МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЯ В САПР РІВНОНАПРУЖЕНИХ ДЕТАЛЕЙ МАШИН

Д.т.н. О.Л. Становський, к.т.н. Ю.М. Хомяк, О.Є. Науменко

Одеський національний політехнічний університет
Україна, Одеса
ostanovskyi@gmail.com

Запропоновано метод проектування рівнонапружених вузлів циліндричних резервуарів, що містять плоскі круглі пластини змінної товщини, форма діаметральних перерізів яких моделюється рівнянням Гаусса. Для рішення рівняння вигину цих пластин використовуються вироджені гіпергеометричні функції Куммера та Уіттекера.

Ключові слова: рівнонапружені деталі, пластини змінної товщини, САПР

При розробці та конструюванні нових деталей машин проектувальник повинен завжди прагнути до максимальної ефективності проекту. Однією з таких складових є вимога забезпечення рівнонапруженості деталей, що забезпечує максимальне значення відношення «опір / маса» і, відповідно, мінімальну матеріаломісткість вироби в цілому.

На жаль, домогтися повної рівності напруг у всіх точках деталі неможливо навіть для статичної задачі. Це пояснюється різним впливом навантаження на окремі елементи деталей складної форми, неоднорідністю їх матеріалу та іншими конструктивними і технологічними особливостями. І будь-яке намагання спроектувати рівно напружену деталь є лише спробою вирішити проблему за рахунок варіювання однією з основних конструктивних характеристик, наприклад, товщиною елемента конструкції. Наприклад, посудини, що працюють під тиском, мають корпус, який складається з оболонок.

В більшості випадків поля напружень, які в них виникають, суттєво неоднорідні. Отже, практично неможлива мінімізація маси корпусних конструкцій без використання в них елементів змінної товщини [1].

За умовами навантаження таких об'єктів найбільш напруженим ділянкою є місця стику (найчастіше, зварювання) обичайки і днища [2]. Розрахунки на міцність показують, що саме в цьому місці товщина днища повинна бути найбільшою, що призводить до вельми нетехнологічних рішень: виготовляти днища посудин у вигляді круглих пластин із змінною від центру до краю товщиною.

Природно припустити, що конструкцію такого виробу одержують в результаті складних розрахунків за рівняннями опору матеріалів, які є неоднорідними диференціальними рівняннями другого ступеня [3]. Рішення таких рівнянь для конкретних об'єктів записують у вигляді суми загального і частинного рішень, тобто воно складається з двох лінійно незалежних функцій [4]. Однак, такі підходи не забезпечують оптимізацію конструкцій посудин, оскільки одержувані при цьому деталі і вузли однакового напруження ще не гарантують одночасного досягнення мінімальної маси майбутнього об'єкта [5]. У той же час, існує математичний апарат гіпергеометричних функцій, за допомогою якого подібна проблема може бути вирішена.

Для одночасного досягнення рівнонапруженості і мінімальної маси складного корпусного виробу запропоновано метод, який враховує обидві вимоги та базується на розрахунку пластин різної товщини.

Розглядали в якості прикладу корпусні деталі типу «кругла жорстко защемлена пластина». Зміну товщини для таких деталей в давальному напрямі в загальному випадку записують як функцію Гауса [1, 3]:

$$\delta(r) = \delta_0 \exp(-nr^2/6R^2), \qquad (1)$$

де: δ_0 – товщина пластини в центрі при $r = 0$.

Параметр n в рівнянні (1) визначає інтенсивність зміни товщини круглої пластини в радіальному напрямку. В коловому напрямку товщина залишається постійною, тобто форма пластини передбачається осесиметричною.

Форми поверхонь з параметром $n < 0$ можна рекомендувати для круглих пластин, що згинаються поперечним навантаженням *p* при жорсткому защемленні їх контуру, коли на контурі діє максимальний вигинальний момент. При шарнірному закріпленні контуру максимальний вигинальний момент виникає в центрі пластини, і кращою стає форма з максимальною товщиною в центрі, коли $n > 0$.

При оптимізації форми діаметрального перерізу круглої пластинки прагнули до мінімізації її маси, яка визначається обсягом використаного матеріалу.

Формула, що визначає зміну товщини такої пластини в радіальному напрямку, отримана з (1) у вигляді:

$$\delta_V(x) = \frac{V_0}{\pi R^2} \cdot \frac{n}{6\left[1-\exp(-n/6)\right]} \exp\left(-\frac{nx^2}{6}\right). \tag{2}$$

Диференціальне рівняння осесимметричного вигину такої пластини при рівномірно розподіленому навантаженні (тиску) *p* щодо кута повороту нормалі до серединної поверхні φ має другий порядок [5]:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \left(\frac{1}{x} - nx\right)\frac{d\varphi}{dx} - \left(\frac{1}{x^2} + \mu n\right)\varphi = -\bar{p}x \exp\left(\frac{nx^2}{2}\right). \tag{3}$$

Загальне рішення однорідного рівняння (3) (при рівності нулю правої частині) заданется статичним рядом, що при практичних розрахунках представляє певні обчислювальні труднощі. Для застосування в САПР рівнонапружених деталей рішення цього однорідного рівняння представлено за допомогою вироджених гіпергеометричних функцій Уіттекера $M_{k,\gamma}(z)$, $W_{k,\gamma}(z)$ [5]

Запропонована модель у вигляді експоненційної функції Гаусса дозволяє визначати оптимальну (рівнонапруженість, мінімальну масу) форму суцільний круглої пластини з довільним закріпленням по зовнішньому контуру. Модель дозволяє відображати таке закріплення в проміжку від абсолютно вільного (шарнірного обпирання) до абсолютно жорсткого (защемленного).

Результатом дослідження є підтвердження ефективності використання методу оптимізації форми круглої пластини змінної товщини, що полягає в переході від фіксованої товщини пластинки в її центрі до її фіксованому обсягу. Результат також доповнює модель вигину круглої пластини змінної товщини у вигляді експоненційної функції Гаусса, що враховує залежності товщини в центрі пластинки від її обсягу, що використовується в рамках запропонованого методу.

ВИКОРИСТАНІ ДЖЕРЕЛА

1. Optimization of uniformly stressed structures of cylindrical tanks in CAD / O. Saveleva, Yu. Khomyak, I. Stanovska, A. Toropenko, E. Naumenko // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2016. № 6/7 (84). p. 10 – 16.

2. ДНАОП 0.00–1.07–9,4. Правила устройства и безопасной эксплуатации сосудов, работающих под давлением / Киев: Комитет по надзору за охраной труда Украины, 1994. – 55 с..

3. Математическое моделирование профиля равного сопротивления / В. В. Новиков, В. Г. Максимов, С. А. Балан, О. Е. Гончарова // Оптимизация в материаловедении. – Одесса: АстроПринт, 1999. – С. 151.

4. Abramovitz, M. Handbook of mathematical functions with formulas, grafs and mathematical tables // Edited by M. Abramovitz, I. A. Stegun – Washington, 1972. – 832 p..

5. Хомяк Ю. М. , Тшигам Г. Ж. Розв’язок задачі вигину круглої пластини змінної товщини з використанням функцій Уіттекера / Моделирование в прикладных научных исследованиях. Одесса: ОНПУ, 2015. Вып. 23. С. 79 – 80..

Stanovskyi, O., Khomyak Yu., Naumenko, E.

Mathematical modeling and optimization of CAD equal-tensied machine parts

A method is proposed for the design of welded joints of cylindrical tanks containing planar circular plates of variable thickness, the shape of the diametrical cross-sections of which is modeled by the Gauss equation. To solve the bending equation for these plates, we use the degenerate hypergeometric functions of Kummer and Whittaker.

Keywords: equal-tensied machine parts, plate of variable thickness, CAD