L(X, \vec{y}_1). \quad (3.17)$$

Як показано в попередньому розділі, якщо компоненти \vec{y}_1 розглядати як внутрішні змінні, то ця дія прийматиме одне й те саме значення в усіх інерційних системах відліку.

Рівняння Лагранжа-Ейлера, яке породжується лагранжіаном (3.16) має вигляд:

$$-g^{cd} \frac{\partial^2 \phi(X, \vec{y}_1)}{\partial X^c \partial X^d} - \left((2m)^2 \phi(X, \vec{y}_1) - 2(2m) \left(\frac{1}{m} \Delta_{\vec{y}_1} \phi(X, \vec{y}_1) \right) \right) = 0. \quad (3.18)$$

Тут через $\Delta_{\vec{y}_1}$ позначено оператор Лапласа по компонентам величини \vec{y}_1 .

Якщо б ми розглядали нерелятивістську задачу про дві невзаємодіючі частинки, то в змінних Якобі ми отримали б вираз для внутрішнього гамільтоніану $\hat{H}^{\text{internal}}$ системи у вигляді:

$$\hat{H}^{\text{internal}} = (2m) \hat{E} - \frac{1}{m} \Delta_{\vec{y}_1}, \quad (3.19)$$

де \hat{E} – одиничний оператор. При цьому в нерелятивістському наближенні власні значення оператора $\left(-(1/m) \Delta_{\vec{y}_1} \right)$ повинні бути малими у порівнянні

із $2m$. Тому з точністю до малих порядків $\left(\left(-1/m\right)\Delta_{\vec{y}_1}\right)/(2m)^2$ замість (3.18) можемо записати:

$$-g^{cd} \frac{\partial^2 \phi(X, y_1)}{\partial X^c \partial X^d} - \left(\hat{H}^{\text{internal}}\right)^2 \phi(X, y_1) = 0. \quad (3.20)$$

Рівняння (3.20) отримано для невзаємодіючих полів і внутрішній гамільтоніан має вид оператора кінетичної енергії відносного руху вільних частинок. Далі буде показано, що якщо замість вільного лагранжіану типу (3.14) використати лагранжіани з подовженими похідними, то внутрішній гамільтоніан міститиме відповідний оператор потенційної енергії, яка буде забезпечувати існування зв'язаного стану. Для стабільної зв'язаної частинки залежність поля $\phi(X, \vec{y}_1)$ від внутрішніх змінних можна визначити вимогою, щоб ця функція була власною для внутрішнього гамільтоніану, що відповідає найменшому власному значенню. Тоді на місті квадрату маси в звичайному рівнянні Клейна-Гордона-Фока у двочастинковому рівнянні з'явиться квадрат цього найменшого власного значення, як і повинно бути. В цьому розділі ми поки що продовжимо розгляд двочастинкового скалярного поля, складеного з двох невзаємодіючих полів.

Для двочастинкового поля $\phi(X, \vec{y}_1)$ неважко реалізувати звичайну програму опису квантових полів [14]. Зокрема, загальний розв'язок рівняння (3.18) може бути записаний у вигляді суми $\phi(X, \vec{y}_1) = \phi^-(X, \vec{y}_1) + \phi^+(X, \vec{y}_1)$ негативно-частотного

$$\phi^-(X, \vec{y}_1) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\vec{p} d\vec{q}_1}{\sqrt{2p_0(\vec{p}, \vec{q}_1)}} \phi^-(\vec{p}, \vec{q}_1) \exp(-ipX - i(\vec{q}_1 \cdot \vec{y}_1)), \quad (3.21)$$

і позитивно-частотного

$$\phi^+(X, \vec{y}_1) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d\vec{p} d\vec{q}_1}{\sqrt{2p_0(\vec{p}, \vec{q}_1)}} \phi^+(\vec{p}, \vec{q}_1) \exp(ipX + i(\vec{q}_1 \cdot \vec{y}_1)), \quad (3.22)$$

розв'язків.

Тут через p , позначений чотиривектор:

$$p_a = \begin{pmatrix} p_0(\vec{p}, \vec{q}) \\ -p_x \\ -p_y \\ -p_z \end{pmatrix}, \quad (3.23)$$

нульова компонента якого виражається з «умови масової поверхні» :

$$p_0(\vec{p}, \vec{q}_1) = \sqrt{(2m)^2 + \vec{p}^2 + \vec{q}_1^2}. \quad (3.24)$$

Для багаточастинкових полів можна довести теорему Нетер і знайти інтеграли руху. При цьому при перетворенні просторово - часового зсуву

$$x_1'^a = x_1^a + \Delta x_1^a, x_2'^a = x_2^a + \Delta x_2^a, \phi' = \phi, \quad (3.25)$$

як видно із співвідношень (3.3), нетривіально перетворюються лише величини X^a , в той час як внутрішні координати залишаються незмінними. Чотиривектор енергії-імпульсу багаточастинкового поля за допомогою теореми Нетер може бути виражений через негативно-частотні та позитивно- частотні коефіцієнти $\varphi^-(\vec{p}, \vec{q}_1)$ і $\varphi^+(\vec{p}, \vec{q}_1)$, що входять в формули (3.21) і (3.22) звичайним для скалярного поля чином з тією різницею, що додається інтегрування по внутрішньому імпульсу \vec{q}_1 :

$$P^a = \int d\vec{p} d\vec{q}_1 p^a \varphi^+(\vec{p}, \vec{q}_1) \varphi^-(\vec{p}, \vec{q}_1). \quad (3.26)$$

При цьому коли індекс a приймає значення 0, величина p^0 , що входить в (3.26), виражається формулою (3.24).

При переході до квантової теорії внаслідок того, що при перетворенні просторово-часового зсуву змінюються лише компоненти чотиривектору

X^a , звичайним чином [14] отримаємо, що польові оператори $\hat{\phi}(X, \vec{y}_1)$ задовольняють рівнянню:

$$\frac{\partial \hat{\phi}(X, \vec{y}_1)}{\partial X^a} = i [\hat{P}_a, \hat{\phi}(X, \vec{y}_1)]. \quad (3.27)$$

Наслідком цього рівняння з урахуванням (3.21) та (3.22) є співвідношення

$$\begin{aligned} [\hat{P}_a, \hat{\phi}^-(\vec{p}, \vec{q})] &= -p_a \hat{\phi}^-(\vec{p}, \vec{q}), \\ [\hat{P}_a, \hat{\phi}^+(\vec{p}, \vec{q})] &= p_a \hat{\phi}^+(\vec{p}, \vec{q}), \end{aligned} \quad (3.28)$$

які дозволяють інтерпретувати оператори $\hat{\phi}^-(\vec{p}, \vec{q})$ і $\hat{\phi}^+(\vec{p}, \vec{q})$ як оператори знищення і народження.

При цьому, виходячи з (3.24), дія цих операторів на стан описує процеси знищення та народження частинок масою $\sqrt{(2m)^2 + \vec{q}_1^2}$ (або величині найменшого власного значення оператора $\hat{H}^{\text{internal}}$ після того, як врахуємо взаємодію між полями). Цю частинку можна розглядати як складену з двох частинок масою m відповідно, тому як двочастинкове скалярне поле будувалося як добуток двох одночастинкових полів.

Звичайно, розглянутий в цьому розділі приклад є суто модельним. Розглянемо далі більш цікаві для описання експерименту випадки.

3.2. Псевдоскалярні мезонні поля, побудовані з двох біспінорних полів

Метою цього підрозділу є побудова псевдоскалярного поля з двох біспінорних полів відповідно тому, що мезони є зв'язаними станами кварків та антикварків. Оператори народження та знищення цього поля будуть відповідати народженню та знищенню мезонів, але за рахунок внутрішніх координат такий мезон зможе взаємодіяти з глюонним полем, що дозволить описати утворення цього мезону в процесі адрон-адронного розсіяння.

Тензорний добуток біспінорного поля $\Psi_{s_2}(x_2)$, яке відповідає кваркам і $\bar{\Psi}_{s_1}(x_1)$, може бути представлений матрицею:

$$\Psi_{s_1 s_2}(x_1, x_2) = \bar{\Psi}_{s_1}(x_1) \Psi_{s_2}(x_2) \quad (3.29)$$

Ця матриця може бути розкладена по базису з 16 матриць $\hat{\Gamma}_a, a = 1, 2, \dots, 16$, [14], які є базисом алгебри, породженої матрицями Дірака:

$$\Psi_{s_1 s_2}(x_1, x_2) = \sum_{a=1}^{16} \phi_a(x_1, x_2) (\Gamma_a)_{s_1 s_2}. \quad (3.30)$$

При цьому множина матриць $\hat{\Gamma}_a, a = 1, 2, \dots, 16$, розбивається на підмножини, кожна з яких утворює базис інваріантного підпростору відносно перетворень Лоренца. Відповідно функції $\phi_a(x_1, x_2)$ розбиваються на множини функцій, що перетворюються по представленнях групи Лоренца, таких що не приводяться. Зокрема, нас цікавитиме псевдоскалярне представлення, яке реалізується на одновимірному підпросторі, «натягнутим» на матрицю $\hat{\gamma}^5$:

$$\Psi_{s_1 s_2}(x_1, x_2) = \phi(x_1, x_2) \gamma_{s_1 s_2}^5 + \dots \quad (3.31)$$

Тут «три крапкоюю» позначена решта внесків з виразу (3.30), а $\phi(x_1, x_2)$ - коефіцієнт при $\hat{\gamma}^5$ в цьому виразі, який, враховуючи властивості матриць $\hat{\Gamma}_a$, може бути записаний у вигляді:

$$\phi(x_1, x_2) = \frac{1}{4} \left(\Psi_{s_1 s_2}(x_1, x_2) \gamma_{s_1 s_2}^5 \right), \quad (3.32)$$

де по індексах s_1 і s_2 , які повторюються, мається на увазі сума.

В цьому підрозділі ми хочемо з'ясувати яким є динамічне рівняння, яке визначає двочастинкову функцію $\phi(x_1, x_2)$. При цьому від динамічного оператора, який входить в це рівняння, будемо вимагати, щоб він зберігав структуру інваріантних підпросторів відносно групи Лоренца, яка визнача-

ється розкладом (3.30). Тобто в результаті дії цього динамічного оператора елемент кожного інваріантного підпростору повинен переходити в елемент того самого підпростору. Іншими словами, підпростори, інваріантні відносно перетворень Лоренца, повинні залишатися інваріантними відносно динамічного оператора двочастинкового поля $\Psi_{s_1 s_2}(x_1, x_2)$. З цієї точки зору, для двочастинкового біспірного поля не вдається застосувати процедуру, аналогічну описаній в попередньому розділі відносно скалярного поля. Дійсно, якщо ми по аналогії з попереднім розділом будемо виходити з системи рівнянь Дірака:

$$\begin{cases} i \frac{\partial \bar{\Psi}_{s_1}(x_1)}{\partial x_1^{a_1}} \gamma_{s_1 s_2}^{a_1} + m \bar{\Psi}_{s_2}(x_1) = 0, \\ i \gamma_{s_1 s_2}^{a_2} \frac{\partial \Psi_{s_2}(x_2)}{\partial x_2^{a_2}} - m \Psi_{s_1}(x_2) = 0, \end{cases}, \quad (3.33)$$

то множачи перше рівняння на $\Psi_{s_3}(x_2)$, а друге - на $\bar{\Psi}_{s_3}(x_1)$, для двочастинкового поля (3.29) отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} i \frac{\partial \bar{\Psi}_{s_3 s_1}(x_1, x_2)}{\partial x_1^{a_1}} \gamma_{s_1 s_2}^{a_1} + m \bar{\Psi}_{s_2 s_3}(x_1, x_2) = 0, \\ i \gamma_{s_1 s_2}^{a_1} \frac{\partial \Psi_{s_2 s_3}(x_1, x_2)}{\partial x_1^{a_1}} - m \Psi_{s_3 s_1}(x_1, x_2) = 0. \end{cases} \quad (3.34)$$

Однак, підставляючи в (3.34) розклад (3.30), бачимо, що внаслідок наявності матриць Дірака в операторах в лівих частинах рівнянь (3.34), ці оператори, діючи на елемент з одного з інваріантних підпросторів відносно групи Лоренца, можуть переводити його до іншого інваріантного підпростору.

Для того, щоб уникнути цієї проблеми скористаємось тим, що компоненти біспінору окрім рівняння Дірак задовольняють ще й рівнянню Клейна-Гордона-Фока:

$$\begin{cases} -g^{a_1 a_2} \frac{\partial \bar{\Psi}_{s_1}(x_1)}{\partial x_1^{a_1} \partial x_1^{a_2}} - m^2 \bar{\Psi}_{s_1}(x_1) = 0, \\ -g^{a_1 a_2} \frac{\partial \Psi_{s_2}(x_2)}{\partial x_2^{a_1} \partial x_2^{a_2}} - m^2 \Psi_{s_2}(x_2) = 0. \end{cases} \quad (3.35)$$

Знов, як і в попередньому розділі, розглядаючи лінійну комбінацію рівнянь (3.35) з коефіцієнтами $\Psi_{s_2}(x_2)$, і $\bar{\Psi}_{s_1}(x_1)$ отримаємо:

$$-g^{a_1 a_2} \frac{\partial \Psi_{s_1 s_2}(x_1, x_2)}{\partial x_1^{a_1} \partial x_1^{a_2}} - g^{a_1 a_2} \frac{\partial \Psi_{s_1 s_2}(x_1, x_2)}{\partial x_2^{a_1} \partial x_2^{a_2}} - 2m^2 \Psi_{s_1 s_2}(x_1, x_2) = 0. \quad (3.36)$$

Динамічний оператор, що знаходиться в лівій частині рівності, тепер зберігає інваріанті підпростори (3.30). Зокрема, згортаючи рівняння (3.36) по обох індексах з матрицею $\hat{\gamma}^5$, отримаємо рівняння для двочастинкового псевдоскалярного поля $\phi(x_1, x_2)$ ((3.31),(3.32)):

$$-g^{a_1 a_2} \frac{\partial \phi(x_1, x_2)}{\partial x_1^{a_1} \partial x_1^{a_2}} - g^{a_1 a_2} \frac{\partial \phi(x_1, x_2)}{\partial x_2^{a_1} \partial x_2^{a_2}} - 2m^2 \phi(x_1, x_2) = 0. \quad (3.37)$$

Зауважимо, що виходячи з визначень ((3.29)-(3.32)), величина $\phi(x_1, x_2)$ є комплексною. Тому, як зазвичай, замість того, щоб розглядати рівняння (3.37) окремо для дійсної і уявної частин цієї функції, доповнимо це рівняння комплексно спряженим і будемо розглядати систему:

$$\begin{cases} -g^{a_1 a_2} \frac{\partial \phi(x_1, x_2)}{\partial x_1^{a_1} \partial x_1^{a_2}} - g^{a_1 a_2} \frac{\partial \phi(x_1, x_2)}{\partial x_2^{a_1} \partial x_2^{a_2}} - 2m^2 \phi(x_1, x_2) = 0, \\ -g^{a_1 a_2} \frac{\partial \phi^*(x_1, x_2)}{\partial x_1^{a_1} \partial x_1^{a_2}} - g^{a_1 a_2} \frac{\partial \phi^*(x_1, x_2)}{\partial x_2^{a_1} \partial x_2^{a_2}} - 2m^2 \phi^*(x_1, x_2) = 0. \end{cases} \quad (3.38)$$

Система рівнянь (3.38) є рівняннями Лагранжа-Ейлера для лагранжіану:

$$\begin{aligned}
L(x_1, x_2) = & g^{a_1 a_2} \frac{\partial \phi^*(x_1, x_2)}{\partial x_1^{a_1}} \frac{\partial \phi(x_1, x_2)}{\partial x_1^{a_2}} + \\
& + g^{a_1 a_2} \frac{\partial \phi^*(x_1, x_2)}{\partial x_2^{a_1}} \frac{\partial \phi(x_1, x_2)}{\partial x_2^{a_2}} - 2m^2 \phi^*(x_1, x_2) \phi(x_1, x_2).
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Розглянемо у якості біспінорних полів такі що відповідають кваркам та антикваркам. Окрім розглянутих раніше біспінорних індексів, в таких полів є ще кольорові (позначатимемо їх c_1 і c_2 , а також ароматові f_1 і f_2). Тому двочастикове поле перетворюватиметься не тільки за тензорним добутком представлень групи Лоренца, а також за тензорним добутком представлень груп $SU_c(3)$ і $SU_f(3)$. Це двочастинкове поле позначатимемо далі:

$$\Psi_{s_1, s_2; c_1, c_2; f_1, f_2}(x_1, x_2) = \bar{\Psi}_{s_1, c_1, f_1}(x_1) \Psi_{s_2, c_2, f_2}(x_2). \tag{3.40}$$

Замість (3.32) отримаємо (ароматові індекси розташовано зверху виключно для скорочення запису):

$$\phi_{c_1, c_2}^{f_1, f_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{4} \bar{\Psi}_{s_1, c_1, f_1}(x_1) \Psi_{s_2, c_2, f_2}(x_2) \gamma_{s_1 s_2}^5. \tag{3.41}$$

Відповідно, замість лагранжіану (3.39) матимемо лагранжіан

$$\begin{aligned}
L = & g^{a_1 a_2} \frac{\partial \left(\phi_{c_1 c_2}^{f_1 f_2}(x_1, x_2) \right)^*}{\partial x_1^{a_1}} \frac{\partial \phi_{c_1 c_2}^{f_1 f_2}(x_1, x_2)}{\partial x_1^{a_2}} + \\
& + g^{a_1 a_2} \frac{\partial \left(\phi_{c_1 c_2}^{f_1 f_2}(x_1, x_2) \right)^*}{\partial x_2^{a_1}} \frac{\partial \phi_{c_1 c_2}^{f_1 f_2}(x_1, x_2)}{\partial x_2^{a_2}} - \\
& - 2m^2 \left(\phi_{c_1 c_2}^{f_1 f_2}(x_1, x_2) \right)^* \phi_{c_1 c_2}^{f_1 f_2}(x_1, x_2).
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Тепер ми можемо задати взаємодію двочастинкового псевдоскалярного поля $\phi_{c_1 c_2}^{f_1 f_2}(x_1, x_2)$ з глюонним полем шляхом подовження похідних, задово-

льняючи при цьому принципу локальної $SU_c(3)$ інваріантності для двочастинкового псевдоскалярного лагранжіану:

$$\begin{aligned}
L = & g^{a_1 a_2} \left(\frac{\partial \left(\phi_{c_1 c_2}^{f_1 f_2} (x_1, x_2) \right)^*}{\partial x_1^{a_1}} + ig A_{a_1}^{g_1} (x_1) \left(\phi_{c_3 c_2}^{f_1 f_2} (x_1, x_2) \right)^* \left(\lambda_{c_3 c_1}^{g_1} \right)^* \right) \times \\
& \times \left(\frac{\partial \phi_{c_1 c_2}^{f_1 f_2} (x_1, x_2)}{\partial x_1^{a_2}} - ig A_{a_2}^{g_2} (x_1) \lambda_{c_2 c_4}^{g_2} \phi_{c_1 c_4}^{f_1 f_2} (x_1, x_2) \right) + \\
& + g^{a_1 a_2} \left(\frac{\partial \left(\phi_{c_1 c_2}^{f_1 f_2} (x_1, x_2) \right)^*}{\partial x_2^{a_1}} + ig A_{a_1}^{g_1} (x_2) \left(\phi_{c_3 c_2}^{f_1 f_2} (x_1, x_2) \right)^* \left(\lambda_{c_3 c_1}^{g_1} \right)^* \right) \times \\
& \times \left(\frac{\partial \phi_{c_1 c_2}^{f_1 f_2} (x_1, x_2)}{\partial x_2^{a_2}} - ig A_{a_2}^{g_2} (x_2) \lambda_{c_3 c_1}^{g_2} \phi_{c_1 c_4}^{f_1 f_2} (x_1, x_2) \right) - \\
& - 2m^2 \left(\phi_{c_1 c_2}^{f_1 f_2} (x_1, x_2) \right)^* \phi_{c_1 c_2}^{f_1 f_2} (x_1, x_2).
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Тут g – константа сильної взаємодії, а g_1, g_2 – внутрішні індекси глюонного поля.

Закон перетворення двочастинкового поля $\phi_{c_1 c_2}^{f_1 f_2} (x_1, x_2)$ при $SU_c(3)$ –перетвореннях витікає з (3.40) і має вигляд:

$$\phi'_{c_1 c_2}{}^{f_1 f_2} (x_1, x_2) = U_{c_2 c_4} (x_1) \phi_{c_3 c_4}^{f_1 f_2} (x_1, x_2) U_{c_3 c_1}^\dagger (x_2). \tag{3.44}$$

Тут $U_{c_2 c_4} (x_1)$ і $U_{c_3 c_1}^\dagger (x_2)$ позначені елементи залежної від координат матриці групи $SU_c(3)$ та її ермітово-спряженої матриці, відповідно.

Розглядаючи в окремому випадку представлення групи глобальних перетворень $SU_c(3)$ на лінійному просторі двоіндексних кольорових тензорів із законом перетворення (3.44), виділимо одновимірний інваріантний підпростір, «натягнутий» на одиничний тензор, на якому реалізується «безколірне», тривіальне представлення, покладаючи:

$$\begin{aligned} \left(\phi_{c_1 c_2}^{f_1 f_2} (x_1, x_2) \right)^* &= \delta_{c_1 c_2} \phi_{f_1 f_2}^* (x_1, x_2), \\ \phi_{c_1 c_2}^{f_1 f_2} (x_1, x_2) &= \delta_{c_1 c_2} \phi_{f_1 f_2} (x_1, x_2). \end{aligned} \quad (3.45)$$

В той же час, як видно з (3.44), в загальному випадку локального перетворення «безколірність» мезону можна виразити нескінченною сукупністю конфігурацій

$$\phi_{c_1 c_2}^{f_1 f_2} (x_1, x_2) = \left(U_{c_2 c_3} (x_1) U_{c_3 c_1}^\dagger (x_2) \right) \phi_{f_1 f_2} (x_1, x_2), \quad (3.46)$$

калібрувально еквівалентних тієї, що визначається (3.45).

Проте, як видно з (3.46), локальне перетворення при $x_1 \neq x_2$ не зберігає структуру інваріантних підпросторів відносно глобального перетворення. Це призведе до того, що якщо ми підставимо (3.45) в лагранжیان (3.43), то ми порушимо його локальну інваріантність. Для того щоб уникнути цієї проблеми приймемо для багаточастинкових полів таке правило. Спочатку будемо піддавати локальному перетворенню весь тензор $\phi_{c_1 c_2}^{f_1 f_2} (x_1, x_2)$, а потім будемо розбивати його на тензори, інваріантні відносно глобального перетворення.

Підставляючи (3.45) в лагранжیان (3.43) з точністю до несуттєвого множника рівного трьом, отримаємо:

$$\begin{aligned} L = g^{a_1 a_2} & \left(\frac{\partial \phi_{f_1 f_2}^* (x_1, x_2)}{\partial x_1^{a_1}} \frac{\partial \phi_{f_1 f_2} (x_1, x_2)}{\partial x_1^{a_2}} + \frac{\partial \phi_{f_1 f_2}^* (x_1, x_2)}{\partial x_2^{a_1}} \frac{\partial \phi_{f_1 f_2} (x_1, x_2)}{\partial x_2^{a_2}} \right) - \\ & - 2m^2 \phi_{f_1 f_2}^* (x_1, x_2) \phi_{f_1 f_2} (x_1, x_2) + \frac{2}{3} g^2 \phi_{f_1 f_2}^* (x_1, x_2) \phi_{f_1 f_2} (x_1, x_2) \times \\ & \times g^{a_1 a_2} \left(A_{a_1}^{g_1} (x_1) A_{a_2}^{g_1} (x_1) + A_{a_1}^{g_1} (x_2) A_{a_2}^{g_1} (x_2) \right). \end{aligned} \quad (3.47)$$

Цей лагранжیان є локально інваріантним в тому сенсі, як це обговорювалося вище. Тобто, якщо ми хочемо зробити локальне перетворення, ми повинні повернутися до попереднього лагранжіану (3.43), в ньому зробити пе-

ретворення, а потім виділити інваріантний підпростір (3.45), «натягнутий» на одиничний тензор по кольоровим індексам. Переходячи до чотиривимірних координат Якобі (3.3) і звуження на підмножину (3.4), отримуємо (знов із точністю до несуттєвого постійного множника):

$$\begin{aligned}
 L &= (L_0 + L_{int}) \Big|_{y_1^0=0}, \tag{3.48} \\
 L_0 &= g^{a_1 a_2} \frac{\partial \phi_{f_1 f_2}^* (X, y_1)}{\partial X^{a_1}} \frac{\partial \phi_{f_1 f_2} (x_1, x_2)}{\partial X^{a_2}} - \\
 &- \left((2m)^2 \phi_{f_1 f_2}^* (X, y_1) \phi_{f_1 f_2} (X, y_1) + \right. \\
 &+ \left. 2(2m) \frac{1}{m} \sum_{b=1}^3 \frac{\partial \phi_{f_1 f_2}^* (X, y_1)}{\partial y_1^b} \frac{\partial \phi_{f_1 f_2} (X, y_1)}{\partial y_1^b} \right), \\
 L_{int} &= \frac{4}{3} g^2 \phi_{f_1 f_2}^* (X, y_1) \phi_{f_1 f_2} (X, y_1) \\
 &g^{a_1 a_2} \left(A_{a_1}^{g_1} \left(X - \frac{1}{2} y_1 \right) A_{a_2}^{g_1} \left(X - \frac{1}{2} y_1 \right) + \right. \\
 &+ \left. A_{a_1}^{g_1} \left(X + \frac{1}{2} y_1 \right) A_{a_2}^{g_1} \left(X + \frac{1}{2} y_1 \right) \right).
 \end{aligned}$$

Лагранжیان L_0 аналогічний розглянутому в попередньому розділі і може розглядатися як лагранжیان вільного мезонного поля. Цьому полю після квантування відповідають оператори народження та знищення мезонів. Відповідно лагранжیان L_{int} є лагранжіаном взаємодії мезонного поля із калібрувальним полем. Таким лагранжіаном можна скористатися, щоб спробувати описати множинне народження мезонів в процесах розсіяння. Враховуючи, що в експерименті такі процеси частіше за все спостерігаються при протон - протонному (антипротонному) розсіянні, нам потрібно побудувати тричастинкове поле, що відповідає протонам.

Окрім того, умова одночасності в (3.48) призводить до того, що й калібрувальне поле, з яким взаємодіє мезонне, а, як буде видно далі, й протонне поле також повинне розглядатися як багаточастинкове.

3.3. Тричастинкове біспінорне поле

Тричастинкове поле, що відповідатиме баріонам, отримаємо, розглядаючи всі можливі добутки компонент трьох біспінорних полів:

$$\Psi_{s_1, s_2, s_3, c_1, c_2, c_3}^{f_1, f_2, f_3}(x_1, x_2, x_3) = \Psi_{s_1, c_1, f_1}(x_1) \Psi_{s_2, c_2, f_2}(x_2) \Psi_{s_3, c_3, f_3}(x_3). \quad (3.49)$$

Для скорочення запису ми тимчасово не будемо виписувати кольорові та ароматові індекси і розглянемо величину $\Psi_{s_1 s_2 s_3}(x_1, x_2, x_3)$, яка при перетвореннях Лоренца перетворюється по тензорному добутку трьох біспінорних представлень:

$$\begin{aligned} \Psi'_{s_1 s_2 s_3}(x'_1, x'_2, x'_3) &= D_{s_1 s_4}(\Lambda) D_{s_2 s_5}(\Lambda) D_{s_3 s_6}(\Lambda) \times \\ &\times \Psi_{s_4 s_5 s_6}(x_a = \Lambda^{-1} x'_a), a = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Тут Λ - перетворення Лоренца, а $D_{s_1 s_4}(\Lambda)$ – елементи матриці біспінорного представлення групи Лоренца.

З лінійного простору триіндексних тензорів $\Psi_{s_1 s_2 s_3}(x_1, x_2, x_3)$ нам потрібно виділити інваріантний підпростір, що перетворюється за біспінорним представленням групи Лоренца. Це можна зробити різними способами. Наприклад, можна виділити з кожного тензора $\Psi_{s_1 s_2 s_3}(x_1, x_2, x_3)$ повністю антисиметричну по трьох біспінорних індексах частину. Повністю антисиметричні тензори, які позначатимемо $\Psi_{s_1 s_2 s_3}^{(a)}(x_1, x_2, x_3)$, утворюють чотиривимірний інваріантний підпростір лінійного простору триіндексних тензорів (3.50). Згортаючи кожен такий тензор з символом Леві-Чівітта $\varepsilon_{s_1 s_2 s_3 s_4}$, отримаємо величину:

$$\bar{\Psi}_{s_1}(x_1, x_2, x_3) = \varepsilon_{s_1 s_2 s_3 s_4} \Psi_{s_2 s_3 s_4}^{(a)}(x_1, x_2, x_3), \quad (3.51)$$

яка перетворюється за представленням, оберненим до біспінорного. Але за допомогою цієї величини можна побудувати величину:

$$\Psi_{s_2}(x_1, x_2, x_3) = \bar{\Psi}_{s_1}(x_1, x_2, x_3) \left(\hat{\gamma}^1 \hat{\gamma}^3 \right)_{s_1 s_2}, \quad (3.52)$$

яка перетворюється по потрібному нам біспінорному представленню [8]. Тому, якщо з лінійного простору тензорів $\Psi_{s_1 s_2 s_3}(x_1, x_2, x_3)$ виділити підпростір тензорів виду

$$\Psi_{s_1 s_2 s_3}(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{3!} \varepsilon_{s_1 s_2 s_3 s_4} \Psi_{s_5}(x_1, x_2, x_3) \left(\hat{\gamma}^1 \hat{\gamma}^3 \right)_{s_5 s_4}, \quad (3.53)$$

де $\Psi_{s_5}(x_1, x_2, x_3)$ - біспінор, що визначається формулою (3.52), то на такому підпросторі реалізується представлення групи Лоренца, еквівалентне біспінорному. Підпростір, на якому реалізується біспінорне представлення, можна було б виділяти й іншими способами, наприклад, розглядаючи вихідні біспінори, з яких будується тензорний добуток (3.50) в кіральному представленні, і розкладаючи кожний з біспінорних просторів-множників в пряму суму правого і лівого підпросторів. Для нас цей спосіб не має значення, бо нас насамперед цікавить динамічне рівняння для тричастинкового біспінору.

Для отримання цього рівняння з тих самих міркувань, що й в попередньому розділі, будемо виходити з рівнянь Клейна-Гордона-Фока для компонент кожного з біспінорів множників в (3.50). З міркувань, аналогічних тим, що призвели до формули (3.36), можемо записати (тут знов для скорочення ми не випикуємо ароматові та кольорові індекси)

$$\begin{aligned} & -g^{a_1 a_2} \frac{\partial^2 \Psi_{s_1 s_2 s_3}(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^{a_1} \partial x_1^{a_2}} - g^{a_1 a_2} \frac{\partial^2 \Psi_{s_1 s_2 s_3}(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2^{a_1} \partial x_2^{a_2}} - \\ & -g^{a_1 a_2} \frac{\partial^2 \Psi_{s_1 s_2 s_3}(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3^{a_1} \partial x_3^{a_2}} - 3m^2 \Psi_{s_1 s_2 s_3}(x_1, x_2, x_3) = 0. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Переходячи в цьому рівнянні до координат Якобі (3.3), отримаємо:

$$\begin{aligned}
& -g^{a_1 a_2} \frac{\partial^2 \Psi_{s_1 s_2 s_3}(X, y_1, y_2)}{\partial X^{a_2} \partial X^{a_1}} - \left(9m^2 \Psi_{s_1 s_2 s_3}(X, y_1, y_2) + \right. \\
& \left. + \frac{9}{2} g^{a_1 a_2} \frac{\partial^2 \Psi_{s_1 s_2 s_3}(X, y_1, y_2)}{\partial y_1^{a_2} \partial y_1^{a_1}} + 6g^{a_1 a_2} \frac{\partial^2 \Psi_{s_1 s_2 s_3}(X, y_1, y_2)}{\partial y_2^{a_2} \partial y_2^{a_1}} \right) = 0.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Згортаючи це рівняння з символом Леві-Чівітта, а потім з елементами матриці $\hat{\gamma}^1 \hat{\gamma}^3$, як це обговорювалося вище, отримаємо аналогічне рівняння для тричастинкового біспінора (3.52). Розглядаючи це рівняння на підмножині (3.4), матимемо:

$$\begin{aligned}
& -g^{a_1 a_2} \frac{\partial^2 \Psi_{s_1}(X, \bar{y}_1, \bar{y}_2)}{\partial X^{a_2} \partial X^{a_1}} - \left((3m)^2 \Psi_{s_1}(X, \bar{y}_1, \bar{y}_2) + \right. \\
& \left. + 2(3m) \left(-\frac{3}{4m} \Delta_{\bar{y}_1} \Psi_{s_1}(X, \bar{y}_1, \bar{y}_2) - \frac{1}{m} \Delta_{\bar{y}_2} \Psi_{s_1}(X, \bar{y}_1, \bar{y}_2) \right) \right) = 0.
\end{aligned} \tag{3.56}$$

Знов, як і в (3.18) - (3.20), введемо внутрішній гамільтоніан системи трьох частинок:

$$\hat{H}^{internal} = (3m) \hat{E} - \frac{3}{4m} \Delta_{\bar{y}_1} - \frac{1}{m} \Delta_{\bar{y}_2}. \tag{3.57}$$

Далі, як і в (3.20), з точністю до величин порядку квадрату відношення характерної внутрішньої енергії тричастинкової системи до її енергії спокою можемо записати:

$$-g^{a_1 a_2} \frac{\partial^2 \Psi_{s_1}(X, \bar{y}_1, \bar{y}_2)}{\partial X^{a_2} \partial X^{a_1}} - \left(\hat{H}^{internal} \right)^2 \Psi_{s_1}(X, \bar{y}_1, \bar{y}_2) = 0. \tag{3.58}$$

Оператори $\hat{H}^{internal}$ та $i\partial / \partial X^a$ для всіх значень індексу a , вочевидь, комутують. Це дає змогу провести для рівняння (3.58) таку саму процедуру розкладання на множники, як і для «звичайного» рівняння Клейна-Гордона-Фока, яка призводить до «звичайного» рівняння Дірака. В нашому випадку вона призведе до його тричастинкового аналогу:

$$i\gamma_{s_1 s_2}^a \frac{\partial \Psi_{s_2}(X, \bar{y}_1, \bar{y}_2)}{\partial X^a} - \left(3m - \frac{3}{4m} \Delta_{\bar{y}_1} - \frac{1}{m} \Delta_{\bar{y}_2} \right) \Psi_{s_1}(X, \bar{y}_1, \bar{y}_2) = 0. \quad (3.59)$$

Розглядатимемо далі рівняння (3.59) як динамічне рівняння для тричастинкового біспінорного поля, яке ми шукали.

З метою подальшого подовження похідних для опису взаємодії з глюонним полем розглянемо рівняння (3.59) не на підмножині (3.4), а на всьому тензорному добутку трьох просторів Мінковського:

$$i\gamma_{s_1 s_2}^a \frac{\partial \Psi_{s_2}(X, y_1, y_2)}{\partial X^a} - \left(3m + \frac{3}{4m} g^{a_1 a_2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^{a_1} \partial y_1^{a_2}} + g^{a_1 a_2} \frac{\partial^2}{\partial y_2^{a_1} \partial y_2^{a_2}} \right) \Psi_{s_1}(X, y_1, y_2) = 0. \quad (3.60)$$

В цьому рівнянні повернемося до вихідних координат:

$$i\gamma_{s_1 s_2}^a \frac{\partial \Psi_{s_2}(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^a} + i\gamma_{s_1 s_2}^a \frac{\partial \Psi_{s_2}(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2^a} + i\gamma_{s_1 s_2}^a \frac{\partial \Psi_{s_2}(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3^a} - 3m \Psi_{s_1}(x_1, x_2, x_3) - \frac{1}{3m} \left(g^{a_1 a_3} \frac{\partial^2 \Psi_{s_1}(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3^{a_1} \partial x_3^{a_3}} + g^{a_1 a_3} \frac{\partial^2 \Psi_{s_1}(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^{a_1} \partial x_1^{a_3}} + g^{a_1 a_3} \frac{\partial^2 \Psi_{s_1}(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2^{a_1} \partial x_2^{a_3}} - g^{a_1 a_3} \frac{\partial^2 \Psi_{s_1}(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3^{a_1} \partial x_1^{a_3}} - g^{a_1 a_3} \frac{\partial^2 \Psi_{s_1}(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_3^{a_1} \partial x_2^{a_3}} - g^{a_1 a_3} \frac{\partial^2 \Psi_{s_1}(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1^{a_1} \partial x_2^{a_3}} \right) = 0. \quad (3.61)$$

Це рівняння є рівнянням Лагранжа-Ейлера для лагранжіану:

$$\begin{aligned}
L = & \frac{i}{2} \left(\bar{\Psi}_{s_1}^{c_1 c_2 c_3} \gamma_{s_1 s_2}^a \frac{\partial \Psi_{s_2}^{c_1 c_2 c_3}}{\partial x_1^a} - \frac{\partial \bar{\Psi}_{s_1}^{c_1 c_2 c_3}}{\partial x_1^a} \gamma_{s_1 s_2}^a \Psi_{s_2}^{c_1 c_2 c_3} \right) + \\
& + \frac{i}{2} \left(\bar{\Psi}_{s_1}^{c_1 c_2 c_3} \gamma_{s_1 s_2}^a \frac{\partial \Psi_{s_2}^{c_1 c_2 c_3}}{\partial x_2^a} - \frac{\partial \bar{\Psi}_{s_1}^{c_1 c_2 c_3}}{\partial x_2^a} \gamma_{s_1 s_2}^a \Psi_{s_2}^{c_1 c_2 c_3} \right) + \\
& + \frac{i}{2} \left(\bar{\Psi}_{s_1}^{c_1 c_2 c_3} \gamma_{s_1 s_2}^a \frac{\partial \Psi_{s_2}^{c_1 c_2 c_3}}{\partial x_3^a} - \frac{\partial \bar{\Psi}_{s_1}^{c_1 c_2 c_3}}{\partial x_3^a} \gamma_{s_1 s_2}^a \Psi_{s_2}^{c_1 c_2 c_3} \right) - \\
& - 3m \bar{\Psi}_{s_1}^{c_1 c_2 c_3} \Psi_{s_1}^{c_1 c_2 c_3} + \frac{1}{3m} g^{a_1 a_2} \left(\frac{\partial \bar{\Psi}_{s_1}^{c_1 c_2 c_3}}{\partial x_3^{a_1}} \frac{\partial \Psi_{s_1}^{c_1 c_2 c_3}}{\partial x_3^{a_2}} + \right. \\
& + \frac{\partial \bar{\Psi}_{s_1}^{c_1 c_2 c_3}}{\partial x_1^{a_1}} \frac{\partial \Psi_{s_1}^{c_1 c_2 c_3}}{\partial x_1^{a_2}} + \frac{\partial \bar{\Psi}_{s_1}^{c_1 c_2 c_3}}{\partial x_2^{a_1}} \frac{\partial \Psi_{s_1}^{c_1 c_2 c_3}}{\partial x_2^{a_2}} - \frac{\partial \bar{\Psi}_{s_1}^{c_1 c_2 c_3}}{\partial x_3^{a_1}} \frac{\partial \Psi_{s_1}^{c_1 c_2 c_3}}{\partial x_1^{a_2}} - \\
& \left. - \frac{\partial \bar{\Psi}_{s_1}^{c_1 c_2 c_3}}{\partial x_3^{a_1}} \frac{\partial \Psi_{s_1}^{c_1 c_2 c_3}}{\partial x_2^{a_2}} - \frac{\partial \bar{\Psi}_{s_1}^{c_1 c_2 c_3}}{\partial x_1^{a_1}} \frac{\partial \Psi_{s_1}^{c_1 c_2 c_3}}{\partial x_2^{a_2}} \right). \tag{3.62}
\end{aligned}$$

З метою зробити запис менш громіздким у польових функцій $\bar{\Psi}_{s_1; f_1, f_2, f_3}^{c_1 c_2 c_3}(x_1, x_2, x_3)$ і $\Psi_{s_1; f_1, f_2, f_3}^{c_1 c_2 c_3}(x_1, x_2, x_3)$ ми не виписали аргументи (x_1, x_2, x_3) , а також ароматові індекси f_1, f_2, f_3 , а кольорові індекси c_1, c_2, c_3 навели зверху.

Тепер в цьому лагранжіані можна так само, як і у випадку мезона, продовжити похідні. При цьому відсутність кольору у баріону можна виразити, задавши залежність тричастинкових польових функцій від кольорових індексів за допомогою символу Леві-Чівітта $\varepsilon_{c_1 c_2 c_3}$:

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi}_{s_1; f_1, f_2, f_3}^{c_1 c_2 c_3}(x_1, x_2, x_3) &= \varepsilon_{c_1 c_2 c_3} \bar{\Psi}_{s_1}^{f_1, f_2, f_3}(x_1, x_2, x_3), \\
\Psi_{s_1; f_1, f_2, f_3}^{c_1 c_2 c_3}(x_1, x_2, x_3) &= \varepsilon_{c_1 c_2 c_3} \Psi_{s_1}^{f_1, f_2, f_3}(x_1, x_2, x_3). \tag{3.63}
\end{aligned}$$

Знову, як і у випадку мезонних полів при локальному $SU(3)$ -перетворенні (позначення аналогічні (3.44))

$$\begin{aligned}
\bar{\Psi}'_{s_1;f_1,f_2,f_3}{}^{c_1c_2c_3}(x_1,x_2,x_3) &= \bar{\Psi}_{s_1;f_1,f_2,f_3}{}^{c_4c_5c_6}(x_1,x_2,x_3)U_{c_4c_1}^\dagger(x_1) \times \\
&\times U_{c_5c_2}^\dagger(x_2)U_{c_6c_3}^\dagger(x_2), \\
\Psi'_{s_1;f_1,f_2,f_3}{}^{c_1c_2c_3}(x_1,x_2,x_3) &= U_{c_1c_4}(x_1)U_{c_2c_5}(x_2) \times \\
&\times U_{c_3c_6}(x_2)\Psi_{s_1;f_1,f_2,f_3}{}^{c_4c_5c_6}(x_1,x_2,x_3),
\end{aligned} \tag{3.64}$$

залежність від кольорових індексів (3.63) не зберігається і ми маємо нескінчену сукупність калібрувально еквівалентних їй та, як наслідок, безколірних комбінацій. Локальної інваріантності лагранжіану можна досягти таким самим чином, як це обговорювалося в попередньому розділі. А саме, спочатку перетворювати весь лінійний простір тензорів, а після цього виділяти в ньому інваріантний підпростір.

Зробивши це, отримаємо лагранжіан тричастинкового біспінорного поля, взаємодіючого з глюонним полем у вигляді $L = L_0 + L_{int}$, де L_0 визначається (3.62), а L_{int} при виборі кольорової конфігурації (3.63) має вид (позначення, аналогічні (3.43)):

$$\begin{aligned}
L_{int} &= \frac{1}{9m} g^2 \bar{\Psi}_{s_1}(x_1,x_2,x_3) \Psi_{s_1}(x_1,x_2,x_3) \left((\phi(x_1,x_2) + \chi(x_1,x_2)) + \right. \\
&\left. + (\phi(x_1,x_3) + \chi(x_1,x_3)) + (\phi(x_2,x_3) + \chi(x_2,x_3)) \right),
\end{aligned} \tag{3.65}$$

де введені позначення:

$$\begin{aligned}
\phi(x_{b_1}, x_{b_2}) &= g^{a_1 a_2} A_{a_1, g_1}(x_{b_1}) A_{a_2, g_1}(x_{b_2}), \\
\chi(x_{b_1}, x_{b_2}) &= g^{a_1 a_2} \left(A_{a_1, g_1}(x_{b_1}) A_{a_2, g_1}(x_{b_1}) + A_{a_1, g_1}(x_{b_2}) A_{a_2, g_1}(x_{b_2}) \right).
\end{aligned} \tag{3.66}$$

В цьому лагранжіані взаємодії знов можемо перейти до координат Якобі і розглянути його на підмножині (3.4).

Таким чином, ми можемо описати взаємодію протонів із глюонним полем, яке може взаємодіяти з мезонними полями, породжуючи вторинні мезони. Це дає змогу в моделі багаточастинкових полів спробувати описати про-

цеси пружного та непружного розсіяння протонів. Однак, як вже зазначалося, добутки глюонних польових функцій, що входять в лагранжіани взаємодії (3.48) і (3.49), розглядаються теж на підмножині (3.4). Тому для побудови загаданих моделей нам потрібно розглянути ще двочастинкове глюонне поле.

3.4. Двочастинкове глюонне поле

Як бачимо, в лагранжіани взаємодії (3.48) і (3.65) глюонне поле $A_{a_1, g_1}(x_1)$ входить в скалярних комбінаціях (3.66) як відносно перетворень Лоренца, так і відносно приєднаного представлення глобальної групи $SU_c(3)$. Величини (3.66) розглядатимемо як двочастинкові поля. Втім розгляд багаточастинкового калібрувального поля з фізичної точки зору потребує дати відповіді на декілька питань.

Розгляд багаточастинкових полів в попередніх розділах засновувався на тому факті, що адрони складаються з певної кількості масивних конститuentних кварків, а також, що ці кварки мають таку масу, що енергії їх взаємодії недостатньо для народження нових кварків, бо кожен адрон складається з певної кількості певних конститuentних кварків. Це дало підставу розглядати внутрішній стан адрону в нерелятивістському наближенні. Але щодо калібрувального поля виникає питання, що собою воно собою являє з фізичної точки зору. Тобто, якщо ми розглянемо двочастинкове калібрувальне поле і проквантуємо його, то що за частинки будуть його квантами? З яких частинок вони скрадатимуться, і яким чином проявлятиметься те, що це поле двочастинкове? Відповідь на ці питання ми розглянемо в цьому розділі далі, бо вона буде базуватись на властивостях розв'язків динамічних рівнянь для двочастинкового калібрувального поля. Розглянемо ці рівняння.

Помножуючи кожне з рівнянь Лагранжа-Ейлера, для неабелевого калібрувального $A_{a_1, g_1}(x_1)$ на кожному компоненту поля $A_{a_2, g_2}(x_2)$, отримаємо:

$$A_{a_4, g_4}(x_2) g^{a_3 a_2} \hat{D}_{a_3} (A_{a_3, g_3}(x_1)) F_{a_1 a_2, g_1} (A_{a_k, g_k}(x_1)) = 0. \quad (3.67)$$

Тут введено позначення тензора калібрувального поля:

$$F_{a_1 a_2, g_1} (A_{a_k, g_k} (x_1)) = \frac{\partial A_{a_1, g_1} (x_1)}{\partial x_1^{a_2}} - \frac{\partial A_{a_2, g_1} (x_1)}{\partial x_1^{a_1}} - g c_{g_1 g_2 g_3} A_{a_1, g_2} (x_1) A_{a_2, g_3} (x_1), \quad (3.68)$$

де $c_{g_1 g_2 g_3}$ – структурні константи калібрувальної групи. При цьому, позначенням $F_{a_1 a_2, g_1} (A_{a_k, g_k} (x_1))$ ми хотіли підкреслити, що розглядаються рівняння саме відносно поля $A_{a_1, g_1} (x_1)$, а тензор поля вводиться лише як позначення. Окрім того, в (3.68) введено позначення для подовженої похідної в приєднаному представленні калібрувальної групи:

$$\hat{D}_{a_3} (A_{a_3, g_3} (x_1)) F_{a_1 a_2, g_1} (A_{a_k, g_k} (x_1)) = \frac{\partial F_{a_1 a_2, g_1} (A_{a_k, g_k} (x_1))}{\partial x_1^{a_3}} - g A_{a_3, g_3} (x_1) c_{g_3 g_1 g_2} F_{a_1 a_2, g_2} (A_{a_k, g_k} (x_1)). \quad (3.69)$$

Зауважимо, що система рівнянь (3.67) є інваріантною відносно локального калібрувального перетворення. Дійсно, виражаючи поля $A_{a_1, g_1} (x_1)$ і $A_{a_2, g_2} (x_2)$ калібрувально еквівалентними польовими конфігураціями (будемо позначати ці конфігурації як зазвичай штрихом), матимемо:

$$\begin{aligned} & \left(\exp(\hat{I}_{g_5} \theta_{g_5} (x_2)) \right)_{g_4 g_6} \left(\exp(\hat{I}_{g_7} \theta_{g_7} (x_1)) \right)_{g_1 g_8} \times \\ & \times A'_{a_4, g_6} (x_2) g^{a_3 a_2} \hat{D}_{a_3} (A'_{a_3, g_3} (x_1)) F_{a_1, a_2, g_8} (A'_{a_k, g_k} (x_1)) + \\ & + \frac{\partial \theta_{g_4} (x_2)}{\partial x^a} \left(\exp(\hat{I}_{g_7} \theta_{g_7} (x_1)) \right)_{g_1 g_8} g^{a_3 a_2} \hat{D}_{a_3} (A'_{a_3, g_3} (x_1)) \times \\ & F_{a_1, a_2, g_8} (A'_{a_k, g_k} (x_1)) = 0. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Тут $\theta_{g_k} (x_1)$ і $\theta_{g_k} (x_2)$ – параметри локального калібрувального перетворення, а \hat{I}_{g_k} – генератори приєданого представлення калібрувальної гру-

пи. Як бачимо, неоднорідний член, що містить похідні від параметру перетворення, входить в рівняння у вигляді добутку на вираз, що дорівнює нулю внаслідок динамічних рівнянь для одночастинкового поля $A_{a_1, g_1}(x_1)$. Таким чином, в виразі (3.70) залишиться лише перший доданок. Згортаючи його по індексах g_1 і g_4 з матрицями, оберненими до матриць приєднаного представлення, отримаємо для польових функцій «зі штрихом» таку саму систему рівнянь, що й (3.67). Таким чином, можемо сказати, що при локальних калібрувальних перетвореннях ліва частина системи рівнянь (3.67) перетворюється за тензорним добутком двох приєднаних представлень калібрувальної групи. Отже, ця ліва частина є тензором відносно групи Лоренца по індексах a_1, a_4 і тензором відносно локальних калібрувальних перетворень по індексах g_1, g_4 . Позначимо цей тензор $L_{a_1, a_4; g_1, g_4}(x_1, x_2)$. По кожній з цих пар індексів тензор можна тотожно представити у вигляді суми тензору кратного одиничному тензору, антисиметричного, та симетричного з нульовим слідом:

$$L_{a_1, a_4; g_1, g_4}(x_1, x_2) = l(x_1, x_2) g_{a_1 a_4} \delta_{g_1 g_4} + \dots \quad (3.71)$$

Тут ми виділили лише доданок, який складається з тензорів, кратних одиничним, а інші доданки, які нас не цікавлять, позначили як «три крапки».

Враховуючи, що всі такі внески є лінійно незалежними тензорами з рівняння (3.67), отримаємо:

$$l(x_1, x_2) g_{a_1 a_4} \delta_{g_1 g_4} = 0, \quad (3.72)$$

або

$$g^{a_1 a_4} \delta_{g_1 g_4} A_{a_4, g_4}(x_2) g^{a_3 a_2} \hat{D}_{a_3} \left(A_{a_3, g_3}(x_1) \right) F_{a_1 a_2, g_1} \left(A_{a_k, g_k}(x_1) \right) = 0. \quad (3.73)$$

Зауважимо, що хоча тензор $\delta_{g_1 g_2}$ і не переходить сам в себе при локальному перетворенні (3.70), як розглядалося вище, перетворення рівняння передбачає згортку з матрицями, оберненими до матриць приєднаного пред-

ставлення. Тому рівняння (3.72) і (3.73) зберігають свій вид при локальному калібрувальному перетворенні.

Симетризуємо рівняння (3.73) по змінних x_1 і x_2 . В отримане таким чином рівняння увійдуть два тензори:

$$\begin{aligned} A_{a_1, g_1}(x_1) A_{a_2, g_2}(x_2) &= \phi_{a_1, a_2; g_1 g_2}(x_1, x_2), \\ A_{a_1, g_1}(x_1) A_{a_2, g_2}(x_1) + A_{a_1, g_1}(x_2) A_{a_2, g_2}(x_2) &= \chi_{a_1, a_2; g_1 g_2}(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Для цих тензорів маємо співвідношення:

$$\chi_{a_1 a_2; g_1 g_2}(x_1, x_1) = 2\phi_{a_1 a_2; g_1 g_2}(x_1, x_1). \quad (3.75)$$

Кожний з тензорів (3.74) розкладемо на інваріантні тензори відносно перетворень Лоренца і глобальних внутрішніх перетворень, виділяючи скалярну частину:

$$\begin{aligned} \phi_{a_1, a_2; g_1, g_2}(x_1, x_2) &= \phi(x_1, x_2) g_{a_1 a_2} \delta_{g_1 g_2} + \dots, \\ \chi_{a_1, a_2; g_1, g_2}(x_1, x_2) &= \chi(x_1, x_2) g_{a_1 a_2} \delta_{g_1 g_2} + \dots. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Звернемо увагу на те, що величини $\phi(x_1, x_2)$ і $\chi(x_1, x_2)$, що входять в (3.76), визначаються (3.66) і входять до лагранжіанів взаємодії (3.65) і (3.48). Тому в (3.76) ми виділили саме ці доданки.

Спробуємо нав'язати симетризованому по x_1 і x_2 рівнянню (3.73) розв'язок, в якому всі інші компоненти розкладів (3.76), окрім виділених, дорівнюватимуть нулю. Зауважимо, що якщо для побудови тензорів (3.74) використати розв'язки одночастинкових рівнянь, то антисиметричні і симетричні із нульовим слідом частини тензорів, позначені в (3.76) як «трикрапки», взагалі кажучи, не дорівнюватимуть нулю. Покладання їх рівними нулю означає, що з цього моменту ми вже розглядаємо «нове» суто двочастинкове поле. Окрім того, для двочастинкового калібрувального поля приймемо таку ж послідовність локальних перетворень, як і в попередніх розділах. А саме, спочатку перетворюємо цілі тензори (3.74), а потім виділяємо з них частину,

пропорційну одиничному тензору. Покладаючи всі інші частини тензорів, окрім виділених в (3.76), рівними нулю, отримуємо:

$$\frac{\partial^2 \phi(x_1, x_2)}{\partial x_1^{a_1} \partial x_1^{a_2}} g^{a_1 a_2} + \frac{\partial^2 \phi(x_1, x_2)}{\partial x_2^{a_1} \partial x_2^{a_2}} g^{a_1 a_2} - \frac{1}{2} g^2 \phi(x_1, x_2) \chi(x_1, x_2) = 0. \quad (3.77)$$

Окрім того, зазначимо, що із співвідношень (3.75) маємо, що двочастинкові поля $\chi(x_1, x_2)$ і $\phi(x_1, x_2)$ повинні задовольняти умові:

$$\chi(x_1, x_1) = 2\phi(x_1, x_1). \quad (3.78)$$

Ця умова буде враховуватись далі при розгляді розв'язків рівнянь для відповідних двочастинкових полів.

Введемо замість двочастинкових полів $\phi(x_1, x_2)$ і $\chi(x_1, x_2)$ нові поля $a(x_1, x_2)$ і $b(x_1, x_2)$ за допомогою співвідношень

$$\begin{aligned} \phi(x_1, x_2) &= a(x_1, x_2) - b(x_1, x_2), \\ \chi(x_1, x_2) &= a(x_1, x_2) + b(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (3.79)$$

В таких змінних замість умови (3.78) матимемо:

$$a(x_1, x_1) = 3b(x_1, x_1). \quad (3.80)$$

З урахуванням (3.79) замість (3.77) отримуємо:

$$\begin{aligned} &g^{a_1 a_2} \frac{\partial^2 a(x_1, x_2)}{\partial x_1^{a_1} \partial x_1^{a_2}} + g^{a_1 a_2} \frac{\partial^2 a(x_1, x_2)}{\partial x_2^{a_1} \partial x_2^{a_2}} - \frac{1}{2} g^2 a^2(x_1, x_2) - \\ &\left(g^{a_1 a_2} \frac{\partial^2 b(x_1, x_2)}{\partial x_1^{a_1} \partial x_1^{a_2}} + g^{a_1 a_2} \frac{\partial^2 b(x_1, x_2)}{\partial x_2^{a_1} \partial x_2^{a_2}} - \frac{1}{2} g^2 b^2(x_1, x_2) \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Якщо ту частину виразу в лівій частині (3.81), яка містить поле $a(x_1, x_2)$ та його похідні, позначити $k(x_1, x_2)$:

$$g^{a_1 a_2} \frac{\partial^2 a(x_1, x_2)}{\partial x_1^{a_1} \partial x_1^{a_2}} + g^{a_1 a_2} \frac{\partial^2 a(x_1, x_2)}{\partial x_2^{a_1} \partial x_2^{a_2}} - \frac{1}{2} g^2 a^2(x_1, x_2) = k(x_1, x_2), \quad (3.82)$$

то, як видно з (3.81), тієї ж самій функції $k(x_1, x_2)$ повинен дорівнювати аналогічний вираз відносно поля $b(x_1, x_2)$. Найбільш просту задачу ми отримаємо, розглянувши частковий випадок, коли функція $k(x_1, x_2)$ зводиться до константи. Розглянемо до яких фізичних наслідків призводить цей окремий випадок.

Отже, «нав'яжемо» рівнянню (3.81) частковий розв'язок, який визначається співвідношеннями:

$$g^{a_1 a_2} \frac{\partial^2 a(x_1, x_2)}{\partial x_1^{a_1} \partial x_1^{a_2}} + g^{a_1 a_2} \frac{\partial^2 a(x_1, x_2)}{\partial x_2^{a_1} \partial x_2^{a_2}} - \frac{1}{2} g^2 a^2(x_1, x_2) = k, \quad (3.83)$$

$$g^{a_1 a_2} \frac{\partial^2 b(x_1, x_2)}{\partial x_1^{a_1} \partial x_1^{a_2}} + g^{a_1 a_2} \frac{\partial^2 b(x_1, x_2)}{\partial x_2^{a_1} \partial x_2^{a_2}} - \frac{1}{2} g^2 b^2(x_1, x_2) = k,$$

де k – деяка константа.

Враховуючи, що лагранжіан взаємодії (3.65) залежить лише від поля $a(x_1, x_2)$ будемо розглядати перше з рівнянь (3.83), враховуючи, що внаслідок однаковості цих рівнянь всі висновки стосуються і поля $b(x_1, x_2)$. Переходячи до координат Якобі (3.3), отримаємо:

$$\frac{1}{2} g^{a_1 a_2} \frac{\partial^2 a(X, y_1)}{\partial X^{a_1} \partial X^{a_2}} + 2g^{a_1 a_2} \frac{\partial^2 a(X, y_1)}{\partial y_1^{a_1} \partial y_1^{a_2}} - \frac{1}{2} g^2 a^2(X, y_1) = k. \quad (3.84)$$

Перед тим як аналізувати розв'язки цього рівняння безрозмірно його. Враховуючи, що дія безрозмірна, дістаємо висновку, що тензор калібрувального поля повинен мати розмірність $(1/l^2)$, де l – одиниця довжини. Тоді калібрувальне поле має розмірність $(1/l)$. Окрім того, виходячи з виду подовженої похідної, дістаємо висновку, що константа зв'язку g є безрозмірною.

Виходячи з цього, далі в рівнянні (3.84) будемо вважати двочастинкове поле $a(X, y_1)$ безрозмірним на $(1/l^2)$, константу k – безрозміреною на $(1/l^4)$, координати (у тому числі й внутрішні) – безрозмірними на l . Для безрозмірених величин ми не будемо вводити окремих позначень, а будемо вважати, що відповідне безрозмірювання вже проведено в (3.84), тобто всі величини далі будемо вважати вже безрозмірними.

Неоднорідне рівняння (3.84) має різні властивості у випадках $k \geq 0$ і $k < 0$. У випадку $k < 0$ рівняння допускає часткові розв'язки $a_0 = -\left(2|k|/g^2\right)^{1/2}$, або $a_0 = \left(2|k|/g^2\right)^{1/2}$, що зводяться до констант. Тоді, вводячи нове поле $a_1(X, y_1)$, за допомогою співвідношення $a(X, y_1) = a_0 + a_1(X, y_1)$ отримаємо для цього поля однорідне рівняння.

У випадку $k \geq 0$ для того, щоб перейти до однорідного рівняння нам потрібний також хоча б один частковий розв'язок неоднорідного рівняння (3.84). Цей розв'язок можна шукати як функцію лише внутрішніх змінних $a_0(y_1)$. На підмножині (3.4) рівняння для цієї функції має вид:

$$-\Delta_{\vec{y}_1} a_0(\vec{y}_1) - \frac{1}{4} g^2 a_0^2(\vec{y}_1) = k. \quad (3.85)$$

Перед тим як аналізувати властивості розв'язку цього рівняння, розглянемо, що являє собою цей розв'язок з фізичної точки зору. Представляючи поле $a(X, \vec{y}_1)$ у вигляді

$$a(X, \vec{y}_1) = a_0(\vec{y}_1) + a_1(X, \vec{y}_1), \quad (3.86)$$

таку ж саму підстановку ми повинні зробити в лагранжіані (3.65). Але тоді в повному баріонному лагранжіані $L = L_0 + L_{int}$, де L_0 визначається (3.62), а L_{int} – (3.65) доданки, що містять $a_0(\vec{y}_1)$, можна згрупувати з доданком, що містить $3m$ і включити, таким чином доданки з $a_0(\vec{y}_1)$ до лагранжіану ну-

льового наближення, в той час як доданки з $a_1(X, \vec{y}_1)$ розглядати як лагранжіан взаємодії. Знаходячи для такого нового лагранжіану нульового наближення рівняння Лагранжа-Ейлера, замість (3.59) отримаємо:

$$i\gamma_{s_1 s_2}^a \frac{\partial \Psi_{s_2}(X, \vec{y}_1, \vec{y}_2)}{\partial X^a} - \left(3m - \frac{3}{4m} \Delta_{\vec{y}_1} - \frac{1}{m} \Delta_{\vec{y}_2} - \frac{2g^2}{9m} a_0(\vec{y}_2) - \frac{2g^2}{9m} a_0\left(\vec{y}_1 - \frac{1}{2} \vec{y}_2\right) - \frac{2g^2}{9m} a_0\left(\vec{y}_1 + \frac{1}{2} \vec{y}_2\right) \right) \Psi_{s_1}(X, \vec{y}_1, \vec{y}_2) = 0. \quad (3.87)$$

Отже функція $(-a_0(\vec{y}_1))$ додається до внутрішнього гамільтоніану в якості потенційної енергії (з точністю до доданого множника $g^2/9m$) взаємодії кварків всередині адрону в нерелятивістському наближенні. Виходячи з цього, проаналізуємо властивості функції $(a_0(\vec{y}_1))$ як розв'язку рівняння (3.85).

Перейдемо в рівнянні (3.85) до сферичних змінних і розглянемо найпростіший сферично-симетричний розв'язок цього рівняння. Позначимо $|\vec{y}_1| \equiv r$ і звичайним чином введемо замість $(a_0(\vec{y}_1))$ нову невідому функцію $(a_2(\vec{y}_1))$ за допомогою співвідношення:

$$a_0(r) = \frac{a_2(r)}{r}. \quad (3.88)$$

Тоді для функції $(-a_2(r))$ отримаємо:

$$\frac{d^2(-a_2(r))}{dr^2} = kr + \frac{1}{4} g^2 \frac{(-a_2(r))^2}{r}. \quad (3.89)$$

Як видно з (3.88), ми отримаємо функцію $(-a_0(r))$ із скінченим значенням при $r=0$, а також із скінченою похідною в цій точці, якщо до рівняння (3.89) додано граничні умови:

$$a_2(r)|_{r=0} = 0, \left. \frac{da_2(r)}{dr} \right|_{r=0} = C. \quad (3.90)$$

Величина C не визначається умовою аналітичності функції $(-a_0(r))$ і тому може бути довільною. Тому проаналізуємо властивості розв'язку рівняння (3.89) при різних значеннях величини C .

Спочатку розглянемо випадок $C = 0$. Враховуючи, що функцію $(-a_2(r))$ ми шукаємо в множині функцій, аналітичних в околі точки $r = 0$, аналізувати її властивості можна за допомогою її розкладу в ряд Тейлора. Внаслідок граничних умов (3.90) її розклад в ряд Тейлора міг би починатися із доданку другого ступеня. Але якщо підставити розклад

$$(-a_2(r)) = \sum_{l=2}^{\infty} q_l r^l, \quad (3.91)$$

в рівняння (3.89), то отримаємо:

$$q_2 = 0, q_4 = 0, q_5 = 0, q_6 = 0, q_3 = \frac{k}{6}, q_7 = \frac{g^2 k^2}{2688}, \dots \quad (3.92)$$

З цих співвідношень видно, що рівняння (3.89) має нетривіальний розв'язок, що задовольняє граничним умовам (3.90). З тих самих співвідношень видно, що у випадку $k = 0, C = 0$, це рівняння матиме лише тривіальний розв'язок, що задовольняє цим граничним умовам. Випадок $k = 0$ ми докладніше розглянемо далі.

Двічі інтегруючи рівняння (3.89), з урахуванням умов (3.90) отримаємо:

$$(-a_2(r)) = \frac{k}{6} r^3 + \frac{1}{4} g^2 \int_0^r dr_1 \int_0^{r_1} dr_2 \frac{(a_2(r_2))^2}{r_2}, \quad (3.93)$$

звідки, враховуючи невід'ємність підінтегрального виразу в (3.93), а також співвідношення (3.88), маємо:

$$(-a_0(r)) \geq \frac{k}{6} r^2. \quad (3.94)$$

Отже, отриманий із двочастинного рівняння КХД потенціал взаємодії кварків $(-a_0(r))$ забезпечує не тільки можливість існування адрону як зв'язаної частинки, але й невиліт (конфайнмент) кварків. Звернемо увагу на те, що випадок $k > 0, C = 0$, який щойно розглянутий, описує не тільки властивість конфайнменту кварків, але й властивість асимптотичної свободи.

Розглянемо тепер випадок $k > 0, C > 0$. Двічі інтегруючи рівняння (3.89), отримаємо:

$$(-a_2(r)) = Cr + \frac{k}{6} r^3 + \frac{1}{4} g^2 \int_0^r dn_1 \int_0^{r_1} dr_2 \frac{(-a_2(r_2))^2}{r_2}. \quad (3.95)$$

З цього співвідношення маємо оцінку

$$(-a_2(r)) > Cr \geq 0, \quad (3.96)$$

наслідком якої є нерівність

$$(-a_2(r)) > Cr + \frac{1}{6} \left(k + \frac{g^2 C^2}{4} \right) r^3. \quad (3.97)$$

Отже, як видно з цього співвідношення, у випадку $C > 0$ потенціал $(-a_0(r))$ буде забезпечувати існування зв'язаних станів кварків та їх конфайнмент, не тільки у випадку $k > 0$, а й при $k = 0$. Розглядаючи ряд Тейлора в околі $r = 0$, аналогічно (3.91) і (3.92) отримаємо:

$$(-a_2(r)) \xrightarrow{r \rightarrow 0} Cr + \frac{1}{6} \left(k + \frac{1}{4} g^2 C^2 \right) r^3. \quad (3.98)$$

Тобто й висновок для опису властивості асимптотичної свободи залишається в силі як у випадку $k > 0, C \neq 0$, так і у випадку $k = 0, C \neq 0$.

Проаналізуємо щодо існування зв'язаних станів і конфайнменту випадок $k > 0, C < 0$. Нас цікавитиме асимптотична поведінка функції $(-a_0(r))$, а, відтак, - і $(-a_2(r))$ при великих значеннях r . Для того щоб її проаналізувати перепишемо рівняння (3.95) у вигляді

$$(-a_2(r)) = r \left(C + \frac{k}{6} r^2 \right) + \frac{1}{4} g^2 \int_0^r dr_1 \int_0^{r_1} dr_2 \frac{(-a_2(r_2))^2}{r_2}. \quad (3.99)$$

Вираз $C + (k/6)r^2$ при достатньо великих значеннях r стає додатнім. Позначимо через r_0 таке значення змінної r , при якому цей вираз дорівнюватиме деякому додатному значенню C_0 . Тоді для $r > r_0$ маємо:

$$(-a_2(r)) > C_0 r + \frac{1}{4} g^2 \int_{r_0}^r dr_1 \int_{r_0}^{r_1} dr_2 \frac{(-a_2(r_2))^2}{r_2} > C_0 r > 0. \quad (3.100)$$

Наслідком цієї нерівності є оцінка:

$$(-a_2(r)) > C_0 r + \frac{1}{24} g^2 (C_0)^2 r^3. \quad (3.101)$$

Отже бачимо, що у випадку $k > 0$ висновок про опис конфайнменту кварків та їх асимптотичної свободи має місце при довільному значенні константи C .

У випадку $k < 0$ властивості розв'язків є більш різноманітними, тому проаналізуємо ці властивості на фазовій площині. Для цього введемо в рівнянні (3.89) нову змінну x за допомогою співвідношення:

$$r = \frac{g}{2\sqrt{|k|}} x. \quad (3.102)$$

Після цього, перепишемо це рівняння у вигляді:

$$\frac{d^2(-a_2(x))}{dx^2} = \left(\frac{g^3}{8\sqrt{|k|}} \right) \frac{((-a_2(x)) - x)((-a_2(x)) + x)}{x}. \quad (3.103)$$

З (3.103) видно, що рівняння має два очевидні розв'язки: $(-a_2(x)) = -x$ і $(-a_2(x)) = x$. Ці розв'язки виділяються граничними умовами

$$(-a_2(x))\Big|_{x=0} = 0, \frac{d(-a_2(x))}{dx}\Big|_{x=0} \equiv C' = \pm 1. \quad (3.104)$$

Тут ми ввели позначення C' для першої похідної функції $(-a_2(x))$ при нульовому значенні аргументу. Розглянемо далі на фазовій площині поведінку інших розв'язків в залежності від значення C' .

Півпрямі $(-a_2(x)) = -x, x \geq 0$ і $(-a_2(x)) = x, x \geq 0$ розділяють фазову півплощину $x \geq 0$ на кути, всередині кожного з яких визначається знак другої похідної $d^2(-a_2(x))/dx^2$, так як це показано на рис. 3.1.

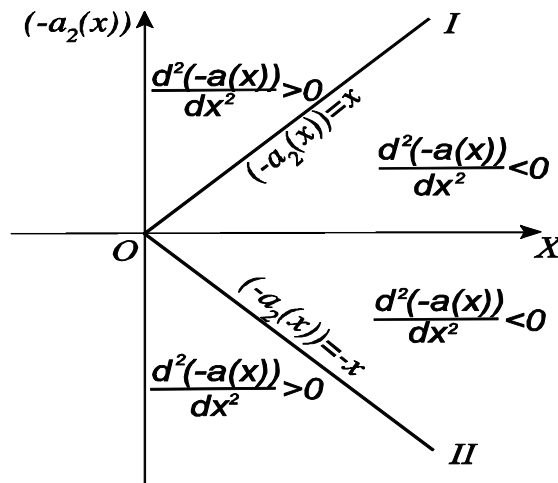


Рис. 3.1. Розподіл фазової півплощини на області постійного знаку другої похідної $d^2(-a_2(x))/dx^2$.

Для подальшого аналізу зручно буде користуватися механічною аналогією. Тому другу похідну будемо називати прискоренням, першу - швидкіс-

ттю, величину C' – початковою швидкістю, саму функцію $(-a_2(x))$ – координатою, а її аргумент - часом. Тоді маємо таку аналогію. З початку координат в нульовий момент часу починають рухатись три тіла. Тіло I рухається з постійною швидкістю 1, тіло II рухається з постійною швидкістю (-1) , а рух тіла III описується рівнянням (3.103) з початковою координатою, що дорівнює нулю і початковою швидкістю C' .

Розглянемо можливі варіанти руху тіла III в залежності від початкової швидкості C' . Спочатку розглянемо випадок $(-1) < C' < 1$. Тоді тіло III потрапляє в область від'ємного прискорення (відрізок OA_1 на рис. 3.2). Для того щоб прискорення тіла III змінило знак, як видно з (3.103), воно повинно перегнати або тіло I , або тіло II . Але враховуючи, що початкова швидкість тіла III була меншою за швидкість тіла I і тіло III знаходиться в області від'ємного прискорення, за таких початкових умов воно ніколи не зможе наздогнати тіло I . Це призведе до того, що швидкість тіла III буде зменшуватись (відрізки A_1A_2, A_2A_3, \dots на рис. 3.2). При цьому прискорення тіла III буде залишатися від'ємним та відмінним від нуля доки це тіло не наздожене тіло II . Це означає, що таке наздоганяння обов'язково відбудеться, бо інакше тіло завжди буде залишатися в області від'ємного прискорення, а це означає, що ніщо не зможе завадити швидкості цього тіла стати від'ємною і за абсолютною величиною більшою за швидкість тіла II , що знову ж таки призведе до наздоганяння тілом III тіла II . Після того, як це відбудеться, тіло потрапить в область додатного прискорення. Швидкість цього тіла зменшуватиметься доки його не наздожене тіло II і далі ситуація буде періодично повторюватись, як це показано на рис. 3.2.

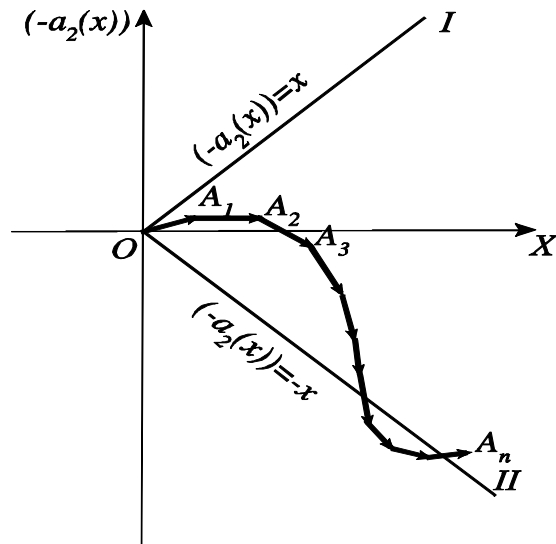


Рис. 3.2. Типова фазова траекторія для випадку $(-1) < C' < 1$.

На рис. 3.3. наведено результат чисельного розв'язку рівняння (3.103) для випадку $C' = 0.5, g = 10, k = -5$.

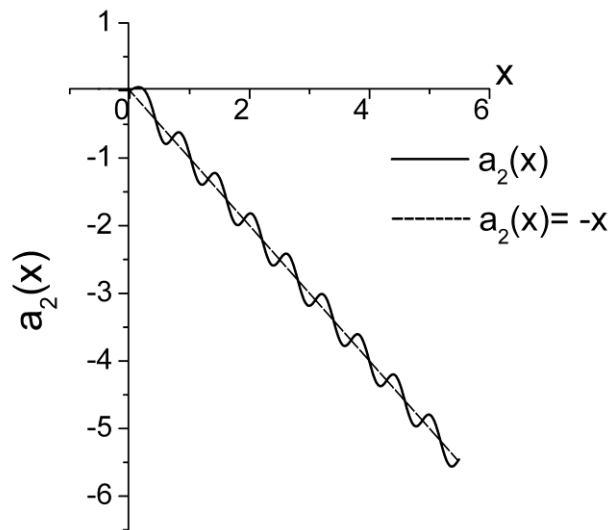


Рис. 3.3. Результат чисельного розв'язку рівняння (3.103) для випадку $C' = 0.5, g = 10, k = -5$.

Відповідний цьому розв'язку потенціал $(-a_0(r))$ показано на рис. 3.4.

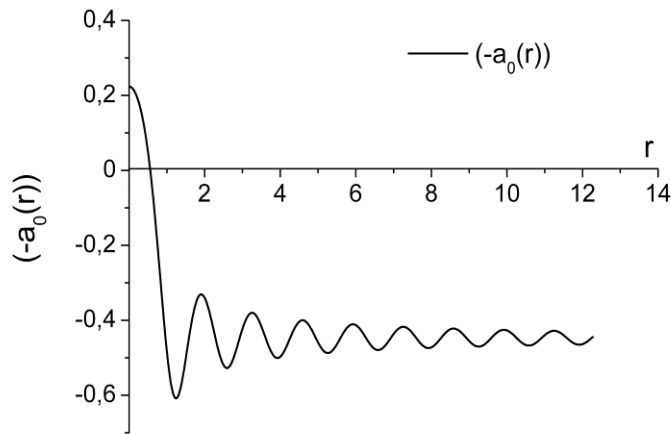


Рис. 3.4. Потенціал $(-a_0(r))$, що відповідає розв'язку, наведеному на рис. 3.3.

Наведені на рис. 3.3 - 3.4 результати відповідають значенню коефіцієнта $(g^3 / 8\sqrt{|k|})$ з рівняння (3.103), що дорівнює $(g^3 / 8\sqrt{|k|}) \approx 55.9$.

Розглянемо тепер властивості розв'язку, який відповідає початковій умові з $C' < -1$. Тоді тіло *III* пережене тіло *II* і потрапить в область додатного прискорення (відрізок OA_1 на рис. 3.5.).

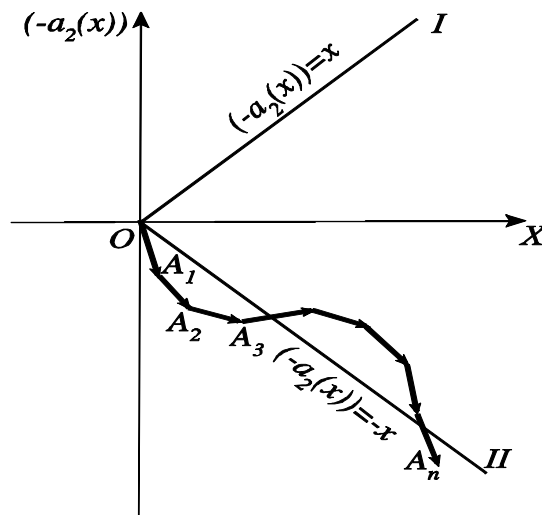


Рис. 3.5. Аналіз поведінки на фазовій площині розв'язку рівняння (3.103),

що задовольняє граничним умовам $(-a_2(x))|_{x=0} = 0, \left. \frac{d(-a_2(x))}{dx} \right|_{x=0} = C' < -1$.

Це призводить до того, що швидкість тіла *III* відносно тіла *II* почне зменшуватись і тіло *II* почне наздоганяти тіло *III* (відрізки A_1A_2, A_2A_3, \dots на рис. 3.5). Цей процес зменшення не може припинитись доки тіло *II* не пережене тіло *III*. Тому таке наздоганяння обов'язково відбудеться. Але після нього тіло *III* потрапить в область від'ємного прискорення і швидкість цього тіла з часом обов'язково знов стане від'ємною і більшою за абсолютною величиною, ніж швидкість тіла *II*. Це призведе до того, що тіло *II* знову наздожене тіло *III* і далі ситуація повторюватиметься, як це показано на рис.3.5. Ці міркування підтверджуються результатами чисельного розв'язку рівняння (3.103). Типовий приклад такого розв'язку для розглядуваних граничних умов наведено на рис. 3.6.

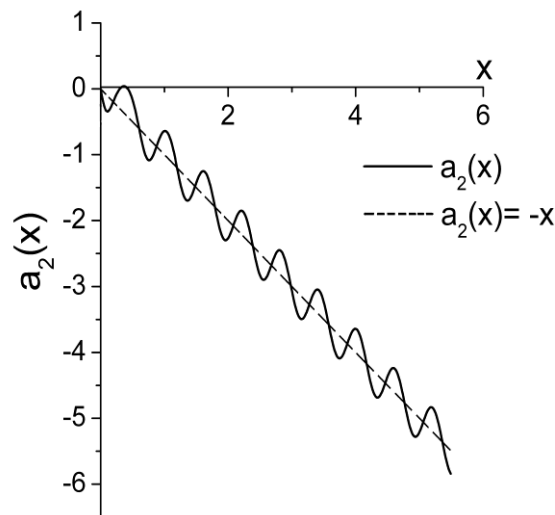


Рис. 3.6. Результат чисельного розв'язку рівняння (3.103) для випадку

$$k = -5, g = 10, C' = -5.5.$$

Відповідний цьому розв'язку потенціал $(-a_0(r))$ показано на рис. 3.7.

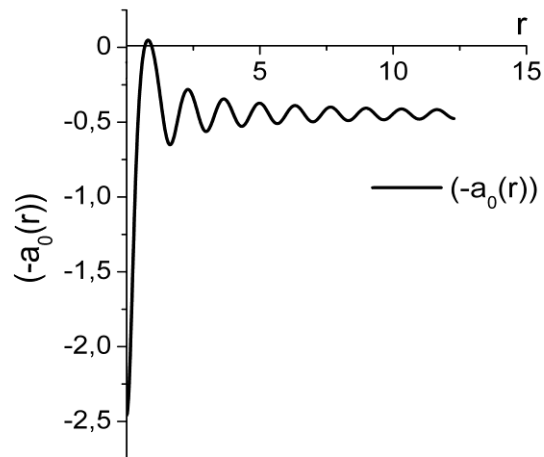


Рис. 3.7. Потенціал $(-a_0(r))$, що відповідає розв'язку $(-a_2(r))$, наведеному на рис. 3.6.

У випадку $C' > 1$ тіло *III* одразу випереджає тіло *I* і потрапляє в область додатного прискорення, як це показано на рис. 3.8.

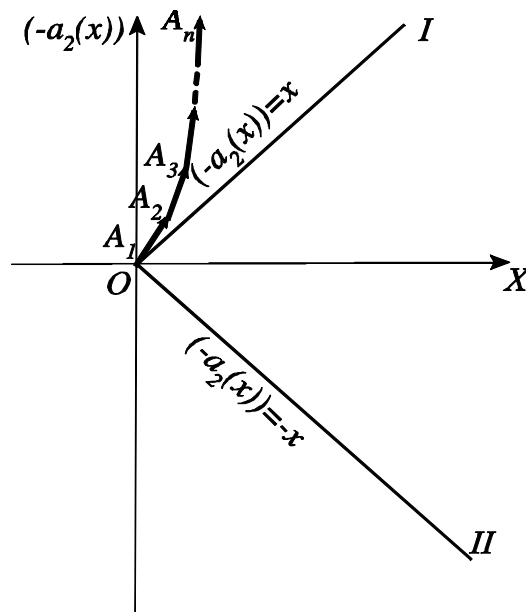


Рис. 3.8. Аналіз поведінки на фазовій площині розв'язку рівняння (3.103) у випадку $C' > 1$.

Це призведе до того, що швидкість тіла *III*, яка вже була більшою за швидкість тіла *I*, становитиметься ще більшою і тіло *III* буде весь час пере-

ганяти тіло I і тим самим ніколи не зможе потрапити в область від'ємного прискорення. Типовий результат чисельного розрахунку для випадку $C' > 1$ наведено на рис. 3.9.

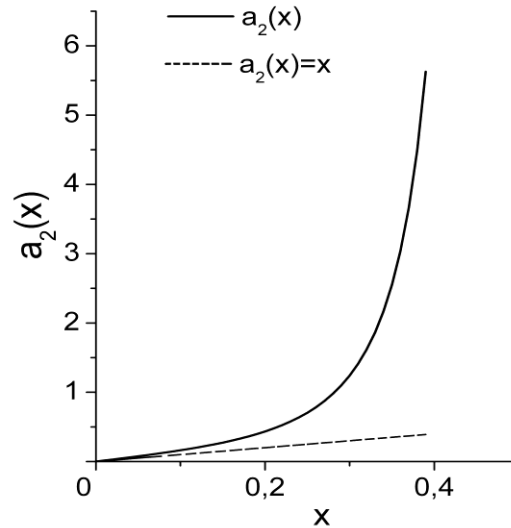


Рис. 3.9. Результат чисельного розв'язку рівняння (3.103) для випадку $k = -5, g = 10, C' = 1.5$.

Для менших значень константи зв'язку маємо якісно таку саму поведінку розв'язку (рис. 3.10), яка відрізняється від наведеної на рис. 3.9 лише чисельними значеннями.

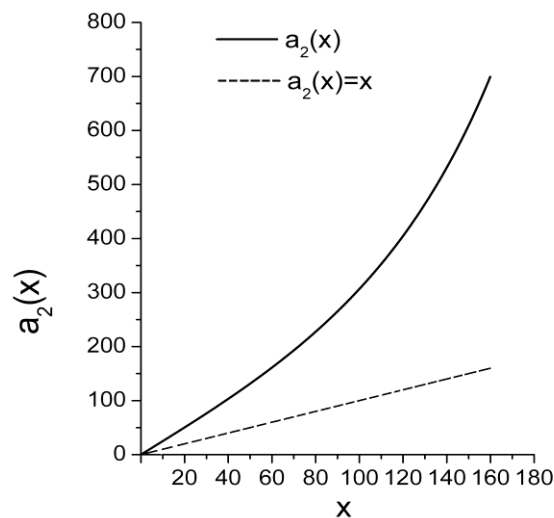


Рис. 3.10. Результат чисельного розв'язку рівняння (3.103) для випадку $k = -5, g = 0.1, C' = 2.5$.

Отже, у випадку $C' > 1$ на відміну від двох попередніх маємо знов кон-
файнмент із асимптотичною свободою.

Розглянуті рівняння та властивості їх розв'язків дозволяють проаналі-
зувати питання про те, що з фізичної точки зору собою являє двочастинкове
калібрувальне поле. Для цього повернемося до рівняння (3.84), розглядаючи
його, як зазвичай, на підмножині одночасності (3.4). Це рівняння є неоднорі-
дним. Якщо ми хочемо проквантувати поля $a(X, \vec{y}_1)$ та $b(X, \vec{y}_1)$, ми повинні
виходити з однорідних рівнянь. Цього легко досягти, підставляючи в (3.84)
розклад (3.86), де $a_0(\vec{y}_1)$ – один з розв'язків рівняння (3.85), а $a_1(X, \vec{y}_1)$ – но-
ва невідома функція. Таким чином, для цієї функції отримаємо рівняння:

$$g^{a_1 a_2} \frac{\partial^2 a_1(X, \vec{y}_1)}{\partial X^{a_1} \partial X^{a_2}} + (-4\Delta_{\vec{y}_1} a_1(X, \vec{y}_1) +$$

$$+ 2g^2(-a_0(\vec{y}_1))a_1(X, \vec{y}_1)) - g^2(a_1(X, \vec{y}_1))^2 = k. \quad (3.105)$$

Спробуємо описати далі поле $a_1(X, \vec{y}_1)$ методом теорії збурень. Тому
відкинемо нелінійний доданок в рівнянні (3.105). Отримаємо рівняння, яке
породжується дією:

$$S = \int d^4 X d\vec{y}_1 \left(\frac{1}{2} g^{a_1 a_2} \frac{\partial a_1(X, \vec{y}_1)}{\partial X^{a_1}} \frac{\partial a_1(X, \vec{y}_1)}{\partial X^{a_2}} -$$

$$- 2 \frac{\partial a_1(X, \vec{y}_1)}{\partial y_1^b} \frac{\partial a_1(X, \vec{y}_1)}{\partial y_1^b} + \frac{g^2}{2} a_0(\vec{y}_1) (a_1(X, \vec{y}_1))^2 \right). \quad (3.106)$$

Теорема Нетер для поля з такою дією призведе до наступного виразу
для енергії поля $a_1(X, \vec{y}_1)$ в нульовому порядку теорії збурень:

$$P_0 = \frac{1}{2} \int dX^1 dX^2 dX^3 d\vec{y}_1 \left(\sum_{b=0}^3 \left(\frac{\partial a_1(X, \vec{y}_1)}{\partial X^b} \right)^2 +$$

$$+ 4 \sum_{b=1}^3 \left(\frac{\partial a_1(X, \vec{y}_1)}{\partial y_1^b} \right)^2 + g^2(-a_0(\vec{y}_1)) (a_1(X, \vec{y}_1))^2 \right). \quad (3.107)$$

Як видно з цього виразу, вимога скінченності для енергії призводить до того, що всі можливі реалізації поля $a_1(X, \bar{y}_1)$ у випадку, коли $(-a_0(\bar{y}_1))$ таке, що забезпечує конфайнмент кварків, повинні достатньо швидко наближатися до нуля, коли $|\bar{y}_1|$ наближається до нескінченності. Отже та сама функція $(-a_0(\bar{y}_1))$, яка в рівнянні (3.87) забезпечує конфайнмент кварків, в рівнянні нульового наближення для поля $a_1(X, \bar{y}_1)$

$$g^{a_1 a_2} \frac{\partial^2 a_1(X, \bar{y}_1)}{\partial X^{a_1} \partial X^{a_2}} + \left(-4\Delta_{\bar{y}_1} a_1(X, \bar{y}_1) + 2g^2 (-a_0(\bar{y}_1)) a_1(X, \bar{y}_1) \right) = 0, \quad (3.108)$$

забезпечує й конфайнмент глюонів.

Рівняння (3.108) схоже на рівняння (3.18) або (3.58) з внутрішніми змінними, але з тією різницею, що оператор

$$\left(\hat{H}^{\text{internal}} \right)^2 (a_1(X, \bar{y}_1)) = -4\Delta_{\bar{y}_1} a_1(X, \bar{y}_1) + g^2 (-a_0(\bar{y}_1)) a_1(X, \bar{y}_1), \quad (3.109)$$

схожий на внутрішній гамільтоніан двочастинкової системи, має сенс квадрату внутрішнього гамільтоніану системи. Дійсно, якщо перейти для поля $a_1(X, \bar{y}_1)$ до Фур'є представлення по координатах $X^a, a = 0, 1, 2, 3$:

$$a_1(X, \bar{y}_1) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4 X a_1(p, \bar{y}_1) \exp(ip_a X^a), \quad (3.110)$$

то отримаємо рівняння

$$\left(\hat{H}^{\text{internal}} \right)^2 (a_1(p, \bar{y}_1)) = \left(g^{a_1 a_2} p_{a_1} p_{a_2} \right) a_1(p, \bar{y}_1). \quad (3.111)$$

Отже, як видно з цього рівняння, власні значення оператора (3.109) дорівнюють квадратам внутрішніх енергій двоглюонної частинки для різних внутрішніх станів цієї частинки. Дійсно, у випадку потенціалу $(-a_0(\bar{y}_1))$, що забезпечує конфайнмент, можна так задати граничні умови для рівняння (3.89), що всі власні значення оператора (3.109) будуть додатними. Зокрема, як вид-

но з попереднього аналізу, так буде при $k > 0, C \geq 0$, або при $k = 0, C > 0$. Враховуючи (3.111), це означає що двоглюонна частинка матиме ненульову масу і для неї існуватиме система спокою. Власне значення оператора (3.109) як видно з (3.111), дорівнює квадрату енергії двоглюонної частинки в цій системі відліку.

З формальної точки зору ситуація схожа на ту, що мала місце при розгляді рівняння (3.18), але з тією суттєвою різницею, що в тому рівнянні був внесок $(2m)^2$, який походить від мас частинок, що зв'язуються. Тоді власні значення оператора кінетичної енергії або суми операторів кінетичної і потенційної енергії при врахуванні взаємодії можна було вважати малими у порівнянні з їх енергіями спокою і зберегти в квадраті внутрішнього гамільтоніану лише лінійні внески по цим операторам. Але в нашому випадку ми розглядаємо зв'язаний стан двох безмасових глюонів, що виражається у відсутності в виразі (3.109) доданку, аналогічного $(2m)^2$ в рівнянні (3.18). Тому власні значення оператора (3.109) ми вже не можемо вважати малою добавкою до чогось і, кажучи про внутрішній гамільтоніан двоглюонної частинки нам доведеться розглядати «квадратний корінь» з оператора (3.109).

Формальне означення цього кореня не становить проблеми, бо оператор (3.109) у випадку конфайнменту має тільки дискретний спектр власних значень. Обираючи як базис систему власних функцій цього оператора, його можна представити у вигляді матриці. Ця матриця в такому базисі буде діагональною і на головній діагоналі міститиме власні значення оператора, які, як вже зазначалося, за рахунок обрання граничних умов (3.90) можна зробити додатними. Якщо замінити ці власні значення арифметичними квадратними коренями з них, отримаємо матрицю, яка внаслідок дійсності значень коренів буде представляти самоспряжений оператор. Тоді цей оператор можна прийняти за визначення оператора $\hat{H}^{\text{internal}} = \sqrt{(\hat{H}^{\text{internal}})^2}$. Невизначеність в знаку перед коренями після квантування можна інтерпретувати звичайним

чином, розглядаючи відповідні коефіцієнти як оператори народження та знищення двоглюонних частинок.

Втім, у будь-якому визначенні оператора $\hat{H}^{\text{internal}}$ мабуть немає потреби, бо, як видно з попереднього розгляду, в усі співвідношення як для вільного поля $a_1(X, \vec{y}_1)$, так і для поля, взаємодіючого з іншими полями, входить саме оператор (3.109). Тобто можна сказати, що динаміка двочастинкового калібрувального поля визначається не внутрішнім гамільтоніаном, а його квадратом. Аналіз такої «дивної» ситуації дозволяє зробити висновок про те, що фізично являє собою двочастинкове глюонне поле. Розглянемо це більш детальніше.

Оператор $(-4\Delta_{\vec{y}_1})$, що входить до (3.109), може бути записаний у вигляді:

$$-4\Delta_{\vec{y}_1} = -2(\Delta_{\vec{x}_1} + \Delta_{\vec{x}_2}) + \Delta_{\vec{X}}. \quad (3.112)$$

Будемо розглядати двоглюонну частинку в її системі центру мас. Тоді власне значення оператора $\Delta_{\vec{X}}$ дорівнюватиме нулю. А оператори

$$\hat{E}_1^2 = -2\Delta_{\vec{x}_1}, \hat{E}_2^2 = -2\Delta_{\vec{x}_2}, \quad (3.113)$$

можна розглядати як оператори квадратів енергій кожного з глюонів. Оператор $(-g^2 a_0(\vec{y}_1))$ описує взаємодію між глюонами. Внаслідок цієї взаємодії внутрішній стан двоглюонної частинки не є власним ані для енергій, ані для імпульсів складаючих глюонів. Але ми можемо казати про середні значення цих величин. Тоді, виходячи з означень (3.113), маємо

$$\langle E_a^2 \rangle = 2 \langle \vec{p}_a^2 \rangle, a = 1, 2. \quad (3.114)$$

Розглянемо «зародковий глюон», тобто такий, який з'являється в КХД в нульовому порядку теорії збурень. Якщо залишити в рівняннях тільки лінійні

доданки, то внаслідок відсутності маси такого глюону зв'язок між власними значеннями його енергії E та імпульсу \vec{p} у стані, власному для цих обох величин, має вигляд $E = |\vec{p}|$. Тоді у невласному стані для цих величин, зводячи обидві частини рівності в квадрат й усереднюючи, отримаємо для середніх квадратів саме рівність (3.114). Причому множник 2 з'являється за рахунок двох фізичних станів поляризації «зародкового глюону». Тобто рівність нулю маси глюону призводить до того, що середній квадрат його імпульсу визначає саме середній квадрат енергії цієї частинки, а не середню енергію, як у розглянутих раніше випадках масивних нерелятивістських частинок.

Отже, можемо зробити висновок, що хоча двоглюонна частинка складається з взаємодіючих глюонів, які можуть бути далекими за своїми властивостями від «зародкових глюонів» теорії збурень, ці глюони залишаються безмасовими. Проте, кожен з них знаходиться в стані, обмеженому у просторі, а відтак - невласному для імпульсу, і взаємодіє з іншим глюоном. Внаслідок цього факту середня енергія безмасового глюона в розглядуваному стані не може дорівнювати нулю. Тому, якщо розглянути можливість народження нового глюона (або декількох глюонів) в такій системі, то не зважаючи на те, що його маса дорівнює нулю, таке народження потребуватиме ненульової затрати енергії (так якби у глюона була маса). Тоді, якщо взаємодія частинок двоглюонної частинки із іншими полями не доставляє потрібної енергії, новий глюон народитися не зможе і система продовжуватиме існувати як двоглюонна. Це й надає сенсу розглядати двоглюонне поле як таке, що описує зв'язані стани двох взаємодіючих між собою глюонів з нульовою масою. Кандидати на такі двоглюонні зв'язані стани розглядаються як в експерименті [160], так і в теорії [161].

Розв'язуючи задачу на власні значення (3.111) для оператора (3.109), ми можемо описати таким чином внутрішній стан двоглюонної частинки. На цьому етапі ми можемо задовольнити вимогу (3.78), або (3.80). В змінних Якобі ця вимога має вид:

$$a(X, \bar{y}_1 = 0) = 3b(X, \bar{y}_1 = 0). \quad (3.115)$$

Як видно з співвідношень (3.83), поля $a(X, \bar{y}_1)$ і $b(X, \bar{y}_1)$ задовольняють однаковим рівнянням. Однак до цих рівнянь можна ставити різні граничні умови. Покажемо, що умова (3.115) визначає ці граничні умови.

Внаслідок однаковості рівнянь для поля $b(X, \bar{y}_1)$ можна розглядати частковий розв'язок $b_0(\bar{y}_1)$, аналогічний $a_0(\bar{y}_1)$ і задовольняючий рівнянню (3.85), але іншим граничним умовам. А саме, якщо представити аналогічно (3.88)

$$b_0(r) = \frac{b_2(r)}{r}, \quad (3.116)$$

то для того щоб $b_0(\bar{y}_1)$, приймала скінчене значення в нулі функція $b_2(\bar{y}_1)$ повинна обертатися в нуль при $\bar{y}_1 = 0$, аналогічно (3.90), але перша похідна в нулі (тобто значення константи C в (3.90)) може бути іншою. Будемо позначати значення цієї першої похідної C_1 . Виходячи з представлення (3.95) рівняння (3.89), видно, що величини C і C_1 , відповідно, дорівнюють значенням функцій $a_0(\bar{y}_1)$ і $b_0(\bar{y}_1)$ при нульових значеннях аргументів. Отже, щоб задовольнити вимогу (3.115) треба покласти:

$$C_1 = \frac{1}{3}C. \quad (3.117)$$

Далі аналогічно (3.86) представимо

$$b(X, \bar{y}_1) = b_0(\bar{y}_1) + b_1(X, \bar{y}_1). \quad (3.118)$$

Тоді з міркувань, аналогічних наведеним для поля $a_1(X, \bar{y}_1)$, залежність поля $b_1(X, \bar{y}_1)$ від внутрішніх змінних \bar{y}_1 повинна задаватися власною функцією оператора

$$\begin{aligned} & \left(\hat{H}^{\text{internal},1} \right)^2 (b_1(X, \bar{y}_1)) = \\ & = -4\Delta_{\bar{y}_1} b_1(X, \bar{y}_1) + g^2 (-b_0(\bar{y}_1)) b_1(X, \bar{y}_1), \end{aligned} \quad (3.119)$$

в якому роль потенціалу взаємодії замість $a_0(\bar{y}_1)$, як в (3.109), грає тепер функція $b_0(\bar{y}_1)$. При цьому у вираз для обох потенціалів увійде константа C - один раз «сама по собі», інший раз - через $C_1 = C/3$. Тоді, якщо внутрішні стани двоглюонних частинок, що відповідають полям $a_1(X, \bar{y}_1)$ і $b_1(X, \bar{y}_1)$, описувати нормованими на одиницю власними функціями операторів (3.106) і (3.119), які відповідають найменшим власним значенням (позначимо ці функції відповідно $\psi_a(\bar{y}_1)$ і $\psi_b(\bar{y}_1)$), то ці функції залежатимуть від константи C . Вимога (3.115) призводить до рівняння

$$\psi_a(\bar{y}_1 = 0) = 3\psi_b(\bar{y}_1 = 0). \quad (3.120)$$

Це рівняння можна розглядати як таке, що визначає значення константи C і тим самим визначає граничні умови для рівняння (3.89) та аналогічного рівняння для $b_2(\bar{y}_1)$.

Як приклад розглянемо випадок $k > 0, C > 0$, який забезпечує конфайнмент та асимптотичну свободу. Для цього випадку маємо оцінку (3.97). Покладемо наближено

$$(-a_2(r)) = Cr + \frac{1}{6} \left(k + \frac{g^2 C^2}{4} \right) r^3. \quad (3.121)$$

Для такого наближення, принаймні на якісному рівні, матимемо ті ж самі властивості власних функцій і власних значень оператора (3.109), що й для точного потенціалу. Але в такому наближенні ми отримуємо точно розв'язувану модель тривимірного гармонійного осцилятора, бо

$$(-a_0(r)) = C + \frac{1}{6} \left(k + \frac{g^2 C^2}{4} \right) r^2. \quad (3.122)$$

Нормована на одиницю власна функція оператора (3.109) з потенціалом (3.122), яка відповідає найменшому власному значенню, має вигляд:

$$\psi_a(\bar{y}_1) = \left(\frac{g^2(k + g^2 C^2 / 4)}{24\pi} \right)^{3/4} \exp\left(-\frac{(\bar{y}_1)^2}{2y_0^2} \right), \quad (3.123)$$

де введено позначення

$$y_0 = \sqrt{\frac{24}{g^2(k + g^2 C^2 / 4)}}. \quad (3.124)$$

Для функції $\psi_b(\bar{y}_1)$ матимемо аналогічні співвідношення, але із заміною C на $C/3$ у відповідності із (3.117). Внаслідок цього рівняння (3.120) приймає вигляд:

$$\left(\frac{g^2(k + g^2 C^2 / 4)}{24\pi} \right)^{3/4} = 3 \left(\frac{g^2(k + g^2 C^2 / 36)}{24\pi} \right)^{3/4}. \quad (3.125)$$

Враховуючи, що ми розглядаємо випадок $k > 0, C > 0$, нас цікавить позитивний розв'язок цього рівняння. Такий розв'язок існує тільки один і він має вигляд:

$$C = \sqrt{\frac{4(3^{4/3} - 1)k}{g^2(1 - 3^{-2/3})}}. \quad (3.126)$$

Враховуючи представлення (3.86) і (3.118), задовольнивши відповідні співвідношення для $a_0(\bar{y}_1)$ і $b_0(\bar{y}_1)$, а також для $a_1(X, \bar{y}_1)$ і $b_1(X, \bar{y}_1)$, ми таким чином задовольнили умові (3.115) в нульового наближенні теорії збурень для $a(X, \bar{y}_1)$ і $b(X, \bar{y}_1)$. Оскільки ми можемо далі скористатися представленням взаємодії, в якому польові оператори залежать від своїх аргумен-

тів так само, як в нульовому наближенні, можемо сказати, що умова (3.78) нами врахована.

Використовуючи представлення взаємодії, ми можемо всі багаточастинкові польові оператори виразити через власні функції або внутрішніх гамільтоніанів, або квадратів внутрішніх гамільтоніанів, які відповідають найменшим власним значенням. Підставляючи ці представлення в лагранжіани взаємодії, ми можемо проінтегрувати по внутрішніх змінних і отримаємо модель, в якій оператори, що відповідають народженню і знищенню адронів, пов'язані з операторами, що відповідають народженню і знищенню двоглюонних зв'язаних станів.

3.5. Квантування багаточастинкових полів

Ми вже розглядали процедуру квантування в розділі 3.1 на прикладі двочастинкового скалярного поля. Але цей розгляд мав суто модельний характер, бо не була врахована взаємодія між частинками, яка могла б утримувати дві частинки в зв'язаному стані, що виправдовувало б розгляд двочастинкового поля та його квантування. Тому отримані в результаті квантування оператори, що змінюють числа заповнення двочастинкових станів, не мали фізичного змісту. Метою того розгляду було розробка техніки квантування багаточастинкових полів. Найбільш суттєвою обставиною при цьому було те, що інтерпретація операторів, отриманих в процесі квантування як операторів народження і знищення, пов'язана з перетворенням операторно-значних польових функцій при просторово-часовому зсуві [14]. Оскільки внутрішні координати Якобі при такому перетворенні перетворюються тривіально, чотири вектор енергії-імпульсу частинки, що народжується або знищується, визначається лише величинами, спряженими із координатами центру мас. Ця обставина зберігається і у випадку врахування взаємодії між частинками. В той же час, після врахування взаємодії ми вже можемо надавати операторам народження і знищення фізичний сенс. Тому розглянемо процедуру кванту-

вання багаточастинкових полів знову, маючи рівняння, подібні до (3.87) для тричастинкового біспінорного поля.

Отже, процедуру квантування багаточастинкових полів з урахуванням отриманих раніше результатів можна описати наступним чином. Для двочастинкового псевдоскалярного поля, розглянутого в розділі 3.2 після подовження похідних з урахуванням (3.48), (3.66) і (3.79) на підмножині одночасності, отримаємо лагранжіан:

$$\begin{aligned}
L_\mu = & g^{a_1 a_2} \frac{\partial \phi_{f_1 f_2}^* (X, \bar{y}_1)}{\partial X^{a_1}} \frac{\partial \phi_{f_1 f_2} (X, \bar{y}_1)}{\partial X^{a_2}} - \left((2m)^2 \phi_{f_1 f_2}^* (X, \bar{y}_1) \phi_{f_1 f_2} (X, \bar{y}_1) + \right. \\
& + 2(2m) \frac{1}{m} \sum_{b=1}^3 \frac{\partial \phi_{f_1 f_2}^* (X, \bar{y}_1)}{\partial y_1^b} \frac{\partial \phi_{f_1 f_2} (X, \bar{y}_1)}{\partial y_1^b} + \\
& \left. + \frac{4}{3} g^2 \phi_{f_1 f_2}^* (X, \bar{y}_1) \phi_{f_1 f_2} (X, \bar{y}_1) \left((-a(X, \bar{y}_1)) + (-b(X, \bar{y}_1)) \right) \right). \quad (3.127)
\end{aligned}$$

Суму лагранжіану вільного тричастинкового біспінорного поля (3.62) і лагранжіану взаємодії (3.65) з урахуванням умови «безколірності» баріону (3.63) в змінних Якобі (3.3) на підмножині одночасності можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned}
L_B = & \frac{i}{2} \bar{\Psi}_{s_1}^{f_1 f_2 f_3} (X, \bar{y}_1, \bar{y}_2) \gamma_{s_1 s_2}^{a_1} \frac{\partial \Psi_{s_2}^{f_1 f_2 f_3} (X, \bar{y}_1, \bar{y}_2)}{\partial X^{a_1}} - \frac{i}{2} \frac{\partial \bar{\Psi}_{s_1}^{f_1 f_2 f_3} (X, \bar{y}_1, \bar{y}_2)}{\partial X^{a_1}} \gamma_{s_1 s_2}^a \Psi_{s_2}^{f_1 f_2 f_3} (X, \bar{y}_1, \bar{y}_2) - \\
& - \frac{3}{4m} \sum_{b=1}^3 \frac{\partial \bar{\Psi}_{s_1}^{f_1 f_2 f_3} (X, \bar{y}_1, \bar{y}_2)}{\partial y_1^b} \frac{\partial \Psi_{s_1}^{f_1 f_2 f_3} (X, \bar{y}_1, \bar{y}_2)}{\partial y_1^b} - \frac{1}{m} \sum_{b=1}^3 \frac{\partial \bar{\Psi}_{s_1}^{f_1 f_2 f_3} (X, \bar{y}_1, \bar{y}_2)}{\partial y_2^b} \frac{\partial \Psi_{s_1}^{f_1 f_2 f_3} (X, \bar{y}_1, \bar{y}_2)}{\partial y_2^b} - \quad (3.128) \\
& - \left(3m + \frac{g^2}{9m} \left((-a(X, \bar{y}_2)) + \left(-a \left(X, \bar{y}_1 + \frac{1}{2} \bar{y}_2 \right) \right) + \left(-a \left(X, \bar{y}_1 - \frac{1}{2} \bar{y}_2 \right) \right) \right) \right) \times \\
& \times \bar{\Psi}_{s_1}^{f_1 f_2 f_3} (X, \bar{y}_1, \bar{y}_2) \Psi_{s_1}^{f_1 f_2 f_3} (X, \bar{y}_1, \bar{y}_2)
\end{aligned}$$

В цих виразах всі поля розглядаються поки що як неквантовані. Для двоґлюонних полів a і b врахуємо представлення (3.86) і (3.118). При цьому поля $a_0(\bar{y}_1)$ з (3.86) і $b_0(\bar{y}_1)$ з (3.118) залежать тільки від внутрішніх змінних і, таким чином, описують взаємодію кварків всередині адрону. Вважаючи

внутрішні кварки в адронах нерелятивістськими, будемо розглядати функції $(-a_0(\vec{y}_1))$ і $(-b_0(\vec{y}_1))$ потенційними енергіями взаємодії кварків. Тому ці частини полів $a(X, \vec{y}_1)$ і $b(X, \vec{y}_1)$ квантувати не будемо. Натомість поля $a_1(X, \vec{y}_1)$ і $b_1(X, \vec{y}_1)$ квантуватимемо. Це можна пояснити тим, що поля $(-a_0(\vec{y}_1))$ і $(-b_0(\vec{y}_1))$, як видно з попереднього розділу, зростають до нескінченності. Внаслідок цього впливом процесів вимірювання на такі поля можна знехтувати. А поля $a_1(X, \vec{y}_1)$ і $b_1(X, \vec{y}_1)$ можна розглядати як малі флуктуації навколо $(-a_0(\vec{y}_1))$ і $(-b_0(\vec{y}_1))$. Тому для них застосовуватиметься квантування. Оскільки потенціали $(-a_0(\vec{y}_1))$ і $(-b_0(\vec{y}_1))$ визначаються рівнянням (3.85), вони є заданими. Таким чином, динамічна задача полягає в знаходженні полів $\phi_{f_1 f_2}^*(X, \vec{y}_1)$, $\phi_{f_1 f_2}(X, \vec{y}_1)$, $\bar{\Psi}_{s_1}(X, \vec{y}_1, \vec{y}_2)$, $\Psi_{s_1}(X, \vec{y}_1, \vec{y}_2)$, $a_1(X, \vec{y}_1)$ і $b_1(X, \vec{y}_1)$. Відповідно лагранжіанами взаємодії будемо вважати доданки, що породжують нелінійні внески в рівняння цих полів. Для проведення процедури квантування ми повинні на першому етапі відкинути лагранжіани взаємодії. Тоді отримаємо замість (3.127) і (3.128) з урахуванням (3.106) лагранжіани вільних багаточастинкових полів:

$$\begin{aligned}
L_{meson}^{(0)} &= g^{a_1 a_2} \frac{\partial \phi_{f_1 f_2}^* (X, \vec{y}_1)}{\partial X^{a_1}} \frac{\partial \phi_{f_1 f_2} (X, \vec{y}_1)}{\partial X^{a_2}} - \left((2m)^2 \phi_{f_1 f_2}^* (X, \vec{y}_1) \phi_{f_1 f_2} (X, \vec{y}_1) + \right. \\
&+ 2(2m) \frac{1}{m} \sum_{b=1}^3 \frac{\partial \phi_{f_1 f_2}^* (X, \vec{y}_1)}{\partial y_1^b} \frac{\partial \phi_{f_1 f_2} (X, \vec{y}_1)}{\partial y_1^b} + \\
&\left. + \frac{4}{3} g^2 \phi_{f_1 f_2}^* (X, \vec{y}_1) \phi_{f_1 f_2} (X, \vec{y}_1) \left((-a_0(\vec{y}_1)) + (-b_0(\vec{y}_1)) \right) \right), \\
L_{barion}^{(0)} &= \frac{i}{2} \bar{\Psi}_{s_1}^{f_1 f_2 f_3} (X, \vec{y}_1, \vec{y}_2) \gamma_{s_1 s_2}^{a_1} \frac{\partial \Psi_{s_2}^{f_1 f_2 f_3} (X, \vec{y}_1, \vec{y}_2)}{\partial X^{a_1}} - \\
&- \frac{i}{2} \frac{\partial \bar{\Psi}_{s_1}^{f_1 f_2 f_3} (X, \vec{y}_1, \vec{y}_2)}{\partial X^{a_1}} \gamma_{s_1 s_2}^a \Psi_{s_2}^{f_1 f_2 f_3} (X, \vec{y}_1, \vec{y}_2) - \\
&- \frac{3}{4m} \sum_{b=1}^3 \frac{\partial \bar{\Psi}_{s_1}^{f_1 f_2 f_3} (X, \vec{y}_1, \vec{y}_2)}{\partial y_1^b} \frac{\partial \Psi_{s_1}^{f_1 f_2 f_3} (X, \vec{y}_1, \vec{y}_2)}{\partial y_1^b} - \\
&- \frac{1}{m} \sum_{b=1}^3 \frac{\partial \bar{\Psi}_{s_1}^{f_1 f_2 f_3} (X, \vec{y}_1, \vec{y}_2)}{\partial y_2^b} \frac{\partial \Psi_{s_1}^{f_1 f_2 f_3} (X, \vec{y}_1, \vec{y}_2)}{\partial y_2^b} - \\
&- \left(3m + \frac{g^2}{9m} \left((-a_0(\vec{y}_2)) + \left(-a_0 \left(\vec{y}_1 + \frac{1}{2} \vec{y}_2 \right) \right) + \left(-a_0 \left(\vec{y}_1 - \frac{1}{2} \vec{y}_2 \right) \right) \right) \right) \times \\
&\times \bar{\Psi}_{s_1}^{f_1 f_2 f_3} (X, \vec{y}_1, \vec{y}_2) \Psi_{s_2}^{f_1 f_2 f_3} (X, \vec{y}_1, \vec{y}_2), \\
L_{glueball}^{(0)} &= \frac{1}{2} g^{a_1 a_2} \frac{\partial a_1 (X, \vec{y}_1)}{\partial X^{a_1}} \frac{\partial a_1 (X, \vec{y}_1)}{\partial X^{a_2}} - 2 \sum_{b=1}^3 \frac{\partial a_1 (X, \vec{y}_1)}{\partial y_1^b} \frac{\partial a_1 (X, \vec{y}_1)}{\partial y_1^b} + \\
&+ \frac{g^2}{2} a_0(\vec{y}_1) (a_1 (X, \vec{y}_1))^2.
\end{aligned} \tag{3.129}$$

Враховуючи (3.83) для поля $b_1(X, \vec{y}_1)$, отримаємо такий самий лагранжیان, що й $L_{a_1}^{(0)}$, але із заміною $a_1(X, \vec{y}_1)$ на $b_1(X, \vec{y}_1)$ і $a_0(\vec{y}_1)$ на $b_0(\vec{y}_1)$. Рівняння Лагранжа-Ейлера, що породжуються цими лагранжіанами, мають вигляд:

$$\begin{aligned}
& -g^{a_1 a_2} \frac{\partial^2 \phi_{f_1 f_2}^* (X, \vec{y}_1)}{\partial X^{a_2} \partial X^{a_1}} - \left(\hat{H}_{meson}^{internal} \right)^2 \phi_{f_1 f_2}^* (X, \vec{y}_1) = 0, \\
& -g^{a_1 a_2} \frac{\partial^2 \phi_{f_1 f_2} (X, \vec{y}_1)}{\partial X^{a_2} \partial X^{a_1}} - \left(\hat{H}_{meson}^{internal} \right)^2 \phi_{f_1 f_2} (X, \vec{y}_1) = 0, \\
& i \gamma_{s_1 s_2}^{a_1} \frac{\partial \Psi_{s_2}^{f_1 f_2 f_3} (X, \vec{y}_1, \vec{y}_2)}{\partial X^{a_1}} - \hat{H}_{barion}^{internal} \left(\Psi_{s_1}^{f_1 f_2 f_3} (X, \vec{y}_1, \vec{y}_2) \right) = 0, \\
& i \frac{\partial \bar{\Psi}_{s_1}^{f_1 f_2 f_3} (X, \vec{y}_1, \vec{y}_2)}{\partial X^{a_1}} \gamma_{s_1 s_2}^{a_1} + \hat{H}_{barion}^{internal} \left(\bar{\Psi}_{s_2}^{f_1 f_2 f_3} (X, \vec{y}_1, \vec{y}_2) \right) = 0, \\
& -g^{a_1 a_2} \frac{\partial^2 a_1 (X, \vec{y}_1)}{\partial X^{a_1} \partial X^{a_2}} - \left(\hat{H}_{glueball}^{internal} \right)^2 (a_1 (X, \vec{y}_1)) = 0,
\end{aligned} \tag{3.130}$$

де введені позначення для внутрішніх гамільтоніанів мезону, баріону і глюболу:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{meson}^{internal} &= (2m) \hat{E} - \frac{1}{m} \Delta_{\vec{y}_1} + \frac{1}{3m} g^2 \left((-a_0(\vec{y}_1)) + (-b_0(\vec{y}_1)) \right), \\
\hat{H}_{barion}^{internal} &= 3m - \frac{1}{m} \Delta_{\vec{y}_2} - \frac{3}{4m} \Delta_{\vec{y}_1} + \frac{g^2}{9m} \left((-a_0(\vec{y}_2)) + \left(-a_0 \left(\vec{y}_1 + \frac{1}{2} \vec{y}_2 \right) \right) + \left(-a_0 \left(\vec{y}_1 - \frac{1}{2} \vec{y}_2 \right) \right) \right), \\
\left(\hat{H}_{glueball}^{internal} \right)^2 &= -4 \Delta_{\vec{y}_1} + 2g^2 (-a_0(\vec{y}_1)) \hat{E}.
\end{aligned} \tag{3.131}$$

Враховуючи, що потенціали a_0 і b_0 залежать від граничних умов, що накладаються на розв'язки рівняння (3.85), для різних значень ароматових індексів f_1, f_2, f_3 , тобто для різних баріонів і мезонів, можна накладати різні граничні умови та отримувати різні потенціали, а відтак – різні внутрішні гамільтоніани. При цьому ми врахували, що внаслідок нерелятивістського наближення для конститuentних кварків, власні значення оператора $-\frac{1}{m} \Delta_{\vec{y}_1} + \frac{1}{3m} g^2 \left((-a_0(\vec{y}_1)) + (-b_0(\vec{y}_1)) \right)$ значно менші за $(2m)$. Тому в (3.130) при розгляді квадрату внутрішнього гамільтоніану ми знехтували квадратом

оператора $-\frac{1}{m}\Delta_{\vec{y}_1} + \frac{1}{3m}g^2\left((-a_0(\vec{y}_1)) + (-b_0(\vec{y}_1))\right)$ у порівнянні із квадратом оператора $(2m\hat{E})$.

Будемо вимагати, щоб залежності полів $\phi_{f_1 f_2}^*(X, \vec{y}_1)$, $\phi_{f_1 f_2}(X, \vec{y}_1)$, $\bar{\Psi}_{s_1}(X, \vec{y}_1, \vec{y}_2)$, $\Psi_{s_1}(X, \vec{y}_1, \vec{y}_2)$, $a_1(X, \vec{y}_1)$ і $b_1(X, \vec{y}_1)$ від внутрішніх змінних були власними функціями внутрішніх гамільтоніанів, такими, що відповідають найменшим власним значенням:

$$\begin{aligned} \hat{H}_{meson}^{\text{internal}}\left(\phi_{f_1 f_2}^*(X, \vec{y}_1)\right) &= M_{meson}\phi_{f_1 f_2}^*(X, \vec{y}_1), \\ \hat{H}_{meson}^{\text{internal}}\left(\phi_{f_1 f_2}(X, \vec{y}_1)\right) &= M_{meson}\phi_{f_1 f_2}(X, \vec{y}_1), \\ \hat{H}_{barion}^{\text{internal}}\left(\Psi_{s_1}^{f_1 f_2 f_3}(X, \vec{y}_1, \vec{y}_2)\right) &= M_{barion}\Psi_{s_1}^{f_1 f_2 f_3}(X, \vec{y}_1, \vec{y}_2), \\ \hat{H}_{barion}^{\text{internal}}\left(\bar{\Psi}_{s_1}^{f_1 f_2 f_3}(X, \vec{y}_1, \vec{y}_2)\right) &= M_{barion}\bar{\Psi}_{s_1}^{f_1 f_2 f_3}(X, \vec{y}_1, \vec{y}_2), \\ \left(\hat{H}_{glueball}^{\text{internal}}\right)^2\left(a_1(X, \vec{y}_1)\right) &= M_{glueball}^2 a_1(X, \vec{y}_1). \end{aligned} \quad (3.132)$$

Тоді ці власні значення увійдуть до рівнянь (3.130) як маси частинок – мезону (M_{meson}), баріону (M_{barion}) чи глюболу ($M_{glueball}$):

$$\begin{aligned} -g^{a_1 a_2} \frac{\partial^2 \phi_{f_1 f_2}^*(X, \vec{y}_1)}{\partial X^{a_2} \partial X^{a_1}} - (M_{meson})^2 \phi_{f_1 f_2}^*(X, \vec{y}_1) &= 0, \\ -g^{a_1 a_2} \frac{\partial^2 \phi_{f_1 f_2}(X, \vec{y}_1)}{\partial X^{a_2} \partial X^{a_1}} - (M_{meson})^2 \phi_{f_1 f_2}(X, \vec{y}_1) &= 0, \\ i\gamma_{s_1 s_2}^{a_1} \frac{\partial \Psi_{s_2}^{f_1 f_2 f_3}(X, \vec{y}_1, \vec{y}_2)}{\partial X^{a_1}} - M_{barion} \left(\Psi_{s_1}^{f_1 f_2 f_3}(X, \vec{y}_1, \vec{y}_2)\right) &= 0, \\ i \frac{\partial \bar{\Psi}_{s_1}^{f_1 f_2 f_3}(X, \vec{y}_1, \vec{y}_2)}{\partial X^{a_1}} \gamma_{s_1 s_2}^{a_1} + M_{barion} \left(\bar{\Psi}_{s_2}^{f_1 f_2 f_3}(X, \vec{y}_1, \vec{y}_2)\right) &= 0, \\ -g^{a_1 a_2} \frac{\partial^2 a_1(X, \vec{y}_1)}{\partial X^{a_1} \partial X^{a_2}} - M_{glueball}^2 \left(a_1(X, \vec{y}_1)\right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.133)$$

З цих рівнянь видно, що залежність від змінних X^{a_1} така сама, як у відповідних одночастинкових полів. Як вже зазначалося раніше, для процедури квантування суттєва лише саме ця залежність.

Оскільки внутрішні гамільтоніани в (3.132) залежать тільки від внутрішніх змінних, то рівняння (3.132) визначатимуть залежність власних функцій лише від внутрішніх змінних. Тому ці функції можуть бути представлені у вигляді:

$$\begin{aligned}\phi_{f_1 f_2}^*(X, \vec{y}_1) &= \Phi^*(X) \psi_{meson}^{f_1 f_2}(\vec{y}_1), \phi_{f_1 f_2}(X, \vec{y}_1) = \Phi(X) \psi_{meson}^{f_1 f_2}(\vec{y}_1), \\ \bar{\Psi}_{s_1}^{f_1 f_2 f_3}(X, \vec{y}_1, \vec{y}_2) &= \bar{\Psi}_{s_1}(X) \psi_{barion}^{f_1 f_2 f_3}(\vec{y}_1, \vec{y}_2), \\ \Psi_{s_1}^{f_1 f_2 f_3}(X, \vec{y}_1, \vec{y}_2) &= \Psi_{s_1}(X) \psi_{barion}^{f_1 f_2 f_3}(\vec{y}_1, \vec{y}_2), \\ a_1(X, \vec{y}_1) &= \phi_g(X) \psi_{glueball}(\vec{y}_1).\end{aligned}\quad (3.134)$$

Тут $\psi_{meson}^{f_1 f_2}(\vec{y}_1)$, $\psi_{barion}^{f_1 f_2 f_3}(\vec{y}_1, \vec{y}_2)$, $\psi_{glueball}(\vec{y}_1)$ - власні функції відповідних гамільтоніанів (3.132), нормовані на одиницю. Залежності $\Phi^*(X), \Phi(X), \bar{\Psi}_{s_1}(X), \Psi_{s_1}(X), a_G(X)$ визначаються з рівнянь (3.133). При цьому функції $\psi_{meson}^{f_1 f_2}(\vec{y}_1)$, $\psi_{barion}^{f_1 f_2 f_3}(\vec{y}_1, \vec{y}_2)$, $\psi_{glueball}(\vec{y}_1)$ можна виключити з цих рівнянь. Окрім того, оскільки ці функції задані рівняннями (3.132), то по них можна провести інтегрування в виразах для інтегралів руху - чотиривектору енергії-імпульсу, чотиривектору току тощо. Після цього вирази для інтегралів руху міститимуть лише польові функції $\Phi^*(X), \Phi(X), \bar{\Psi}_{s_1}(X), \Psi_{s_1}(X), \phi_g(X)$ і похідні від них. Після цього всі процедури, пов'язані з квантуванням полів та встановленням переставних співвідношень, вже нічим не відрізнятимуться від відповідних розрахунків для одночастинкових полів. Таким чином, замінюючи поля $\Phi^*(X), \Phi(X), \bar{\Psi}_{s_1}(X), \Psi_{s_1}(X), \phi_g(X)$ на відповідні операторно-значні польові функції, отримаємо, що їх негативно-частотні оператори матимуть сенс знищення відповідно псевдоскалярного мезону з масою M_{meson} , біспінорного баріону з масою M_{barion} і глюболу з масою $M_{glueball}$. При цьому всі ці маси визначаються задачею на власні значення (3.132). Окрім того, як в звичайній

одночастинковій теорії, оператори, пов'язані із $\hat{\Phi}^*(X)$ і $\hat{\Psi}_{s_1}(X)$, підвищують заряд на одиницю, а пов'язані із $\hat{\Phi}(X)$ і $\hat{\Psi}_{s_1}(X)$ - понижують. Якщо тепер врахувати взаємодію між квантованими мезонними, баріонними і глобальними полями, можемо описувати процеси пружного і непружного розсіювання мезонів і баріонів з обміном глюболами. При цьому для відповідних матричних елементів матимемо закон збереження енергії-імпульсу саме для чотирьох імпульсів адронів, а не частинок, що їх складають, як це є в експерименті.

3.6. Висновки до розділу 3

Отримані в даному розділі результати дозволяють застосовувати далі діаграмну техніку для опису процесів розсіювання протонів як пружних, так і непружних - з утворенням псевдоскалярних мезонів. При цьому в лагранжіанах як вільних полів, так і лагранжіанах взаємодії можна виконати інтегрування по внутрішніх змінних і звести таку теорію до формально одночастинкової. Тому розрахунок хронологічних спарювань і правила побудови амплітуди розсіювання не відрізняються від відповідних процедур в звичайній одночастинковій квантовій теорії поля. Таким чином, відкривається можливість опису експериментальних даних з правильним урахуванням закону збереження енергії.

РОЗДІЛ 4

**РОЗРАХУНОК ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ПЕРЕРІЗУ ПРУЖНОГО
РОЗСІЯННЯ АДРОНІВ ЗА ПЕРЕДАНИМ ЧОТИРИІМПУЛЬСОМ В
МЕЖАХ ТЕОРІЇ ЗБУРЕНЬ**

Застосуємо вище розглянуті багаточастинкові поля для розрахунку диференційного перерізу пружного розсіяння протонів $d\sigma^{elastic} / dt$ за квадратом переданого чотириімпульсу t . Залежність $d\sigma^{elastic} / dt$ від t добре відома з багатьох експериментів [162-164] і має характерний вигляд з різким падінням при малих значеннях $|t|$ і немонотонною поведінкою при великих $|t|$.

Підставляючи в лагранжіан (3.128) розклад (3.86), можемо виділити лагранжіан взаємодії тричастинкового біспінорного поля із двоглюонним полем $a_1(X, \vec{y}_1)$. Після процедури квантування з врахуванням представлення (3.134), описаної в попередньому розділі, в лагранжіані взаємодії можна провести інтегрування по внутрішніх змінних. Після цього маємо модель полів $\hat{\Psi}_{s_1}(X)$ і $\hat{\Psi}_{s_2}(X)$, взаємодіючих з полем $\hat{\phi}_g(X)$ (3.134). Лагранжіан взаємодії після інтегрування по внутрішніх змінних має вигляд:

$$L_{int} = G \int d^4X \left(\hat{\Psi}_{s_1}(X) \hat{\Psi}_{s_2}(X) \hat{\phi}_g(X) \right), \quad (4.1)$$

де введене позначення G для ефективної константи зв'язку, яка містить в собі добуток константи $(g^2/9m)$ на інтеграл по внутрішніх змінних і буде розглядатися далі як підгінний параметр. В межах моделі із лагранжіаном взаємодії (4.1) розрахуємо амплітуду пружного розсіяння протонів за допомогою теорії збурень із застосуванням діаграмної техніки Р.Фейнмана.

**4.1. Розрахунок внеску в диференціальний переріз пружного розсіяння
від найпростішої діаграми пружного розсіяння**

Найпростіша діаграма пружного розсіяння наведена на рис. 4.1.

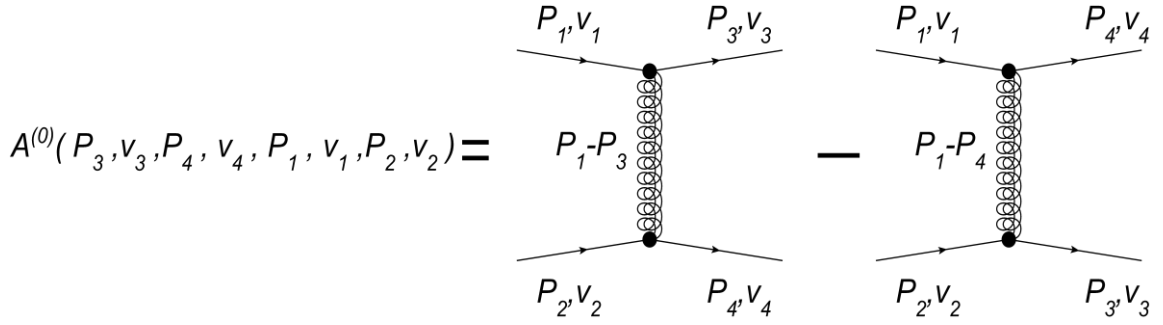


Рис. 4.1. Найпростіші діаграми пружного розсіяння з лагранжіаном взаємодії. Прямі лінії відповідають протонам, подвійні лінії - двоглюонним зв'язаним станам, P_1, P_2 - чотириімпульси вихідних протонів, P_3, P_4 - чотириімпульси протонів після розсіяння, $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ - початкові і кінцеві спіральності протонів. Знак «-» пов'язаний з антикомутативністю протонних операторів.

Аналітичний вираз для внеску в амплітуду розсіяння, що відповідає діаграмі на рис. 4.1, має вигляд

$$\begin{aligned}
 A^{(0)}(P_3, \nu_3, P_4, \nu_4; P_1, \nu_1, P_2, \nu_2) = & \\
 = \frac{-iG^2}{(2\pi)^2} & \left[\frac{\left(\left(\bar{v}_{\nu_4}^+(P_4) \right)_{s_1} \left(v_{\nu_1}^-(P_1) \right)_{s_1} \right) \left(\left(\bar{v}_{\nu_3}^+(P_3) \right)_{s_2} \left(v_{\nu_2}^-(P_2) \right)_{s_2} \right)}{M_g^2 - (P_4 - P_1)^2 - i\varepsilon} - \right. \\
 & \left. - \frac{\left(\left(\bar{v}_{\nu_4}^+(P_4) \right)_{s_2} \left(v_{\nu_2}^-(P_2) \right)_{s_2} \right) \left(\left(\bar{v}_{\nu_3}^+(P_3) \right)_{s_1} \left(v_{\nu_1}^-(P_1) \right)_{s_1} \right)}{M_g^2 - (P_3 - P_1)^2 - i\varepsilon} \right]. \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

Тут $\left(v_{\nu_1}^-(P_1) \right)_{s_1}, \left(v_{\nu_2}^-(P_2) \right)_{s_2}, \left(\bar{v}_{\nu_3}^+(P_3) \right)_{s_2}, \left(\bar{v}_{\nu_4}^+(P_4) \right)_{s_1}$ - компоненти відповідних розв'язків рівняння Дірака. Внаслідок громіздкості формул ми змінили позначення $M_{glueball}$ з попереднього розділу на більш економне M_g , яким в цьому розділі позначатимемо масу зв'язаного стану двох глюонів. Разом з ефективною константою зв'язку G маса глюболу M_g буде ще одним підгін-

ним параметром розглядуваної моделі. Решта позначень в (4.2) відповідає рис. 4.1.

Маючи амплітуду (4.2), можна розрахувати наближене значення диференційного перерізу пружного розсіяння, яке з точністю до константи співпадатиме із квадратом модуля амплітуди [165, 166]. При цьому, зазвичай експерименти по розсіянню проводяться із неполяризованими потоками протонів [162-164]. Цей факт можна врахувати, усереднюючи квадрат модуля амплітуди пружного розсіяння із спіноювою матрицею густини [165, 166]. Після такого усереднення виявляється, що значення підгінної константи M_g може бути обрано таким, що модель може описати немонотонний характер залежності $d\sigma^{elastic} / dt$ від t , але повністю ця залежність не може бути відтворена навіть на рівні якісного збігу. А саме, графік залежності $d\sigma^{elastic} / dt$ від t , після спадаючої ділянки містить зростаючу, яка замість того, щоб переходити в знов спадаючу виходить на постійну асимптотику. Вочевидь, внеску від найпростішої діаграми рис. 4.1 замало, щоби описати пружне розсіяння протонів. Тому окрім внеску (4.2) в амплітуді розсіяння були враховані інші внески, що потребують більш складного розрахунку. Замість розрахунку діаграм з петлями були розглянуті внески, що виникають внаслідок процедури унітаризації внеску, що визначається співвідношенням (4.2). Враховуючи результати робіт [143, 144, 154-156], можна очікувати, що суттєвим буде внесок в праву частину умови унітарності від непружних процесів. Однак його врахування потребує більш громіздких обчислень, тому ми поки що обмежилися врахуванням лише пружного внеску.

4.2. Розрахунок внеску в амплітуду пружного розсіяння протонів від стрибків на розрізах, що відповідають пороговій точці розгалуження для пружного розсіяння

Окрім внеску в амплітуду розсіяння, що відповідає діаграмі рис. 4.1., був також врахований внесок від його унітаризації [166, 167]. Позначаючи цей внесок як $A^{(1)}(P_3, \nu_3, P_4, \nu_4; P_1, \nu_1, P_2, \nu_2)$ та виходячи з умови унітарності, матимемо:

$$\begin{aligned} & \left(A^{(1)}(P_1, \nu_1, P_2, \nu_2; P_3, \nu_3, P_4, \nu_4) \right)^* - A^{(1)}(P_3, \nu_3, P_4, \nu_4; P_1, \nu_1, P_2, \nu_2) = \\ & = \sum_{\mu_3 \mu_4} \int \frac{d\vec{Q}_3}{(2\pi)^3 2\sqrt{M_P^2 + \vec{Q}_3^2}} \frac{d\vec{Q}_4}{(2\pi)^3 2\sqrt{M_P^2 + \vec{Q}_4^2}} \delta((P_3 + P_4) - (Q_3 + Q_4)) \times \\ & \times A^{(0)}(Q_3, \mu_3, Q_4, \mu_4; P_1, \nu_1, P_2, \nu_2) A^{(0)*}(Q_3, \mu_3, Q_4, \mu_4; P_3, \nu_3, P_4, \nu_4). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Тут M_P - маса протона, $A^{(0)}$ - внесок в амплітуду розсіяння від різниці діаграм на рис. 4.1., що визначається формулою (4.2), δ - дельта-функція Дірака. Інтегрування проводиться по чотириімпульсам частинок Q_3 і Q_4 в проміжному стані з урахуванням умови масової поверхні. Також проводиться підсумування по спіральностям μ_3, μ_4 частинок в проміжному стані. Решту внесків від непружних процесів поки що не було розраховано через обчислювальні труднощі. Подальший розрахунок розглянемо відносно системи центру мас вихідних протонів з чотириімпульсами P_1 і P_2 .

Розглянемо інтеграл від добутку $A^{(0)}(Q_3, \mu_3, Q_4, \mu_4; P_1, \nu_1, P_2, \nu_2)$ на $A^{(0)*}(Q_3, \mu_3, Q_4, \mu_4; P_3, \nu_3, P_4, \nu_4)$, що входить в праву частину рівності (4.3). Позначатимемо далі цей інтеграл $D^{elastic}$. Враховуючи вираз (4.2), який складається з двох доданків, що описують ферміонні властивості квантів біспінорного поля, бачимо що $D^{elastic}$ природно розбивається на чотири доданки:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2\pi}{G} \right)^4 D^{elastic} = D_1^{elastic} + D_2^{elastic} + D_3^{elastic} + D_4^{elastic}, \\ & D_1^{elastic} = \sum_{\mu_3 \mu_4} \int \frac{d\vec{Q}_3}{(2\pi)^3 2Q_{30}} \frac{d\vec{Q}_4}{(2\pi)^3 2Q_{40}} \delta((P_3 + P_4) - (Q_3 + Q_4)) \times \\ & \times \frac{\left(\left(\bar{v}_{\mu_4}^+(Q_4) \right)_{s_{11}}^* \left(v_{\nu_3}^-(P_3) \right)_{s_{11}}^* \right) \left(\left(\bar{v}_{\mu_3}^+(Q_3) \right)_{s_{12}}^* \left(v_{\nu_4}^-(P_4) \right)_{s_{12}}^* \right)}{M_g^2 - (Q_4 - P_3)^2 - i\varepsilon} \frac{\left(\left(\bar{v}_{\mu_4}^+(Q_4) \right)_{s_1} \left(v_{\nu_1}^-(P_1) \right)_{s_1} \right) \left(\left(\bar{v}_{\mu_3}^+(Q_3) \right)_{s_2} \left(v_{\nu_2}^-(P_2) \right)_{s_2} \right)}{M_g^2 - (Q_4 - P_1)^2 - i\varepsilon}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2^{elastic} &= - \sum_{\mu_3 \mu_4} \int \frac{d\bar{Q}_3}{(2\pi)^3 2Q_{30}} \frac{d\bar{Q}_4}{(2\pi)^3 2Q_{40}} \delta((P_3 + P_4) - (Q_3 + Q_4)) \times \\
&\times \frac{\left(\left(\bar{v}_{\mu_4}^+(Q_4) \right)_{s_2} \left(v_{v_2}^-(P_2) \right)_{s_2} \right) \left(\left(\bar{v}_{\mu_3}^+(Q_3) \right)_{s_1} \left(v_{v_1}^-(P_1) \right)_{s_1} \right)}{M_g^2 - (Q_3 - P_1)^2 - i\varepsilon} \times \\
&\times \frac{\left(\left(\bar{v}_{\mu_4}^+(Q_4) \right)_{s_{11}}^* \left(v_{v_3}^-(P_3) \right)_{s_{11}}^* \right) \left(\left(\bar{v}_{\mu_3}^+(Q_3) \right)_{s_{12}}^* \left(v_{v_4}^-(P_4) \right)_{s_{12}}^* \right)}{M_g^2 - (Q_4 - P_3)^2 - i\varepsilon}, \\
D_3^{elastic} &= - \sum_{\mu_3 \mu_4} \int \frac{d\bar{Q}_3}{(2\pi)^3 2Q_{30}} \frac{d\bar{Q}_4}{(2\pi)^3 2Q_{40}} \delta((P_3 + P_4) - (Q_3 + Q_4)) \times \\
&\times \frac{\left(\left(\bar{v}_{\mu_4}^+(Q_4) \right)_{s_{12}}^* \left(v_{v_4}^-(P_4) \right)_{s_{12}}^* \right) \left(\left(\bar{v}_{\mu_3}^+(Q_3) \right)_{s_{11}}^* \left(v_{v_3}^-(P_3) \right)_{s_{11}}^* \right)}{M_g^2 - (Q_3 - P_3)^2 - i\varepsilon} \times \\
&\times \frac{\left(\left(\bar{v}_{\mu_4}^+(Q_4) \right)_{s_1} \left(v_{v_1}^-(P_1) \right)_{s_1} \right) \left(\left(\bar{v}_{\mu_3}^+(Q_3) \right)_{s_2} \left(v_{v_2}^-(P_2) \right)_{s_2} \right)}{M_g^2 - (Q_4 - P_1)^2 - i\varepsilon}, \\
D_4^{elastic} &= \sum_{\mu_3 \mu_4} \int \frac{d\bar{Q}_3}{(2\pi)^3 2Q_{30}} \frac{d\bar{Q}_4}{(2\pi)^3 2Q_{40}} \delta((P_3 + P_4) - (Q_3 + Q_4)) \times \\
&\times \frac{\left(\left(\bar{v}_{\mu_4}^+(Q_4) \right)_{s_{12}}^* \left(v_{v_4}^-(P_4) \right)_{s_{12}}^* \right) \left(\left(\bar{v}_{\mu_3}^+(Q_3) \right)_{s_{11}}^* \left(v_{v_3}^-(P_3) \right)_{s_{11}}^* \right)}{M_g^2 - (Q_3 - P_3)^2 - i\varepsilon} \times \\
&\times \frac{\left(\left(\bar{v}_{\mu_4}^+(Q_4) \right)_{s_2} \left(v_{v_2}^-(P_2) \right)_{s_2} \right) \left(\left(\bar{v}_{\mu_3}^+(Q_3) \right)_{s_1} \left(v_{v_1}^-(P_1) \right)_{s_1} \right)}{M_g^2 - (Q_3 - P_1)^2 - i\varepsilon}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

За допомогою відомих співвідношень між розв'язками рівняння Дірака [168]

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mu_4} \left(\bar{v}_{\mu_4}^+(Q_4) \right)_{s_{11}}^* \left(\bar{v}_{\mu_4}^+(Q_4) \right)_{s_1} = \\
&= \sum_{\mu_4} \left(v_{\mu_4}^-(Q_4) \right)_{s_{22}} \left(\bar{v}_{\mu_4}^+(Q_4) \right)_{s_1} \gamma_{s_{22}s_{11}}^0 = \gamma_{s_{11}s_{22}}^0 \frac{Q_{4a_1} \gamma_{s_{22}s_1}^{a_1} + M_p \delta_{s_{22}s_1}}{2Q_{40}}, \\
&\sum_{\mu_3} \left(\bar{v}_{\mu_3}^+(Q_3) \right)_{s_{12}}^* \left(\bar{v}_{\mu_3}^+(Q_3) \right)_{s_2} = \\
&= \sum_{\mu_3} \left(v_{\mu_3}^-(Q_3) \right)_{s_{23}} \left(\bar{v}_{\mu_3}^+(Q_3) \right)_{s_2} \gamma_{s_{23}s_{12}}^0 = \gamma_{s_{12}s_{23}}^0 \frac{Q_{3a_2} \gamma_{s_{23}s_2}^{a_2} + M_p \delta_{s_{23}s_2}}{2Q_{30}},
\end{aligned} \tag{4.5}$$

в усіх чотирьох співвідношеннях можна провести підсумування по спіральності μ_3, μ_4 .

Окрім того, для спрощення подальших розрахунків розглянемо найбільш зручне обрання системи координат, відносно якої будемо розглядати компоненти імпульсів \vec{Q}_3 і \vec{Q}_4 , по яких проводиться інтегрування в (4.4). Оскільки ми розглядаємо інтеграл (4.4) відносно системи центру мас, то імпульси протонів в початковому стані \vec{P}_1 і \vec{P}_2 рівні за величиною і протилежні за напрямом. Уздовж прямої, на якій вони знаходяться, направимо вісь Z системи координат, додатний напрям якої оберемо уздовж вектора \vec{P}_1 . Для подальшого спрощення скористаємось можливістю піддати систему координат довільному оберту навколо осі Z . При цьому врахуємо, що внаслідок закону збереження імпульсу \vec{P}_3 і \vec{P}_4 також протилежні за напрямом і рівні за величиною. Отже вектори \vec{P}_1 і \vec{P}_2 , а також \vec{P}_3 і \vec{P}_4 визначають дві прями, що перетинаються. Тому ці чотири вектори визначають площину. Оберемо тоді систему координат так, щоб площина XOZ співпадала з площиною, в якій лежать $\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3$ і \vec{P}_4 . Тоді y -компонента кожного з цих чотирьох векторів дорівнюватиме нулю.

Представимо вектор \vec{Q}_3 в вигляді

$$\vec{Q}_3 = \vec{Q}_{3\parallel} + Q_{3y}\vec{e}_y. \quad (4.6)$$

Тут $\vec{Q}_{3\parallel}$ - проекція вектору \vec{Q}_3 на площину XOZ , а \vec{e}_y - одиничний орт уздовж осі Y .

Тоді по Q_{3y} можна виконати інтегрування (інтегрування по \vec{Q}_4 виконується за допомогою δ -функцій, що входять в (4.4)). Вираз (4.4) приймає вигляд:

$$\begin{aligned}
D_1^{elastic} &= \left(\bar{v}_{V_3}^+ (P_3) \right)_{s_{21}} \left(\bar{v}_{V_4}^+ (P_4) \right)_{s_{22}} \left(v_{V_1}^- (P_1) \right)_{s_1} \left(v_{V_2}^- (P_2) \right)_{s_2} \int_{(\bar{Q}_{3\parallel})^2 \leq P^2} \frac{1}{2\sqrt{P^2 - (\bar{Q}_{3\parallel})^2}} \frac{d\bar{Q}_{3\parallel}}{(2\pi)^6 s^{3/2}} \times \\
&\times \frac{\left(\frac{\sqrt{s}}{2} \gamma_{s_{21}s_1}^0 - Q_{3\parallel b_1} \gamma_{s_{21}s_1}^{b_1} + M_p \delta_{s_{21}s_1} \right) \left(\frac{\sqrt{s}}{2} \gamma_{s_{22}s_2}^0 + Q_{3\parallel b_2} \gamma_{s_{22}s_2}^{b_2} + M_p \delta_{s_{22}s_2} \right) - \left(P^2 - (\bar{Q}_{3\parallel})^2 \right) \gamma_{s_{22}s_2}^2 \gamma_{s_{21}s_1}^2}{\left(M_g^2 + 2(\bar{Q}_{3\parallel} \bar{P}_3) + 2P^2 \right) \left(M_g^2 + 2(\bar{P}_1 \bar{Q}_{3\parallel}) + 2P^2 \right)}, \\
D_2^{elastic} &= - \left(v_{V_2}^- (P_2) \right)_{s_2} \left(v_{V_1}^- (P_1) \right)_{s_1} \left(\bar{v}_{V_3}^+ (P_3) \right)_{s_{21}} \left(\bar{v}_{V_4}^+ (P_4) \right)_{s_{22}} \int_{(\bar{Q}_{3\parallel})^2 \leq P^2} \frac{1}{2\sqrt{P^2 - (\bar{Q}_{3\parallel})^2}} \frac{d\bar{Q}_{3\parallel}}{(2\pi)^6 s^{3/2}} \times \\
&\times \frac{\left(\frac{\sqrt{s}}{2} \gamma_{s_{21}s_2}^0 - Q_{3\parallel b_1} \gamma_{s_{21}s_2}^{b_1} + M_p \delta_{s_{21}s_2} \right) \left(\frac{\sqrt{s}}{2} \gamma_{s_{22}s_1}^0 + Q_{3\parallel b_2} \gamma_{s_{22}s_1}^{b_2} + M_p \delta_{s_{22}s_1} \right) - \left(P^2 - (\bar{Q}_{3\parallel})^2 \right) \gamma_{s_{21}s_2}^2 \gamma_{s_{22}s_1}^2}{\left(M_g^2 - 2(\bar{Q}_{3\parallel} \bar{P}_1) + 2P^2 \right) \left(M_g^2 + 2(\bar{P}_3 \bar{Q}_{3\parallel}) + 2P^2 \right)}, \quad (4.7) \\
D_3^{elastic} &= - \left(\bar{v}_{V_4}^+ (P_4) \right)_{s_{22}} \left(\bar{v}_{V_3}^+ (P_3) \right)_{s_{21}} \left(v_{V_1}^- (P_1) \right)_{s_1} \left(v_{V_2}^- (P_2) \right)_{s_2} \int_{(\bar{Q}_{3\parallel})^2 \leq P^2} \frac{1}{2\sqrt{P^2 - (\bar{Q}_{3\parallel})^2}} \frac{d\bar{Q}_{3\parallel}}{(2\pi)^6 s^{3/2}} \times \\
&\times \frac{\left(\frac{\sqrt{s}}{2} \gamma_{s_{22}s_1}^0 - Q_{3\parallel b_1} \gamma_{s_{22}s_1}^{b_1} + M_p \delta_{s_{22}s_1} \right) \left(\frac{\sqrt{s}}{2} \gamma_{s_{21}s_2}^0 + Q_{3\parallel b_2} \gamma_{s_{21}s_2}^{b_2} + M_p \delta_{s_{21}s_2} \right) - \left(P^2 - (\bar{Q}_{3\parallel})^2 \right) \gamma_{s_{22}s_1}^2 \gamma_{s_{21}s_2}^2}{\left(M_g^2 - 2(\bar{Q}_{3\parallel} \bar{P}_3) + 2P^2 \right) \left(M_g^2 + 2(\bar{Q}_{3\parallel} \bar{P}_1) + 2P^2 \right)}, \\
D_4^{elastic} &= \left(\bar{v}_{V_4}^+ (P_4) \right)_{s_{22}} \left(\bar{v}_{V_3}^+ (P_3) \right)_{s_{21}} \left(v_{V_2}^- (P_2) \right)_{s_2} \left(v_{V_1}^- (P_1) \right)_{s_1} \int_{(\bar{Q}_{3\parallel})^2 \leq P^2} \frac{1}{2\sqrt{P^2 - (\bar{Q}_{3\parallel})^2}} \frac{d\bar{Q}_{3\parallel}}{(2\pi)^6 s^{3/2}} \times \\
&\times \frac{\left(\frac{\sqrt{s}}{2} \gamma_{s_{22}s_2}^0 - Q_{3\parallel b_1} \gamma_{s_{22}s_2}^{b_1} + M_p \delta_{s_{22}s_2} \right) \left(\frac{\sqrt{s}}{2} \gamma_{s_{21}s_1}^0 + Q_{3\parallel b_2} \gamma_{s_{21}s_1}^{b_2} + M_p \delta_{s_{21}s_1} \right) - \left(P^2 - (\bar{Q}_{3\parallel})^2 \right) \gamma_{s_{22}s_2}^2 \gamma_{s_{21}s_1}^2}{\left(M_g^2 - 2(\bar{P}_3 \bar{Q}_{3\parallel}) + 2P^2 \right) \left(M_g^2 - 2(\bar{P}_1 \bar{Q}_{3\parallel}) + 2P^2 \right)},
\end{aligned}$$

де введено позначення $P \equiv \sqrt{\frac{s}{4} - M_P^2}$ для величини всіх чотирьох векторів \bar{P}_1 , \bar{P}_2 , \bar{P}_3 і \bar{P}_4 . При цьому $s = (P_1 + P_2)^2$ - змінна Мандельстама, що має сенс квадрату сумарної енергії протонів в системі центру мас. Окрім того, в виразах $Q_{3\parallel b_1} \gamma_{s_{21}s_1}^{b_1}$, $Q_{3\parallel b_2} \gamma_{s_{22}s_2}^{b_2}$ мається на увазі сума по значенням $b_1, b_2 = 1, 3$, а позначення $(\bar{Q}_{3\parallel} \bar{P}_3)$, $(\bar{P}_1 \bar{Q}_{3\parallel})$ означають евклідові скалярні добутки відповідних векторів.

Для подальшого виконання інтегрування перейдемо від компонент вектору $\vec{Q}_{3\parallel}$ до нових змінних x_1 і x_3 , що визначаються співвідношенням

$$\vec{Q}_{3\parallel} = x_1 \vec{P}_1 + x_3 \vec{P}_3 \quad (4.8)$$

Позначаючи θ кут між векторами \vec{P}_3 і \vec{P}_1 , матимемо:

$$Q_{3\parallel x} = Px_3 \sin(\theta) \quad (4.9)$$

$$Q_{3\parallel z} = Px_1 + Px_3 \cos(\theta)$$

Якобіан переходу до нових змінних у цьому випадку має вигляд:

$$\frac{\partial(Q_{3\parallel x}, Q_{3\parallel z})}{\partial(x_1, x_3)} = \begin{vmatrix} 0 & P \sin(\theta) \\ P & P \cos(\theta) \end{vmatrix} = -P^2 \sin(\theta) \quad (4.10)$$

Величина $(\vec{Q}_{3\parallel})^2$, що входить в усі інтеграли (4.7), виглядає як

$$(\vec{Q}_{3\parallel})^2 = P^2 \left((x_1)^2 + (x_3)^2 + 2x_1 x_3 \cos(\theta) \right) \quad (4.11)$$

Ця квадратична форма діагоналізується заміною

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 - y_3), x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(y_1 + y_3) \quad (4.12)$$

В цих змінних маємо:

$$(\vec{Q}_{3\parallel})^2 = P^2 \left(2 \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) (y_1)^2 + 2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) (y_3)^2 \right) \quad (4.13)$$

З (4.13) видно, що зручніше перейти до таких змінних:

$$y_1 = \frac{z_1}{\sqrt{2} \cos \left(\frac{\theta}{2} \right)}, y_3 = \frac{z_3}{\sqrt{2} \sin \left(\frac{\theta}{2} \right)}, \quad (4.14)$$

і після цього в площині (z_1, z_3) перейдемо до полярних координат

$$z_1 = r \cos(\alpha), z_3 = r \sin(\alpha). \quad (4.15)$$

Після всіх цих заміні отримаємо такі чотири вирази:

$$\begin{aligned}
D_1^{elastic} = & \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^1 \frac{r}{4\sqrt{1-r^2}} dr \frac{-P}{(2\pi)^6 s^{3/2}} \frac{1}{\left(M_g^2 + 2P^2 r \left(\cos(\alpha) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) + 2P^2 \right)} \times \\
& \times \frac{1}{\left(M_g^2 + 2P^2 r \left(\cos(\alpha) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) + 2P^2 \right)} \times \\
& \times \left(\left(\frac{\sqrt{s}}{2} (\bar{v}_{V_3}^+(P_3))_{s_{21}} \gamma_{s_{21}s_1}^0 (v_{V_1}^-(P_1))_{s_1} - rP \left(\cos(\alpha) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin(\alpha) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) (\bar{v}_{V_3}^+(P_3))_{s_{21}} \gamma_{s_{21}s_1}^1 (v_{V_1}^-(P_1))_{s_1} - \right. \right. \\
& - rP \left(\cos(\alpha) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) (\bar{v}_{V_3}^+(P_3))_{s_{21}} \gamma_{s_{21}s_1}^3 (v_{V_1}^-(P_1))_{s_1} + M_p (\bar{v}_{V_3}^+(P_3))_{s_{21}} \delta_{s_{21}s_1} (v_{V_1}^-(P_1))_{s_1} \Big) \times \\
& \times \left(\frac{\sqrt{s}}{2} (\bar{v}_{V_4}^+(P_4))_{s_{22}} \gamma_{s_{22}s_2}^0 (v_{V_2}^-(P_2))_{s_2} + rP \left(\cos(\alpha) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin(\alpha) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) (\bar{v}_{V_4}^+(P_4))_{s_{22}} \gamma_{s_{22}s_2}^1 (v_{V_2}^-(P_2))_{s_2} + \right. \\
& + rP \left(\cos(\alpha) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) (\bar{v}_{V_4}^+(P_4))_{s_{22}} \gamma_{s_{22}s_2}^3 (v_{V_2}^-(P_2))_{s_2} + M_p (\bar{v}_{V_4}^+(P_4))_{s_{22}} \delta_{s_{22}s_2} (v_{V_2}^-(P_2))_{s_2} \Big) - \\
& \left. - P^2 (1-r^2) (\bar{v}_{V_3}^+(P_3))_{s_{21}} \gamma_{s_{21}s_1}^2 (v_{V_1}^-(P_1))_{s_1} (\bar{v}_{V_4}^+(P_4))_{s_{22}} \gamma_{s_{22}s_2}^2 (v_{V_2}^-(P_2))_{s_2} \right), \tag{4.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2^{elastic} = & \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr \frac{P}{4} \frac{1}{(2\pi)^6 s^{3/2}} \frac{1}{\left(M_g^2 - 2P^2 r \left(\cos(\alpha) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) + 2P^2 \right)} \times \\
& \times \frac{1}{\left(M_g^2 + 2P^2 r \left(\cos(\alpha) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) + 2P^2 \right)} \times \\
& \times \left(\left(\frac{\sqrt{s}}{2} (\bar{v}_{V_3}^+(P_3))_{s_{21}} \gamma_{s_{21}s_2}^0 (v_{V_2}^-(P_2))_{s_2} - rP \left(\cos(\alpha) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin(\alpha) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) (\bar{v}_{V_3}^+(P_3))_{s_{21}} \gamma_{s_{21}s_2}^1 (v_{V_2}^-(P_2))_{s_2} - \right. \right. \\
& - rP \left(\cos(\alpha) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) (\bar{v}_{V_3}^+(P_3))_{s_{21}} \gamma_{s_{21}s_2}^3 (v_{V_2}^-(P_2))_{s_2} + M_p (\bar{v}_{V_3}^+(P_3))_{s_{21}} \delta_{s_{21}s_2} (v_{V_2}^-(P_2))_{s_2} \Big) \times \\
& \times \left(\frac{\sqrt{s}}{2} (\bar{v}_{V_4}^+(P_4))_{s_{22}} \gamma_{s_{22}s_1}^0 (v_{V_1}^-(P_1))_{s_1} + rP \left(\cos(\alpha) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin(\alpha) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) (\bar{v}_{V_4}^+(P_4))_{s_{22}} \gamma_{s_{22}s_1}^1 (v_{V_1}^-(P_1))_{s_1} + \right. \\
& + rP \left(\cos(\alpha) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) (\bar{v}_{V_4}^+(P_4))_{s_{22}} \gamma_{s_{22}s_1}^3 (v_{V_1}^-(P_1))_{s_1} + M_p (\bar{v}_{V_4}^+(P_4))_{s_{22}} \delta_{s_{22}s_1} (v_{V_1}^-(P_1))_{s_1} \Big) - \\
& \left. - P^2 (1-r^2) (\bar{v}_{V_3}^+(P_3))_{s_{21}} \gamma_{s_{21}s_2}^2 (v_{V_2}^-(P_2))_{s_2} (\bar{v}_{V_4}^+(P_4))_{s_{22}} \gamma_{s_{22}s_1}^2 (v_{V_1}^-(P_1))_{s_1} \right), \tag{4.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_3^{elastic} = & \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr \frac{P}{4} \frac{1}{(2\pi)^6 s^{3/2}} \frac{1}{\left(M_g^2 - 2P^2 r \left(\cos(\alpha) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) + 2P^2 \right)} \times \\
& \times \frac{1}{\left(M_g^2 + 2P^2 r \left(\cos(\alpha) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) + 2P^2 \right)} \times \\
& \times \left(\left(\frac{\sqrt{s}}{2} (\bar{v}_{v_4}^+(P_4))_{s_{22}} \gamma_{s_{22}s_1}^0 (v_{v_1}^-(P_1))_{s_1} - rP \left(\cos(\alpha) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin(\alpha) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) (\bar{v}_{v_4}^+(P_4))_{s_{22}} \gamma_{s_{22}s_1}^1 (v_{v_1}^-(P_1))_{s_1} - \right. \right. \\
& \left. \left. - rP \left(\cos(\alpha) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) (\bar{v}_{v_4}^+(P_4))_{s_{22}} \gamma_{s_{22}s_1}^3 (v_{v_1}^-(P_1))_{s_1} + M_p (\bar{v}_{v_4}^+(P_4))_{s_{22}} \delta_{s_{22}s_1} (v_{v_1}^-(P_1))_{s_1} \right) \times \quad (4.18) \\
& \times \left(\frac{\sqrt{s}}{2} (\bar{v}_{v_3}^+(P_3))_{s_{21}} \gamma_{s_{21}s_2}^0 (v_{v_2}^-(P_2))_{s_2} + rP \left(\cos(\alpha) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin(\alpha) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) (\bar{v}_{v_3}^+(P_3))_{s_{21}} \gamma_{s_{21}s_2}^1 (v_{v_2}^-(P_2))_{s_2} + \right. \\
& \left. + rP \left(\cos(\alpha) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) (\bar{v}_{v_3}^+(P_3))_{s_{21}} \gamma_{s_{21}s_2}^3 (v_{v_2}^-(P_2))_{s_2} + M_p (\bar{v}_{v_3}^+(P_3))_{s_{21}} \delta_{s_{21}s_2} (v_{v_2}^-(P_2))_{s_2} \right) - \\
& \left. - P^2 (1-r^2) (\bar{v}_{v_4}^+(P_4))_{s_{22}} \gamma_{s_{22}s_1}^2 (v_{v_1}^-(P_1))_{s_1} (\bar{v}_{v_3}^+(P_3))_{s_{21}} \gamma_{s_{21}s_2}^2 (v_{v_2}^-(P_2))_{s_2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_4^{elastic} = & \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} dr \frac{-P}{4} \frac{1}{(2\pi)^6 s^{3/2}} \frac{1}{\left(M_g^2 - 2P^2 r \left(\cos(\alpha) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) + 2P^2 \right)} \times \\
& \times \frac{1}{\left(M_g^2 - 2P^2 r \left(\cos(\alpha) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) + 2P^2 \right)} \times \\
& \times \left(\left(\frac{\sqrt{s}}{2} (\bar{v}_{v_4}^+(P_4))_{s_{22}} \gamma_{s_{22}s_2}^0 (v_{v_2}^-(P_2))_{s_2} - rP \left(\cos(\alpha) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin(\alpha) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) (\bar{v}_{v_4}^+(P_4))_{s_{22}} \gamma_{s_{22}s_2}^1 (v_{v_2}^-(P_2))_{s_2} - \right. \right. \\
& \left. \left. - rP \left(\cos(\alpha) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) (\bar{v}_{v_4}^+(P_4))_{s_{22}} \gamma_{s_{22}s_2}^3 (v_{v_2}^-(P_2))_{s_2} + M_p (\bar{v}_{v_4}^+(P_4))_{s_{22}} \delta_{s_{22}s_2} (v_{v_2}^-(P_2))_{s_2} \right) \times \quad (4.19) \\
& \times \left(\frac{\sqrt{s}}{2} (\bar{v}_{v_3}^+(P_3))_{s_{21}} \gamma_{s_{21}s_1}^0 (v_{v_1}^-(P_1))_{s_1} + rP \left(\cos(\alpha) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin(\alpha) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) (\bar{v}_{v_3}^+(P_3))_{s_{21}} \gamma_{s_{21}s_1}^1 (v_{v_1}^-(P_1))_{s_1} + \right. \\
& \left. + rP \left(\cos(\alpha) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) (\bar{v}_{v_3}^+(P_3))_{s_{21}} \gamma_{s_{21}s_1}^3 (v_{v_1}^-(P_1))_{s_1} + M_p (\bar{v}_{v_3}^+(P_3))_{s_{21}} \delta_{s_{21}s_1} (v_{v_1}^-(P_1))_{s_1} \right) - \\
& \left. - P^2 (1-r^2) (\bar{v}_{v_4}^+(P_4))_{s_{22}} \gamma_{s_{22}s_2}^2 (v_{v_2}^-(P_2))_{s_2} (\bar{v}_{v_3}^+(P_3))_{s_{21}} \gamma_{s_{21}s_1}^2 (v_{v_1}^-(P_1))_{s_1} \right)
\end{aligned}$$

Подальше спрощення можливе з урахуванням рівняння Дірака, власли-
док якого

$$\begin{aligned}
\left(\bar{v}_{v_3}^+(P_3)\right)_{s_{21}} \gamma_{s_{21}s_1}^3 \left(v_{v_1}^-(P_1)\right)_{s_1} &= \frac{\sqrt{s}}{2P} \left(\bar{v}_{v_3}^+(P_3)\right)_{s_{21}} \gamma_{s_{21}s_1}^0 \left(v_{v_1}^-(P_1)\right)_{s_1} - \frac{M_P}{P} \left(\bar{v}_{v_3}^+(P_3)\right)_{s_{21}} \delta_{s_{21}s_1} \left(v_{v_1}^-(P_1)\right)_{s_1} \\
\left(\bar{v}_{v_3}^+(P_3)\right)_{s_{21}} \gamma_{s_{21}s_1}^1 \left(v_{v_1}^-(P_1)\right)_{s_2} &= \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{P \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left(\frac{\sqrt{s}}{2} \left(\bar{v}_{v_3}^+(P_3)\right)_{s_{21}} \gamma_{s_{21}s_1}^0 \left(v_{v_1}^-(P_1)\right)_{s_1} - M_P \left(\bar{v}_{v_3}^+(P_3)\right)_{s_{21}} \delta_{s_{21}s_1} \left(v_{v_1}^-(P_1)\right)_{s_1} \right)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Для зручності запису введемо перепозначення

$$\begin{aligned}
L_+(P_3, P_1) &\equiv \frac{\sqrt{s}}{2} \left(\bar{v}_{v_3}^+(P_3)\right)_{s_{21}} \gamma_{s_{21}s_1}^0 \left(v_{v_1}^-(P_1)\right)_{s_1} + M_P \left(\bar{v}_{v_3}^+(P_3)\right)_{s_{21}} \delta_{s_{21}s_1} \left(v_{v_1}^-(P_1)\right)_{s_1} \\
L_-(P_3, P_1) &\equiv \frac{\sqrt{s}}{2} \left(\bar{v}_{v_3}^+(P_3)\right)_{s_{21}} \gamma_{s_{21}s_1}^0 \left(v_{v_1}^-(P_1)\right)_{s_1} - M_P \left(\bar{v}_{v_3}^+(P_3)\right)_{s_{21}} \delta_{s_{21}s_1} \left(v_{v_1}^-(P_1)\right)_{s_1} \\
L_2((P_4, P_2), (P_3, P_1)) &\equiv \left(\bar{v}_{v_4}^+(P_4)\right)_{s_{22}} \gamma_{s_{22}s_2}^2 \left(v_{v_2}^-(P_2)\right)_{s_2} \left(\bar{v}_{v_3}^+(P_3)\right)_{s_{21}} \gamma_{s_{21}s_1}^2 \left(v_{v_1}^-(P_1)\right)_{s_1}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Аналогічні позначення L_+ і L_- будуть і для чотириімпульсів P_4, P_2 .

Оскільки в нашій моделі маємо справу з біспінорними полями, то амплітуда пружного розсіяння виражається не тільки через Лоренц-інваріанти $s = (P_1 + P_2)^2, t = (P_1 - P_3)^2, u = (P_1 - P_4)^2$, а й через Лоренц-інваріанти, які побудовані з матриць Дірака і розв'язків рівнянь Дірака, що видно з (4.21).

Як буде видно з подальшого, наявність цих Лоренц-інваріантів суттєво впливає на аналітичні властивості амплітуди розсіяння. При цьому внески від таких інваріантів з'являтимуться в усіх доданках в правій частині умови унітарності, в тому числі і в тих, що відповідатимуть непружним процесам. Механізм зменшення віртуальностей із зростанням енергії \sqrt{s} [154] може підсилювати ефекти, що описуються цими Лоренц-інваріантами. Тому нас цікавитиме питання, чи можуть ці ефекти відповідати за характерну якісну поведінку диференційного перерізу, яка спостерігається в експерименті.

Після підстановки формули (4.21) у вирази (4.16), (4.17), (4.18), (4.19) і

$$\text{із заміною } l_-(P_3, P_1) = \frac{L_-(P_3, P_1)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}, l_-^{\sin}(P_3, P_1) = \frac{L_-(P_3, P_1)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \text{ маємо}$$

$$\begin{aligned}
D_1^{elastic} &= \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^1 \frac{r}{4\sqrt{1-r^2}} dr \frac{-P}{(2\pi)^6 s^{3/2}} \frac{\left(L_+(P_3, P_1) - r \cos(\alpha) l_-(P_3, P_1)\right)^2 - P^2(1-r^2) L_2((P_3, P_1), (P_4, P_2))}{\left(M_g^2 + 2P^2 r \left(\cos(\alpha) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + 2P^2\right)} \times \\
&\times \frac{1}{\left(M_g^2 + 2P^2 r \left(\cos(\alpha) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + 2P^2\right)}, \\
D_2^{elastic} &= \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^1 \frac{r}{4\sqrt{1-r^2}} dr \frac{P}{4(2\pi)^6 s^{3/2}} \frac{\left(L_+(P_3, P_2) - r \sin(\alpha) l_-^{\sin}(P_3, P_2)\right)^2 - P^2(1-r^2) L_2((P_3, P_2), (P_4, P_1))}{\left(M_g^2 - 2P^2 r \left(\cos(\alpha) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + 2P^2\right)} \times \\
&\times \frac{1}{\left(M_g^2 + 2P^2 r \left(\cos(\alpha) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + 2P^2\right)}, \tag{4.22} \\
D_3^{elastic} &= \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^1 \frac{r}{4\sqrt{1-r^2}} dr \frac{P}{4(2\pi)^6 s^{3/2}} \frac{\left(L_+(P_3, P_2) + r \sin(\alpha) l_-^{\sin}(P_3, P_2)\right)^2 - P^2(1-r^2) L_2((P_4, P_1), (P_3, P_2))}{\left(M_g^2 - 2P^2 r \left(\cos(\alpha) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + 2P^2\right)} \times \\
&\times \frac{1}{\left(M_g^2 + 2P^2 r \left(\cos(\alpha) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + 2P^2\right)}, \\
D_4^{elastic} &= \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^1 \frac{r}{4\sqrt{1-r^2}} dr \frac{-P}{4(2\pi)^6 s^{3/2}} \frac{\left(L_+(P_3, P_1) + r \cos(\alpha) l_-(P_3, P_1)\right)^2 - P^2(1-r^2) L_2((P_4, P_2), (P_3, P_1))}{\left(M_g^2 - 2P^2 r \left(\cos(\alpha) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + 2P^2\right)} \times \\
&\times \frac{1}{\left(M_g^2 - 2P^2 r \left(\cos(\alpha) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin(\alpha) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + 2P^2\right)}.
\end{aligned}$$

Далі введемо нову змінну z згідно із співвідношенням

$$\alpha = \pi + 2 \arctg(z), \tag{4.23}$$

а також позначення

$$c_+ = M_g^2 + 2P^2 + 2P^2 r \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), c_- = M_g^2 + 2P^2 - 2P^2 r \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{4.24}$$

Вираз (4.22) приймає такий вигляд

$$\begin{aligned}
D_1^{elastic} &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{1}{(z^2+1)} \int_0^1 \frac{r}{4\sqrt{1-r^2}} dr \frac{-P}{(2\pi)^6 s^{3/2}} \frac{\left(L_+(P_3, P_1)(z^2+1) + r(1-z^2)L_-(P_3, P_1) \right)^2 - P^2(1-r^2)(z^2+1)^2 L_2((P_3, P_1), (P_4, P_2))}{\left(c_+ z^2 - 4P^2 r z \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + c_- \right) \left(c_+ z^2 + 4P^2 r z \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + c_- \right)}, \\
D_2^{elastic} &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{1}{(z^2+1)} \int_0^1 \frac{r}{4\sqrt{1-r^2}} dr \frac{P}{4(2\pi)^6 s^{3/2}} \frac{\left(L_+(P_3, P_2)(z^2+1) + r z l_{-}^{\sin}(P_3, P_2) \right)^2 - P^2(1-r^2)(z^2+1)^2 L_2((P_3, P_2), (P_4, P_1))}{\left(c_+ z^2 - 4P^2 r z \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + c_- \right) \left(c_- z^2 - 4P^2 r z \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + c_+ \right)}, \\
D_3^{elastic} &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{1}{(z^2+1)} \int_0^1 \frac{r}{4\sqrt{1-r^2}} dr \frac{P}{4(2\pi)^6 s^{3/2}} \frac{\left(L_+(P_3, P_2)(z^2+1) - r z l_{-}^{\sin}(P_3, P_2) \right)^2 - P^2(1-r^2)(z^2+1)^2 L_2((P_4, P_1), (P_3, P_2))}{\left(c_- z^2 + 4P^2 r z \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + c_+ \right) \left(c_+ z^2 + 4P^2 r z \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + c_- \right)}, \\
D_4^{elastic} &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{1}{(z^2+1)} \int_0^1 \frac{r}{4\sqrt{1-r^2}} dr \frac{-P}{4(2\pi)^6 s^{3/2}} \frac{\left(L_+(P_3, P_1)(z^2+1) - r(1-z^2)L_-(P_3, P_1) \right)^2 - P^2(1-r^2)(z^2+1)^2 L_2((P_4, P_2), (P_3, P_1))}{\left(c_- z^2 + 4P^2 r z \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + c_+ \right) \left(c_- z^2 - 4P^2 r z \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + c_+ \right)}.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Далі інтеграл по z розраховується за допомогою замикання контуру в верхній або нижній півплощині і використання теореми про лишки. Після цього інтегрування по r вже не представляє проблем. Оскільки результат розрахунку є достатньо громіздкий, щоб його записати, введемо позначення:

$$\begin{aligned}
u_c &= \sqrt{\left(M_g^2 + 2P^2 \right)^2 - 4P^4 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \\
u_s &\equiv \sqrt{\left(M_g^2 + 2P^2 \right)^2 - 4P^4 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \\
X_s &= \ln \left(1 + \frac{4P^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{u_c - 2P^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right), \\
X_c &= \ln \left(1 + \frac{4P^2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{u_s - 2P^2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right), \\
u_1 &\equiv \text{Arsh} \left(\sqrt{\frac{4P^4}{\left(M_g^2 + 2P^2 \right)^2 - 4P^4}} \right).
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Після розрахунку інтегралів в (4.25) з урахуванням позначень (4.26) отримаємо:

$$\begin{aligned}
D^{elastic} &= D_1^{elastic} + D_4^{elastic} + D_2^{elastic} + D_3^{elastic} = \\
&= \frac{1}{8(2\pi)^5} \left(\frac{1}{(M_p^2 + P^2)^{3/2}} (L_+(P_4, P_1))^2 \frac{X_c}{4P \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) u_s} - \frac{1}{(M_p^2 + P^2)^{3/2}} (L_+(P_3, P_1))^2 \frac{X_s}{4P \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) u_c} + \right. \\
&+ \frac{1}{(M_p^2 + P^2)^{3/2}} (L_+(P_3, P_1) L_-(P_3, P_1)) \left(\frac{u_1}{2P^3 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} - \frac{X_s}{(M_g^2 + 2P^2) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left(\frac{P}{u_c} + \frac{u_c}{4P^3 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right) \right) + \\
&+ \frac{1}{(M_p^2 + P^2)^{3/2}} (L_+(P_4, P_1) L_-(P_4, P_1)) \left(\frac{X_c}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) (M_g^2 + 2P^2)} \left(\frac{P}{u_s} + \frac{u_s}{4P^3 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right) - \frac{u_1}{2P^3 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right) + \\
&+ \frac{1}{(M_p^2 + P^2)^{3/2}} (L_-(P_3, P_1))^2 \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left(\frac{(M_g^2 + 2P^2) u_1}{8P^5} \left(\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} + 1 \right) - \frac{X_s}{4P^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left(\frac{P}{u_c} + \frac{u_c}{4P^3 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right) - \frac{1}{4P^3} \right) + \\
&+ \frac{1}{(M_p^2 + P^2)^{3/2}} (L_-(P_4, P_1))^2 \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left(\frac{X_c}{4P^2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left(\frac{P}{u_s} + \frac{u_s}{4P^3 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right) - \frac{u_1 (M_g^2 + 2P^2)}{8P^5} \left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} + 1 \right) - \frac{1}{4P^3} \right) + \\
&+ \frac{1}{(M_p^2 + P^2)^{3/2}} L_2((P_3, P_1), (P_4, P_2)) \left(\frac{1}{8P^3 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left((M_g^2 + 2P^2) u_1 - \frac{X_s u_c}{2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right) \right) + \\
&+ \frac{1}{(M_p^2 + P^2)^{3/2}} L_2((P_4, P_1), (P_3, P_2)) \left(\frac{1}{8P^3 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left(\frac{X_c u_s}{2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} - u_1 (M_g^2 + 2P^2) \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Вираз (4.27) з точністю до константи є результатом розрахунку правої частини умови унітарності (4.3). При цьому, як видно з (4.27), ми виділили множники при кожному з Лоренц-інваріантів, побудованих з розв'язків рівняння Дірака. Для подальшого розгляду зручно ввести нові позначення для Лоренц-інваріантів:

$$\begin{aligned}
I_1 &= (L_+(P_4, P_1))^2, I_2 = (L_+(P_3, P_1))^2, I_3 = (L_-(P_4, P_1))^2, I_4 = (L_-(P_3, P_1))^2, \\
I_5 &= L_+(P_3, P_1) L_-(P_3, P_1), I_6 = L_+(P_4, P_1) L_-(P_4, P_1), I_7 = L_2(P_3, P_1) L_2(P_4, P_2), \\
I_8 &= L_2((P_4, P_1), (P_3, P_2)).
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Коефіцієнт при інваріанті I_k в виразі (4.27) позначатимемо $D_k(s, t)$. Лоренц-

інваріант s входить в вирази для коефіцієнтів $D_k(s, t)$ через величину імпульсу P , а t - через кут вильоту θ .

Якщо права частина умови унітарності (4.3) є лінійною комбінацією інваріантів I_k , то й ліва також повинна бути лінійною комбінацією тих самих інваріантів. Тобто унітаризовану амплітуду $A^{(1)}(P_1, \nu_1, P_2, \nu_2; P_3, \nu_3, P_4, \nu_4)$ будемо шукати в вигляді:

$$A^{(1)}(P_3, \nu_3, P_4, \nu_4; P_1, \nu_1, P_2, \nu_2) = \sum_{k=1}^7 A_k^{(1)}(s, t, u) I_k, \quad (4.29)$$

де $A_k^{(1)}(s, t, u)$ - коефіцієнти розкладу, які ми збираємось знайти завдяки їх аналітичним властивостям. Ці властивості є наслідком умови унітарності.

Підставляючи розклад (4.29) в (4.3), бачимо, що операція заміни початкового і кінцевого станів розсіяння між собою з наступним комплексним спряженням, яка має місце в лівій частині умови унітарності (4.3) переводить інваріанти I_k самих в себе, а коефіцієнти $A_k^{(1)}(s, t, u)$ - в комплексно спряжені функції. Тому за своїми аналітичними властивостями кожна з функцій $A_k^{(1)}(s, t, u)$ аналогічна амплітуді розсіяння частинок із нульовим спіном. Зокрема, нижче порога пружного розсіяння при $\sqrt{s} < 4M_P^2$, функції $A_k^{(1)}(s, t, u)$ повинні приймати дійсні значення. Наслідком цього є властивість дійсної аналітичності [166] кожної з функцій $A_k^{(1)}(s, t, u)$. Тобто, якщо розглянути аналітичне подовження $A_k^{(1)}(s, t, u)$ в площину комплексної змінної s , то у взаємно спряжених точках функції $A_k^{(1)}(s, t, u)$ повинні приймати комплексно спряжені значення. Наслідком цієї властивості [166] є те, що точка $\sqrt{s} = 4M_P^2$ є точкою розгалуження для кожної з функцій $A_k^{(1)}(s, t, u)$. Тоді кожна з величин $D_k(s, t)$, що визначаються співвідношенням (4.27), які з урахуванням

(4.4) ще потрібно помножити на $(G/(2\pi))^4$, є стрибком функції $A_k^{(1)}(s, t, u)$ на розрізі, що йде від точки розгалуження по дійсній осі. Тоді, застосовуючи до $A_k^{(1)}(s, t, u)$ інтегральну формулу Коші [169], отримаємо

$$A_k^{(1)}(s, t, u) = \frac{1}{\pi} (G/(2\pi))^4 \int_{4M_g^2}^{+\infty} \frac{D_k(s', t)}{s' - s - i\varepsilon} ds'. \quad (4.30)$$

Оскільки величини $D_k(s', t)$ відомі з формули (4.27), то співвідношення (4.30) визначає $A_k^{(1)}(s, t, u)$. Відповідні інтеграли були обчислені чисельно. Після чого знаходився внесок $A^{(1)}(P_3, \nu_3, P_4, \nu_4; P_1, \nu_1, P_2, \nu_2)$ (4.29) і додавався до полюсного внеску $A^{(0)}(P_3, \nu_3, P_4, \nu_4; P_1, \nu_1, P_2, \nu_2)$, що обговорювався в попередньому розділі.

Далі квадрат модуля знайденої амплітуди усереднювався із спіноювою матрицею густини. Розрахунки були проведені при різних енергіях \sqrt{s} . Деякі з них представлені на рис. 4.2. і рис. 4.3. В наших розрахунках застосовані два підгінних параметри: маса глюболу $M_g = 1.4$ та ефективна константа зв'язку $G = 1.6$. Такі значення були обрані з тих міркувань, щоб найбільш чітко проявити якісні особливості. Нажаль, опис експерименту було отримано лише на рівні якісного збігу, але не кількісного.

В той же час, з рис. 4.2-4.3. видно, що модель описує зміну характеру залежності $d\sigma_{elastic}/dt$ від $(-t)$ з монотонно спадаючої на немонотонну із зростанням енергії \sqrt{s} . Неможливість досягти кількісного опису експерименту, на наш погляд, пов'язана з тим, що не були враховані внески непружних процесів в праву частину умови унітарності (4.3). В той же час, якісний збіг дозволяє зробити висновок, що фізичною причиною немонотонності залежності $d\sigma_{elastic}/dt$ від $(-t)$ в розглянутій моделі є спінові ефекти.

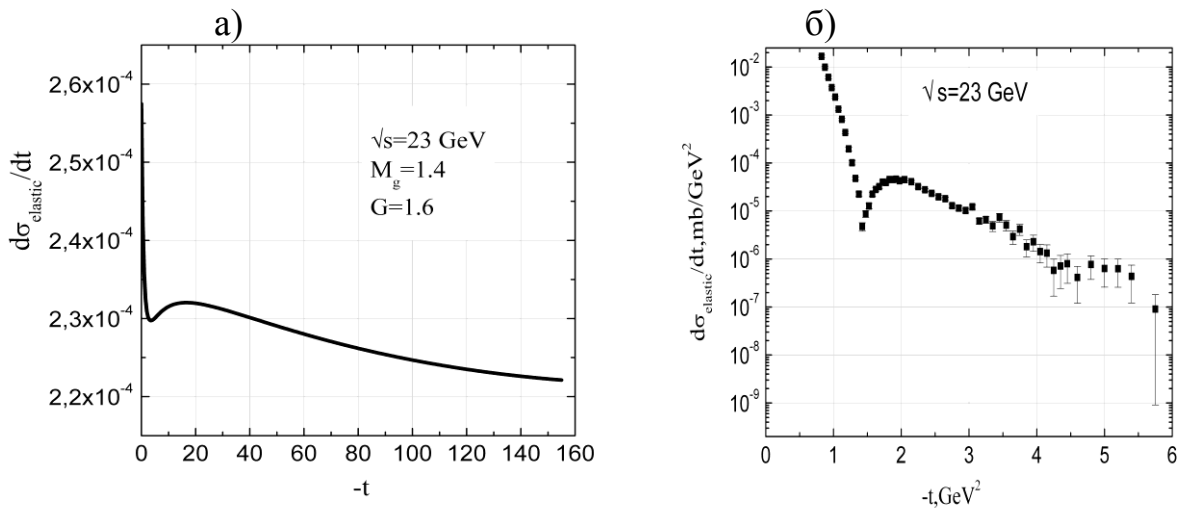


Рис. 4.2. Порівняння залежності диференціального перерізу $d\sigma_{elastic} / dt$ від квадрату переданого чотириімпульсу t при енергії $\sqrt{s} = 23$ ГеВ, розрахованої по описаній в цьому розділі моделі (а) (t обезрозмірено на квадрат маси протону, а $d\sigma_{elastic} / dt$ - на обернений квадрат маси протону) з експериментом (б) [162, 163].

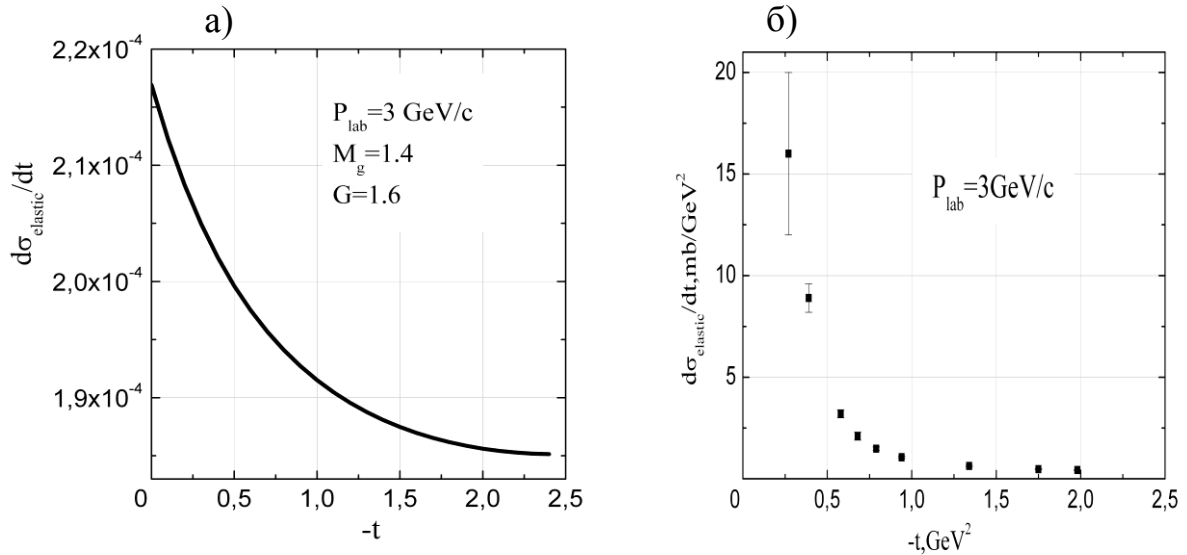


Рис. 4.3. Порівняння розрахованої залежності диференціального перерізу $d\sigma_{elastic} / dt$ від квадрату переданого чотириімпульсу t при енергії $\sqrt{s} = 2.8$ ГеВ ($P_{lab} = 3$ ГеВ/с) (а) (t обезрозмірено на квадрат маси протону, а $d\sigma_{elastic} / dt$ - на обернений квадрат маси протону) з експериментальним результатом (б) [164].

Для перевірки цього висновку ми повторили розрахунок, аналогічний описаному, але, вважаючи, що взаємодія відбувається не між квантами не біспінорного поля, а скалярного поля з тією ж масою. При цьому ми отримали при всіх енергіях суто монотонне спадання. Розглядаючи внески непружних процесів в праву частину умови унітарності (4.3), ми отримуємо велику кількість внесків від діаграм із біспінорними частинками, які будуть містити ті ж Лоренц-інваріанти, що й для розглянутих діаграм, але вони можуть привести до більш різкого падіння перерізу із зростанням $(-t)$, що й потрібно для опису експерименту. Врахування внеску $A^{(1)}$ покращило ситуацію у порівнянні з урахуванням лише внеску $A^{(0)}$. Можливо, подальше врахування внесків від непружних процесів покращить результат до кількісного збігу.

4.3. Висновки до розділу 4

Було продемонстровано, як метод багаточастинкових полів може застосовуватись для опису процесів розсіяння адронів. Тут ми розглянули лише процес пружного розсіяння, але таким самим чином можна розглядати й непружні процеси взаємодії протонних полів із двочастинковим глюонним полем, яке, взаємодіючи із мезонними полями, породжуватиме вторинні частинки. Метод багаточастинкових полів дозволив отримати динамічну модель, яка призводить до скінченного значення диференційного перерізу при нульовій передачі імпульсу. Розрахунок по теорії збурень КХД за рахунок глюонного пропагатора призводив би до нескінченного значення амплітуди розсіяння при $t=0$. Скінчене значення перерізу появляється, наприклад в реджіонних моделях [166, 167], але в них воно є результатом постулювання виду адрон реджіонної вершини, а не наслідком якоїсь динамічної моделі. Збіг на рівні відтворення якісної поведінки диференціального перерізу дозволяє зробити висновок, що за його немонотонність відповідають спінові властивості протонів.

ВИСНОВКИ

1. Вперше показано, що внутрішній стан адрону, як частинки, що складається з нерелятивістських конституентних кварків, не змінюється при переході з однієї інерційної системи до іншої, навіть якщо ці системи рухаються одна відносно іншої з релятивістською швидкістю. На основі цього результату показана неможливість побудови адронного стану за допомогою польових операторів, що змінюють числа заповнення одночастинкових станів.

2. Запропоновано модель багаточастинкових полів, яка, з одного боку, описує народження та знищення адронів, а, з іншого – враховує їх кваркову структуру. Це дозволяє описувати взаємодію кварків з глюонним полем звичайним шляхом – за допомогою подовження похідних. Сформульовано динамічні рівняння для багаточастинкових полів і проведено квантування цих полів.

3. Вперше розглянуто двочастинкове калібрувальне поле. Показано, що воно описує процеси народження і знищення зв'язаних станів двох глюонів. Таким чином, вперше вдалося в межах однієї й тієї ж моделі описати існування зв'язаного стану кварків в адронах і взаємодію між кварками різних адронів, що призводить до пружного і непружного розсіяння адронів. При цьому модель забезпечує те, що закон збереження енергії-імпульсу виконується саме для адронів, а не для складаючих їх кварків.

4. Доведено, що модель двочастинкового глюонного поля описує конфайнмент кварків і глюонів та їх асимптотичну свободу.

5. Вперше модель взаємодіючих тричастинкового біспінорного поля і двочастинкового глюонного поля застосована для розрахунку перерізу пружного розсіяння протонів за квадратом переданого чотириімпульсу. Враховано внесок найпростіших полюсних діаграм і внесок від двочастинкової точки розгалуження.

Порівняння з експериментальними даними показало відтворення експериментальних даних на рівні якісного збігу: описаний ефект появи немо-

нотонності залежності диференційного перерізу від квадрату переданого чотириімпульсу із зростанням енергії в системі центру мас.

В розглянутій моделі немонотонність є наслідком спінових властивостей протонів. Також модель зберігає переріз розсіяння скінченим при врахуванні електромагнітної взаємодії, що відповідає експерименту. В цьому полягає суттєва відмінність від теорій, в яких неточковість адрону враховується шляхом введення формфакторів, що не забезпечує скінченності перерізу. Для відтворення експериментальних даних на рівні кількісного збігу, на нашу думку, потрібно врахувати внески непружних процесів в умову унітарності, що потребує значно більшої кількості обчислювальної роботи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Фейнман Р. Взаимодействие фотонов с адронами.: Перевод с английского. – М. : Мир, 1975. – 392 с.
2. M. Diehl, D. Ostermeier, and A. Schafer. Elements of a theory for multiparton interactions in QCD // Journal of High Energy Physics. – 2012. - Vol. 1203. - P. 089.
3. I.V. Sharf, K. K. Merkotan, N. A. Podolyan, D. A. Ptashynskyy, A. V. Tykhonov, M. A. Deliyergiyev, G. O. Sokhrannyi, Y. V. Volkotrub , O.S. Potiyenko, V. D. Rusov. On equivalence of gluon-loop exchange in the inelastic processes in perturbative QCD to pion exchange in ϕ^3 theory // Proc. of International conference “Large Hadron Collider Physics Conference”. – Barcelona, Spain. – 2013. - Vol. 60. – P. 20018.
4. N. Chudak(Podolian), M. Deliyergiyev, K. Merkotan, O. Potiienko, D. Ptashynskiy, Y. Shabatura, G. Sokhrannyi, A. Tykhonov, Y. Volkotrub, I. Sharph, V. Rusov. Multi-Particle Quantum Fields // Physics Journal. – 2016. – Vol. 2, No. 3. – P. 181-195.
5. N.A. Podolian, V.D. Rusov, I.V. Sharph, K.K. Merkotan, G.O. Sokhrannyi, D.A. Ptashynskyy, Y. V. Volkotrub, O.S. Potiyenko, A.V. Tykhonov, M.A. Deliyergiyev, A.G. Kotandjan. A state transformation of a non-relativistic quantum system in the transition from one inertial system to another // Proc. of the Trans-European School of High Energy Physics. – Kharkov region, Ukraine. - 2013. – P. 165-166.
6. І.В. Шарф, О.С. Потієнко, Н.О. Подолян, Ю.В. Волкотруб, Д.А. Пташинський, К.К. Меркотан, А.В.Тихонов, М.А. Делієргієв, В.Д. Русов. Новий метод врахування інтерференційних внесків для діаграм непружного розсіяння // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики “Еврика-2014”. – Львів, Україна. – 2014: Тези доповідей. – С. 23.

7. Н. Чудак (Подолян), К. Меркотан, Д. Пташинський, О. Потієнко, Ю. Волкотруб. Протонні блоки для діаграм пружного розсіяння в КХД // Матеріали Міжнародної конференція молодих вчених та аспірантів “ІЕФ’2015”. – Ужгород, Україна. - 2015. – С. 113.
8. І.Шарф, Н.Подолян, Д.Пташинський, К.Меркотан, А.Тихонов, М.Делієргієв, В.Русов. Зв’язані стани кварків і антикварків у процесах розсіяння адронів // Міжнародна конференція студентів і молодих науковців з теоретичної та експериментальної фізики “Еврика-2012”. – Львів, Україна. – 2012.: Тези доповідей. – С. 17.
9. Ю.Волкотруб, І. Шарф, В. Русов, Н.Чудак (Подолян),О. Потієнко, Д. Пташинський, К.Меркотан, А.Тихонов, М.Делієргієв, В.Урбаневич. Метод Лапласа для Монте-Карло-генераторів процесів розсіяння // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Фізика. - 2015. - № 38. – Ст. 96 – 101.
10. Л.Д. Ландау, Р. Пайерлс. Квантовая электродинамика в конфигурационном пространстве.: Л.Д. Ландау «Собрание трудов» Т.1 - М: Наука. - 1969. - С. 32-47.
11. V. Fock. Konfigurationsraum und zweite Quantelung // Zeitschrift für Physik. – 1932. – Vol. 75, Issue 9. – P. 622–647.
12. V. Fock. Zur Quanten elektrodynamik // Sow. Phys. – 1934. - Vol. 6. – P. 425-469.
13. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. — М.: Наука, 1986. — 320 с.
14. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. – 4-е издание, испр. – М.: Наука, 1984. - 600 с.
15. Петрина Д.Я. Квантовая теория поля. — К.: Вища школа, 1984.— 248с.
16. Шварц А. С. Элементы квантовой теории поля. Бозонные взаимодействия. - М.: Атомиздат, 1975. – 192 с.

17. E. E. Salpeter and H. A. Bethe. A relativistic equation for bound-state problems // *Physical Review*. – 1951. – Vol. 84, Iss. 6. – P. 1232.
18. R. P. Feynman. The theory of positrons // *Physical Review*. – 1949. - Vol. 76, Iss. 6. – P. 749.
19. А. А. Архипов. Одновременная редукция формализма Бете - Солпитера для двухфермионной системы // *Теоретическая и математическая физика*. – 1990. - Т. 83, № 2. - С. 247-267.
20. А. А. Логунов, В. И. Саврин, Н. Е. Тюрин, О. А. Хрусталеv. Одновременное уравнение для системы двух частиц в квантовой теории поля // *Теоретическая и математическая физика*. – 1971. – Т. 6, № 2. - С. 157-165.
21. Logunov A.A., Tavkhelidze A.N. Quasi-Optical approach in quantum field theory // *Il Nuovo Cimento*. – 1963. – Vol.29, № 2. – P. 380-399.
22. В. А. Матвеев, В.И. Саврин, А.Н. Сисакян, А.Н. Тавхелидзе. Релятивистские кварковые модели в квазипотенциальном подходе // *Теоретическая и математическая физика*. - 2002. – Т. 132, № 2. - С. 267-287.
23. В. И. Саврин. Метод квазипотенциала в теории связанных состояний. - Самарский государственный университет, 2006. - 135с.
24. S. Tomonaga. On a Relativistically Invariant Formulation of the Quantum Theory of Wave Fields // *Progress of Theoretical Physics*. - 1946. - Vol. 1, No. 2. – P. 27-42.
25. J. Schwinger. Quantum electrodynamics. I. A covariant formulation // *Physical Review*. – 1948. - Vol. 74, Iss. 10. – P. 1439.
26. J. Schwinger. Quantum electrodynamics. II. Vacuum polarization and self-energy // *Physical Review*. – 1949. - Vol. 75, Iss. 4. – P. 651.
27. J. Schwinger. Quantum electrodynamics. III. The electromagnetic properties of the electron-radiative corrections to scattering // *Physical Review*. – 1949. - Vol. 76, Iss. 6. – P. 790.
28. J. Schwinger. The theory of quantized fields. I // *Physical Review*. – 1951. - Vol. 82, Iss. 6. – P. 914.

29. F. Bloch. Die physikalische Bedeutung mehrerer Zeiten in der Quantenelektrodynamik // Phys. Z. Sowjetunion. – 1934. – Vol. 5. – P. 301–315.
30. Sören Petrat, Roderich Tumulka. Multi-Time Wave Functions for Quantum Field Theory // Annals of Physics. – 2014. – Vol. 345. – P. 17-54.
31. P. A. M. Dirac, V. A. Fock and B. Podolsky. On Quantum electrodynamics // Sow. Phys. – 1932. - Vol. 2. – P. 468—479.
32. Sören Petrat, Roderich Tumulka. Multi-Time Equations, Classical and Quantum // Proc. of the Royal Society A. – 2014. – Vol. 470, Iss. 2164: 20130632.
33. Matthias Lienert. A relativistically interacting exactly solvable multi-time model for two mass-less Dirac particles in 1+1 dimensions // Journal of Mathematical Physics. – 2015. – Vol. 56, Iss. 4. - P. 042301.
34. Matthias Lienert. On the question of current conservation for the Two-Body Dirac equations of constraint theory // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2015. – Vol. 48, № 32. - P. 325302.
35. Matthias Lienert, Lukas Nickel. A simple explicitly solvable interacting relativistic N-particle model // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2015. – Vol. 48, № 32. - P. 325301.
36. H. Sazdjian. Relativistic wave equations for the dynamics of two interacting particles // Physical review D. - 1986. – Vol. 33, No 11. - P. 3401-3424.
37. Marx E. Relativistic quantum mechanics of identical bosons // II Nuovo Cimento A Series 10. – 1970. - Vol. 67, Iss. 2. - P. 129-152.
38. Marx E. Generalized relativistic Fock space // International Journal of Theoretical Physics. – 1972. – Vol. 6, Iss. 5. – P. 359–363.
39. П. А. М. Дирак. Принципы квантовой механики.: Перевод 4-го издания. — М.: Наука, 1979. - 478 с.
40. Бьёркен Дж. Д., Дрелл С. Д. Релятивистская квантовая теория. Т.1. Релятивистская квантовая механика. - М.: Наука, 1978. – 296 с.
41. Бьёркен Дж. Д., Дрелл С. Д. Релятивистская квантовая теория. Т.2. Релятивистские квантовые поля. - М.: Наука, 1978. – 408 с.

42. Ициксон К., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля Т. 1. — М.: Мир, 1984. — 448 с.
43. Ициксон К., Зюбер Ж.-Б. Квантовая теория поля Т. 2. — М.: Мир, 1984. — 400 с.
44. Райдер Л. Квантовая теория поля. — М.: Мир, 1987. — 512 с.
45. Рамон П. Теория поля: Современный вводный. — М.: Мир, 1984. — 332 с.
46. Пескин М., Шрёдер Д. Введение в квантовую теорию поля. — Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001. — 784 с.
47. Кушниренко А. Н. Введение в квантовую теорию поля. Учеб. пособие для вузов. - М.: Высшая школа, 1971. - 304 с.
48. Нелипа Н.Ф. Физика элементарных частиц. Калибровочные поля. Учебное пособие для студентов физических специальностей вузов. — М.: Высшая школа, 1985 — 280 с.
49. Славнов А.А. Фаддеев Л.Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. - М.: Наука, 1978. - 240с.
50. Michael H. Seymour, Marilyn Marx. Monte Carlo Event Generators. LHC Phenomenology. Part III. – Switzerland: Springer International Publishing, 2015. – P. 287-319.
51. D. Bedoya Fierro, N. G. Kelkar, M. Nowakowski. Lorentz contracted proton // Journal of High Energy Physics. – 2015. – Vol. 9. – P. 215.
52. Young S. Kim. Lorentz Coherence and the Proton Form Factor // Physica Scripta. – 2015. – Vol. 90, No 7. – P. 074037.
53. Дрёмин И.М. Упругое рассеяние адронов // Успехи физических наук. – 2013. – Т. 183, № 1. – С. 3-32.
54. Фейнман Р. Взаимодействие фотонов с адронами. – М.: Мир, 1975. - 389 с.
55. Sir Arthur Eddington. Relativity theory of protons and electrons. – London: Cambridge University Press, 1936. – 362 p.

56. В. А. Карманов. Релятивистские составные системы в динамике на световом фронте // ФЭЧАЯ. – 1988. - Т. 19, вып. 3. - С. 525-578.
57. R. N. Faustov. Relativistic Wavefunction and Form Factors of the Bound System // Annals of Physics. – 1973. – Vol. 78. – P. 176-189.
58. И. В. Амирханов, Г. В. Груша, Р. М. Мир-Касимов. Трехмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел в терминах быстрот // Теоретическая и математическая физика. – 1977. – Т. 30, № 3. – С. 333-345.
59. В. Г. Кадышевский, Р. М. Мир-Касимов и П. Б. Скачков. Трехмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел // ФЭЧАЯ. – 1972. - № 2. - С. 635-690.
60. А. А. Архипов. Приближение одноглюонного обмена для квазипотенциала взаимодействия двух кварков в квантовой хромодинамике // Теоретическая и математическая физика. – 1990. – Т. 83, № 3. - С. 359-373.
61. А. А. Архипов, В. И. Саврин. Одновременное уравнение для системы трех частиц в квантовой теории // Теоретическая и математическая физика. – 1993. - Т. 16, № 3. - С. 328-338.
62. А.А. Архипов. Принцип причинности в проблеме одновременной редукции в квантовой теории поля // Теоретическая и математическая физика. - 1988. – Т. 74, № 1. – С. 69–81.
63. P. A. M. Dirac. Quantum Theory of Localizable Dynamical Systems // Physical review. - 1948. - Vol. 73. - P. 1092-1103.
64. P. A. M. Dirac. Forms of Relativistic Dynamics // Reviews of Modern Physics. - 1949. - V. 21. Iss. 3. - P. 392-399.
65. Thomas Heinzl. Methods of Quantization. Light-cone quantization: Foundations and applications. – Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 2001. – P. 55-142.
66. S. Brodsky, G. McCartor, H.-C. Pauli, S. Pinsky. The challenge of light-cone quantization of gauge field theory // Particle World. – 1993. - No. 3. – P. 109-124.

67. S. Brodsky, H.-C. Pauli, S. Pinsky. Quantum chromodynamics and other field theories on the light cone // *Physics Reports*. – 1998. – Vol. 301, Iss. 4–6. – P. 299–486.
68. S. Brodsky. QCD Phenomenology and Light-Front Wavefunctions // *Acta Physica Polonica B*. – 2001. – Vol. 32. – P. 4013-4068.
69. S. Brodsky. Gauge Theories on the Light-Front // *Brazilian Journal of Physics*. – 2004. - Vol. 34, No. 1A. – P. 157-165.
70. Leonard S. Kisslinger. 2004 Review of Light Cone Field Theory // *International Journal of Modern Physics E*. – 2004. – Vol. 13, Iss. 2. – P. 375-424.
71. T. Heinzl. The light-cone wave function of the pion // *Nuclear Physics Proceedings Supplements*. – 2000. – Vol. 90. – P. 83-86.
72. Цвибах Б. Начальный курс теории струн. - М.: Едиториал УРСС, 2011. — 784 с.
73. Боголюбов М. М. Лекції з квантової статистики. Питання статистичної механіки квантових систем. — К.: Радянська школа, 1949. — 228 с.
74. И. Е. Тамм. Метод Тамма — Данкова // *Journal of Physics* — 1945. — Т. 9. — С. 445.
75. S. M. Dancoff. Non-Adiabatic Meson Theory of Nuclear Forces // *Physical review*. — 1950. — Vol. 78. — P. 382.
76. В. А. Фок // *Sov. Phys.* — 1934. — Т. 6. — С. 425.
77. В. П. Силин, В. Я. Файнберг. Метод Тамма — Данкова // *Успехи физических наук*. — 1955. — Т. 56. — С. 569-633.
78. Е. В. Баландина, А. Ф. Крутов, В. Е. Троицкий. Релятивистская модель двухкварковых составных систем // *Теоретическая и математическая физика*. – 1995. – Т. 103, № 1. С. 41–53.
79. Diehl, M., Ostermeier, D., Schäfer, A. J. Elements of a theory for multiparton interactions in QCD // *High Energy Physics*. – 2012. – Vol. 3. – P. 89.
80. И.С. Шапиро. О волновых функциях партонной модели // *Письма в ЖЭТФ*. – 1973. - Т. 18, вып. 10. - С. 650-654.

81. G. Calucci, D. Treleani. A functional formalism for multiparton interactions in high energy collisions // *International Journal of Modern Physics A*. – 1991. - Vol. 6, Iss. 24. – P. 4375-4393.
82. P. Bartalini et al. Multi-Parton Interactions at the LHC // eprint arXiv:1111.0469. - 2011. – 68 p.
83. Xiangdong Ji. Generalized parton distributions // *Annual Review of Nuclear and Particle Science*. – 2004. – Vol. 45. – P. 423-450.
84. P. C. Beggio. A Multiparton Model for $pp / p\bar{p}$ Inelastic Scattering // *Brazilian Journal of Physics*. – 2008. - Vol. 38, No. 4. – P. 598-603.
85. Мангано М. Л. Квантовая хромодинамика и фізика адронних столкновений // *Успехи физических наук*. - 2010. - Т. 180, вып. 2. – С. 113–138.
86. П. Н. Боголюбов. Уравнения для связанных состояний (кварков) // *ФЭЧАЯ*. – 1972. - Т. 3, вып. 1. - С. 144-174.
87. Xueyong Xing, Jinniu Hu, Hong Shen. The quark mean field model with pion and gluon corrections // *Physical Review C*. – 2016. – Vol. 94, Iss. 4. – P. 044308.
88. Хартри Д. Расчёты атомных структур. - М.: ИИЛ, 1960. — 256 с.
89. Фок В. А. Начала квантовой механики. - М.: Наука, 1976. – 376 с.
90. Хуанг К. Кварки, лептоны и калибровочные поля: Перевод с английского. - М.: Мир, 1985. – 382 с.
91. Индурайн Ф. Квантовая хромодинамика: Введение в теорию кварков и глюонов: Перевод с английского. — М.: Мир, 1986 - 288 с.
92. Садовский М. В. Лекции по квантовой теории поля. — Ижевск: ИКИ, 2003. — 480 с.
93. Wilson K. Confinement of quarks // *Physical Review D*. - 1974. - Vol. 10, Iss. 8. – P. 2445.
94. Kenneth G. Wilson. *New Phenomena in Subnuclear Physics. Quarks and Strings on a Lattice*. - New York: Springer US, 1977. – P. 69-142.

95. Myron Bander. Theories of quark confinement // *Physics reports* (Review Section of *Physics Letters*). – 1981. - Vol. 75, No. 4. – P. 205—286.
96. Симонов Ю. А. Конфайнмент // *Успехи физических наук*. – 1996. – Т. 166, № 4. – С. 337–362.
97. Кузьменко Д. С., Симонов Ю. А., Шевченко В. И. Вакуум, конфайнмент и структуры КХД в методе вакуумных корреляторов // *Успехи физических наук*. – 2004. – Т. 174, № 1. – С. 3–18.
98. L. Dittmann, T. Heinzl, A. Wipf. Effective Theories of Confinement // *Nuclear Physics B – Proceedings Supplements*. – 2002. – Vol. 108. – P. 63-67.
99. Hideki Yukawa. Quantum Theory of Non-Local Fields. Part I. Free Fields // *Physical Review*. – 1950. – Vol. 77, Iss. 2. – P. 219-226.
100. Hideki Yukawa. Quantum Theory of Non-Local Fields. Part II. Irreducible Fields and their Interaction // *Physical Review*. – 1950. – Vol. 80, Iss. 6. – P. 1047-1052.
101. Hideki Yukawa. Structure and Mass Spectrum of Elementary Particles I. General Considerations // *Physical Review*. – 1953. – Vol. 91, Iss. 2. – P. 415-416.
102. А. П. Кобушкин, В. П. Шелест. Релятивистские уравнения для связанных состояний кварков. // *Теоретическая и математическая физика*. – 1977. – Т. 31, № 2. – С. 156–168.
103. А. П. Кобушкин, В. П. Шелест. Некоторые приложения релятивистской кварковой модели // *ФЭЧАЯ*. – 1972. - Т. 3, вып. 3. – С. 571-605.
104. Hideki Yukawa. Structure and Mass Spectrum of Elementary Particles. II. Oscillator Model // *Physical Review*. – 1953. – Vol. 91, Iss. 2. – P. 416-417.
105. D. Han, Y. S. Kim, Marilyn E. Noz. Physical principles in quantum field theory and in covariant harmonic oscillator formalism // *Foundations of Physics*. – 1981. –Vol. 11, Iss. 11. - P. 895–905.

106. D. Han, Y. S. Kim, Marilyn E. Noz. Illustrative example of Feynman's rest of the universe // *American Journal of Physics*. – 1999. – Vol. 67. – P. 61-66.
107. W.E. Caswell, G.P. Lepage. Effective lagrangians for bound state problems in QED, QCD, and other field theories // *Physics Letters B*. – 1986. – Vol. 167, Iss. 4. – P. 437-442.
108. Geoffrey T. Bodwin, Eric Braaten, G. Peter Lepage. Rigorous QCD Analysis of Inclusive Annihilation and Production of Heavy Quarkonium // *Physical Review D*. – 1997. – Vol. 55, Iss. 9. – P. 5853.
109. J. Soto. Overview of Non-Relativistic QCD // *European Physical Journal A*. – 2007. – Vol. 31, Iss. 4. – P. 705–710.
110. Б. В. Струминский. Магнитные моменты барионов в модели кварков. Б. В. Струминский. – Дубна, 1965. - (Препринт/ОИЯИ Р-1939).
111. M. Gell-Mann. A schematic model of baryons and mesons // *Physics Letters*. - 1964. - Vol. 8, № 3. - P. 214-215.
112. Zweig G. An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 1. // CERN-TH-401, 1964.
113. Zweig G. An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 2. // CERN-TH-412, 1964.
114. Amsler C., DeGrand T., Krusche B. Quark model // *Physics Letters B*. – 2008. – Vol. 667, Iss. 1-5. P. 172-191.
115. Fl. Stancu. Quark model: Recent issues. // 11-th International Conference on Meson-nucleon physics and the structure of the nucleon. - IKP, Forschungszentrum Jülich, Germany, 2007. – P. 165.
116. Lucha, W., Schöberl, F. F. All around the spinless Salpeter equation // *arXiv:hep-ph/9410221*. – 1994. – 17 p.
117. Lucha, W., Schöberl, F. F. Bound States by the Spinless Salpeter Equation // *Fizika B*. – 1999. - Vol. 8, Iss. 1. - P. 193-206.

118. Lucha, W., Schöberl, F. F. Spinless Salpeter Equation: Laguerre Bounds on Energy Levels // *Physical Review A*. – 1997. – Vol. 56, Iss. 1. – P. 139-145.
119. Боголюбекая А. А., Боголюбский И. Л. Исследование барионоподобных связанных состояний нерелятивистских кварков в приближении самосогласованного поля // *Теоретическая и математическая физика*. – 1983. – Т. 54, №2. - С. 258-267.
120. Claude Semay, Fabien Buissere, Nicolas Matagne, Florica Stancu. Baryonic mass formula in large N_c QCD versus quark model // *Physical Review D*. – 2007. – Vol. 75, Iss. 9. – P. 096001.
121. Блум Э. Д., Фелдман Г. Дж. Кварконий // *Успехи физических наук*. – 1983. – Т. 139, №3. - С. 529–551.
122. Hai-Jhun Wang, Hui Yang, Jun-Chen Su. KN and $\bar{K}N$ Elastic Scattering in the Quark Potential Model // *Physical Review C*. – 2003. – Vol. 68, Iss. 5. – P. 055204.
123. Dmitri Diakonov. Foundations of the Constituent Quark Model // *Progress in Particle and Nuclear Physics*. – 1996. – Vol. 36. – P. 1-17.
124. Nora Brambilla, Felix Karbstein, and Antonio Vairo. Symmetries of the three-heavy-quark system and the color-singlet static energy at next-to-next-to-leading logarithmic order // *Physical Review D*. – 2013. – Vol. 87, Iss. 7. – P. 074014.
125. Nora Brambilla, Jacopo Ghiglieri, and Antonio Vairo. Three-quark static potential in perturbation theory // *Physical Review D*. – 2010. – Vol. 81, Iss. 5. – P. 054031.
126. Lewis P. Fulcher. Long-range spin-orbit potential, Gromes's consistency condition, Richardson's potential, and properties of heavy quarkonium systems // *Physical Review D*. – 1990. – Vol. 42, Iss. 7. – P. 2337-2346.
127. Быков А. А., Дремин И. М., Леонидов А. В. Потенциальные модели кваркония // *Успехи физических наук*. – 1984. – Т. 143, вып. 1. – С. 3–32.

128. Polejaeva K., Rusetsky A. Three particles in a finite volume // *European Physical Journal A.* – 2012. – Vol. 48, No 5. – P. 67.
129. Nora Brambilla, Antonio Pineda, Joan Soto, Antonio Vairo. Effective field theories for heavy quarkonium // *Reviews of Modern Physics.* – 2005. – Vol. 77, Iss. 4. – P. 1423.
130. Nora Brambilla, Thomas Roesch, Antonio Vairo. Effective Field Theory Lagrangians for Baryons with Two and Three Heavy Quarks // *Physical Review D.* – 2005. – Vol. 72, Iss. 3. – P. 034021.
131. A. Pineda, J. Soto. Effective Field Theory for Ultrasoft Momenta in NRQCD and NRQED // *Nuclear Physics B. – Proceedings Supplements.* – 1998. – Vol. 64, Iss. 1-3. – P. 428-432.
132. A. Pineda. NRQCD, Effective Field Theories and Potential Models // *Nuclear Physics B. – Proceedings Supplements.* – 2001. – Vol. 93, Iss. 1-3. – P. 188-191.
133. Макеенко Ю.М. Введение в решеточные калибровочные теории. - И.: Препринт ИТЭФ, 1982. - № 125.
134. Макеенко Ю. М. Метод Монте-Карло в калибровочных теориях на решетке // *Успехи физических наук.* – 1984. – Т. 143, вып. 2. – С. 161–212.
135. Т.-П. Ченг, Л.-Ф. Ли. Калибровочные теории в физике элементарных частиц. – М: Мир, 1987. – 624 с.
136. Смирнов В. И. Курс высшей математики Т. 3, ч. 1 – М: Наука, 1974. - 324с.
137. Волошин М. Б., Тер-Мартиросян К. А. Теория калибровочных взаимодействий элементарных частиц. - М.: Энергоатомиздат, 1984. - 296 с.
138. Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. — 3-е издание, испр. — М.: Наука, 1973. — 519 с.
139. Creutz M. - Feynman Rules for Lattice Gauge Theory // *Reviews of Modern Physics.* - 1978. - Vol. 50, No. 3. - P. 561-571.

140. Creutz M. On invariant integration over $SU(N)$ // *Journal of Mathematical Physics*. – 1987. – Vol. 19. – P. 2043-2046.
141. Майкл Кройц. Кварки, глюонны и решетки. – М: Мир, 1987. – 189 с.
142. Fang-Chao Hoh. *Scalar strong interaction hadron theory*. – Sweden: Nova Science Publishers, 2011. – 344 p.
143. Шарф І.В., Тихонов А.В., Сохранний Г.О., Яткін К.В., Делієргієв М.А., Подолян Н.О., Русов В.Д. Метод Лапласа для опису непружного розсіювання адронів і нові механізми зростання перерізів // *Український фізичний журнал*. - 2011. – Т. 56, № 11. – С. 1151-1164.
144. I. Sharf, A. Tykhonov, G. Sokhrannyi, M. Deliyergiyev, N. Podolyan, V. Rusov. On the Role of Longitudinal Momenta in High Energy Hadron-Hadron Scattering // *Central European Journal of Physics*. – 2012. - Vol. 10, No. 4. – P. 858-887.
145. I. V. Sharph, O. S. Potienko, M. A. Deliyergiyev, K. K. Merkotan, N. O. Chudak(Podolian), D. A. Ptashynskyi, G. O. Sokhrannyi, A.V. Tykhonov, Y. V. Volkotrub, Y. V. Shabatura, V. D. Rusov. The new method of interference contributions accounting for inelastic scattering diagrams // *arXiv:1509.04329*. - 2015.
146. I.V. Sharf, K. K. Merkotan, N. A. Podolyan, D. A. Ptashynskyy, A. V. Tykhonov, M. A. Deliyergiyev, G. O. Sokhrannyi, V. D. Rusov. Gluon Loops in the Inelastic Processes in QCD // *Proc. of the 4-th International Conference “Current Problems in Nuclear Physics and Atomic Energy”*. – Kyiv, Ukraine. - 2012. – P. 651-656.
147. М. В. Терентьев. О структуре волновых функций мезонов как связанных состояний кварков // *Ядерная физика*. – 1976. – Т. 24, № 1. - С. 207-213.
148. I.V. Sharf, M.A. Deliyergiyev, A.G. Kotanzhyan, K.K. Merko-tan, N.O. Podolian, O.S. Potiyenko, D. A. Ptashynskyy, G. O. Sokhrannyi, A. V.

Tykhonov, Y. V. Volkotrub, V. D. Rusov. Transformation of the nonrelativistic quantum system under transition from one inertial reference frame to another // arXiv:1307.2280v5. – 2013.

149. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. – М.: ГИФМЛ, 1959. - 470 с.

150. Чудак Н.О., Меркотан К.К., Пташинський Д.А., Потієнко О.С., Делієргієв М.А., Тихонов А.В., Сохранний Г.О., Жарова О.В., Березовський О.Д., Войтенко В.В., Волкотруб Ю.В., Шарф І.В., Русов В.Д. Внутрішні стани адронів в релятивістських системах відліку // Український фізичний журнал. – 2016. – Т. 61, № 12. – С. 1039-1054.

151. R. Conceicao, J. Dias de Deus, M. Pimenta. Proton–proton cross-sections: The interplay between density and radius // Nuclear Physics A. – 2012. – Vol. 888. – P. 58-66.

152. I.V. Sharph, M.A. Deliyergiyev, A.G. Kotanzhyan, K.K. Merkotan, N.O. Podolian, O.S. Potiyenko, D. A. Ptashynskyy, G. O. Sokhrannyi, A. V. Tykhonov, Y. V. Volkotrub, V. D. Rusov. The state of nonrelativistic quantum system in a relativistic reference frame // arXiv:1403.3114[hep-ph]. – 2014.

153. А.А. Дувіряк. Застосування двочастинкового рівняння Дірака у спектроскопії мезонів // Журнал фізичних досліджень. – 2006. – Т. 10, № 4. – С. 290-314.

154. I. Sharf, A. Tykhonov, G. Sokhrannyi, M. Deliyergiyev, N. Podolyan, V. Rusov. Mechanisms of Proton-Proton Inelastic Cross-Section Growth in Multi-Peripheral Model within the Framework of Perturbation Theory. Part 1 // Journal of Modern Physics. – 2011. -Vol. 2, No. 12. – P. 1480-1506.

155. I. Sharf, A. Tykhonov, G. Sokhrannyi, M. Deliyergiyev, N. Podolyan, V. Rusov. Mechanisms of Proton-Proton Inelastic Cross-Section Growth in Multi-Peripheral Model within the Framework of Perturbation Theory. Part 2 // Journal of Modern Physics. – 2012. – Vol. 3, No. 1. – P.16-27.

156. I. Sharf, A. Tykhonov, G. Sokhrannyi, M. Deliyergiyev, N. Podolyan, V. Rusov. Mechanisms of Proton-Proton Inelastic Cross-Section Growth in Multi-Peripheral Model within the Framework of Perturbation Theory. Part 3 // Journal of Modern Physics. - 2012. – Vol. 3, No. 2. – P.129-144.

157. Шарф И.В., Тихонов А.В., Сохранный Г.О., Делиергиев М.А., Подолян Н.А., Русов В.Д. Проблемы учета закона сохранения энергии-импульса и интерференционных эффектов в адрон-адронных взаимодействиях // Вопросы атомной науки и техники. – 2012. - № 1. – Ст. 21- 26.

158. Merkur'ev S. P., Faddeev L. D. Quantum scattering theory for several particle systems / by L.D. Faddeev and S.P. Merkuriev. – Dordrecht, Boston: Kluwer Academic Publishers, 1993. – 404 p.

159. D. Vretenar, A. Afanasjev, G. Lalazissis, and P. Ring. Relativistic Hartree–Bogoliubov theory: static and dynamic aspects of exotic nuclear structure // Physics Reports. – 2005. - Vol. 409, no. 3–4. - P. 101 – 259.

160. F. Nerling. Meson spectroscopy with COMPASS // Journal of Physics: Conference Series. – 2011. - Vol. 312. - P. 032017.

161. M. Frasca. Glueball spectrum and hadronic processes in low-energy QCD // Nuclear Physics B Proceedings Supplements. – 2010. - Vol. 207-208, No 1. - P. 196–199.

162. Nagy E. et al. Measurements of Elastic Proton Proton Scattering at Large Momentum Transfer at the CERN Intersecting Storage Rings // Nuclear Physics B. – 1979. - Vol. 150. – P. 221-267.

163. A. Breakstone et al. Measurement of $\bar{p}p$ and pp elastic scattering in the Did region at $\sqrt{s} = 53$ GeV // Physical Review Letters. – 1985. – Vol. 54, No 20. – P. 2180-2183.

164. Ankenbrandt C. M. et al. Nucleon Isobar Production in Proton-Proton Collisions between 3 and 7 GeV/c // Physical Review – 1968. - Vol. 170, № 5. – P. 1223-1236.

165. В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. Квантовая электродинамика. Теоретическая физика. Т. 4. - М.: Наука, 1989. - 723 с.
166. Коллинз П. Введение в реджевскую теорию и физику высоких энергий.: Перевод с английского. — М.: Атомиздат, 1980. — 432 с.
167. Никитин Ю.П., Розенталь И. Л. Ядерная физика высоких энергий. – М.: Атомиздат, 1980. – 232 с.
168. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Квантовые поля. – М.: Наука, 1980. - 316 с.
169. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – 4-е издание. – М.: Наука, 1973. – 749 с.