Міністерство освіти і науки України
Одеський національний політехнічний університет

Міністерство освіти і науки України
Одеський національний політехнічний університет

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

САВИЧ Віталій Святославович

УДК 004.942:532.5

ДИСЕРТАЦІЯ

Моделі, метод та засоби математичного моделювання процесів фільтрації у гетерогенних системах

(назва дисертації)

01.05.02 — Математичне моделювання та обчислювальні методи

(шифр і назва спеціальності)

Технічні науки

(галузь знань)

Подається на здобуття наукового ступеня <u>кандидата технічних наук</u>

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

В.С.Савич

(підпис, ініціали та прізвище здобувача)

Науковий керівник ПОЛОЖАЄНКО Сергій Анатолійович,
доктор технічних наук, професор

Одеса — 2017

АНОТАЦІЯ

Савич В. С. Моделі, метод та засоби математичного моделювання процесів фільтрації у гетерогенних системах. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук (доктора філософії) за спеціальністю 01.05.02 «Математичне моделювання та обчислювальні методи» (121 – Інженерія програмного забезпечення). – Одеський національний політехнічний університет, Одеса, 2017.

В роботі вирішено важливу науково-практичну задачу, що полягає у створенні моделей, методу чисельного моделювання процесів фільтрації у гетерогенних системах на основі застосування та розвитку апарату варіаційних нерівностей, а також у розробці комп'ютерно-орієнтованих інструментальних засобів моделювання, які забезпечують ефективне розв'язування прикладних задач при дослідженні і практичному використанні широкого класу природних та технологічних процесів і об'єктів.

В результаті аналізу основних обчислювальних процесів, що реалізуються в системах моделювання природних та технологічних об'єктів, що відрізняються явищами фільтрації (реології) гетерогенного характеру, показано, що застосування існуючих систем моделювання обмежено їх недостатньою ефективністю та універсальністю. Також, в результаті аналізу зроблено висновок про те, що найбільш повно особливості фізики перебігу процесів фільтрації в гетерогенних системах (зокрема: неоднорідність фізико-хімічного складу субстанції, що фільтрується, або середовища; наявність фазових переходів; різко виражена спрямованість розвитку тощо) описується в рамках варіаційних нерівностей у частинних похідних. Останнє дозволило обґрунтувати вибір варіаційних нерівностей в якості адекватних моделей процесів фільтрації з притаманною гетерогенною поведінкою.

Виконані систематизація та класифікація процесів фільтрації в гетерогенних системах, в основу яких покладено особливості якісного

перебігу досліджуваних процесів. Базуючись на виконаних систематизації та класифікації, розроблено математичні моделі процесів фільтрації в гетерогенних та фрактально-гетерогенних системах у вигляді варіаційних нерівностей у частинних похідних, для яких сформульовано та доведено теореми існування та єдності розв'язків. З метою уніфікації підходу до чисельної реалізації отриманих моделей було виконано їх узагальнення та запропоновано відповідний метод, заснований на оптимізаційній процедурі принципу максимуму функції Гамільтона. Розроблено дискретні аналоги математичних моделей процесів фільтрації у гетерогенних системах, а також алгоритмічні засоби реалізації отриманих дискретних моделей.

Результати теоретичних досліджень, розроблені моделі, метод та алгоритми обчислювальної реалізації цих моделей, покладено в основу побудови проблемно-орієнтованого програмного комплексу рішення прикладних задач математичного моделювання процесів фільтрації в гетерогенних системах.

Ключові слова: гетерогенні системи, процеси фільтрації, моделювання, математична модель, варіаційні нерівності в частинних похідних, чисельний метод (алгоритм), фрактальна розмірність.

Список публікацій здобувача:

1. *Савич, В. С.* Математичне моделювання фільтраційних процесів газонасичених ньютонівської та не ньютонівської рідин в зоні тиску насичення [Текст] / *В. С. Савич*, О. О. Ошовська // Інформатика та математичні методи в моделюванні. — 2014. — Т. 4, № 4. — С. 375 — 380.

2. *Савич, В. С.* Моделювання стаціонарної фільтрації неньютонівських рідин у неоднорідному середовищі [Текст] / *В. С. Савич*, О. О. Ошовська // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць /Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАНУ, Кам'янець-Подільський націон. ун-т ім. Івана Огієнка. — Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський націон. ун-т ім. Івана Огієнка, 2014. — Вип. 11. — С. 147 — 155.

3. *Савич, В. С.* Автоматизированный вычислительный комплекс для реализации имитационного моделирования гетерогенных систем [Текст] / *В. С. Савич* // Електротехнічні та комп’ютерні системи. К.: Техніка, 2015. — № 17 (93). — С. 87 — 93.

4. *Савич, В. С.* Математическое моделирование течения газированной жидкости в докритической области гетерогенных систем [Текст] / *В. С. Савич* // Інформатика та математичні методи в моделюванні. — 2015. — Т. 5, № 2. — С. 160 — 166.

5. Положаєнко, С. А. Математичне моделювання процесу фільтрації з розривними коефіцієнтами у гетерогенних системах за умови неточних вхідних даних / С. А. Положаєнко, *В. С. Савич* // Інформатика та математичні методи в моделюванні. — 2016. — Т. 6, № 4. — С. 372 — 379.

6. Polozhaenko, S. A. Mathematical modeling and identification of filtration processes in heterogeneous stratal systems [Текст] / S. A. Polozhaenko, *V. S. Savich* // Colloquium-journal. — 2017. — № 2. — P. 47 — 54.

7. Лысенко, Н. А. Математическая модель процесса фильтрации в многокомпонентной системе с «промежуточным» агентом [Текст] / Н. А. Лысенко, *В. С. Савич* // Сучасні інформаційні технології 2015 (МІТ-2015): Матеріали п’ятої Міжнародної науково-практичної конференції студентів і молодих науковців, 21 — 22 квітня 2015 р. — Одеса, ВМВ, 2015. — С. 78 — 79.

8. *Савич, В. С.* Моделювання стаціонарної фільтрації аномальних рідин у неоднорідному середовищі [Текст] / *В. С. Савич* // Праці V Міжнародної науково-практичної конференції «Обробка сигналів і негаусівських процесів»: Тези доповідей. — Черкаси: ЧДТУ, 2015. — С. 201 — 203.

9. *Савич, В. С.* Математична модель процесу фільтрації у гетерогенній системі з «проміжним агентом» Текст] / *В. С. Савич* // Сучасні інформаційні технології 2016 (МІТ-2016): Матеріали шостої Міжнародної

науково-практичної конференції студентів і молодих науковців, 25 — 27 квітня 2016 р. — Одеса, ВМВ, 2015. — С. 69 — 71.

10. Положаєнко, С. А. Інформаційна технологія реалізації засобів моделювання фрактально-неоднорідних гетерогенних пластових систем [Текст] / С. А. Положаєнко, *В. С. Савич* // Winter InfoCom 2016: Матеріали III Міжнародної науково-практичної конференції, м. Київ, 1 — 2 грудня 2016 р. — К.: Вид-во ТОВ «Інженіринг», 2016. — С. 30 — 33.

11. *Савич, В. С.* Математическая формализация процесса образования фрактальных структур при водонапорном режиме нефтедобычи [Текст] / *В. С. Савич* // Сборник публикаций мультидисциплинарного научного журнала «Архивариус» по материалам XVI международной научно-практической конференции: «Наука в современном мире». — Киев: мультидисциплинарный научный журнал «Архивариус», 2017. — С. 87 — 92.

ABSTRACT

Savich V. S. Models, method and tools for mathematical modeling of filtration processes in heterogeneous systems. – Manuscript.

Thesis for a candidate's degree (Ph.D.) by specialty 01.05.02 – Mathematical simulation and computational methods (121 – Software Engineering) – Odessa National Polytechnic University, Odessa, Ukraine, 2017.

The important scientific and practical task, which consists in creation of models, the method of numerical simulation of filtration processes in heterogeneous systems based on the application and development of the variational inequalities apparatus are solved. Althought the development of computer-oriented modeling tools that provide an effective solution oa applied problems in the study and practical use of a wide range of natural and technological processes and objects.

As a result of analysis of the main computational processes realized in modelling systems of natural and technological objects that differ in the phenomena of filtration (rheology) of the heterogeneous character. It is shown that the use of existing modelling systems is limited by their insufficient efficiency and universality. Also, the analysis concluded that the most complete features of the physics of the filtration processes flow in heterogeneous systems (in particular: the heterogeneity of the physic-chemical composition of the filtering substances or environment, the presence of phase transitions, the sharply expressed direction of development, etc.) is described within the varitional inequalities in partial derivatives. The latter allowed justifying the choice of varitional inequalities as adequate models of filtration processes with inherent heterogeneous behaviour.

The systematization and classification of filtration processes in heterogeneous systems based on the features of the qualitative flow of the investigated processes are performed. Based on the performed systematization and classification, models of filtering processes in heterogeneous and fractal-heterogeneous systems in the form of varitional inequalities in partial derivatives are developed. For this models the existence and uniqueness theorems of the

solution are formulated and proved. In order to unify the approach to the numerical realization of the obtained models, their generalization was carried out and an appropriate method based on the optimization procedure of the maximum principle of the Hamiltonian function was proposed. Discrete analogues of models of filtration processes in heterogeneous systems are developed, as well as algorithmic means for implementing the obtained discrete models.

The results of theoretical studies, developed models, methods and algorithms for the computational implementation of these models are used as the basis for constructing a problem-oriented software package for solving applied problems of mathematical modeling of filtration processes in heterogeneous systems.

Keywords: heterogeneous systems, filtration processes, modeling, mathematical model, varitional inequalities in partial derivatives, numerical method (algorithm), fractal dimension.

List of publications of the author:

1. *Савич, В. С.* Математичне моделювання фільтраційних процесів газонасичених ньютонівської та не ньютонівської рідин в зоні тиску насичення [Текст] / *В. С. Савич*, О. О. Ошовська // Інформатика та математичні методи в моделюванні. — 2014. — Т. 4, № 4. — С. 375 — 380.

2. *Савич, В. С.* Моделювання стаціонарної фільтрації неньютонівських рідин у неоднорідному середовищі [Текст] / *В. С. Савич*, О. О. Ошовська // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць /Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАНУ, Кам’янець-Подільський націон. ун-т ім. Івана Огієнка. — Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський націон. ун-т ім. Івана Огієнка, 2014. — Вип. 11. — С. 147 — 155.

3. *Савич, В. С.* Автоматизированный вычислительный комплекс для реализации имитационного моделирования гетерогенных систем [Текст] / *В.*

С. Савич // Електротехнічні та комп’ютерні системи. К.: Техніка, 2015. — № 17 (93). — С. 87 — 93.

4. *Савич, В. С.* Математическое моделирование течения газированной жидкости в докритической области гетерогенных систем [Текст] / *В. С. Савич* // Інформатика та математичні методи в моделюванні. — 2015. — Т. 5, № 2. — С. 160 — 166.

5. Положаєнко, С. А. Математичне моделювання процесу фільтрації з розривними коефіцієнтами у гетерогенних системах за умови неточних вхідних даних / С. А. Положаєнко, *В. С. Савич* // Інформатика та математичні методи в моделюванні. — 2016. — Т. 6, № 4. — С. 372 — 379.

6. Polozhaenko, S. A. Mathematical modeling and identification of filtration processes in heterogeneous stratal systems [Текст] / S. A. Polozhaenko, *V. S. Savich* // Colloquium-journal. — 2017. — № 2. — P. 47 — 54.

7. Лысенко, Н. А. Математическая модель процесса фильтрации в многокомпонентной системе с «промежуточным» агентом [Текст] / Н. А. Лысенко, *В. С. Савич* // Сучасні інформаційні технології 2015 (МІТ-2015): Матеріали п’ятої Міжнародної науково-практичної конференції студентів і молодих науковців, 21 — 22 квітня 2015 р. — Одеса, ВМВ, 2015. — С. 78 — 79.

8. *Савич, В. С.* Моделювання стаціонарної фільтрації аномальних рідин у неоднорідному середовищі [Текст] / *В. С. Савич* // Праці V Міжнародної науково-практичної конференції «Обробка сигналів і негаусівських процесів»: Тези доповідей. — Черкаси: ЧДТУ, 2015. — С. 201 — 203.

9. *Савич, В. С.* Математична модель процесу фільтрації у гетерогенній системі з «проміжним агентом» Текст] / *В. С. Савич* // Сучасні інформаційні технології 2016 (МІТ-2016): Матеріали шостої Міжнародної науково-практичної конференції студентів і молодих науковців, 25 — 27 квітня 2016 р. — Одеса, ВМВ, 2015. — С. 69 — 71.

10. Положаєнко, С. А. Інформаційна технологія реалізації засобів моделювання фрактально-неоднорідних гетерогенних пластових систем [Текст] / С. А. Положаєнко, *В. С. Савич* // Winter InfoCom 2016: Матеріали III Міжнародної науково-практичної конференції, м. Київ, 1 — 2 грудня 2016 р. — К.: Вид-во ТОВ «Інженіринг», 2016. — С. 30 — 33.

11. *Савич, В. С.* Математическая формализация процесса образования фрактальных структур при водонапорном режиме нефтедобычи [Текст] / *В. С. Савич* // Сборник публикаций мультидисциплинарного научного журнала «Архивариус» по материалам XVI международной научно-практической конференции: «Наука в современном мире». — Киев: мультидисциплинарный научный журнал «Архивариус», 2017. — С. 87 — 92.

ЗМІСТ

СПИСОК СКОРОЧЕНЬ ТА ПОЗНАЧОК

АСУ ТП	— автоматизована система управління технологічним процесом;
ГУ	— граничні умови;
ДП	— дифузійний процес;
ДРЧП	— диференційне рівняння у частинних похідних;
ДС	— добувна свердловина;
ММ	— математична модель;
МФГ	— максимум функції Гамільтона;
НС	— нагнітальна свердловина;
ОТ	— обчислювальна техніка;
ПАР	— поверхнево активні речовини;
ППП	— пакет прикладних програм;
ПУ	— початкові умови;
РП-процес	— процес з розподіленими параметрами;
СЛАР	— система лінійних алгебраїчних рівнянь.

$a(\cdot)$ або $a[\cdot]$	— білінійна форма;
B_j	— об'ємний коефіцієнт фази j;
D	— фрактальна розмірність;
f	— примусова сила;
G_0	— граничний градієнт;
h	— потужність пласта;
$H(\cdot)$	— функція Гамільтона;
$H^1(\Omega)$	— простір Соболєва 1-го порядку;
$\mathbf{j}(\cdot)$, J	— функціонали;
$J(S_j)$	— функція Баклея-Леверета;
k_j	— проникність пористого середовища щодо фази j;

K	— множина припустимих функцій;
$K_д$, $K_н$	— число добувних та нагнітальних свердловин;
m	— шпаруватість пористого середовища;
$P(t,z)$ або $u(t,z)$	— розподілена функція внутрішньо пластового тиску;
P_c	— капілярний тиск;
$Q_д$, $Q_н$	— витрати через добувну та нагнітальні свердловини;
r	— радіус зародку;
$R(f)$	— нелінійний коефіцієнт розчинності газової фази;
$\Re^n$	— n-мірний простір;
$S_j(t,z)$	— розподілена функція насиченості j фази;
$v(t,z)$	— розподілена пробна функція;
z	— незалежна просторова змінна;
t	— незалежна часова змінна;
Γ	— границя просторової області Ω;
η	— нормаль до границі Γ просторової області Ω;
μ_j	— в’язкість j фази;
ζ	— пропускна здатність границі Γ;
$\Psi(t,z)$	— розподілена функція стану для узагальненої математичної моделі
ϖ	— швидкість фільтрації;
Ω	— просторова область;
$\lVert\cdot\rVert$	— норма.

Інші скорочення та позначки мають частинний характер, а їх значення подано при згадуванні по тексту.

ВСТУП

Актуальність теми. Ефективне розв'язування широкого кола теоретичних і практичних задач дослідження розповсюджених процесів фільтрації (більш загально — реології) у пористих середовищах на поточний час можливо завдяки відомим методам *математичного моделювання*, а також наявності якісно розвинутих засобів чисельної програмно-апаратної реалізації даних методів [1 — 18]. Разом з тим відомий клас процесів фільтрації (реології), яким притаманні властивості *гетерогенності* (неоднорідності) прояву характерних фізичних явищ. Причому гетерогенність може бути притаманна як субстанції, що здійснює фільтраційних рух (багатофазні рідини, що не змішуються; суспензії; емульсії; однокомпонентні рідини зі змінною густиною, спричиненою дією згущувачів або поверхнево-активних речовин (ПАР) тощо), так і середовищу, в якому розвивається процес дифузії (шпаруватість пористого простору; наявність включень, відмінних за хімічним складом або фізичними властивостями; прояв зовнішніх впливів та розподіленість параметрів тощо). На практиці процеси фільтрації з гетерогенним характером зустрічаються, наприклад, в пластових геологічних системах і, до найбільш типових з них, в даному випадку, відносяться: фільтрація високопарафіністих та газованих нафт; водонапірний режим розробки нафтових родовищ, в якому фільтраційний рух здійснюють рідини, що не змішуються (нафта та вода у вигляді двофазної рідини); просочування ґрунтових вод через складно структуровані пластові горизонти різної шпаруватості тощо [3 — 5, 19 — 35]. Крім того, для вказаних вище процесів притаманно також порушення лінійного закону фільтрації — закону Дарсі [3, 4, 36, 37]. Інтерес до вивчення процесів фільтрації з гетерогенним характером та відхиленнями від лінійного закону Дарсі полягає в тому, що вони носять не випадковий характер, а складають звичайне (тим більше, таке, що знаходить фізичне пояснення [3, 36, 38]) явище, вказане вище в наведених випадках геологічних систем як типове для певних класів взаємодії «рідина — пористе середовище».

Розв’язування задач математичного моделювання (і, насамперед, моделювання та прогнозу динамічного стану) процесів фільтрації у гетерогенних системах пов’язано з низкою принципових складностей як постановочного, так і обчислювального характеру [3]. В цьому сенсі слід відзначити як найважливіші: нестаціонарний та переважно нелінійний характер досліджуваних процесів; складність геометрії просторової області моделювання та її границь; обмеженість вектору виміру просторів стану процесу та числа точок прикладення управляючих впливів; високі розмірності результуючих кінцевовимірних аналогів математичних моделей (ММ) і, як наслідок, полів отримуваних розв’язків (шуканих функцій). Очевидно, що якісне розв’язування задач математичного моделювання процесів фільтрації у гетерогенних системах, з урахуванням особливостей перебігу останніх, можливо лише на основі широкого втілення сучасних систем моделювання, включаючи також їх розробку.

На практиці застосування існуючих систем моделювання процесів фільтрації з гетерогенним характером [3, 30, 36, 38] обмежується недостатньою ефективністю та універсальністю цих систем, що зумовлено дією комплексу протиріч:

— з одного боку, значним зростанням можливостей та зниженням вартості інструментальних засобів (програмних та апаратних засобів), а також значною кількістю теоретичних напрацювань в області математичного моделювання процесів фільтрації (в тому числі з гетерогенними властивостями), а з іншого боку — недостатньою повнотою методологічних засад побудови систем моделювання та їх складових (зокрема, методів розв’язування задач, поставлених для гетерогенних систем з фрактальними характеристиками);

— інформаційним характером обчислювальних процедур в системах моделювання процесів фільтрації з гетерогенними властивостями і недостатністю застосування універсальних ММ як первинного джерела даних щодо побудови відповідних систем моделювання;

— тотожністю розв’язуваних задач в системах моделювання процесів фільтрації з гетерогенними властивостями різноманітного прикладного застосування (наприклад, розв’язування рівнянь динаміки з відповідними початковими та граничними умовами; побудова полів шуканих функцій та представлення цих полів у зручній для аналізу формі; вироблення рекомендацій практичного характеру за результатами аналізу полів шуканих функцій тощо) та обмеженістю уніфікованих методів та процедур обробки (зокрема, в умовах систем моделювання, які застосовуються);

— зростаючими потребами у розширенні кола прикладних задач, що розв’язуються, та обмеженими можливостями (зокрема, модельної підтримки, уніфікації та типізації обчислювальних процедур тощо) існуючих систем моделювання процесів фільтрації з гетерогенними властивостями.

Наявна різко виражена спрямованість динамічного розвитку процесів фільтрації, у тому числі і з гетерогенними властивостями [3, 30, 39 — 42], зумовила інтерес до їх математичної формалізації на основі апарату варіаційних нерівностей [3, 39, 40, 42, 43]. ММ, які при цьому можна отримати, забезпечують високий рівень адекватності характеру фізичних явищ, що спостерігаються: нерівноваговості перебігу (наявність «зон нечутливості» та непропорційність функцій стану на прикладені збуджуючі впливи); наявність еволюційних обмежень на функцію стану; залежність просторово-часових характеристик (зокрема, поточного значення функції стану) від граничного значення функції стану (так званих граничних градієнтів [3, 36, 38, 42,43]).

Відомо широке коло фундаментальних робіт вітчизняних та зарубіжних вчених, присвячених теорії та практиці досліджень гетерогенних систем (наприклад, роботи: А. Х. Мірзаджанзаде, Г. Г. Вахітова, Б. А. Сулейманова, Г. М. Мєлікова, Г. І. Барренблата, В. М. Єнтова, Є. Д. Ходирєва, А. М. Лінькова, A. Saez, R. I. Marshall, J. E. Warren, N. Sastova та інших), а також використання варіаційних нерівностей щодо дослідження складних фізичних явищ, в тому числі процесів фільтрації та реології (зокрема, роботи: М. З. Згуровського, О. М. Новікова, В. С. Мельника, В. В.

Скопецького, О. І. Єгорова, В. І. Максимова, Ж.-Л. Ліонса, Г. Дюво, Г. Фікери, П. Панагіатополуса, Ф. Кіндерлерера, Г. Стампак'і та інших). Крім того, на теперішній час, наявним є досвід створення систем моделювання дифузійними і, як їх різновид, фільтраційними процесами у пористих середовищах [7, 84, 126], функціонування яких організовано за результатами обчислювальних експериментів. Одначе залишаються не дослідженими питання побудови ММ процесів фільтрації у гетерогенних системах з вираженою спрямованістю розвитку та наявністю граничного градієнту; у фрактально-гетерогенних системах (тобто гетерогенних систем, що мають характер самоподібності фізичних явищ або просторових параметрів); у гетерогенних і фрактально-гетерогенних системах з розривністю коефіцієнтів, а також інструментальних програмних засобів (ІПЗ), що дозволяють реалізовувати зазначені класи моделей.

Вказані вище задачі визначають *актуальність* дисертаційної роботи, зумовлюють необхідність розробки методологічних засад побудови систем моделювання процесів фільтрації з гетерогенними властивостями на основі модельної підтримки у вигляді варіаційних нерівностей з частинними похідними, а також автоматизованих комплексів ІПЗ розв'язування прикладних задач математичного моделювання вказаними процесами фільтрації з урахуванням якісних проявів фізики їх перебігу.

Зв'язок роботи з науковими програмами, темами, планами. Дисертаційна робота виконувалася у відповідності до пріоритетних напрямків науково-дослідних робіт Одеського національного політехнічного університету (ОНПУ), згідно координаційних планів Міністерства освіти і науки України, зокрема, в рамках наукових досліджень за держбюджетними науково-дослідними роботами (НДР): «Моделі складних технологічних об'єктів і процесів та апаратно-програмні засоби їх реалізації в системах управління» № 18-63, 2009 — 2012 р. р. (№ держ. реєстрації 0109U008452); «Моделі та інформаційні технології діагностування та управління складними динамічними об'єктами» № 80-63, 2013 — 2016 р. р. (№ держ. реєстрації 0113U007625).

Мета та задачі дослідження. Метою дисертаційного дослідження є створення моделей, методу чисельного моделювання процесів фільтрації у гетерогенних системах на основі застосування та розвитку апарату варіаційних нерівностей, а також у розробці комп’ютерно-орієнтованих інструментальних засобів моделювання, які забезпечують ефективне розв’язування прикладних задач при дослідженні і практичному використанні широкого класу природних та технологічних процесів і об’єктів.

Для досягнення поставленої мети дослідження в дисертаційній роботі поставлено та розв’язано наступні задачі:

— систематизувати і виділити особливості сукупності процесів фільтрації у гетерогенних та фрактально-гетерогенних системах на основі аналізу поширених природних та промислово важливих явищ дифузії у пористих середовищах (реології);

— виконати класифікацію процесів фільтрації у гетерогенних системах, базисними ознаками якої обрати особливості якісного перебігу фізичних явищ досліджуваних процесів;

— обґрунтувати підхід до математичної формалізації (опису) процесів дифузії у гетерогенних та фрактально-гетерогенних системах, заснований на використанні варіаційних нерівностей, спираючись на постановки прикладних задач моделювання процесами фільтрації у досліджуваних системах з урахуванням якісних проявів їх перебігу (зокрема, виражена спрямованість розвитку та наявність граничного градієнту, еволюційне обмеження на функцію стану, розривність коефіцієнтів тощо);

— розробити ММ процесів фільтрації в гетерогенних системах (у відповідності до виконаної класифікації) з представленням моделей як варіаційні нерівності у частинних похідних, довести існування та єдиність розв’язків відповідних нерівностей, а також виконати узагальнення запропонованих ММ, що дає змогу на уніфікованій основі розробити метод та інструментальні засоби їх реалізації;

— розробити чисельний метод обчислювальної реалізації ММ процесів фільтрації у гетерогенних системах, що враховує особливості якісного перебігу фізичних явищ цих процесів (виражена спрямованість розвитку, обмеженості функції стану різної природи тощо);

— розробити ММ процесів фільтрації у гетерогенних системах із самоподібною структурою (фрактально-гетерогенних систем) у класі варіаційних нерівностей у частинних похідних, які (моделі) відбивають властивості фрактальності як речовини, що здійснює фільтраційний рух, так і просторового середовища, де цей рух відбувається;

— розробити дискретні аналоги ММ процесів фільтрації у гетерогенних системах, які зберігають основні якісні властивості динаміки процесів, що досліджуються, а також алгоритми чисельної реалізації зазначених дискретних ММ;

— розробити ІПЗ, що реалізують запропоновані ММ і метод в рамках автоматизованого комплексу, та виконати оцінку прикладних можливостей ІПЗ на реальних прикладах.

Об'єкт досліджень — процеси моделювання явищ фільтрації в природних та технологічних гетерогенних системах;

Предмет досліджень — математичні моделі процесів фільтрації у гетерогенних (та фрактально-гетерогенних) системах і обчислювальний метод їх чисельної реалізації.

Методи досліджень. В дисертаційній роботі використано положення теорій: рівнянь математичної фізики; оптимального управління; чисельного аналізу; організації комп'ютерних засобів моделювання; обчислювального експерименту. Для підтвердження достовірності отриманих теоретичних результатів було застосовано комп'ютерне моделювання з використанням пакету Matlab (реквізити використаного пакету License number: 21808 Platform: All License option: Group Term: Perretual Use: Classroom).

Наукова новизна результатів, які виносяться на захист, полягає у наступному:

Вперше:

— розроблено математичні моделі процесів фільтрації у гетерогенних системах, які, на відміну від існуючих, враховують особливості перебігу фізичних явищ (зокрема, виражену спрямованість розвитку, вплив граничного градієнту тощо), що дозволяє підвищити якість моделювання;

— розроблено математичні моделі процесів фільтрації у гетерогенних системах із самоподібною структурою (фрактально-гетерогенних систем), які, на відміну від існуючих, дозволяють врахувати властивість фрактальності як самої речовини, що здійснює фільтраційний рух, так і просторового середовища, в якому цей рух відбувається, а також описати системи з реологічними ознаками, залежними від часових характеристик (наприклад, тиксотропних) або нелінійних ефектів (зокрема, коливаннями реологічних характеристик, пов'язаних із взаємодією структурних елементів), що забезпечує адекватність даних моделей у широкому класі досліджуваних процесів;

— сформульовано і доведено теореми існування та єдиності розв'язків варіаційних нерівностей з відповідними початковими та граничними умовами (суть — ММ досліджуваних процесів), які, на відміну від існуючих підходів до моделювання процесів фільтрації у гетерогенних системах, дозволяють виконати якісний аналіз запропонованих ММ, що забезпечує достовірність отримуваних розв'язків задачі моделювання.

Набув подальшого розвитку:

— метод обчислювальної реалізації ММ процесів фільтрації у гетерогенних системах, представлених на основі варіаційних нерівностей у частинних прохідних, який відрізняється врахуванням компонент гетерогенної системи різного фазового складу і ґрунтується на оптимізаційній процедурі принципу максимуму функції Гамільтона, що дозволяє розв'язувати задачі моделювання у випадках, коли шукані функції не обов'язково є «гладкими» функціями.

Практична цінність роботи полягає у тому, що запропоновані моделі, метод та засоби моделювання, дозволяють розширити клас важливих для практики задач дослідження і утилітарного використання процесів фільтрації у гетерогенних системах, а також створено комплекс інструментальних засобів для розв'язування прикладних задач моделювання (зокрема, визначення поточного динамічного стану або його прогнозу) в досліджуваних системах.

Застосування комплексу ІПЗ забезпечує скорочення часу моделювання в $(1,2 \ldots 1,4)$ за рахунок автоматизації процедур обчислювального процесу.

Результати, отримані в дисертаційній роботі, використано при розробці лекційних курсів (і відповідних циклів лабораторних робіт) з дисциплін: «Автоматизація типових виробничих процесів», «Автоматизація проектування систем управління», «Спеціальні розділи сучасної теорії управління», які поставлено і читаються на кафедрі комп'ютеризованих систем управління ОНПУ.

Особистий внесок здобувача. Всі наукові положення, висновки та рекомендації, які містяться у дисертаційній роботі та виносяться на захист, отримано здобувачем особисто і узагальнено при оформленні дисертації. Наукові праці [121, 127, 140, 186, 188] виконано автором особисто. В роботах, написаних у співавторстві [125, 126, 139, 154, 169, 187], автору належать вибір наукового напрямку, постановка задач та способи їх розв'язування, теоретичне обґрунтування методології та інтерпретація результатів досліджень. Зокрема, автору належать:

— в [125] — ММ фільтраційних процесів газонасичених ньютонівської та не ньютонівської рідин в зоні тиску насичення;

— в [126] — ММ процесу стаціонарної фільтрації неньютонівських рідин у гетерогенному середовищі;

— в [139] — ММ процесу фільтрації у гетерогенній системі з «проміжним агентом»;

— в [154] — інструментальні програмні засоби реалізації ММ фрактально-неоднорідних гетерогенних пластових систем.

— в [169] — ММ процесу фільтрації з розривними коефіцієнтами у гетерогенних системах за умови неточних вхідних даних;

— в [187] — ММ процесу фільтрації у гетерогенних пластових системах;

Роботи [121, 125, 169, 186] опубліковано у виданнях, що індексуються у міжнародних наукометричних базах даних, зокрема: *Index Copernicus International, Ulrich's Periodicals Directory, Electronic Journals Library, Google Scholar*. Роботу [187] опубліковано у зарубіжному виданні.

Апробація результатів дисертаційної роботи. Основні положення та результати дисертаційної роботи доповідалися на наукових семінарах кафедри комп'ютеризованих систем управління ОНПУ, Одеса, 2014 — 2017 р. р.; на П'ятій Міжнародній науково-практичній конференції студентів і молодих науковців «Сучасні інформаційні технології 2015 (МІТ-2015)» (Одеса: ОНПУ, 2015 р.); на V Міжнародній науково-практичній конференції «Обробка сигналів і негаусівських процесів» (Черкаси: ЧДТУ, 2015 р.); на Шостій Міжнародній науково-практичній конференції студентів і молодих науковців «Сучасні інформаційні технології 2016 (МІТ-2016)» (Одеса: ОНПУ, 2016 р.); на ІІІ Міжнародної науково-практичної конференції Winter InfoCom 2016 (Київ: НТУУ «Київський політехнічний інститут» ім.. Ігоря Сікорського, 2016 р.); на XVI Міжнародній науково-практичній конференції «Наука в современном мире» (Київ, 2017 р.).

Публікації. Основні наукові результати дисертаційної роботи викладено в 11 наукових роботах, в тому числі: 6 статтях, з яких 5 опубліковано у виданнях, включених до Переліку фахових видань України (всі видання індексуються у міжнародних науко метричних базах даних, зокрема: *Index Copernicus International, Ulrich's Periodicals Directory, Electronic Journals Library, Google Scholar*) та 1 — у зарубіжному виданні, а також 5 тезах наукових конференцій.

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається зі вступу, чотирьох розділів, загальних висновків, списку використаної літератури зі 189 найменувань (на 20 сторінках), 5 додатків (на 27 сторінках), 8 рисунків та 5 таблиць. Загальний обсяг дисертаційної роботи складає 189 сторінок, в тому числі 143 сторінки основного тексту.

1. СТАН ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО ОПИСУ ТА МАШИННИХ МЕТОДІВ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ФІЛЬТРАЦІЇ У ГЕТЕРОГЕННИХ СИСТЕМАХ

1.1. Загальна характеристика процесів фільтрації у гетерогенних системах та особливості їх перебігу

Більшість природних та технологічних рідин, які перебувають у пластових пористих середовищах (і, насамперед, такі, що відносяться до процесів нафтодобутку), являють собою *багатофазні неоднорідні* системи [1, 2, 44 — 46], які містять різноманітні включення та характеризуються *нелінійною реологічною поведінкою* [3, 36]. При цьому багатофазність та неоднорідність зумовлюють *гетерогенні* властивості рідин [47 — 49], що знаходяться у *реологічних* процесах — тобто у фільтраційному русі в пористих середовищах [19 — 21]. Ефекти, які спостерігаються при фільтрації гетерогенних систем, відрізняються значною різноманітністю, що передбачає якісно відмінний вид *законів фільтрації* [4, 5, 22, 23] для них.

При вивченні фільтрації деяких видів нафт через пористе середовище в певних умовах спостерігалася поведінка, характерна для в’язкопластичних середовищ, основною особливістю яких є наявність *початкового* (або *граничного* [3, 36]) градієнту тиску. Закон фільтрації з початковим градієнтом було введено Мірзаджанзаде А. Х. в 1953 р. в наступній формі (для одновимірного плину) [24, 25]:

$$\varpi = \begin{cases} -\dfrac{k}{\mu}\left(\dfrac{\partial P}{\partial z} - G_0\right), & \dfrac{\partial P}{\partial z} > G_0, \\ 0, & \dfrac{\partial P}{\partial z} \le G_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

де ϖ — швидкість фільтрації, P — пластовий тиск, G_0 — граничний градієнт тиску, k та μ — відповідно проникність пористого середовища та в’язкість нафти, z — незалежна просторова координата.

Деякі рідини (розчини полімерів, неньютонівські нафти тощо) при дослідженні на віскозіметрах виявляють *псевдопластичні* або *ділатантні* властивості. При цьому у першому випадку в процесі руху відбувається зменшення ефективної в’язкості [36], а у другому — збільшення [47]. В ряді випадків вказані закономірності проявляються також при фільтрації вказаних рідин у пористому середовищі. Плин таких рідин у пористому середовищі зазвичай описується степеневим законом фільтрації у вигляді (для одновимірного випадку):

$$\varpi = -B\left|\frac{\partial P}{\partial z}\right|^{n-1} \times \frac{\partial P}{\partial z}, \ (n > 0). \tag{1.2}$$

При $n > 1$ рідина псевдопластична, при $n < 1$ — ділатантна (B — постійний коефіцієнт).

Однією з причин нелінійності закону фільтрації може бути *розділення фаз гетерогенної системи*, що пояснюється дією *принципу дисипації енергії* [37]. У підсумку дисперсна фаза концентрується у центрі потоку, а дисперсійна — біля стінок, або навпаки.

До наступного широкого класу неньютонівських систем відносяться технологічні та реальні рідини, які при фільтрації в пористому середовищі виявляють *в’язкопружні* властивості. При цьому вказані рідини у вискозиметричному досліді проявляють *зсувне розрідження* (зменшення ефективної в’язкості), а при фільтрації — *зсувне загущення* (збільшення ефективної в’язкості), тобто має місце *аномальне зростання опору плину* у пористому середовищі [50]. В ряді випадків спостерігається перехідний режим, при якому має місце перехід від псевдопластичного плину до ділатантного [51]. Вказані явища [26] пояснюються в’язкопружними ефектами (релаксаційними явищами в стаціонарному потоці рідини). В даному випадку в’язкі сили, що зумовлюють опір, є вирішальним фактором лише в області малих швидкостей фільтрації та помітно зменшуються з її збільшенням. Крім того переважну роль починають грати пружні сили, оскільки рідина не встигає релаксувати при переході з однієї пори в іншу. Це приводить до збільшення ефективної в'язкості. Зростання опору при збільшенні швидкості фільтрації пропорційне величині:

$$1 + A\left[\left(\tau\,\varpi\right)/r\right]^2, \qquad (1.3)$$

де τ — час релаксації, r — характерний розмір пор, A — постійний коефіцієнт [27].

Закон фільтрації за прояву *в'язкопружних ефектів* записується у вигляді:

$$\varpi = -\frac{k}{\mu_0\left\{1 + A\left[\left(\tau\,\varpi\right)/r\right]^2\right\}} \times \frac{\partial P}{\partial z}. \qquad (1.4)$$

Співвідношення (1.4) можна записати й так [24]:

$$-\frac{\partial P}{\partial z} = a_1\varpi + a_3\varpi^3. \qquad (1.5)$$

Звідси витікає, що введення кубічного доданку пов'язано з урахуванням *нерівноважних в'язкопружних* властивостей.

При фільтрації релаксуючої рідини в неоднорідному (гетерогенному) пористому середовищі за інших рівних умов ефективна в'язкість у високопроникному прошарку буде вище [29]. Внаслідок цього буде відбуватися вирівнювання профілю фільтрації релаксуючої рідини. Цей ефект широко застосовується в технологічних процесах нафтодобутку. Слід зазначити, що у ряді випадків відзначається значний вплив *адсорбції* [52, 53], а також масштабного ефекту (ефект Фареуса-Ліндквіста) на фільтрацію в'язкопружних рідин.

В роботі [54] розглянуто *вплив розміру пор* на фільтрацію полімерних розчинів, зокрема, ксантанового полісахариду з додаванням $NaCl$. В даних роботах наведено результати експериментів в щілині з пористим середовищем, складеним сферичними скляними кульками. При цьому, на підставі експериментальних досліджень, було введено залежність в'язкості від швидкості зсуву та запропоновано запис закону фільтрації релаксуючих рідин у наступному вигляді:

$$\varpi = -A\,\frac{k}{\mu(\gamma)} \times \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \gamma = \frac{4\,\alpha\,\varpi}{F\;A\sqrt{8\,k\,m}}. \qquad (1.6)$$

Тут α , A — постійні коефіцієнти, F — площа поперечного перерізу зразка.

В роботі [55] на основі представлення макромолекул полімерів у вигляді гнучкого ланцюгу вводиться *скейлінгове* співвідношення для в'язкості гетерогенної системи

$$\mu(\gamma) = \mu_0 \cdot f(\gamma\,\theta_0), \qquad (1.7)$$

де θ_0 — максимальний час релаксації за відсутності потоку.

Очевидно, що даний підхід також призводить до дво- або тричленного закону фільтрації.

Аналіз приведених виразів показує, що вони описують тільки ті випадки фільтрації гетерогенних рідин, коли має місце монотонне збільшення або зниження фільтраційних опорів, тобто псевдопластичний або ділатантний плин. Разом з тим в ряді випадків спостерігається, як було зазначено вище, *перехідний* (комбінований) режим. На основі експериментальних досліджень показано [47], що низка гетерогенних систем в однорідному пористому середовищі виявляє псевдопластичний плин, а в неоднорідному — S-подібній, при якому має місце перехід від ділатантного плину до псевдопластичного. Очевидно, що наведені вище закони фільтрації не описують *перехідні* або *комбіновані* режими плину (зокрема, S-подібні).

Також в роботі [47] показано, що S-подібний плин може бути описано в рамках нелінійного, тричленного закону фільтрації Форхгеймера

$$-\frac{\partial P}{\partial z} = a_1\varpi + a_2\varpi^2 + a_3\varpi^3 , \qquad (1.8)$$

за умов $a_1 = 0$ та $a_3 < 0$. При цьому квадратичний член відбиває нерівноважові властивості фільтраційного потоку, а кубічний — неоднорідність пористого середовища.

В роботах [47, 56, 57] запропоновано більш простий підхід. Його засновано на модифікації лінійного закону фільтрації Дарсі [1, 2], шляхом уведення експериментальної залежності ефективної в'язкості гетерогенної системи від перепаду тиску:

$$\varpi = -\frac{k}{\mu(P)} \cdot \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \mu(P) = b_1(P - P_0)^2 + b_2(P - P_0) + b_3. \qquad (1.9)$$

Вказаний підхід дозволяє описати як плин з монотонним збільшенням або зниженням фільтраційного опору, так і перехідні або комбіновані режими.

Також в роботі [55] показано, що полімерні розчини, які складаються із сплутаних у клубки макромолекул, та плин яких відбувається поблизу гладкої пасивної поверхні, повинні характеризуватися високим *ступенем ковзання* (швидкість потоку на стінці відмінна від нуля). Фізично можна сказати, що вигідніше сконцентрувати зсуви поблизу міжфазної поверхні «полімер — тверде тіло», ніж розподіляти їх по об'єму рідини (де переплетіння ланцюжків сильно перешкоджає зсуву). Ефективна в'язкість для таких систем буде визначатися з виразу [55]

$$\mu = \frac{b}{a}\mu_0, \qquad (1.10)$$

де b — коефіцієнт ковзання, a — молекулярний розмір, μ — в'язкість рідини, яка складається з мономерів (з тою ж взаємодією, але без клубків). Ефектом ковзання пояснюється також *аномалії в'язкості* полімерних розчинів.

Закон *фільтрації з ковзанням* записується у вигляді:

$$\varpi = -\left(1 + \frac{4b}{R}\right)\frac{k}{\mu_0}\frac{\partial P}{\partial z}, \qquad (1.11)$$

де R — середній радіус капілярів пористого середовища.

Ефект *ковзання* може спостерігатися при плині різних рідин (в тому числі в'язкопластичних [58]) в ліофобних та ліофільних середовищах. Крім того, в ряді робіт відмічено, що при фільтрації рідин в ліофільних середовищах проявляється ефект *гальмування* . В роботі [59] запропоновано уточнення закону Дарсі введенням коефіцієнта опору ковзанню β . При цьому *ефективна проникність* визначається з виразу

$$k = \frac{1}{8\tau^2}\int_{r_{\min}}^{r_{\max}}\left[r^2 + \frac{r\mu}{\beta} + \left(\frac{\mu}{\beta}\right) + \frac{\left(\mu^{-1}\beta\right)^3}{\left(r - \mu^{-1}\beta\right)}\right]\varphi(r)\,dr, \qquad (1.12)$$

де τ — хвилястість, $\varphi(r)$ — функція розподілу пор за розмірами.

Найважливішим класом гетерогенних систем є також *газовані рідини*. В класичній теорії дослідження фільтрації газованих рідин базується на експериментах Вікофа-Ботсета [60]. При цьому зазвичай вважається, що для рідини та газу можна записати рівняння Дарсі у вигляді:

$$m\, S_i\, \varpi_i = -\frac{k_0\, K_i}{\mu_i} \nabla P\,, \tag{1.13}$$

тут k_0, K_i, S_i, m, μ_i — відповідно для пористого середовища (та i-ї фази): абсолютна проникність, відносна проникність, насиченість, шпаруватість та динамічна в'язкість. Останнє рівняння відповідає такому плину в пористому середовищі, коли рідина та газ абсолютно «рівноправні». Можна уявити, що рух рідини та газу відбувається в певній системі неперервних каналів, заповнених або рідиною, або газом.

Відповідно до класичної теорії відносних фазових проникностей, вони не можуть бути більше за одиницю, одначе дослідження, які проведено академіком А. Х. Мирзаджанзаде та його школою, показали, що при тискові вище (поблизу) за тиск насичення має місце аномальне зростання витрати рідини (у 2 … 3 рази). Це пояснюється утворенням *докритичних зародків* газової фази, в наслідок чого відбувається зменшення *уявної в'язкості* системи. При цьому уявна в'язкість газованої рідини може бути визначена з виразу [61]

$$\mu = \mu_0 \left\{ 1 + \exp\left[-\frac{4\pi\sigma\left(r^2 - 2/3 \times r^3/r_k\right)}{\kappa\, T} \right] \right\}, \tag{1.14}$$

де μ_0 — в'язкість рідини, σ — поверхневе натяжіння, r — радіус зародка, r_k — критичний радіус зародка, κ — постійна Больцмана, T — абсолютна температура. Як видно з виразу (1.14), при тискові вище тиску насичення, коли $r < r_k$, в'язкість зменшується при наближенні до тиску насичення, а при $r > r_k$, коли в системі з'являються кульки газу (система стає суть *гетерогенною*) — збільшується.

В ряді робіт, що опубліковано за останні роки [5, 47, 56, 57], наведено результати теоретичних та експериментальних досліджень стаціонарної та нестаціонарної фільтрації газованих рідин у передперехідному фазовому стані. Експериментально вивчено зміну явища *стискання* поблизу тиску насичення; вплив проникності, змочування пористого середовища, газонасичення та неньютонівських властивостей рідини на процес фільтрації, а також витіснення газованими рідинами в однорідних та неоднорідних пористих середовищах. Як теоретичний результат було виведено *степеневий закон фільтрації з ковзанням* (подальший розвиток законів виду (1.8), (1.9)) шляхом використання введеної експериментальної залежності *коефіцієнта ковзання гетерогенної системи від тиску* та показано, що для неньютонівських рідин за наявності ковзання можлива повна модифікація характеру плину (зокрема, при фільтрації гетерогенних систем в неоднорідному пористому середовищі буде відбуватись вирівнювання профілю фільтрації). Також отримано розв'язки щодо відновлення тиску з урахуванням ефекту ковзання.

Якісно новий напрямок теоретичних досліджень фільтрації гетерогенних систем пов'язано із впливом на реологічний процес *фрактальних структур* [62, 63]. Цей вплив може здійснюватися за рахунок фрактальної структури пористого середовища [64 — 66] або самої гетерогенної системи, що фільтрується [67, 68]. Перехід від лінійного закону фільтрації до нелінійного у значному ступені залежить від розподілу пор по розмірах або фрактальності структури пористого середовища [64]. Разом з тим *гетерогенні рідини*, зокрема емульсії, мають динамічну фрактальну структуру, яка визначається взаємодією між частинками дисперсної фази [67]. Одначе, за умови зменшення взаємодії між частинками, що спостерігається зі зниженням концентрації дисперсної фази, фрактальна структура гетерогенної системи зникає. При цьому в задачах нафто-газодобутку часто виникає проблема визначення *віброхвильової дії* режимів роботи системи технологічних (добувних та нагнітальних) свердловин на процес фільтрації в неоднорідних пористих середовищах [47, 69 — 72]. Дієвим інструментарієм дослідження нестаціонарних сигналів слід розглядати вейвлет-аналіз, який набув останнім часом характер ефективного аналітичного засобу, що дозволяє обчислювати параметри *глобальної самоподібності* (фрактальності) реологічної гетерогенної системи на основі досліджень *локальної самоподібності* останньої [73, 74]. Тому важливість цих результатів для теорії фільтрації очевидна, одначе складає самостійний аспект досліджень.

1.2. Математична формалізація та обчислювальна реалізація математичних моделей процесів фільтрації у гетерогенних системах

1.2.1. Математичні моделі процесів фільтрації у гетерогенних системах

На відміну від гомогенних систем, яким притаманні *мікронеоднорідності* атомарно-молекулярних розмірів, гетерогенні системи характеризуються *неоднорідностями*, що значно перевищують атомарно-молекулярні розміри і можуть бути описані *механікою гомогенного суцільного середовища* [75]. Також, на відміну від гомогенних систем, в яких складові називаються *компонентами*, в гетерогенних системах складові носять назву «*фази»* [8]. Типовим прикладом гетерогенних систем, яким присвячено дисертаційне дослідження, виступають пористі середовища [1 — 3, 5, 20 — 22 2, 36, 37, 56, 57], хоча окремі фази можуть мати багатокомпонентну природу [75].

Математична формалізація гетерогенних систем (тобто представлення механіки пористих середовищ у вигляді відповідних ММ) будується на основі загальних фізичних принципів механіки гетерогенних середовищ. Вона вміщує в себе *балансові співвідношення* (закони збереження) та *закони руху* Ньютона, які носять універсальний характер і справедливі як на мікрорівні, так і на макрорівні. Крім того, до рівнянь руху відносять *визначаючі рівняння,* які описують специфіку конкретних середовищ. Кожна фаза характеризується своїми власними визначаючими рівняннями, а визначаючі рівняння суміші можуть суттєво відрізнятися від визначаючих рівнянь окремих фаз.

Фази гетерогенних середовищ може бути представлено різними гомогенними середовищами [76, 77]. При цьому, в найпростішому випадку, при формалізації гетерогенних середовищ, слід розглянути класичні моделі механіки суцільного середовища:

— *пружні середовища* при малих деформаціях

$$\nabla \cdot \hat{\sigma} + \rho g = 0\,,\ \ \hat{\sigma} = 2\mu\,\hat{\varepsilon} + \lambda\theta\hat{I}\,,\ \ \hat{\varepsilon} = \frac{1}{2}\left(\nabla \otimes \vec{u} + \nabla \otimes \vec{u}^{\,\mathrm{T}}\right), \qquad (1.15)$$

де $\hat{\sigma}$ — тензор напруг Коші [78], який визначає рівнодіючу усіх сил, що діють у елементарному об’ємі $F = \nabla \cdot \hat{\sigma}$; ρ — густина; g — прискорення сили тяжіння; μ — в’язкість; $\hat{\varepsilon}$ — тензор кінцевих деформацій; $\hat{I}$ — одиничний тензор; θ — плаский кут; λ — власні числа матриці рівнодіючих сил $\mathbf{F}$; $\nabla = (\partial/\partial z)$ — оператор Лапласа; $\otimes$ — символ, що позначає символьне множення ($a \otimes b \cdot u = a(b \cdot u), \forall u$), T — символ транспонування;

— рідкі середовища, що описуються законом Ньютона (наприклад, *«ідеальні» рідини* [1, 2, 46])

$$\hat{\sigma} = \hat{\tau} - p\hat{I}\,,\ \ \nabla \cdot \varpi = 0\,;\ \ \hat{\tau} = \eta\,\hat{e}\,,\ \ \hat{e} \equiv \left[\nabla \otimes \vec{v} + \nabla \otimes \vec{v}^{\,\mathrm{T}}\right], \qquad (1.16)$$

де $\hat{\tau}$ — тензор напруги зсуву [53]; ϖ — швидкість плину рідини; η — нормаль до поверхні;

— рідкі неньютонівські середовища (*«аномальні» рідини* [3, 36]) зі степеневим законом [21, 47]

$$\hat{\tau} = \hat{A}\,I^{\,m-1}\hat{e}\,,\ \ I \equiv \sqrt{\hat{e}:\hat{e}}\,, \qquad (1.17)$$

де $\hat{A}$ — тензор другого порядку ($u = \hat{A} \cdot v$).

Одначе, можуть зустрічатися середовища з більш складною реологією, зокрема, з *нелокальними визначаючими рівняннями* (в рамках теорії малої деформації, використовуючи закон збереження енергії) [54]:

$$\rho\dot{u} = \sigma_{jk}\frac{\partial \dot{u}_k}{\partial z_j} - e_{jkm}\,\sigma_{km}\dot{\varphi}_j + m_{jk}\frac{\partial \varphi_k}{\partial z_j} - \frac{\partial q_k}{\partial z_k} + q_V\,,\ \ i, j, k, m = \overline{1,3}\,, \qquad (1.18)$$

де $\dot{u}$ — масова щільність внутрішньої енергії; $\dot{(\ )} = \dfrac{\partial}{\partial t}$, t — час; $\sigma_{jk} \neq \sigma_{kj}$ — компоненти тензора напружень; u_k — проекція вектора пересувань на ось

Ox_k прямокутної системи координат; z_j — декартові координати; e_{jkm} — символи Леві-Чевіти [80]; $\dot{\varphi}_j$ — проекції вектора мікроповороту; m_{jk} — компоненти тензора момент них напруг; q_k — проекції вектора потоку (енергії); q_V — об’ємна щільність потужності внутрішніх джерел (витоків) (енергії). Після використання перетворення Лежандра [81]

$$u = W + Th, \tag{1.19}$$

W, h — масові щільності вільної температури Гельмгольця та ентропії, T — абсолютна температура системи, рівняння (1.18) прийме вигляд

$$\rho E\dot{h} = -\frac{\partial q_k}{\partial z_j} + q_V + \delta_D, \tag{1.20}$$

де $\delta_D = \sigma_{jk}\dfrac{\partial \dot{u}_k}{\partial z_j} - e_{jkm}\sigma_{km}\dot{\varphi}_j + m_{jk}\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial z_j} - \rho(W + Th)$ — дисипативна функція.

Прикладом гетерогенних середовищ, математичні моделі яких представляються у вигляді (1.18) — (1.20), можуть слугувати *в’язкопружні* середовища або *концентровані суспензії*, що відіграють роль флюїда в пористих середовищах.

Як у гомогенних так і у гетерогенних середовищах при їх математичній формалізації (суть — складанні математичної моделі) фундаментальним поняттям є *елементарний об’єм*, з яким пов’язано представлення про мікрооб’єкти та макрооб’єкти. Саме для нього визначаються кінематичні та динамічні величини. При цьому в елементарному об’ємі розглядається сукупність матеріальних точок (фізичних точок), що мають власну внутрішню мікроструктуру, яку може бути досліджено на мікрорівні. На рівні елементарного об’єму визначаються мікронеоднорідності, якими зумовлено *властивості гетерогенного середовища*. В даному розумінні елементарний об’єм являє собою область (тіло), в якій відбувається *осереднення* характеристик (і властивостей) матеріальних точок середовища. В результаті процедури осереднення виникає система взаємопроникних багатошвидкісних континуумів, що складає основу *механіки гетерогенних сумішей*. Кожний з цих континуумів ототожнюється зі складовими сумішей (компонентами або фазами). Цей факт дозволяє для гетерогенних середовищ використовувати основні поняття механіки гомогенних середовищ. Взаємодія між середовищами (або окремими їх фазами) здійснюється за допомогою функцій джерел, що входять у праві частини рівнянь збереження (наприклад, рівняння (1.18) — (1.20)).

Демонструвати результати осереднення величин по фазах, а також проводити різноманітні уявні експерименти зручно в *кубічному елементарному об'ємі*, ребра якого поєднано з декартовою системою координат (z_1, z_2, z_3). Уводяться також векторні елементарні поверхні ΔS_1, ΔS_2. ΔS_3. Направлення зазначених векторів співпадає з напрямком нормалі (η у виразі (1.16)) до відповідної площадки, а модуль співпадає з площею грані куба.

Найпростіша форма осереднення передбачає *осереднення по масі фаз* елементарного об'єму. В даному випадку розглядаються два масштаби мікроб'єктів: *масштаб мікронеоднорідностей* Δl і *масштаб елементарного об'єму* ΔV. Останній підбирається таким чином, щоб, з одного боку, в ньому вміщувалося досить багато мікронеоднорідностей (для випадку пористих середовищ, які складають предметну область чинної дисертаційної роботи — пор, тріщин або зерен), а, з другого боку, — він повинен бути меншим за *макромасштаб* V.

При математичній формалізації гетерогенних середовищ необхідно брати до уваги певні принципи [82, 83], що можна узагальнити у вигляді певної системи припущень.

Припущення механіки суцільних середовищ.

1. Лінійні розміри мікроб'єкта багато більші атомарно-молекулярних розмірів $l_{\text{ам}}$ (розмірів атомів або молекул, постійної кристалічної решітки, довжини вільного пробігу молекул тощо). В той самий час він значно менший за розміри макроскопічного об'єкта

$$l_{\text{ам}} << \Delta L << L .$$

2. Виконується локальна термодинамічна рівновага (в сенсі «малості» відхилень від неї).

3. Виконується локальна однорідність процесів.

Припущення механіки гетерогенних середовищ.

4. Твердження 1 … 3 можуть бути задіяні до кожної окремої з фаз, що складають елементарний об'єм.

5. Розмір елементарного об'єму, по якому відбувається осереднення, набагато більше розмірів мікронеоднорідностей (мікророзмірів) та радіусу кореляції для випадкових неоднорідних величин. В той самий час він достатньо малий для того, щоб випадкові поля були статистично однорідними. Іншими словами, як і в п. 1 цей радіус значно менший за макророзмір. Таким чином, має місце вкладений один в інший масштаби

$$l_{\text{ам}} \ll \Delta l \ll \Delta L \ll L \,.$$

6. В кожній фазі слід розрізняти не тільки основний об'єм, але й пригличний шар на міжфазній границі, який також слід розглядати як самостійний мікроб'єкт.

Пункти 2 та 3 означають, що дисипативні процеси знаходяться у стаціонарному режимі та створюють мале відхилення від стану термодинамічної рівноваги. Це дозволяє в ході математичної формалізації на макрорівні вводити температури та різноманітні термодинамічні функції фаз. Стаціонарний, однорідний та *рівноваговий* режим дозволяє не тільки ввести у розгляд термодинамічні потенціали, але й одночасно дає можливість описувати *нерівноважові* процеси у вигляді швидкості виробництва ентропії (наприклад, вирази (1.19), (1.2)). Припущення 4 і 5 дозволяють при осередненні скористатися *ергодичною теоремою* та замінити осереднення по елементарному об'єму більш зручним осередненням по асамблеї реалізацій [84]. Пункт 6 дозволяє розглядати різноманітні *міжфазні* процеси також методами механіки суцільного середовища.

Для конкретних пористих середовищ наведена система припущень доповнюється пунктами, що відбивають специфіку цих середовищ.

Поропружні середовища.

7. Одна з фаз повинна складати пружний кістяк (або матрицю). Вона утворює зв'язаний простір, наскрізь яке фільтруються малов'язкі флюїди (рідина або газ). Флюїдних фаз може бути декілька.

8. Кістяк також може бути багатофазним та багатокомпонентним.

9. Допускаються фазові переходи між фазами флюїду та між фазою і кістяком.

Пороводʼязкі середовища.

10. Одна з фаз являє собою сильнов'язку рідину, а інша — малов'язкий флюїд, наприклад, газ, рідину або їх суміш (гомогенну або гетерогенну). Флюїдних фаз також може бути декілька.

11. Кістяк також може бути багатофазним та багатокомпонентним.

12. Допускаються фазові переходи між фазами флюїда та між флюїдом та кістяком.

У самому загальному випадку кістяк може бути твердим або рідким тілом, що мало піддається, або ж середовищем зі складною реологією. В даному випадку можна говорити вже не про поропружні середовища, а *поропористі насичені середовища, що деформуються*.

В деяких випадках математична формалізація гомогенних (багатофазних) сумішей зводиться до математичного опису (інакше — математичних моделей) *еквівалентних гомогенних сумішей* [85]. Наприклад, рідину з бульбашками може бути математично описано як сильно стиснену рідину, а ґрунти — пружними або пружнопластичними моделями. Але при більш інтенсивних навантаженнях, більших швидкостях або при відносних рухах фаз прості гомогенні моделі втрачають адекватність. В даному випадку математичний опис реальних гетерогенних середовищ значно ускладнюється двома головними причинами:

— по-перше, в екстремальних умовах поведінка кожної з фаз ускладнюється (наприклад, з'являються відхилення від лінійного закону Дарсі [3, 36]);

— по-друге, починає проявлятися міжфазна взаємодія, що призводить до появи принципово нових якостей гетерогенної суміші, яких не було у кожної зі складових фаз (наприклад, поява евтектоїдних сполук у приграничних зонах [5, 21, 57]).

Для складання ММ гетерогенних систем може бути застосовано підхід, що ґрунтується на *феноменологічному описанні кінематичних процесів* у пористих середовищах [86]. Феноменологічний підхід полягає у використанні *теорії післядії* Больцмана-Вольтера в описанні деформації пружних та в'язко-пружних тіл. Цей підхід плодотворний в задачах механіки тіла, що деформується (певних випадків гетерогенних середовищ), у застосуванні до задач переносу (фільтрації) виявляється достатньо простим та узгоджується з результатами дослідів для досить складних нелінійних процесів (наприклад, сорбції у покладах вуглів та породах, аналогічних їм за властивостями) [87, 88]. За основу феноменологічного підходу кінетичних процесів у пористих блоках, у відповідності до вказаних робіт, може бути прийнято рівняння типу Ленгмюра, що має вигляд:

$$\nu_t = \nu_P \left(1 - e^{-kt}\right), \qquad (1.21)$$

де ν_t — кількість речовини (фази), що може дифундувати (фільтруватися) через або бути поглинутим (сорбованим) пористим середовищем на момент часу t; ν_P — гранична рівноважна кількість речовини (фази), що може дифундувати через або бути поглинутою (сорбованою) одиницю маси пористого середовища при даному тиску P (визначається по ізотермах сорбції або насиченості); k — кінетичний показник, який залежить від властивості речовини (фази), що фільтрується та пористого середовища.

Таким чином в (1.21) наявним є закон, який відповідає кінетиці речовини (фази), яка дифундувала (або була сорбованою) пористим середовищем в умовах певного внутрішньо пластового тиску P (або його стрибкоподібної зміни). Елементи пористого середовища знаходяться в умовах зміни внутрішньо пластового тиску фази, що фільтрується. Якщо в точці пористого середовища в кінцевий інтервал часу $\tau = \tau + d\tau$ (де

$\tau \le t - dt$) відбулося зниження тиску фази, що фільтрується, з величини $P(\tau)$ до величини $P(\tau + d\tau)$, то при тиску $P(\tau)$ рівноваговий вміст в пористому середовищі (який визначається ізотермою сорбції), буде складати:

$$\nu_{P_1} = \nu_P(\tau), \tag{1.22}$$

а при тиску $P(\tau + d\tau)$ рівноваговий вміст відповідно складатиме:

$$\nu_{P_1} = \nu_P(\tau + d\tau). \tag{1.23}$$

Тоді елемент пористого середовища (сорбуючий елемент) перейде у новий рівноваговий стан, коли вирівнюється утворена надлишкова кількість флюїду, що фільтрується, і яка дорівнює різниці між поглинаючою (сорбуючою) ємністю елементу пористого середовища при тиску фази на момент τ та тиском, що встановився на момент $(\tau + d\tau)$. Ця кількість буде дорівнювати

$$\Delta\nu = -(\nu_{P_1} - \nu_{P_2}) = \nu'_P(\tau)d\tau. \tag{1.24}$$

На момент часу τ, відповідно до (1.21), від цієї надлишкової кількості флюїду (фази) залишиться

$$Q_{S\tau} = \nu'_P(\tau)d\tau\left[1 - e^{-k(t-\tau)}\right], \tag{1.25}$$

де $Q_{S\tau}$ — кількість речовини фази, яка дифундує або є такою, що поглинається (сорбується) на момент часу t і зумовлена зміною тиску на момент часу τ.

У виразі (1.25) в показнику експоненти, на відміну від виразу (1.21) стоїть час $(t - \tau)$, оскільки з моменту τ до моменту, що розглядається, пройшов час $(t - \tau)$. Таким чином, вираз (1.25) дає змогу визначити кількість речовини фази, яка дифундувала або була поглинутою (сорбованою) на момент часу t при стрибкоподібному пониженні тиску в момент часу τ. Щоб отримати загальну кількість речовини фази (або флюїду), яка дифундує або є такою, що поглинається (сорбує), необхідно визначити суму окремих $Q_{S\tau}$ при всіх $\tau \le (t_0, t)$, де t_0 — момент першої зміни тиску речовини фази (флюїду), що фільтрується.

Відшукуючи суму та переходячи до ліміту при $d\tau \to 0$ можна отримати інтегральне представлення кількості фази, що дифундувала або була поглинутою (сорбованої), при довільному тиску:

$$Q_S = \int_{t_0}^{t} \nu'_P \left[1 - e^{-k(t-\tau)}\right] dt \ . \qquad (1.26)$$

Таким чином у формулі (1.26) отримано аналітичний вираз, що описує взаємодію фаз гетерогенної системи при фільтрації або поглинанні (сорбції) пористим середовищем. Вид цієї взаємодії носить *лінійно-наслідковий характер* та відповідає фізичним процесам масопереносу при фільтрації гетерогенного флюїду в середовищах, представлених такими складними за побудовою та властивостями тріщинувато-пористими породами.

При розв'язанні задач, пов'язаних з вивченням закономірностей руху гетерогенної системи при фільтрації, слід залучати рівняння збереження маси в одиниці об'єму, яке для тріщинувато-пористого середовища має вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(Q_f + Q_S\right) = -\mathrm{div}\left(\rho \varpi\right), \qquad (1.27)$$

де Q_f — кількість «вільної» речовини фази (флюїду) гетерогенної системи, що знаходиться в одиниці об'єму матеріалу пористого середовища; Q_S — кількість речовини фази (флюїду) гетерогенної системи, зв'язаної поверхнево-активними силами; ρ — густина речовини фази (флюїду) гетерогенної системи; ϖ — швидкість руху (фільтрації або поглинання (сорбції)).

Співвідношення (1.26) та (1.27) можуть слугувати основою для розробки принципово нових ММ нестаціонарної фільтрації гетерогенних систем у пористих, зокрема гірських тріщинувато-неоднорідних породах.

В роботах [3, 30, 89, 90] обґрунтовано, що адекватними ММ нерівноважних процесів (зокрема, аномальних дифузійних [3] або однобічних [30, 89, 90]) доцільно розглядати *варіаційні нерівності у частинних похідних* [39, 40, 42, 122]. Виконаємо аналіз можливості застосування апарату варіаційних нерівностей у частинних похідних в якості ММ процесів фільтрації у гетерогенних системах з урахуванням особливостей перебігу фізичних явищ, притаманних цим процесам, принагідно зазначивши, що диференційні рівняння у частинних похідних (ДРЧП) не дають змогу якісно описати всі специфічні явища нерівноважних (в тому числі і реологічних [3]) процесів, що виникають, наприклад, внаслідок неоднозначності проникності границь, неоднорідностей всередині просторової області тощо [3, 30].

Досить повний систематичний аналіз стану проблеми математичної формалізації однобічних фізичних процесів та аномальних дифузійних процесів та огляди робіт, присвячені різним аспектам цієї проблеми наведено в роботах [3, 30]. Результати цього аналізу (з посиланнями на відповідні джерела) можна звести до наступного. В ряді фундаментальних робіт з функціонального аналізу, наприклад, [38, 43, 91], обґрунтовано адекватність математичного опису однобічних фізичних процесів у вигляді варіаційних задач. Причому, врахування додаткових умов, накладених на розв’язок задачі безпосередньо на етапі її варіаційної постановки (зокрема, провідності границь, граничність значень градієнтів збуджуючих функцій тощо), призводить до формулювань у вигляді варіаційних нерівностей. Таким чином доцільно стверджувати, що формалізація задач динаміки процесів фільтрації у гетерогенних системах в формі варіаційних нерівностей є важливим етапом математичного моделювання, оскільки може слугувати основою для низки якісних досліджень процесів, які вивчаються, наприклад, доведення *існування* та *єдиності розв’язків* згаданих вище нерівностей.

Донедавна всі задачі на варіаційні нерівності, які вивчалися, відносилися до випадку опуклих функцій енергії [39, 40]. Оскільки градієнт (або, більш загальним чином, *субдиференціал*) опуклої функції є монотонним відображенням, зрозуміло, що теорія таких задач невід’ємно пов’язана з властивістю монотонності, тобто можна розглядати лише монотонну залежність між напруженнями та деформаціями, а також монотонні граничні умови. Щоб подолати ці обмеження, в роботі [39] було запропоновано підхід, не пов'язаний з уявою щодо опуклості функції енергії і заснований на застосуванні двох понять: узагальненого градієнта Кларка та довільної множини Варги. Якщо в опуклому випадку статичні варіаційні нерівності приводять зазвичай до задач мінімізації потенціальної енергії, то в не опуклому випадку виникають задачі про субстаціонарність [40].

1.2.2. Методи та засоби обчислювальної реалізації математичних моделей процесів фільтрації у гетерогенних системах

Аналіз існуючих ММ моделей процесів фільтрації у гетерогенних системах, виконаний у розділі 1.2.1, показав складність математичної формалізації зазначених процесів і фізичних умов, в яких вони розвиваються, що, в свою чергу, практично виключає можливість аналітичних розв'язків та передбачає зведення задач моделювання до чисельних розв'язків із застосуванням засобів обчислювальної техніки (ОТ). На етапі машинного моделювання суттєве місце займають питання, пов'язані з переходом від безперервних ММ досліджуваних процесів фільтрації до їх дискретних аналогів [6]. Наявні значні розміри просторових областей, складна геометрія границь, переважно нелінійний та нестаціонарний характер коефіцієнтів вихідних ММ та ряд інших факторів визначає вибір різницевого методу при чисельному дослідженні конкретної гетерогенної системи. Процеси фільтрації у гетерогенних системах можна класифікувати як процеси з *розподіленими параметрами* (РП-процеси) [7], а їх ММ, відповідно, представити у вигляді *диференційних рівнянь* (або їх систем) *у частинних похідних* [20 — 25, 28, 47, 56, 57]. Тому, у подальшому аналізі, зосередимося на загальних проблемах чисельної реалізації диференційних рівнянь у частинних похідних, з визначенням особливостей, притаманних ММ процесів фільтрації (і, як їх різновиду — гетерогенним системам).

Питання, пов'язані з переходом до дискретних ММ різноманітних класів динамічних процесів, зокрема, і процесів фільтрації у пластових системах, достатньо розроблено [6 — 10] і ґрунтуються, у більшості випадків, на застосуванні стандартних процедур методів *кінцевих різниць* та методу *кінцевих елементів* [11 — 16]. Відомі переваги та недоліки методів кінцевих різниць та кінцевих елементів при їх застосуванні в процедурах апроксимації неперервних ММ процесів фільтрації ґрунтовно розглянуто в монографії [3]. Вибір того або іншого методу апроксимації визначається в кожному конкретному випадку окремо і, зазвичай, переважно залежить від специфіки задачі, що розв'язується. В останній час переважно використовується метод реалізації кінцево-вимірних ММ, заснований на перетворенні рівнянь для вузлів сітки дискретизації у векторно-матричну форму. Результат моделювання в даному випадку отримують за допомогою класичних методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), представлених відповідними матрицями коефіцієнтів та векторами змінних [75, 76].

Зокрема, в роботах [39, 40] зазначено схожість проблем, пов'язаних з використанням матричних підходів для реалізації кінцево-вимірних ММ, обумовлених фільтрацією лінійно-в'язких та в'язкопластичних (або аномальних) рідин, до яких відносяться і переважна більшість гетерогенних систем [5, 47]. Переваги матричного підходу полягає у переході від спеціальних методів розв'язання рівнянь для вузлів сітки дискретизації до універсальних методів розв'язання СЛАР [17, 18]. Одначе серйозним недоліком даного підходу є високі запити на ресурси ЕОМ, що виникають через високі розмірності векторно-матричних рівнянь, які утворюються при переході від співвідношень, записаних для вузлів сітки дискретизації, до векторно-матричних співвідношень.

В низці прикладних задач математичного моделювання пластових геологічних систем [92, 93] матриці коефіцієнтів векторно-матричних співвідношень містять значну кількість нульових елементів. При цьому не нулеві елементи зосереджено на головній діагоналі матриць або поблизу неї. Такі матриці прийнято називати *матрицями стрічкового типу* або *розрідженими матрицями* [15, 16]. Ітераційні методи розв'язання СЛАР з розрідженими матрицями представлено в роботах [1, 2, 93 — 95]. Головний недолік ітераційних методів — їх «чутливість» до того, яка задача розв'язується і які обрано ітераційні методи. Також недоліком ітераційних методів [92] є їх повільна збіжність. Одначе застосування ітераційних методів не потребує значних обсягів машинної пам'яті, що значно послаблює вимоги до апаратурної реалізації.

Прямі методи розв'язання СЛАР великої розмірності з розрідженими матрицями коефіцієнтів детально розглянуто в роботах [92, 96]. Найбільш ефективним, з точки зору витрат обчислювальних ресурсів, можна вважати стрічкове виключення Гауса [92, 93], а також методи, засновані на застосуванні схем упорядкування [30, 92]. Головний недолік прямих методів — це накопичення похибок округлення, яке впливає на розв'язок СЛАР, що особливо відчутно у випадку високих порядків останніх.

Що стосується чисельного розв'язування задач на варіаційні нерівності, то слід розрізняти *динамічні* та *статичні* задачі. Для розв'язування динамічної задачі можна провести дискретизацію за часом, зводячи задачу до послідовності статистичних задач. Можна також «згладити» функції енергії, які не диференціюються, за допомогою тої або іншої процедури регуляризації, зводячи вихідну задачу до послідовності динамічних задач на рівності, які приводять до нелінійних диференційних рівнянь. Відносно розв'язування статичних задач також є дві можливості. Якщо задачу може бути поставлено як задачу мінімізації, то використовуються підходящі алгоритми оптимізації, в іншому випадку застосовується процедура «згладжування», яка приводить до послідовності нелінійних алгебраїчних рівнянь.

Розширення можливостей сучасних апаратних засобів обчислювальної техніки стимулює розвиток методів чисельної реалізації варіаційних нерівностей, що приводить до ліквідації наявного розриву між рівнем розвитку якісної теорії варіаційних нерівностей та числом її практичних додатків. Ряд важливих результатів в цьому напрямку отримано, наприклад, в роботах [39, 40, 97, 98]. Зокрема, в роботах [40, 97] розглянуто питання реалізації еліптичних задач із застосуванням методу кінцевих елементів. На прикладах задач з області механіки рідин показано, що даний підхід дозволяє зберегти властивості сталості, існування та єдності кінцевовимірних аналогів варіаційних нерівностей. Інтерес являє підхід до обчислювальної реалізації *еволюційних варіаційних нерівностей* (задача акліматизації) [97]. Підхід полягає у зведенні динамічної задачі до набору еліптичних задач, які, в свою чергу, розв'язуються на основі методу кінцевих елементів. Даний підхід відноситься до групи методів реалізації з вихідною кінцевовимірною апроксимацією.

З точки зору розв'язування прикладних задач інтерес становлять дотичні методи реалізації варіаційних нерівностей, запропоновані для задач з вільною границею. Наприклад, в роботі [99] запропоновано метод *інтегральних рівнянь*, а в роботах [99, 100] — метод *конформних відображень*. Дані методи послужили інструментарієм при розв'язуванні низки актуальних задач фільтрації рідин в пористих середовищах. До недоліків даних методів слід віднести жорсткі обмеження на геометрію просторових областей, які розглядаються, та вимоги до характеристик пористого середовища. В роботі [39] запропоновано метод *варіації границі*, який вільний від певних недоліків вказаних вище методів, зокрема, від вимоги до геометрії просторових областей, що розглядаються.

Одним з найбільш перспективних підходів щодо розв'язування варіаційних нерівностей є застосування методів теорії *оптимального управління*. Даний підхід полягає у наближеному ітераційному пошуку невідомої границі. Одначе при цьому не висувається пропозиція щодо звуження можливих розв'язків ітераційної процедури. З більш пізніх робіт, які розвивають у подальшому даний підхід, інтерес становлять , наприклад, [101, 102]. В них було отримано умови існування, єдності та сталості розв'язків просторово-розподілених варіаційних нерівностей еволюційного типу. Разом з тим в зазначених роботах не ставилося та не розв'язувалося питання реалізації нерівностей.

Слід зазначити, що при моделюванні дифузійних (і, вочевидь, фільтраційних — як різновид останніх) процесів з ММ у вигляді варіаційних нерівностей аналітичні розв'язки можливо отримати лише для вельми обмеженого кола задач, що характеризуються особливими випадками збуджуючих функцій та геометрії просторових областей. У переважній більшості прикладних задач розв'язок може бути досягнуто тільки із застосуванням чисельних методів.

Серед *інструментальних програмних засобів* реалізації ММ процесів фільтрації у гетерогенних системах насамперед слід вказати на проблемно-орієнтований пакет MatLab [175 — 178]. Його застосування дає можливість у користувацьких додатках використовувати як внутрішні запрограмовані алгоритми, так і виконувати їх модифікацію, тобто створювати власні програмні модулі [175]. Програмний інтерфейс додатків (API) здійснює обмін даними між додатками пакету MatLab та іншими програмами у вигляді діалогового обміну класу «клієнт — сервер» [178].

Проста вбудована мова програмування пакету MatLab дозволяє легко створювати власні алгоритми. Крім того MatLab має значну кількість функцій та відповідних «програмних інструментів» — ToolBox. Таке поєднання, із застосуванням формалізованого представлення процедур обчислювального процесу, забезпечує швидку розробку ефективних програм розв'язання прикладних задач [176].

Пакет MatLab являє собою інтерпретатор, тобто кожний рядок програми перетворюється в код з наступним виконанням. Дана обставина, до певної міри може розглядатися як недолік, оскільки суттєво зростає час роботи алгоритму, особливо для випадку наявності в останньому циклічних процедур. Одначе, враховуючи особливості постановки задач моделювання процесів фільтрації у гетерогенних системах (слабка динаміка, відсутність необхідності розв'язання задач в реальному масштабі часу, прогнозний характер дослідження тощо), даний недолік не впливає на процес дослідження.

1.3. Проблематика основних задач моделювання та ідентифікації процесів фільтрації у гетерогенних системах

Виконаємо дослідження задач моделювання та ідентифікації процесів фільтрації у гетерогенних системах. Для конкретності викладення матеріалу будемо спиратися на типові приклади механіки рідких середовищ, переважно розглядаючи двофазні системи «нафта — вода», причому враховуючи, що нафта може виявляти в'язкопружні властивості, тобто розглядатися як «аномальна» рідина.

Будь-яка пластова система являє собою унікальний об'єкт, що характеризується лише їй притаманній структурою, простором станів, полями параметрів, геометрією, властивостями границь тощо [3]. Крім того, реальні пластові гетерогенні системи та процеси *реології* (окремим проявом яких є процеси *фільтрації у пористих середовищах*) , що в них відбуваються, погано піддаються дослідженню, тому завжди існує брак інформації про об'єкт — пластову систему. Позбутися дефіциту інформації можна розв'язанням задач *аналізу* таких, наприклад, як математичне моделювання, оцінювання станів та параметрів кістяка пористого середовища. Зазначені задачі аналізу можуть мати й самостійне прикладне дослідницьке значення [7], або результати їх розв'язків можуть бути використані з метою ефективного рішення наступних задач управління. До останніх, наприклад відносяться: забезпечення максимальної нафтовіддачі пласта, формування заданих властивостей приграничних зон тощо [1 — 3, 36, 47].

Рішення вказаних вище задач можливо лише на основі достовірного математичного опису гетерогенних систем, що розглядаються. Моделювання, як найважливіший етап дослідження, від якого залежить реалістичне розв'язання всіх вище вказаних задач аналізу, пов'язано зі складностями теоретичного та прикладного характеру. Одна з основних проблем моделювання — *адекватність математичних моделей* реальним фізичним процесам [3]. Вивчення даної проблеми надто важливо, оскільки покладені в основу досліджень ММ ідеалізовано відбивають суть фізичних процесів, що відбуваються. В якості прикладу розглянемо врахування особливостей фізичної природи гетерогенної системи на етапі побудови її ММ в умовах реального нафтового родовища, що розробляється у водонапірному режимі. При цьому гетерогенну систему, яка фільтрується, утворює двофазний флюїд «нафта — вода», причому одна з фаз (нафта) може виявляти аномальний характер.

Як відомо з прямих спостережень [21, 26, 31 — 33, 47, 57] реальні пористі середовища, в яких фільтруються гетерогенні системи, характеризуються суттєвою анізотропією, обумовленою природою опадових накопичень. Шпаруватість, яка майже завжди спостерігається, суттєво впливає на процес фільтрації, особливо неоднорідних (зокрема, гетерогенних систем), і, безумовно, повинна бути врахована при його математичній формалізації у пористому середовищі. Слід мати на увазі, що продуктивні водо-нафтові шари розділені між собою достатньо тонкими, практично непроникними, шарами — пропластками («покришками») [3, 36]. При побудові адекватної ММ в даному випадку, повинні бути врахованими деякі гіпотези щодо структури пласта [3, 34 — 36, 7, 103].

1. Пласт, де відбувається фільтрація гетерогенної системи, складається з декількох пропластків, які достатньо розрізняються своїми властивостями (суть — *параметрами*). Сусідні пропластки можуть:

— розділятися практично непроникними тонкими прошарками;

— стикуватися безпосередньо.

2. У межах пропластку пласт неоднорідний (тобто сам являє собою *гетерогенне середовище*) у всіх трьох вимірах. Одначе, масштаб неоднорідності по товщині може бути порівняним із самою товщиною пропластку. Тому, можна вважати, що у межах пропластку параметри пористого середовища (пористість, проникність) є плаські поля [35, 103].

3. Для побудови ММ використовуються дані кернових або геофізичних досліджень, тобто дрібномасштабна інформація, яку отримано з точок, розташованих в межах геометрії продуктивного пласта.

Як стверджується в [3, 35], адекватність ММ та отриманих результатів досліджень процесів фільтрації гетерогенних систем може бути підвищено шляхом розв’язання задач *оцінювання* (або *ідентифікації*) параметрів. Серед задач аналізу процесів фільтрації гетерогенних систем досить важливе місце займає задача параметричної ідентифікації їх ММ. Особлива роль цієї задачі та нетривіальність її постановки витікає з унікальності геометрії просторової області Ω (разом з границею Γ), а також суттєвою неоднорідністю (тобто гетерогенним характером) структури фізичного середовища. Загальноприйнятою [35, 105] є точка зору, відповідно до якої неоднорідність середовища спричиняє суттєвий вплив на фільтраційні процеси. Відомо також, що цей вплив [3] може не тільки в значній мірі визначати кількісні характеристики процесу фільтрації (наприклад, діапазон зміни пластового тиску), але й до певної межі змінювати його «якість». В цьому сенсі задача визначення характеристик фізичного (пористого) середовища важлива вже сама по собі, оскільки від взаємодії з середовищем фази гетерогенної системи (або вона в цілому) може набувати в’язко-пружного (аномального) характеру. В роботі [3] наголошувалося, що відсутність адекватного апарату на перших стадіях досліджень призводило до аналізу відносно простих ситуацій, коли приймалося припущення, що середовища шматково-неоднорідні (тобто однорідність зберігається в межах окремих підобластей), кількість цих окремих підобластей порівняно невелика, і вони мають просту («правильну») геометричну форму. Такою, наприклад, є задача про плин в області з включеннями, провідність якої відмінна від провідності області [35].

Як правило, при гідродинамічному аналізі реальних пластових систем наявною є відносно обмежена інформація щодо їх властивостей, причому, ця інформація носить «точковий» характер, оскільки її можна отримати не у вигляді неперервного поля, а лише в окремих його точках, наприклад, місцях розташування свердловин. Безперечно, обсяг інформації можна збільшити, в основному при бурінні та дослідженні нових свердловин. Одначе, це пов’язано із значними витратами і, в кінцевому підсумку, не знімає повністю невизначеність аналізу, який проводиться. Тому розрахункова схема реального процесу завжди носить певний елемент невизначеності, зумовлений неповнотою інформації щодо пластової системи і, відповідно, в цих умовах «точне» визначення характеристик пористого середовища неможливе. Відчутна хаотичність устрою пористого середовища та його властивостей, що впливають на плин гетерогенної системи, яка фільтрується, довільний механізм утворення та еволюції пластової системи, недостатність інформації, вимагають розвиток спеціального апарату, який при аналізі реології гетерогенних систем враховував би специфічність процесів, що вивчаються. Абсолютно природно в цій ситуації бажання доповнити пробіл в теорії та запропонувати методи ідентифікації гетерогенних систем та середовищ, у яких відбувається фільтрація останніх, причому, ці методи повинні враховувати адекватний математичний опис досліджуваних гетерогенних систем [3, 35, 103].

Практика переконливо свідчить [1, 2, 45, 104, 105], що неоднорідність (гетерогенність) пластів здійснює значний вплив на процеси, які в них відбуваються. Очевидно, що теорія проектування та аналіз розробки родовища повинна з усією можливою повнотою та точністю враховувати цю обставину. На жаль, мають місце принципові складності, з яких необхідно зазначити дві головні [35, 103]. По-перше, істинна структура неоднорідного (гетерогенного) пласта недосяжна безпосередньому дослідженню з необхідною точністю. Її (структуру) недостатньо вивчено на ранніх етапах дослідження, в період проектування розробки пласта. По-друге, сучасні методи проектування і аналізу розробки, створені для розрахунку технологічних показників, не пристосовано для безпосереднього врахування деталей побудови покладів [35]. Зокрема, не вдається врахувати вплив окремих включень, які змінюють проникність пористого середовища, а також структури неоднорідності, якщо вона достатньо складна.

На практиці, для подолання вказаних складностей, часто застосовують наступну схему [35]. У випадку, якщо «грубі» деталі структури кістяка пористого середовища, наприклад, крупні зони, на які можна розбити пласт, пласти або прошарки, які впевнено досяжні безпосередньому спостереженню, то вони відображаються природно. При цьому елемент покладу з явно вираженою неоднорідністю описується в моделі у межах встановленої для нього геометрії. Якщо фактичні зміни містять дрібномасштабні деталі у розповсюдженні проникності або шпаруватості, то їх враховують в рамках статистичного підходу, уводячи так звані «*ефективні параметри*» — ефективну проникність та ефективну шпаруватість, модифіковані фазові проникності (що характерно для гетерогенних систем) тощо. В даному випадку отримання ефективних параметрів зв'язується з розв'язком відповідних фільтраційних задач в середовищах з випадковими неоднорідностями. В практиці проектування родовищ такий підхід, в дещо зміненому вигляді, пов'язано з розглядом порівняно нескладних розрахункових ММ та введенням в них поправочних коефіцієнтів (наприклад, коефіцієнта охоплення дією, коефіцієнта охоплення заводненням тощо). Хоча такий підхід практично придатний [105], але проблема зводиться до того, наскільки коректно коефіцієнти, які використовуються, адекватні будові покладу та процесу, якій здійснюється. Оскільки, практично єдиними джерелами інформації є свердловини, будь-які дослідження, що проводяться на реальній пластовій системі, можна поділити на *локальні* та *інтегральні* [35, 103].

Локальними вважаються дослідження, які проводяться з масштабом усереднення, значно меншим за характерні розміри (розміри зерен або пор пористого середовища) досліджуваних фільтраційних полів. Локальні характеристики забезпечують високу деталізацію аналізу пластової системи при заданих конкретних координатах.

Інтегральні параметри пласта визначаються за допомогою досліджень на свердловинах, які використовують при цьому реальні крупномасштабні процесу плину багатофазних (гетерогенних) рідин у пласті. Хоча характеристики процесу вимірюються лише в одній точці — свердловині, плин процесу в ній залежить від ходу процесу у всій пластовій системі. Таким чином, при інтерпретації слід мати на увазі, що та або інша характеристика, яку отримано в результаті аналізу процесу, є «інтегральною», а точніше кажучи, віднайдений параметр є функціоналом, тобто числом, яке залежить від функції розподілу шуканого та інших параметрів за простором. В цьому випадку масштаби усереднення є порівняними з характерними розмірами (див. вище) досліджуваного поля і можна очікувати, що інтегральні параметри «змістовніші у інформаційному сенсі», ніж локальні.

Практика гідродинамічних досліджень показує, що можна визначити інтегральні параметри, які характеризують властивості деяких областей. Існуючі інженерні методики аналізу та ідентифікації жорстко співвідносять ці області з точками, в яких відбувається збір інформації, тобто свердловинами. При цьому дискретним значенням параметру умовно приписується адреса (координати) відповідних свердловин. В результаті даних натурних досліджень утворюється сітка, що покриває пласт, в вузлах якої представлено локальну інформацію щодо параметра, який ідентифікується. Значення параметра між вузловими точками обчислюються інтерполяцією та екстраполяцією наявних вузлових значень.

З урахуванням представлених проблем параметричної ідентифікації гетерогенних систем, які фільтруються, проаналізуємо можливі методи розв’язання поставленої задачі. З класичних методів розв’язання задач параметричної ідентифікації для просторово-розподілених об’єктів можна виділити [106]: метод зведення рівнянь у частинних похідних до звичайних з наступним чисельним розв’язанням задачі моделювання та ідентифікації [107]; метод квазілінеарізації та прогонки за параметром [106], метод зведених функцій [106, 108]. Інтерес також становить постановка та розв’язання задачі ідентифікації у вигляді оптимізаційної задачі, із залученням для її розв’язання, наприклад, градієнтних методів [109, 110].

Підводячи підсумок розгляду питань проблематики задач аналізу (моделювання) та ідентифікації процесів фільтрації гетерогенних систем у пористому середовищі, зазначимо, що на поточний час актуальною є розробка машинно-орієнтованих математичних методів моделювання та ідентифікації класом процесів, які розглядаються. Враховуючи відмічену вище специфіку досліджуваних об’єктів (гетерогенних систем та пористих середовищ, в яких відбувається їх фільтрація), а також необхідні обсяги обчислень при розв’язанні задач моделювання (наприклад, обробка матриць коефіцієнтів дискретних ММ) або ідентифікації (багатоваріантні та оптимізаційні розв’язки), математичні методи, які підлягають розробці, повинні бути економічними, з точки зору обчислювальної реалізації. Причому, програмне забезпечення обчислювальних процедур математичних методів, які розробляються, може бути побудовано за модульним принципом, що забезпечить уніфікацію програмних продуктів та конструювання програмних блоків під розв’язання конкретних прикладних задач, зокрема, у складі АСУ ТП.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1

1. На прикладах поширених у природі та промисловості реологічних процесів, зокрема, фільтрації рідин у пористих середовищах, показано, що більшість природних та технологічних рідин, які перебувають у пластових пористих середовищах, являють собою багатофазні неоднорідні системи, містять різноманітні включення і характеризуються нелінійною поведінкою. При цьому підкреслено, що багатофазність та неоднорідність зумовлюють гетерогенні властивості рідин, які знаходяться у реологічних процесах — тобто у фільтраційному русі в пористих середовищах. Вивчено фізичні явища, притаманні процесам фільтрації у гетерогенних системах, і відзначено їх нерівновагові та псевдопластичні (ділатантні) властивості, що зумовлює якісні прояви картини перебігу цих процесів: виражену спрямованість розвитку, наявність граничного градієнту, в'язкопружність.

Виконано аналіз підходів до математичної формалізації процесів фільтрації у гетерогенних системах та розглянуто ММ, які існують для опису даних процесів. Зазначено, що у практиці математичного моделювання процесів фільтрації у гетерогенних системах існує брак їх адекватних ММ. Показано, що виражена спрямованість реологічної поведінки гетерогенних систем зумовлює інтерес до їх математичної формалізації на основі апарату варіаційних нерівностей. ММ, які при цьому буде отримано, забезпечують високий ступінь адекватності змінному характеру фізичних явищ, що спостерігаються: нерівноваговості перебігу, наявності еволюційних обмежень на функцію стану, залежності просторово-часових характеристик від граничного значення функції стану.

2. Досліджено проблематику основних задач математичного моделювання (моделювання динаміки та ідентифікації) процесів фільтрації у гетерогенних системах. Важливими для розгляду при цьому є питання, що витікають з особливостей фізичного прояву реології гетерогенних систем: слабка динаміка фільтраційного руху; значні розміри фазових просторів;

наявність суттєвих нелінійностей (наприклад, граничного градієнту); та неоднорідностей (включень, відмінних за походженням; зсувних розріджень та згущень — тобто зміни «ефективної» в'язкості; аномальне зростання опору плину у пористому середовищі тощо); можливий прояв фрактальності (самоподібності) структури просторової області розвитку процесів фільтрації, а також характерна для останніх обмеженість вектору виміру стану та просторово-часова залежність параметрів.

3. Підтверджено необхідність систематизації і класифікації процесів фільтрації у гетерогенних системах та розробки на їх основі нових ММ досліджуваних процесів у вигляді варіаційних нерівностей. При цьому нагальною є розробка нових та удосконалення існуючих методів і засобів математичного моделювання, що забезпечують ефективне розв'язування прикладних задач в умовах значних обсягів обчислень (наприклад, обробка матриць коефіцієнтів дискретних ММ значної розмірності, реалізація багатоваріантних та оптимізаційних розв'язків в задачах ідентифікації та управління), тобто методів, економічних з точки зору обчислювальної реалізації. Також встановлено доцільність побудови інструментальних програмних засобів моделювання за модульним принципом, що забезпечує уніфікацію програмних продуктів при розв'язуванні прикладних задач.

2. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПРОЦЕСІВ ФІЛЬТРАЦІЇ У ГЕТЕРОГЕННИХ СИСТЕМАХ ТА МЕТОД ЇХ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ

Суттєво важливим класом гетерогенних систем є *газовані рідини*, особливості фільтрації яких, зокрема, розглянуто у першому розділі. Враховуючи це, для конкретності, надалі, процеси фільтрації гетерогенних систем будемо розглядати на прикладах газорідинних сумішей. Газовані рідини при тискові вищим за тиск насичення, за звичай [21, 23, 47, 56, 77], досліджуються як гомогенні, оскільки класична теорія фазових переходів передбачає закритичне утворення зародків нової фази [26, 75]. Одначе, дослідження, виконані Мірзаджанзаде А. Х. та його школою [111 — 113], показали, що при тискові вище за тиск насиченості, газовані системи, які складено на основі ньютонівських рідин при стаціонарній фільтрації, якісно змінюють реологію (зокрема, витрати рідини зростають у 2 … 3 рази), а при нестаціонарних дослідженнях виявляють *нерівновагові властивості*. Вперше подібне явище для фазового переходу «тверде тіло — рідина» виявлено Уббелоде А. [114] і отримало назву «*передплавління*».

Фізичні причини та відповідний механізм *докритичного утворення зародків* нової фази досліджено у низці відомих робіт. Зокрема, в роботі [115] було висунуто теорію *гетерофазних флуктацій*, на підставі якої було пояснено наявні експериментальні дані. В роботі [116] показано, що гетерофазні флуктуації досягають значних розмірів там, де поверхневий натяг між фазами наближається до нуля, «передперехідні явища» зобов'язані поверхневим ефектам. Ця передумова знаходить підтвердження у деяких пізніших роботах [117, 118], відповідно до яких стабілізація докритичних зародків нової фази відбувається через виділення на їх поверхні ПАР, сліди яких завжди присутні в реальних системах, не підданих спеціальній обробці [118]. Відповідно до [119] наявність в рідинах ПАР не знімає питання щодо стабільності докритичних зародків, оскільки домішок ПАР може лише зменшити швидкість їх розчинення, але не запобігти повного зникнення.

Разом з тим, в роботах [117, 118] показано, що стабілізація може відбуватися також за рахунок електричних зарядів на поверхні зародків. Але при цьому складно дослідити фізичні ефекти утворення зародків, а також врахувати спільну дію поверхневого натягу та електричного заряду.

В роботі [47] здійснено спробу розробки *моделі утворення зародків* в газорідинній суміші з урахуванням залежності поверхневого натягу від радіуса кривизни поверхні розриву та електричного заряду, що рівномірно розподілено по поверхні сферичної мікробульбашки ідеального газу. Модель сформульовано у вигляді залежності енергії, необхідної на утворення певного об’єму газу з газорідинної суміші з урахуванням рівномірно розподіленого по поверхні зародку електричного заряду.

Як подальший розвиток даного класу ММ можна розглянути модель, що також враховує залежність поверхневого натягу від радіуса кривизни поверхні розриву [121]. На відміну від розглянутої вище, дана ММ дозволяє описати стадію зародкоутворення нової фази, тобто фазового переходу в системі «газ — рідина». Недоліком ММ, описаних в роботах [47, 121] є нехтування розподіленим характером середовища, де відбувається зародкоутворення, а також складність експериментального визначення електричного заряду на поверхні зародку. Крім того зазначені моделі не враховують можливий неньютонівський (аномальний) характер газорідинної суміші та нерівновагові стани, що можуть супроводжувати її реологію.

Запропонуємо ММ процесів фільтрації газорідинних сумішей і зародкоутворення, що враховують відповідно розподілений характер та аномальні властивості досліджуваних процесів і сумішей.

2.1. Класифікація і обґрунтування підходу до математичної формалізації динаміки процесів фільтрації газорідинних сумішей

Вище зазначалося, що газовані рідини (або, інакше, газорідинні суміші [21, 47]) та їх гідродинаміка носять не виключний характер, а являють собою звичайне явище для певних класів реологічних процесів [1, 2, 4, 20, 23, 77].

Розглянемо ряд природних, а також промислово значимих прикладів процесів фільтрації газорідинних сумішей та вкажемо на можливі підходи до їх математичного опису (суть — математичної формалізації).

Приклад 1. В якості першого прикладу розглянемо **процес фільтрації вуглеводнів складного фракційного складу**, які є типовим випадком газованих рідин [1, 2]. При цьому будемо вважати, що динамічний стан даного реологічного процесу визначається системою продуктивних $K_{\text{пр}_l}$ свердловин (добувних $K_{\text{д}_i}$, $i=\overline{1, N_{\text{д}}}$ та нагнітальних $K_{\text{н}_j}$, $j=\overline{1, N_{\text{н}}}$; $K_{\text{пр}_l}=K_{\text{д}_i}+K_{\text{н}_j}$, $l=\overline{1,(N_{\text{д}}+N_{\text{н}})}$), функціонування яких характеризується ненульовими дебітами $Q_{\text{пр}}$, тобто $Q_{\text{д}_i}\neq 0$, $i=\overline{1, N_{\text{д}}}$; $\left|Q_{\text{н}_j}\right|\neq 0$, $j=\overline{1, N_{\text{н}}}$. Модуль в останньому виразі означає, що дебіти $Q_{\text{д}_i}$ та $Q_{\text{н}_j}$ мають різний знак (тобто добувний та нагнітальний потоки спрямовано у протилежні напрямки). Таким чином свердловини являють собою джерела збуджень реологічного процесу, що розглядається, при цьому всі спостереження та виміри виконуються виключно у гирлі свердловини.

Математичну формалізацію процесу можна представити (без урахування пружних властивостей газорідинної суміші) рівняннями фільтрації для рідинної (рідкого флюїда складного фракційного складу) та газової фаз [1, 2]

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_k}\left(\frac{k_{\text{ф}}}{\mu_{\text{ф}}\,B_{\text{ф}}}\cdot\frac{\partial u_{\text{ф}}}{\partial z_k}\right)-\sum_{i=1}^{N_{\text{д}}}\frac{Q_{\text{д}_i}^{\text{ф}}}{B_{\text{ф}}}=\frac{\partial}{\partial t}\left(m\,\frac{S_{\text{ф}}}{B_{\text{ф}}}\right), \tag{2.1}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_k}\left(\frac{k_{\text{г}}}{\mu_{\text{г}}\,B_{\text{г}}}+\frac{R_{s\text{ф}}\,k_{\text{г}}}{\mu_{\text{г}}\,B_{\text{г}}}\right)\cdot\frac{\partial u_{\text{г}}}{\partial z_k}-\sum_{i=1}^{N_{\text{д}}}\frac{Q_{\text{д}_i}^{\text{г}}}{B_{\text{г}}}=\frac{\partial}{\partial t}\left[m\left(\frac{S_{\text{г}}}{B_{\text{г}}}+\frac{R_{s\text{ф}}\,k_{\text{г}}}{\mu_{\text{г}}\,B_{\text{г}}}\right)\right], \tag{2.2}$$

$$u_{\text{ф}}(0,z)=u_{\text{ф}_0}(z);\;\; u_{\text{г}}(0,z)=u_{\text{г}_0}(z), \tag{2.3}$$

$$u_{\text{ф}}(t,0)=\varphi\left(u_{\text{ф}}\right);\;\; u_{\text{г}}(t,0)=\gamma\left(u_{\text{г}}\right), \tag{2.4}$$

де $u_{\text{ф}}$, $u_{\text{г}}$ — шукані функції стану (внутрішньопластові тиски відповідно для фази рідкого флюїду та газової фази (тут і у подальшому відповідно індекси «ф» та «г») газорідинної суміші); $k_{\text{ф}}$, $k_{\text{г}}$ — проникності фаз; $\mu_{\text{ф}}$, $\mu_{\text{г}}$ —

в’язкості фаз; $B_ф$, $B_г$ — об’ємні коефіцієнти фаз; $S_ф$, $S_г$ — насиченості фаз у пористому просторі, в якому відбувається процес фільтрації; m — шпаруватість пористого простору, в якому відбувається процес фільтрації; $R_{sф}$ — коефіцієнт розчинності газу у рідкому флюїді; t, z — відповідно незалежні часова та просторова координати. Для утворення необхідного внутрішньопластового тиску у нагнітальні свердловини може закачуватися рідина (наприклад, вода або ПАР) з дебітами $Q_{н_j}$, $j = \overline{1, N_н}$ і тоді ММ виду (2.1) — (2.4) доповнюється рівнянням динаміки для фази води

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_k}\left(\frac{k_в}{\mu_в B_в} \cdot \frac{\partial u_в}{\partial z_k} \right) - \sum_{j=1}^{N_н} \frac{Q_{н_j}}{B_в} = \frac{\partial}{\partial t}\left(m \frac{S_в}{B_в} \right) \tag{2.5}$$

або «супутній» газ добутку (нетоварний газ, наприклад з низькими теплотворними властивостями). При цьому в рівнянні динаміки (2.2) друга сума буде складатися з двох доданків з протилежними знаками (відповідно для добувних та нагнітальних свердловин). Також у другому випадку суттєвого значення набуває ефект «газування» рідкого флюїду, що математично визначається коефіцієнтом $R_{sф}$ у рівнянні (2.2). За умови підвищених значень «газованості» рідкого флюїду (масова доля газової фази складає $3 \ldots 5\,\%$ газорідинної суміші [21, 36]) спостерігається порушення лінійного закону фільтрації — закону Дарсі [3, 36, 47], що викликано набуттям сумішшю в’язко-пластичного характеру внаслідок утворення граничного градієнту тиску G. Іншими словами, закон фільтрації набуває аномального характеру [3, 36].

Приклад 2. Наступним прикладом реології (як більш загального процесу по відношенню до фільтрації) газованих рідин може слугувати **процес зародкоутворення в газорідинній суміші**. Дану задачу у постановці з урахуванням поверхневого натягу від радіусу кривизни поверхні розриву розглянуто у роботі [121].

Енергія, яка необхідна для утворення однієї молекули газу з рідини (суміші) з урахуванням рівномірного розподілу по поверхні зародку електричного заряду визначається наступним чином [115, 116]

$$\Delta u = 4\pi \frac{d(\sigma(r) r^2)}{dN} + \frac{d}{dN}\left[\frac{(\varsigma e)^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_o r}\right], \qquad (2.6)$$

де r — радіус зародку; N — число молекул у зародку; e — елементарний електричний заряд; ε — діелектрична проникність; ε_0 — електрична постійна; $\sigma(r)$ — поверхневий натяг; ς — коефіцієнт, що враховує електричний заряд на поверхні зародку.

Якщо позначити об'єм молекули через $v_В$, можна отримати

$$N = (4\pi r^2)/(3v_В). \qquad (2.7)$$

Поверхневий натяг зародку (на підставі рівняння Толмера [120] буде мати вигляд

$$\sigma(r) = \delta_o / [1 + (2\delta/r)]$$

або після спрощення

$$\sigma(r) = \sigma_o [1 - (2\delta/r)], \qquad (2.8)$$

де σ_o — поверхневий натяг пласкої границі розділу; σ — товщина приповерхневого прошарку зародку.

Вираз (2.8) має сенс тільки при $r > \delta$.

За умови $r \sim \delta$ залежність $\sigma = f(r)$ буде лінійною

$$\sigma(r) = k_o r, \qquad (2.9)$$

де k_0 — коефіцієнт пропорційності.

Вочевидь, що на початку зародкоутворення, коли радіус зародка ще малий, з урахуванням (2.7) та (2.9) у виразі (2.6), можна отримати

$$\Delta u = 3 k_o v_B - \frac{v_B (\varsigma e)^2}{16\pi^2 \varepsilon \varepsilon_o r^4}. \qquad (2.10)$$

Відповідно до закону Больцмана $P = P\exp(-\Delta u/kT)$. Тоді з (2.10)

$$\ln(P/P_c) = -\frac{3k_0 v_В}{kT} + \frac{v_B(\varsigma e)^2}{16\pi^2\varepsilon\varepsilon_o r^4}, \qquad (2.11)$$

де P — тиск над зародком; P_c — тиск рівноваги над пласкою поверхнею (або тиск насичення); k — постійна Больцмана; T — абсолютна температура.

Другий член в рівнянні (2.11) суттєво змінює характер залежності і, при $\ln\left(P/P_c\right)=0$, радіус зародка r має нульове значення.

При $r > \delta$ з (2.6) з урахуванням (2.7) та (2.8) витікає

$$\ln\left(P/P_c\right)=-\frac{3\sigma_0\, v_{\text{В}}}{kTr}\left(1-\frac{\delta}{r}\right)+\frac{v_B\,(\varsigma\, e)^2}{16\,\pi^2\varepsilon\,\varepsilon_o\, r^4 kT}. \qquad (2.12)$$

Якщо врахувати, що $(\delta/r) \ll 1$, то з (2.12) можна отримати

$$\ln\left(P/P_c\right)=-\frac{2\sigma_0\, v_{\text{В}}}{kTr}\left(1-\frac{\delta}{r}\right)+\frac{v_B\,(\varsigma\, e)^2}{16\,\pi^2\varepsilon\,\varepsilon_o\, r^4 kT}. \qquad (2.13)$$

Механічна рівновага зародку з урахуванням впливу електричного заряду визначається наступним чином

$$P_C = P+\frac{2\sigma(r)}{r}-\frac{(\varsigma\, e)^2}{32\pi^2\varepsilon_o r^4}\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right). \qquad (2.14)$$

При тиску P вищим за тиск насичення P_c газу в рідині починають утворюватися мікрозародки [47] (мікрокульки), і основний «вклад» в це вносить поверхневий електричний заряд [5, 21].

Граничній радіус газової кульки, при якій починається стале зародкоутворення у випадку $r \approx \delta$, може бути віднайдено з виразу (2.12)

$$r^* = \sqrt[4]{\frac{(\varsigma\, e)^2}{48\, k_o\, \pi^2\varepsilon\,\varepsilon_o}}. \qquad (2.15)$$

При $r \gg \delta$ граничний радіус можна визначити з виразу (2.13)

$$r^* = \sqrt[4]{\frac{(\varsigma\, e)^2}{32\,\sigma_o\pi^2\varepsilon\,\varepsilon_o}}. \qquad (2.16)$$

Наведені співвідношення описують процес зародкоутворення у газорідинній суміші і дають змогу оцінити радіус мікрокульки зародку газу.

Приклад 3. Важливим, у прикладному сенсі, прикладом фільтрації газорідинних сумішей слід розглядати також процес **розвитку плину у пористому середовищі під дією зовнішньої примусової сили**. Ця задача у практичних додатках носить назву *еволюційної задачі* [42], а її формалізовану постановку наведено в роботі [122].

Необхідно (в подальших міркування будемо розглядати випадки газованої рідини) відшукати функцію $u = u(t,z)$, визначену для моменту часу $t > 0$ на обмеженій замкненій множині Ω простору $\Re^n$, $n = 1,2,3$ с гладкою границею Γ, яка являє собою тиск газорідинної суміші, що фільтрується у області Ω. Функція $u = u(t,z)$ є розв'язком нестаціонарного рівняння

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_i^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + f(z), \tag{2.17}$$

де $f(z)$ задано в області $Q = \{t > 0\} \times \Omega$ з початковими умовами

$$u(t,z) = u_0(z), \quad u_0(z) \text{ визначено в } \Omega. \tag{2.18}$$

Поведінка процесу на границі Γ, яка визначає граничні умови, полягає у наступному. Якщо значення шуканої функції таке, що $u(t,z) > h(z)$, де $h(z)$ — прикладений зовнішній тиск, то суміш заповнює пористий простір та виконуються умови

$$\left[u(t,z) - h(z)\right] \geq 0, \left.\frac{\partial u}{\partial \eta}\right|_{\Gamma} \geq 0, \tag{2.19}$$

причому величина $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ — кінцева (η — нормаль до границі Γ).

В іншому випадку має місце умова не протікання:

$$\left[u(t,z) - h(z)\right] \frac{\partial u}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma} = 0. \tag{2.20}$$

Таким чином, тут ставиться задача визначення зміни тиску $u = u(t,z)$ в часі у будь-якій точці області Ω від деякого початкового моменту часу $t > 0$, коли до границі Γ області Ω прикладено зовнішню функцію $f(z)$ (наприклад, тиск або витрату - дебіт), і до заданого моменту часу T (очевидно, що якщо $T \to \infty$, то тиск $u(t,z)$ повинен наближатися до того значення, яке має місце у стаціонарному випадку). При цьому, якщо внутрішній тиск $u(t,z)$ менше за зовнішній $h(z)$, то витрата газорідинної суміші у внутрішню область Ω — додатна. Якщо тиск $u(t,z)$ всередині області Ω перевищує зовнішній $h(z)$, то границя Γ перешкоджає виходу суміші за межі області Ω.

Наведені приклади, звісно, не охоплюють повністю всі аспекти постановок та можливі практичні додатки, а лише окреслюють тематику задач, що розв’язуються. Корисним доповненням, в цьому сенсі, може слугувати низка сформульованих та частково розв’язаних в останні роки задач дослідження процесів фільтрації (реології) газованих рідин. Аналіз літературних джерел, в яких наведено опис даних задач, дозволяє розділити (умовно) останні на декілька груп за близькістю постановок (табл. 2.1).

Таблиця 2.1 — СИСТЕМАТИЗАЦІЯ ЗАДАЧ
ФІЛЬТРАЦІЇ (РЕОЛОГІЇ) ГАЗОРІДИННИХ СУМІШЕЙ

№ з\п	**Група задач фільтрації (реології) газорідинних сумішей в залежності від особливостей природи фізичного явища або математичної постановки задачі**	**Автор та джерело, в якому наведено опис задачі**
1	**2**	**3**
1	Задачі підземної гідродинаміки для процесів фільтрації газованих вуглеводнів	Азіз Х, Сеттарі Е. [1], Крічлоу Генрі Б. [2], Сулейманов Б. А. [5, 47], Мірзаджанзаде А. Х. та інш. [4, 25, 28].
2	Задачі динаміки розбавлених полімерних розчинів та ПАР в неоднорідних (гетерогенних) пористих середовищах, що зводяться до моделювання стаціонарної та нестаціонарної фільтрації неньютонівських (аномальних) газорідинних сумішей в гетерогенних середовищах	Бернадинер М. Г., Єнтов В. М. [36], Верлань А. Ф. та інш. [3], Баренблатт Г. І. та інш. [21, 26], Меліков Г. Х., Азізов М. Г. [23], Сулейманов Б. А. [56, 57].
3	Задачі динаміки плину газованих рідин у докритичних областях, в тому числі псевдоскраплення газованими рідинами	Меліков Г. Х. [112], Буєвич Ю. А. [117], Савіч В. С. [121], Річардсон Дж. Ф. [123], Бабаєв Р. Д. та інш. [124].
4	Задачі фільтрації (реології) фрактально-неоднорідних систем з якісним проявом фізичних процесів (врахування взаємодії часток дисперсної фази; фільтраційний плин суспензій; взаємозаміщення рідин, що фільтруються у фрактально-неоднорідному середовищі тощо)	Katz A. J. [65], Moulu J. C. [66], Зосімов В. В. та інш. [67].
5	Задачі динаміки хвильових процесів при віброввпливі на гетерогенну систему, в якій відбувається плин газорідинної суміші	Кузнецов О. Л., Єфімова С. А. [69], Гадієв С. М. [70], Боголюбов Н. Б. та інш. [71], Кузнецов О. Л. та інш. [72]

Проведену в табл. 2.1 систематизацію задач фільтрації (реології) газорідинних сумішей було розглянуто як підґрунтя для класифікації останніх, внаслідок чого складено табл. 2.2.

Таблиця 2.2 — КЛАСИФІКАЦІЯ ГАЗОРІДИННИХ СУМІШЕЙ

№ з/п	**Класифікаційна ознака**	**Клас газорідинних сумішей**
1	**2**	**3**
1	За питомою вагою газової фази у суміші	— слабогазовані; — середньогазовані; — сильногазовані
2	За здатністю розчинності газової фази у рідинній фазі суміші	— розчинні; — нерозчинні (слаборозчинні)
3	За станом газової фази у суміші	— докритичні; — зародкоутворні; — з вираженою газовою фазою
4	За впливом граничного градієнта на реологію суміші	— без впливу (ідеальні або ньютонівські); — з аномальною граничністю значення функції стану; — з еволюційним обмеженням на функцію стану

Виконана класифікація газорідинних сумішей (табл. 2.2) є основою для проведення математичної формалізації їх процесів фільтрації (реології).

При цьому слід зауважити, що наявність в газорідинній суміші навіть незначної кількості «вільного» газу (при масовій долі $3 \ldots 5\,\%$ [1, 2]) призводить до суттєвого прояву у неї властивості стискування [6, 80]. Таким чином, застосування для опису газорідинної суміші моделі ньютонівської («ідеальної») рідини у вигляді закону Дарсі [44 — 46] може спричинити значні похибки при реалізації ММ, особливо в області низьких пластових тисків, що зумовлено наявністю граничних градієнтів [3, 36, 47, 93] та проявом через це нерівноважових станів у динаміці суміші [3, 36].

Адекватним підходом до математичної формалізації неньютонівських процесів фільтрації слід визнати апарат варіаційних нерівностей [39, 40, 42, 43], конструктивне використання якого для моделювання та ідентифікації процесів фільтрації аномальних рідин обґрунтовано в роботі [3]. Поширимо застосування апарату варіаційних нерівностей на випадок математичної формалізації процесів фільтрації газорідинних сумішей (суть складання відповідних ММ), що дозволить при моделюванні врахувати якісні прояви фізичних явищ досліджуваних процесів.

2.2. Математичні моделі процесів фільтрації газорідинних сумішей

Запропонуємо ММ процесів фільтрації (реології) газорідинних сумішей на основі застосування апарату варіаційних нерівностей, спираючись на виконані в розділі 2.1 *систематизацію задач* фільтрації (реології) цих сумішей (табл. 2.1) та їх *класифікацію* (табл. 2.2).

Приведемо постановки задач фільтрації газорідинних сумішей до формулювань у вигляді варіаційних нерівностей, а також строго дослідимо існування та єдиність розв’язків отримуваних варіаційних нерівностей [125 — 127]. Запропонуємо узагальнений математичний опис процесів фільтрації газорідинних сумішей, який поширимо на клас процесів фільтрації у гетерогенних системах. В подальшому, на основі узагальненої ММ процесів фільтрації у гетерогенних системах розробимо конструктивний метод реалізації відповідних ММ.

Процеси, що визначаються питомою вагою газової фази у суміші. Ефект впливу питомої ваги газової фази спостерігається у газорідинних сумішах, переважно у процесах фільтрації при свердловинній розробці родовищ газованих вуглеводнів, прикладом яких можуть слугувати газовані «легкі» нафти та газовий конденсат [1 — 5, 36, 47]. Особливість процесів полягає в тому, що вміст газової фрази в суміші, тобто прояв її гетерогенних властивостей, залежить від швидкості фільтрації ϖ (вирази (1.1), (1.2), (1.4) — (1.6), (1.8) — (1.11), (1.13), (2.1), (2.2), (2.17) — за умови різних якісних ознак перебігу процесу). Причому, при збільшенні швидкості фільтрації питома вага газової фази — збільшується [2]. Також вплив газової фази та збільшення її питомої ваги спостерігається в зоні дії збурень — дебітів через добувні $K_{д_i}$, $i = \overline{1, N_д}$ або нагнітальні $K_{н_j}$, $j = \overline{1, N_н}$ свердловини (точки розташування останніх) і має *виражену спрямованість* — в залежності від знаку дебіту ($Q_{\text{д}_i}$ або $Q_{\text{н}_j}$) через свердловину.

При побудові ММ будемо виходити з наступного [127]. Нехай область Ω, що визначає геометрію родовища (продуктивного пласта), являє собою відкриту обмежену просторову область в $\Re^n$, $n = \overline{1, 2}$ (розглядається плаский випадок) з границею Γ, а $\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \Gamma$ задає замкнення Ω. Пласт розкрито системою l продуктивних свердловин $K_{\text{пр}_l} = K_{\text{д}_i} + K_{\text{н}_j}$, $l = \overline{1, (N_{\text{д}} + N_{\text{н}})}$. Дебіти цих свердловин $Q_{\text{д}_i}$ $(i = \overline{1, N_{\text{д}}})$ та $Q_{\text{н}_j}$ $(j = \overline{1, N_{\text{н}}})$ визначають дію зовнішньої примусової сили $f(z)$. Кожна з l продуктивних свердловин характеризується зоною впливу (в межах вираженого газоутворення) у вигляді просторової області Ω_l з границею Γ_l.

Функція стану в областях Ω_l являє собою забойний тиск $u_{\text{зб}_l}(z)$ і визначається для добувних $K_{\text{д}_i}$ та нагнітальних $K_{\text{н}_j}$ свердловин як

$$u^{\text{д}}_{\text{зб}_i}(z) \le u(t, z);\ i = \overline{1, N_{\text{д}}},\ \ u^{\text{н}}_{\text{зб}_j}(z) > u(t, z);\ j = \overline{1, N_{\text{н}}}, \tag{2.21}$$

де $u(t, z)$ — функція пластового тиску поза забойних зон продуктивних свердловин.

Шукана функція $u = u(t, z)$ — гармонійна функція в Ω, неперервна на $\overline{\Omega}$ і являє собою розв’язок задачі динаміки (випадок наявності капілярного тиску $u_c(z)$ [1, 2, 6] — не розглядається)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_k} \left[\left(\frac{k_{\text{ф}}}{\mu_{\text{ф}} B_{\text{ф}}} + \frac{k_{\text{г}}}{\mu_{\text{г}} B_{\text{г}}} \right) \cdot \frac{\partial u(t, z)}{\partial z_k} \right] = \sum_{l=1}^{N_{\text{д}}+N_{\text{н}}} \frac{|Q_l|}{B_{\text{ф}}};\ \ l = \overline{1, (N_{\text{д}} + N_{\text{н}})}, \tag{2.22}$$

з початковими

$$u(t, z)\big|_{t=0} = u(z) \tag{2.23}$$

та граничними умовами

$$\frac{\partial u(t, z)}{\partial \eta} \le 0,\ \ \left[u^{\text{д}}_{\text{зб}_i}(z) - u(t, z) \right] \Big|_{z \in \Gamma_i} \le 0;\ \ i = \overline{1, N_{\text{д}}}, \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial u(t,z)}{\partial \eta} > 0\,,\quad \left[u^{\text{н}}_{\text{зб}\,j}(z) - u(t,z)\right]\Big|_{z\in\Gamma_j} > 0\,;\quad j=\overline{1,N_{\text{н}}}\,, \tag{2.25}$$

де η — нормаль до границі Γ_l, а інші позначення є тотожними для відповідних в задачі (2.1) — (2.4).

Особливість граничних умов (2.24), (2.25) полягає в тому, що вони являють собою нерівності, для яких важко виконати кінцевовимірну апроксимацію. Тому задачу моделювання у постановці (2.22) — (2.25) чисельно реалізовувати складно.

Введемо у розгляд пробну функцію v, визначену на просторі Соболєва $H^1(\Omega)$. Помножимо скалярно рівняння динаміки (2.22) на $(v-u)$ (для простоти запису тут і далі, в аналогічних випадках, опустимо аргументи у функцій) і, скориставшись формулою Гріна, отримаємо

$$\int\limits_{\Omega}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k_{\text{ф}}}{\mu_{\text{ф}}\,B_{\text{ф}}}+\frac{k_{\text{г}}}{\mu_{\text{г}}\,B_{\text{г}}}\right)\left[\frac{\partial u}{\partial z_k}\cdot\frac{\partial(v-u)}{\partial z_k}\right]\right\}dz -$$

$$-\int\limits_{\Gamma}\left[\sum_{l=1}^{N_{\text{д}}+N_{\text{н}}}\left(\frac{k_{\text{ф}}}{\mu_{\text{ф}}\,B_{\text{ф}}}+\frac{k_{\text{г}}}{\mu_{\text{г}}\,B_{\text{г}}}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \eta_l},\, v-u\right)\right]d\Gamma = \sum_{l=1}^{N_{\text{д}}+N_{\text{н}}}\frac{|Q_l|}{B_{\text{ф}}} \tag{2.26}$$

для будь-якої $v \ge 0$ на Γ_l, $l=\overline{1,(N_{\text{д}}+N_{\text{н}})}$.

Таким чином, в якості опуклої множини K припустимих функцій може бути обрана множина невід'ємних v таких що

$$K = \left\{v\in H^1(\Omega)\,\middle|\, v\ge 0 \text{ майже скрізь на } \Gamma_l\right\},\quad l=\overline{1,(N_{\text{д}}+N_{\text{н}})}.$$

З (2.24), (2.25) відповідно витікає, що

$$\int\limits_{\Gamma}\zeta\left\{\sum_{i=1}^{N_{\text{д}}}\left[\frac{\partial u}{\partial \eta_i}\left(u^{\text{д}}_{\text{зб}\,i}-u\right)\right]\right\}d\Gamma \le 0\,, \tag{2.27}$$

$$\int\limits_{\Gamma}\zeta\left\{\sum_{j=1}^{N_{\text{н}}}\left[\frac{\partial u}{\partial \eta_j}\left(u^{\text{н}}_{\text{зб}\,j}-u\right)\right]\right\}d\Gamma > 0\,, \tag{2.28}$$

де ζ — пропускна здатність границь Γ_l, $l=\overline{1,(N_{\text{д}}+N_{\text{н}})}$ (в межах пласта розглядається однаковою).

Введемо зміну змінної v на $(-v)$ і, з урахуванням (2.27) та (2.28), вираз (2.26) перепишемо у вигляді

$$\int_{\Omega}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k_{\text{ф}}}{\mu_{\text{ф}}\;B_{\text{ф}}}+\frac{k_{\text{г}}}{\mu_{\text{г}}\;B_{\text{г}}}\right)\left[\frac{\partial u}{\partial z_k}\cdot\frac{\partial(v-u)}{\partial z_k}\right]\right\}d\,z-$$

$$-\int_{\Gamma}\left\{-\sum_{i=1}^{N_{\text{д}}}\frac{\partial u}{\partial\eta_i}v+\zeta\left\{\sum_{i=1}^{N_{\text{д}}}\left[\frac{\partial u}{\partial\eta_i}\left(u_{\text{зб}_i}^{\text{д}}-u\right)\right]\right\}\right\}d\,\Gamma-$$

$$-\int_{\Gamma}\left\{\sum_{i=1}^{N_{\text{д}}}\frac{\partial u}{\partial\eta_i}u+\zeta\left\{\sum_{i=1}^{N_{\text{д}}}\left[\frac{\partial u}{\partial\eta_i}\left(u_{\text{зб}_i}^{\text{д}}-u\right)\right]\right\}\right\}d\,\Gamma-$$

$$-\int_{\Gamma}\left\{-\sum_{j=1}^{N_{\text{н}}}\frac{\partial u}{\partial\eta_j}v+\zeta\left\{\sum_{j=1}^{N_{\text{н}}}\left[\frac{\partial u}{\partial\eta_j}\left(u_{\text{зб}_j}^{\text{н}}-u\right)\right]\right\}\right\}d\,\Gamma-$$

$$-\int_{\Gamma}\left\{\sum_{j=1}^{N_{\text{н}}}\frac{\partial u}{\partial\eta_j}u+\zeta\left\{\sum_{j=1}^{N_{\text{н}}}\left[\frac{\partial u}{\partial\eta_j}\left(u_{\text{зб}_j}^{\text{н}}-u\right)\right]\right\}\right\}d\,\Gamma=\sum_{l=1}^{N_{\text{д}}+N_{\text{н}}}\frac{|Q_l|}{B_{\text{ф}}}. \qquad (2.29)$$

Визначимо білінійну форму

$$a(u,v-u)-\int_{\Omega}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k_{\text{ф}}}{\mu_{\text{ф}}\;B_{\text{ф}}}+\frac{k_{\text{г}}}{\mu_{\text{г}}\;B_{\text{г}}}\right)\left[\frac{\partial u}{\partial z_k}\cdot\frac{\partial(v-u)}{\partial z_k}\right]\right\}d\,z \qquad (2.30)$$

та функціонали

$$\mathbf{j}(v)=-\int_{\Gamma}\left\{-\sum_{i=1}^{N_{\text{д}}}\frac{\partial u}{\partial\eta_i}v+\zeta\left\{\sum_{i=1}^{N_{\text{д}}}\left[\frac{\partial u}{\partial\eta_i}\left(u_{\text{зб}_i}^{\text{д}}-u\right)\right]\right\}\right\}d\,\Gamma-$$

$$-\int_{\Gamma}\left\{-\sum_{j=1}^{N_{\text{н}}}\frac{\partial u}{\partial\eta_j}v+\zeta\left\{\sum_{j=1}^{N_{\text{н}}}\left[\frac{\partial u}{\partial\eta_j}\left(u_{\text{зб}_j}^{\text{н}}-u\right)\right]\right\}\right\}d\,\Gamma, \qquad (2.31)$$

$$\mathbf{j}(u)=-\int_{\Gamma}\left\{\sum_{i=1}^{N_{\text{д}}}\frac{\partial u}{\partial\eta_i}u+\zeta\left\{\sum_{i=1}^{N_{\text{д}}}\left[\frac{\partial u}{\partial\eta_i}\left(u_{\text{зб}_i}^{\text{д}}-u\right)\right]\right\}\right\}d\,\Gamma-$$

$$-\int_{\Gamma}\left\{\sum_{j=1}^{N_{\text{н}}}\frac{\partial u}{\partial\eta_j}u+\zeta\left\{\sum_{j=1}^{N_{\text{н}}}\left[\frac{\partial u}{\partial\eta_j}\left(u_{\text{зб}_j}^{\text{н}}-u\right)\right]\right\}\right\}d\,\Gamma. \qquad (2.32)$$

Тоді остаточно запишемо варіаційну нерівність, яка описує процес, що визначається питомою вагою газової фази у газорідинній суміші:

$$u \in K : \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v - u \right) - a(u, v - u) + \mathbf{j}(v) - \mathbf{j}(u) \geq \sum_{l=1}^{N_д + N_н} \frac{|Q_l|}{B_ф} \quad \forall v, u \in K . \qquad (2.33)$$

Таким чином, задача визначення функції $u = u(t, z)$ в продуктивному пласті в означеній вище задачі зведено до постановки у вигляді варіаційної нерівності, яка враховує також нерівності у граничних умовах, що були у вихідній системі (2.22) — (2.25).

Для коректного розв’язання задачі в постановці у вигляді варіаційної нерівності, строго доведемо існування та єдиність розв’язку (2.33).

У зв’язку з цим сформулюємо та доведемо наступні теореми 2.1 та 2.2.

Теорема 2.1. Нехай зовнішня примусова сила задовольняє умові $f = \left(\sum_{l=1}^{N_д + N_н} \frac{|Q_l|}{B_ф} \right) \in H^1(\Omega)$. Тоді існує невироджений розв’язок задачі (2.33), який відповідає трійці (a, K, f).

Доведення теореми 2.1. Нехай $u \in K$ і для будь-якої функції $v \in K$ справедлива нерівність

$$\langle au, u - v \rangle \leq \int_{\Omega} f(u - v) dz . \qquad (2.34)$$

Очевидно, якщо $u \in \dot{\mathrm{T}}^{1,q}(v, \Omega)$, де $\dot{\mathrm{T}}^{1,q}(v, \Omega)$ — множина всіх функцій $u : \Omega \to \Re$ таких, що для $\forall k > 0$ має місце $\mathrm{T}_k(u) \in \dot{W}^{1,q}(v, \Omega)$ ($\dot{W}^{1,q}(v, \Omega)$ — банановий простір функцій з компактним носієм q).

Нехай також $v \in K \cap L^{\infty}(\Omega)$, $k \geq 1$ и $k_1 = k + \|v\|_{L^{\infty}(\Omega)}$. Відповідно до [128, 129] маємо $u - \mathrm{T}_k(u - v) \in K$. Тоді, в силу (2.34), маємо

$$\langle au, \mathrm{T}_k(u - v) \rangle \leq \int_{\Omega} f \ \mathrm{T}_k(u - v) dz . \qquad (2.35)$$

Враховуючи [43], що для невагових соболівських просторів, якщо $u \in \dot{W}^{1,q}(v, \Omega)$ и $k > 0$, то $\mathrm{T}_k(u) \in \dot{W}^{1,q}(v, \Omega)$ і для $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$

$$D_i \mathrm{T}_k(u) - D_i u \cdot 1_{\{|u| < k\}} \text{ м. с. на } \Omega , \qquad (2.36)$$

де D_i — довільне число. З урахуванням (2.36) можна записати

$$\langle a\, u, \mathrm{T}_k(u - v) \rangle = \langle a\, \mathrm{T}_{k_1}(u - v), \mathrm{T}_k(u - v) \rangle .$$

З останньої рівності і нерівності (2.35) витікає, що виконується умова

якщо $v \in K \cap L^{\infty}(\Omega)$ і $k_1 = k + \|v\|_{L^{\infty}(\Omega)}$, то

$$\left\langle a\mathrm{T}_{k_1}(u-v), \mathrm{T}_k(u-v)\right\rangle \le \int\limits_{\Omega} f\ \mathrm{T}_k(u-v)\,dz\ .$$

Таким чином, u є розв'язком (строго — T-розв'язком [128, 129]) задачі (2.33), який відповідає трійці (a, K, f), причому, цей розв'язок нетривіальний, оскільки множина функцій $\dot{\mathrm{T}}^{1,q}(v,\Omega)$ визначена на всій множині K. Тим самим теорему 2.2. доведено.

Теорема 2.2. Для білінійної форми (2.30) та функціоналів виду (2.31), (2.32) розв'язок задачі (2.33) — єдиний.

Доведення теореми 2.2. Білінійна форма (2.30) є *коерцитивною*. Дійсно, білінійна форма (2.30) визначається лінійним оператором

$$a[t, u(t,z), v(t,z) - u(t,z)] = \left\langle a\,u(t,z), v(t,z) - u(t,z)\right\rangle, \qquad (2.37)$$

який задає відображення $a : H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$ в смислі елементів $v(t,z), u(t,z) \in H^1(\Omega)$. На підставі введених вище визначень функціїй $v(t,z),\ u(t,z)$ очевидно, що $\|v(t,z) - u(t,z)\| \to 0$. Тоді справедливо твердження

$$\frac{\left\langle a\,v(t,z) - a\,u(t,z), v(t,z) - u(t,z)\right\rangle}{\|v(t,z) - u(t,z)\|^2} \to +\infty\,, \quad \forall\ v(t,z), u(t,z) \in H^1(\Omega)\,,$$

звідки витікає коерцитивність білінійної форми $a[t, u(t,z), v(t,z) - u(t,z)]$ [77], тобто існує таке $\alpha > 0$, що

$$a[t, u(t,z), v(t,z) - u(t,z)] \ge \alpha\|v(t,z) - u(t,z)\|^2\,, \quad \forall\ v(t,z), u(t,z) \in H^1(\Omega)\,.$$

Уявімо, що $u_1(t,z), u_2(t,z)$ — розв'язки задачі (2.33) з граничними умовами виду (2.27), (2.28), які (розв'язки) відповідають $f_1(t,z),\ f_2(t,z) \in H^1(\Omega)$. Покажемо справедливість твердження

$$\|u_1(t,z) - u_2(t,z)\| \le \left(\frac{1}{\alpha}\right)\|f_1(t,z) - f_2(t,z)\|_{H^1(\Omega)}\,. \qquad (2.38)$$

Оскільки $K \subset H^1(\Omega)$, то відображення $f_1(t,z) \to u_1(t,z)$; $f_2(t,z) \to u_2(t,z)$ — *лінійні* та *ліпшицеві*. Тоді для розв'язків $u_1(t,z), u_2(t,z)$ задачі (2.33) з граничними умовами (2.27), (2.28) очевидно

$$a[t, u_i(t,z), v(t,z) - u_i(t,z)] + \mathbf{j}[v(t,z)] - \mathbf{j}[u_i(t,z)] \geq \langle f_i(t,z), v(t,z) - u_i(t,z) \rangle,$$

$$\forall\, v(t,z), u_i(t,z) \in K\,,\ \ i = 1,2\,. \qquad (2.39)$$

У виразі (2.39) виконаємо підстановки $v(t,z) = u_2(t,z)$ — у нерівність для $u_1(t,z)$, а $v(t,z) = u_1(t,z)$ — у нерівність для $u_2(t,z)$. Виконаємо почленне додавання нерівностей (2.39), у підсумку чого отримаємо

$$a[u_1(t,z) - u_2(t,z), u_1(t,z) - u_2(t,z)] + \mathbf{j}[u_1(t,z) - u_2(t,z)] \leq$$

$$\leq \langle f_1(t,z) - f_2(t,z), u_1(t,z) - u_2(t,z) \rangle\,.$$

Внаслідок коерцитивності білінійної форми $a[t, u(t,z), v(t,z) - u(t,z)]$ витікає

$$\alpha \left\| u_1(t,z) - u_2(t,z) \right\|^2 + \mathbf{j}\langle u_1(t,z) - u_2(t,z) \rangle \leq$$

$$\leq \langle f_1(t,z) - f_2(t,z), u_1(t,z) - u_2(t,z) \rangle \leq \left\| f_1(t,z) - f_2(t,z) \right\|_{H^1(\Omega)} \left\| u_1(t,z) - u_2(t,z) \right\|,$$

звідки, в свою чергу, витікає справедливість (2.38). Тим самим доведено єдиність розв'язку задачі (2.33).

Процеси, що визначаються здатністю розчинності газової фази у рідинній фазі суміші. В залежності від хімічного складу газорідинної суміші та фізичних умов перебігу процесу її фільтрації, газова фаза може виявляти здатність розчинності у рідинній фазі, або не виявляти такої здатності (наприклад, [2, 20, 21, 33, 47, 61]). Як свідчать результати експериментальних досліджень [20, 33, 47], здатність розчинятися виявляють гази, хімічний склад яких близький до хімічного складу рідинної фази. Так, зокрема, легколетючі фракції вуглеводнів (метан, пропан тощо) мають значну розчинність у важких (рідких — бензолах та смолистих — гудронах) їх фракціях [4, 24, 25]. Особливо здатність розчинності виявляють гази в їх скраплених складових — газових конденсатах [5, 47]. Також схильність до розчинності можуть виявляти різнорідні за хімічним складом гази та рідини, якщо фізичні умови процесу фільтрації (або, у більш загальному випадку — реології) відповідають цьому. Такими умовами (наприклад, для систем «полімер — водяний пар») можуть слугувати підвищені пластовий тиск (на значних пластових горизонтах) або температура (сейсмічні та геотермальні зони) [9, 23, 37, 50, 51].

Здатність розчинності газової фази у рідинній фазі суміші також слід розглядати як *нерівновагове* явище, оскільки об'ємні долі розчиненого газу та вивільненого з рідини не співпадають і залежать від умов перебігу процесу фільтрації: ступеню початкової газованості рідинної фази, параметрів пористого середовища, наявності або відсутності примусової сили тощо. Тому доцільно ММ процесу, який розглядається, також розробляти як *варіаційну нерівність*.

Будемо вважати, що область Ω з границею Γ задає геометрію просторової області, в якій фізично розвивається процес фільтрації. При цьому область Ω являє собою відкриту обмежену просторову область в $\Re^n$, $n = \overline{1, 2}$ (розгляд плаского випадку не зменшує загальності розгляду), а $\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \Gamma$ задає замкнення Ω. Функція стану $u = u(t, z)$ для $\overline{\Omega}$ розглядається як безрозмірна розподілена функція концентрації газової фази в рідинній фазі суміші, що не може перевищити певний поріг $u_{\max}$ (визначається фізико-хімічними особливостями перебігу процесу), тобто $u(t, z) \le u_{\max}$. Процес фільтрації може бути зумовлений як дією примусової сили $f(t)$ — і процес, в даному випадку, буде нестаціонарним, так і відсутністю дії примусової сили $f(t)$ — і процес тоді буде мати стаціонарний характер.

Шукану функцію концентрації газової фази будемо розглядати як гармонійну функцію в Ω, неперервну на $\overline{\Omega}$ і таку, що являє собою розв'язок задачі динаміки

$$R(f)\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u(t,z)}{\partial z_k^2} = f(t) \qquad (2.40)$$

з початковими

$$u(t,z)\big|_{t=0} = u(z) \tag{2.41}$$

та граничними умовами

$$\frac{\partial u(t,z)}{\partial \eta} = 0\,,\ \ \left[u(t,z) - u_{\max}\right]\Big|_{z\in\Gamma} > 0\,, \tag{2.42}$$

$$\frac{\partial u(t,z)}{\partial \eta} \geq 0\,,\ \ \left[u_{\max} - u(t,z)\right]\Big|_{z\in\Gamma} > 0\,, \tag{2.43}$$

де $R(f)$ — коефіцієнт розчинності газової фази в рідинній фазі суміші, η — нормаль до границі Γ.

Умови (2.42) та (2.43) свідчать відповідно про перевищення функцією стану порогового значення та відсутність такого перевищення.

Особливістю рівняння динаміки (2.40) полягає в тому, що коефіцієнт розчинності $R(f)$ являє собою функцію примусової сили (про що було зазначено вище), внаслідок чого рівняння (2.40) є *нелінійним*. Очевидно, що розмірності коефіцієнта $R(f)$ та примусової сили пов'язані наступним чином: $[R] = [f]^{-1}$. Для *стаціонарної* задачі рівняння (2.40) прийме форму

$$R\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u(t,z)}{\partial z_k^2} = 0\,. \tag{2.44}$$

Вочевидь, що для стаціонарної задачі (2.44), (2.41) — (2.43) коефіцієнт розчинності буде мати лінійний (при однорідності середовища, де відбувається процес фільтрації) характер.

Приведемо задачу (2.40) — (2.43) або (2.44), (2.41) — (2.43) до постановки у вигляді варіаційної нерівності. Для конкретності розглянемо останню задачу. Введемо до розгляду пробну функцію v, визначену на соболевському просторі $H^1(\Omega)$. Помножимо скалярно (2.44) на $(v-u)$ (аргументи у функцій опущено) і, скориставшись формулою Гріна, отримаємо

$$\int_{\Omega}\left[R\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial z_k}\cdot\frac{\partial(v-u)}{\partial z_k}\right]dz - \int_{\Gamma}\left[\frac{\partial u}{\partial \eta}, v-u\right]d\Gamma = (f\equiv 0, v-u) \tag{2.45}$$

для будь-якої $v \geq 0$ на Γ.

Таким чином, в якості опуклої множини K припустимих функцій може бути обрано множину невід'ємних v таких, що

$$K = \left\{ v \in H^1(\Omega) \middle| v \geq 0 \text{ м. с. на } \Gamma \right\}.$$

З (2.42) та (2.43) відповідно витікає, що

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} \zeta \left[u_{\max} - u \right] d\Gamma \leq 0 , \qquad (2.46)$$

$$\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \eta} \zeta \left[u - u_{\max} \right] d\Gamma = 0 , \qquad (2.47)$$

де ζ — пропускна здатність границі Γ .

Далі, введемо заміну змінної v на $(-v)$ і, з урахуванням (2.46) та (2.47), перепишемо (2.44)

$$\int_\Omega \left[\sum_{k=1}^n R \frac{\partial u}{\partial z_k} \cdot \frac{\partial (v-u)}{\partial z_k} \right] dz - \int_\Gamma \left\{ -\frac{\partial u}{\partial \eta} v + \frac{\partial u}{\partial \eta} \zeta \left[u_{\max} - u \right] \right\} d\Gamma -$$
$$- \int_\Gamma \left\{ \frac{\partial u}{\partial \eta} u + \frac{\partial u}{\partial \eta} \zeta \left[u - u_{\max} \right] \right\} d\Gamma = \left(f \equiv 0, v-u \right).$$

Визначимо білінійну форму

$$a(u, v-u) = \int_\Omega \left[\sum_{k=1}^n R \frac{\partial u}{\partial z_k} \cdot \frac{\partial (v-u)}{\partial z_k} \right] dz \qquad (2.48)$$

і функціонали

$$\mathbf{j}(v) = \int_\Gamma \left\{ -\frac{\partial u}{\partial \eta} v + \frac{\partial u}{\partial \eta} \zeta \left[u_{\max} - u \right] \right\} d\Gamma , \qquad (2.49)$$

$$\mathbf{j}(u) = \int_\Gamma \left\{ -\frac{\partial u}{\partial \eta} u + \frac{\partial u}{\partial \eta} \zeta \left[u_{\max} - u \right] \right\} d\Gamma . \qquad (2.50)$$

Тоді остаточно запишемо варіаційну нерівність, яка описує явище розчинності газової фази у рідинній фазі в процесі фільтрації газорідинної суміші у пористому середовищі за умови нерівновагового характеру явища розчинності

$$u \in K: \ a(u, v-u) + \mathbf{j}(v) - \mathbf{j}(u) \geq \left(f \equiv 0, v-u \right) \quad \forall v \in K . \qquad (2.51)$$

Зауважимо, що варіаційна нерівність (2.51) є стаціонарною, одначе, з урахуванням рівняння динаміки у вигляді (2.40), задачу може бути сформульовано і як нестаціонарну, якщо динаміку процесу фільтрації газорідинної суміші всередині області Ω зумовлено дією примусової сили $f(t)$. В цьому випадку (2.51) прийме вигляд

$$u \in K: \ \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v-u\right) - a(u, v-u) + \mathbf{j}(v) - \mathbf{j}(u) \geq (f, v-u) \quad \forall v, u \in K, \quad (2.52)$$

де примусова сила буде задовольняти умові $f(t) \neq 0$, білінійну форму (2.48) буде визначено як

$$a(u, v-u) = \int_{\Omega} \left[\sum_{k=1}^{n} R(f) \frac{\partial u}{\partial z_k} \cdot \frac{\partial (v-u)}{\partial z_k}\right] dz. \quad (2.53)$$

З метою забезпечення у подальшому коректності отримуваних розв'язків слід виконати якісні дослідження варіаційних задач (2.51) та (2.52), а саме: довести існування та єдиність розв'язків цих задач.

При цьому зауважимо, що виконане вище доведення теореми 2.1 можна повністю поширити на випадки дослідження існування розв'язків задач (2.51) та (2.52), оскільки дане доведення не містило особливих вимог до виду диференційного оператора $a[t, u(t,z), v(t,z) - u(t,z)]$ відповідної білінійної форми та примусової сили $f(t)$. В силу властивості індукції поширимо також доведення теореми 2.1 і на інші, сформульовані у подальшому, варіаційні задачі, що описують процеси фільтрації газорідинних сумішей у пористих середовищах.

Натомість строге доведення єдності розв'язків задач (2.51) та (2.52) виконано у додатку Б, оскільки доведення, в даному разі, саме повинні враховувати вид диференційного оператора $a[t, u(t,z), v(t,z) - u(t,z)]$ відповідної білінійної форми та примусової сили $f(t)$.

Процеси, що визначаються станом газової фази у суміші. Важливим параметром газорідинної суміші слід вважати певне *критичне* значення функції стану $u_{\text{кр}}$ (та відповідний йому критичний об'ємний коефіцієнт газової фази $B_{\text{г}_{\text{кр}}}$), яке визначає явища: відсутності утворення газової фази в суміші, початку зародкоутворення газової фази та вираженого газоутворення в суміші [5, 47].

При складанні ММ даного класу процесів будемо спиратися на міркування, виконані в ході складання ММ процесів, що визначаються питомою вагою газової фази у суміші. Ця можливість витікає в силу близькості фізичних явищ (зокрема, прояву динаміки та впливу примусової сили), які характеризують зазначені два класи процесів фільтрації газорідинних сумішей. Відмінність процесів будемо розглядати в формулюванні граничних умов, які, в останньому випадку, повинні враховувати критичне значення функції стану $u_{\text{кр}}$. В такому разі, спираючись на постановку задачі відшукання функції пластового тиску $u = u(t, z)$ виду (2.22) — (2.25), запишемо

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_k}\left[\left(\frac{k_{\text{ф}}}{\mu_{\text{ф}}\, B_{\text{ф}}} + \frac{k_{\text{г}}}{\mu_{\text{г}}\, B_{\text{г}}}\right) \cdot \frac{\partial u(t, z)}{\partial z_k}\right] = \sum_{l=1}^{N_{\text{д}}+N_{\text{н}}} \frac{|Q_l|}{B_{\text{ф}}}; \quad l = \overline{1, \left(N_{\text{д}} + N_{\text{н}}\right)}, \quad (2.54)$$

з початковими

$$u(t, z)\big|_{t=0} = u(z) \qquad (2.55)$$

та граничними умовами, які відповідно враховують докритичний стан, стан зародкоутворення та стан з вираженою газовою фазою

$$\begin{cases} B_{\text{г}} = 0;\, u(t, z) < u_{\text{кр}}, \\ B_{\text{г}} = B_{\text{г}_{\text{кр}}};\, u(t, z) = u_{\text{кр}}, \\ B_{\text{г}} > B_{\text{г}_{\text{кр}}};\, u(t, z) > u_{\text{кр}}. \end{cases} \qquad (2.56)$$

Приведемо сформульовану задачу до постановки у вигляді варіаційної нерівності. Введемо у розгляд пробну функцію v, визначену на просторі Соболєва $H^1(\Omega)$. Помножимо скалярно рівняння динаміки (2.54) на $(v - u)$ і, скориставшись формулою Гріна, отримаємо вираз аналогічно (2.26)

$$\int_{\Omega} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k_{\text{ф}}}{\mu_{\text{ф}}\, B_{\text{ф}}} + \frac{k_{\text{г}}}{\mu_{\text{г}}\, B_{\text{г}}}\right)\left[\frac{\partial u}{\partial z_k} \cdot \frac{\partial (v - u)}{\partial z_k}\right]\right\} d\,z -$$

$$-\int_{\Gamma}\left[\sum_{l=1}^{N_{д}+N_{н}}\left(\frac{k_{ф}}{\mu_{ф}\,B_{ф}}+\frac{k_{г}}{\mu_{г}\,B_{г}}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial \eta_{l}},v-u\right)\right]d\Gamma=\sum_{l=1}^{N_{д}+N_{н}}\frac{|Q_{l}|}{B_{ф}} \tag{2.57}$$

для будь-якої $v \geq 0$ на Γ_l, $l=\overline{1,(N_{д}+N_{н})}$.

Таким чином, в якості опуклої множини K припустимих функцій може бути обрана множина невід'ємних v таких що

$$K=\left\{v\in H^{1}(\Omega)\,\middle|\,v\geq 0 \text{ майже скрізь на } \Gamma_{l}\right\},\;\; l=\overline{1,(N_{д}+N_{н})}.$$

З граничних умов (2.56) відповідно витікає, що для докритичного стану та стану зародкоутворення (перший та другий вирази в (2.56)) інтеграл по границі Γ приймає вигляд

$$\int_{\Gamma}B_{г}\left[u(t,z)-u_{кр}\right]d\Gamma=0, \tag{2.58}$$

а для стану з вираженою газовою фазою (третій вираз в (2.56)) інтеграл по границі Γ запишеться наступним чином

$$\int_{\Gamma}B_{г}\left[u(t,z)-u_{кр}\right]d\Gamma>0. \tag{2.59}$$

Введемо зміну змінної v на $(-v)$ і, з урахуванням (2.58) та (2.59), вираз (2.57) перепишемо у вигляді

$$\int_{\Omega}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k_{ф}}{\mu_{ф}\,B_{ф}}+\frac{k_{г}}{\mu_{г}\,B_{г}}\right)\left[\frac{\partial u}{\partial z_{k}}\cdot\frac{\partial(v-u)}{\partial z_{k}}\right]\right\}dz-$$

$$-\int_{\Gamma}\left\{-B_{г}v+\left[u(t,z)-u_{кр}\right]\right\}d\Gamma-\int_{\Gamma}\left\{-B_{г}u+\left[u(t,z)-u_{кр}\right]\right\}d\Gamma=\sum_{l=1}^{N_{д}+N_{н}}\frac{|Q_{l}|}{B_{ф}}. \tag{2.60}$$

Визначимо білінійну форму

$$a(u,v-u)-\int_{\Omega}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k_{ф}}{\mu_{ф}\,B_{ф}}+\frac{k_{г}}{\mu_{г}\,B_{г}}\right)\left[\frac{\partial u}{\partial z_{k}}\cdot\frac{\partial(v-u)}{\partial z_{k}}\right]\right\}dz \tag{2.61}$$

та функціонали

$$\mathbf{j}(v)=-\int_{\Gamma}\left\{-B_{г}v+\left[u(t,z)-u_{кр}\right]\right\}d\Gamma, \tag{2.62}$$

$$\mathbf{j}(u)=-\int_{\Gamma}\left\{-B_{г}u+\left[u(t,z)-u_{кр}\right]\right\}d\Gamma. \tag{2.63}$$

Тоді остаточно запишемо варіаційну нерівність, яка описує процес, що визначаються станом газової фази у суміші:

$$u \in K : \left(\frac{\partial u}{\partial t}, v - u \right) - a(u, v - u) + \mathbf{j}(v) - \mathbf{j}(u) \geq \sum_{l=1}^{N_{\text{д}} + N_{\text{н}}} \frac{|Q_l|}{B_{\text{ф}}} \quad \forall v, u \in K . \quad (2.64)$$

Єдиність розв'язку варіаційної задачі (2.64) доведено у додатку Б.

Процеси, що визначаються впливом граничного градієнта на реологію суміші. Наявність та вплив граничного градієнта на реологічні (як окремий випадок — фільтраційні) процеси спричиняє їх виражений нерівноваговий та однобічний характер розвитку. Типовим проявом фізичних явищ при цьому виступають *аномальна граничність* значення функції стану та *еволюційне обмеження* на функцію стану.

Якщо в якості функції стану розглядати насиченість газорідинної суміші газовою фазою $S_{\text{г}} = S_{\text{г}}(t, z)$ (або, теж саме, брати до уваги об'ємний коефіцієнт газової фази $B_{\text{г}}$), то газоутворення в суміші можливо за умови $B_{\text{г}} > B_{\text{г}_{\text{кр}}}$, де $B_{\text{г}_{\text{кр}}}$ виступає як граничний градієнт газоутворення. При цьому рівність $\left|\text{grad } S_{\text{г}}(t, z)\right| = B_{\text{г}_{\text{кр}}}$ розглядається як умова граничної рівноваги [3, 36] і, як будо зазначено вище, газонасичення суміші, відбувається лише в разі, якщо $\left|\text{grad } S_{\text{г}}(t, z)\right| > B_{\text{г}_{\text{кр}}}$.

В процесах з *аномальною граничністю* функції стану необхідно визначити поле функції газонасиченості $S_{\text{г}}(t, z)$ продуктивного пласта, де відбувається фільтрація газорідинної суміші під дією примусової сили $f(z)$. Область Ω фільтрації являє собою відкриту обмежену область в $\Re^n$, $n = \overline{1, 2}$ з границею Γ.

Запропонуємо ММ процесу з аномальною граничністю функції стану, врахувавши наступне. Зміну газонасиченості суміші в n-мірній просторовій області Ω може бути представлено, виходячи з (2.1) — (2.4), наступним чином:

$$m(z)\frac{\partial S_{\text{г}}(t,z)}{\partial t}-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_k}\left[\frac{R_{s\text{ф}}\,k_{\text{г}}}{\mu_{\text{г}}\,B_{\text{г}}}\cdot\frac{\partial S_{\text{г}}(t,z)}{\partial z_k}-B_{\text{г}_{\text{кр}}}\right]=f(z) \tag{2.65}$$

з початковими

$$S_{\text{г}}(t,z)\big|_{t=0}=S_{\text{г}_0}(z) \tag{2.66}$$

та граничними умовами

$$\frac{\partial S_{\text{г}}(t,z)}{\partial\eta}\geq 0,\quad \left|\text{grad}\ S_{\text{г}}(t,z)\right|>B_{\text{г}_{\text{кр}}}, \tag{2.67}$$

$$\frac{\partial S_{\text{г}}(t,z)}{\partial\eta}=0,\quad \left|\text{grad}\ S_{\text{г}}(t,z)\right|\leq B_{\text{г}_{\text{кр}}}. \tag{2.68}$$

Уведемо до розгляду пробну функцію $v\in H^1(\Omega)$ та замкнуту множину припустимих функцій $K=\{v\ |v>0\ \text{м. с. в}\ \Omega\}$. Скалярно помножимо (2.65) на $v-u$ і, застосувавши формулу Гріна, отримаємо (опускаючи параметри в відповідних функцій)

$$\left(m\frac{\partial S_{\text{г}}}{\partial t},v-u\right)-\int_{\Omega}\left(\frac{R_{s\text{ф}}\,k_{\text{г}}}{\mu_{\text{г}}\,B_{\text{г}}}\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial S_{\text{г}}}{\partial z_k}\cdot\frac{\partial(v-S_{\text{г}})}{\partial z_k}-B_{\text{г}_{\text{кр}}},v-S_{\text{г}}\right)dz-$$

$$-\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial S_{\text{г}}}{\partial\eta},v-S_{\text{г}}\right)d\Gamma=\left(f,v-S_{\text{г}}\right)\quad\forall v,S_{\text{г}}\in K. \tag{2.69}$$

На підставі вище наведеної умови граничної рівноваги, перетворимо (2.69) до вигляду

$$\left(m\frac{\partial S_{\text{г}}}{\partial t},v-S_{\text{г}}\right)-\frac{R_{s\text{ф}}\,k_{\text{г}}}{\mu_{\text{г}}\,B_{\text{г}}}\cdot\int_{\Omega}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial S_{\text{г}}}{\partial z_k}\cdot\frac{\partial(v-S_{\text{г}})}{\partial z_k}\right)dz+\int_{\Omega}\left|\text{grad}\ (v)\right|dz-$$

$$-\int_{\Omega}\left|\text{grad}\ (S_{\text{г}})\right|dz--\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial S_{\text{г}}}{\partial\eta},v-S_{\text{г}}\right)d\Gamma=\left(f,v-S_{\text{г}}\right),\quad\forall v,S_{\text{г}}\in K. \tag{2.70}$$

Уводячи білінійну форму

$$a(u,v-S_{\text{г}})=\frac{R_{s\text{ф}}\,k_{\text{г}}}{\mu_{\text{г}}\,B_{\text{г}}}\cdot\int_{\Omega}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial S_{\text{г}}}{\partial z_k}\cdot\frac{\partial(v-S_{\text{г}})}{\partial z_k}\right)dz \tag{2.71}$$

і функціонали

$$\mathbf{j}(v)=\int_{\Omega}\left|\text{grad}\ (v)\right|dz, \tag{2.72}$$

$$\mathbf{j}(u) = \int\limits_{\Omega} \left|\text{grad}\,(S_{г})\right| d\,z \qquad (2.73)$$

остаточно приходимо до варіаційної нерівності у частинних похідних

$$S_{г} \in K : \left(m \frac{\partial S_{г}}{\partial t}, v - S_{г} \right) - a(S_{г}, v - S_{г}) + \mathbf{j}(v) - \mathbf{j}(S_{г}) \geq (f, v - S_{г}),$$

$$\forall v, S_{г} \in K \,. \qquad (2.74)$$

Єдиність розв’язку задачі (2.74) доведено у додатку Б.

Особливістю процесів з *еволюційним обмеженням* на функцію стану є те, що шукана функція газонасиченості $S_{г}(t, z)$ газорідинної суміші в ході еволюції фізичного явища при $t > 0$, не може перевищити певної межі $S_{г}(t, z) \leq S_{г_{max}}$ (у відносному представленні задається співвідношенням $S_{г_{max}} \equiv 1$), тобто характеризується еволюційною обмеженістю. Динаміка $S_{г}(t, z)$ визначається дією зовнішньої примусової функції $f(t)$ (або $f(z)$).

Необхідно відшукати функцію газонасиченості $S_{г}(t, z)$, що визначає простір стану газової фази газорідинної суміші, і яка характеризується обмеженістю $S_{г}(t, z) \leq S_{г_{max}}$, $0 \leq t < \infty$.

Нехай Ω — відкрита пласка обмежена область в $\Re^{n}$, $n = 2$ з границею Γ, що являє собою газовану частину газорідинної суміші (або окремо газову фазу в суміші). Характеристики пористого середовища задаються проникністю $k(z)$ и шпаруватістю m, а пластовий та капілярний тиски — відповідно функціями $u(t, z)$ та $u_{c}(t, z)$. Відносно функції $S_{г}(t, z)$ будемо вважати відомими вид диференційного рівняння, яке описує динаміку функції газонасиченості [2]

$$\frac{\partial S_{г}(t, z)}{\partial t} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_{k}} \left[k(z) \frac{d\,u_{c}(S_{г})}{d\,S} \cdot \frac{\partial S_{г}(t, z)}{\partial z_{k}} \right] -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_{k}} \left[k(z) \cdot \frac{\partial u(t, z)}{\partial z_{k}} \right] = f(z), \quad f(z) \text{ — задано в } \Omega \qquad (2.75)$$

з початковою умовою

$$S_{г}(0, z) = S_{г_{0}}(z) \qquad (2.76)$$

та граничними умовами у вигляді нерівностей (в силу еволюційної обмеженості $S_г(t,z)$)

$$\frac{\partial S_г(t,z)}{\partial \eta} \geq 0\,; \quad S_г(t,z) < S_{г_{max}}\,, \tag{2.77}$$

$$\frac{\partial S_г(t,z)}{\partial \eta} = 0\,; \quad S_г(t,z) \geq S_{г_{max}}\,, \tag{2.78}$$

де η —- нормаль до границі Γ .

Уведемо до розгляду пробну функцію v, $\forall v \in K$, $K = \{v | v \geq 0$ м. с. в $\Omega\}$. Скалярно помножимо (2.75) на $(v - S_г)$ і, застосувавши формулу Гріна, отримаємо

$$\left(m\frac{\partial S_г}{\partial t}, v - S_г \right) - k\int_{\Omega}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{du_c}{dS_г}\cdot\frac{\partial S}{\partial z_k}\cdot\frac{\partial (v - S_г)}{\partial z_k} \right) dz -$$

$$- k\int_{\Omega}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_k^2}\cdot\frac{\partial (v - S_г)}{\partial z_k} \right) dz = \left(f, (v - S_г) \right) + \int_{\Gamma}\left(\frac{\partial S_г}{\partial \eta}, v - S_г \right) d\Gamma\,, \quad \forall v,\, S_г \in K\,.$$

Виконаємо заміну змінної v на $(-v)$, в результаті чого отримаємо

$$\left(m\frac{\partial S_г}{\partial t}, v - S \right) - k\int_{\Omega}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{du_c}{dS_г}\cdot\frac{\partial S_г}{\partial z_k}\cdot\frac{\partial (v - S_г)}{\partial z_k} \right) dz - k\int_{\Omega}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_k^2}|v|\, dz +$$

$$+ k\int_{\Omega}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_k^2}|S_г|\, dz \geq \left(f, (v - S_г) \right); \quad \forall v, S_г \in K\,. \tag{2.79}$$

Визначимо білінійну форму

$$a(S_г, v - S_г) = k\int_{\Omega}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{du_c}{dS_г}\cdot\frac{\partial S_г}{\partial z_k}\cdot\frac{\partial (v - S_г)}{\partial z_i} \right) dz \tag{2.80}$$

і функціонали

$$\mathbf{j}(v) = k\int_{\Omega}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_i^2}|v|\, dz\,, \tag{2.81}$$

$$\mathbf{j}(S_г) = k\int_{\Omega}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_i^2}|S_г|\, dz\,. \tag{2.82}$$

Тоді приходимо до наступної варіаційної нерівності

$$S_г \in K: \left(m\frac{\partial S_г}{\partial t}, v - S_г \right) - a(S_г, v - S_г) - \mathbf{j}(v) + \mathbf{j}(S_г) \geq \left(f, v - S_г \right),$$

$$\forall v, S_г \in K\,. \tag{2.83}$$

Єдиність розв’язку задачі (2.83) доведено у додатку Б.

Узагальнений математичний опис процесів фільтрації газорідинних сумішей. На підставі запропонованих ММ частинних випадків процесів фільтрації газорідинних сумішей у пористих середовищах виконаємо їх узагальнення з метою коректної розробки методу їх обчислювальної реалізації.

Нехай функція $\Psi = \Psi(t, z)$, визначена на обмеженій відкритій множині Q простору $\Re^n$, $n = \overline{1, 2}$ з гладкою границею Γ і в інтервалі часу $(0, t_k)$ для $t_k < \infty$, $Q = (0, t_k) \times \Omega$, $\Sigma = (0, t_k) \times \Gamma$ є розв'язком варіаційної нерівності

$$\Psi \in K : \left[m(z) \frac{\partial \Psi}{\partial t}, v - \Psi \right] + a(\Psi, v - \Psi) + \mathbf{j}(v) - \mathbf{j}(\Psi) \geq$$

$$\geq (f, v - \Psi); \quad \forall v, \Psi \in H^1(\Omega) \tag{2.84}$$

з початковими

$$\Psi(t, z)\big|_{t=0} = \Psi_0(z) \tag{2.85}$$

та граничними (типа Діріхлє або Неймана) умовами

$$\begin{cases} \Psi(t, z) = \psi(t, z); \; z \in \Gamma, \\ \dfrac{\partial \Psi(t, z)}{\partial \eta} = \xi(t, z); \; \eta - \text{нормаль} \quad \text{до } \Gamma, \end{cases} \tag{2.86}$$

де $\Psi(t, z)$ — шукана функція, яка являє собою фізичну величину, що визначає простір стану певного процесу фільтрації газорідинної суміші (наприклад, тиск, газонасиченість, концентрацію тощо); $f(\cdot)$ — примусова сила процесу (являє собою функцію незалежних часової або просторової змінних), для якої операція $(f, v - \Psi)$ співпадає зі скалярним добутком в $L^2(\Omega)$, тобто $(f, v - \Psi) = \int\limits_{\Omega} [f(z), v - \Psi] dz$ або $(f, v - \Psi) = \int\limits_{\Gamma} [f(z), v - \Psi] d\Gamma$; $\mathbf{j}(v)$, $\mathbf{j}(\Psi)$ — опуклі функціонали, що зумовлюють вид фізичного процесу фільтрації і які може бути визначено або на границі Γ просторової області Ω

$$\mathbf{j}(\cdot) = \int\limits_{\Gamma} \varphi(\Psi, z) \lambda(\Psi, \Psi_{\text{зовн}}) d\Gamma \tag{2.87}$$

або всередині просторової області Ω

$$\mathbf{j}(\cdot) = \int\limits_{\Omega} \varphi(\Psi, z) \lambda(\Psi, \Psi_{\text{зовн}}) dz, \tag{2.88}$$

де $\varphi(\Psi, z)$ — певна неперервна функція, в якості аргументів якої, окрім незалежної просторової координати, може виступати шукана функція; $\lambda(\Psi, \Psi_{\text{зовн}})$ — неперервна, така, що диференціюється (або не володіє властивістю диференціюватися), функція від шуканої функції (або функції тієї ж фізичної природи, але заданої поза просторовою областю $\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \Gamma$), а також функції іншої фізичної природи); $\psi(t, z)$, $\xi(t, z)$ — невід'ємні функції на границі Γ просторової області Ω, які визначають напрям та якісну картину перебігу фізичного процесу на границі Γ.

При визначенні просторів припустимих функцій для $\varphi(\Psi, z)$ та $\lambda(\Psi, \Psi_{\text{зовн}})$ будемо вважати, що $\varphi(\cdot), \lambda(\cdot) \in L^{\infty}(\overline{Q})$, де $\overline{Q} = (0, t_k) \times \overline{\Omega}$. В результаті цього простори відповідних функцій визначаються як $\Delta \in L^{\infty}(\overline{Q})$, $\Lambda \in L^{\infty}(\overline{Q})$, причому, простори Δ та Λ є банаховими відносно норми

$$\|\varphi(\Psi, z)\|_{\Delta} = \|\varphi(\Psi, z)\|_{L^{\infty}(\overline{Q})},$$

$$\|\lambda(\Psi, \Psi_{\text{зовн}})\|_{\Delta} = \|\lambda(\Psi, \Psi_{\text{зовн}})\|_{L^{\infty}(\overline{Q})}.$$

З урахуванням викладеного вище, множини припустимих функцій $\Phi_{\text{прип}}$ та $\Lambda_{\text{прип}}$ може бути представлено у вигляді

$$\Phi_{\text{прип}} = \left\{\varphi \in \Delta\Big|_{\varphi(\Psi, z) \geq D_1} \text{ м. с.}\right\};$$

$$\Lambda_{\text{прип}} = \left\{\lambda \in \Lambda\Big|_{\varphi\lambda(\Psi, \Psi_{\text{зовн}}) \geq D_2} \text{ м. с.}\right\},$$

де D_1, D_2 — деякі задані дійсні числа.

Вище та у додатку Б, для частинних випадків функціоналів $\mathbf{j}(\cdot)$ було доведено теореми існування та єдності розв'язків. Поширимо отримані результати на узагальнений випадок. При цьому будемо вважати, що сукупність білінійних форм, які задаються варіаційною нерівністю (2.84), є множиною коерцитивних відображень тобто $\exists \alpha > 0$, таке, що $a(\Psi, v - \Psi)_{H^1, H^1} \geq \alpha \|\Psi\|^2_{H^1}$, $\forall \psi \in H^1$, а функціонали $\mathbf{j}(\cdot)$ є опуклими в області Ω та на її границі Γ.

Враховуючи виконане узагальнення та результати роботи [3] можна прийти висновку, що характер розв'язку співвідношень (2.84) — (2.86) визначається видом функціоналів $\mathbf{j}(\cdot)$ (зокрема, видом функцій $\varphi(\cdot)$ та $\lambda(\cdot)$). Очевидно також, що функціонали $\mathbf{j}(\cdot)$ зводять (2.84) — (2.86) до лінійних або нелінійних задач з невідомими границями (якщо $\mathbf{j}(\cdot)$ задано виразом (2.87)) або з невідомою областю (якщо $\mathbf{j}(\cdot)$ задано виразом (2.88)). Також, на підставі результатів, одержаних в роботі [3], можна стверджувати, що просторово-часові області дії відомих (наприклад, граничних) умов невідомі і залежать від стану фізичної системи. Віднаходження цих областей може розглядатися як розв'язання задачі [38, 89, 90, 130].

2.3. Обчислювальна реалізація ММ процесів фільтрації у гетерогенних системах

2.3.1. Модифікація методу МФГ реалізації ММ процесів фільтрації у гетерогенних системах

В розділах 2.1 та 2.2 досліджено як типові приклади фільтрації у гетерогенних системах процеси пластової реології газорідинних сумішей, внаслідок чого виконано їх систематизацію, класифікацію та розроблено відповідні ММ. Також виконано узагальнення математичного опису процесів фільтрації газорідинних сумішей і його поширено на більш сягнистий клас процесів фільтрації у гетерогенних системах. Це дає підставу, у подальшому, на уніфікованій основі, розробити *метод обчислювальної реалізації* ММ процесів фільтрації у гетерогенних системах.

ММ класу процесів фільтрації у гетерогенних системах представлено (узагальнена модель) у вигляді варіаційної нерівності (2.84) (з початковими (2.85) та граничними умовами (2.86)), розв'язок якої допускає застосування оптимізаційної процедури. Тому, при розробці метода розв'язання задачі (2.84) — (2.86), зважимо на наступне. В роботі [3] запропоновано метод обчислювальної реалізації ММ аномальних дифузійних процесів (ДП), в основу якого покладено процедуру принципу максимуму функції Гамільтона (метод МФГ). Суть методу МФГ (у відповідності до [3]) полягає у розв'язанні *оптимізаційної задачі*, яка забезпечує екстремум наступного критерію якості (представлено у термінах роботи [3])

$$J = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \, v_i(t_k) \to \text{extr} \;\; (J > 0), \qquad (2.89)$$

де $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2, ..., \psi_n)^{\text{т}}$ — вектор-стовбчик бажаного (істинного) стану аномальної дифундуючої системи, а $\bar{v} = (v_1, v_2, ..., v_n)^{\text{т}}$ — вектор-стовбчик реального стану аномальної дифундуючої системи в кінцевий момент часу t_k (тобто вектор-стовбчик пробної функції).

Екстремум J в (2.89) буде означати приблизну ортогональність векторів $\overline{\psi}$ та $\bar{v}$, тобто реальний рух, який максимально наближено до бажаного. Причому, кінцева точка t_k може бути вільною (задача з «вільним» кінцем) або закріпленою (задача з «фіксованим» кінцем). Мінімум функції J в критерії (2.89) означає, що енергетична функція Гамільтона $H(q, v, t)$ [110, 131 — 133] має *максимум* по відношенню до узагальнених координат q аномальної дифундуючої системи (узагальнені координати q визначають фізичний смисл ММ аномальної дифундуючої системи [134, 135]) в інтервалі $t \in (0, t_k)$. Таким чином, задача реалізації ММ аномального ДП, тобто його моделювання, може розглядатися [3] як оптимізаційна задача з пошуком *максимуму* функції Гамільтона.

Близькість фізичних явищ процесів аномальної дифузії у пористих середовищах та фільтрації у гетерогенних системах дозволяє поширити застосування методу МФГ для розв'язання задач моделювання останніх, виконавши при цьому його (методу) модифікацію. Задля збереження загальності методу модифікацію будемо виконувати, спираючись на узагальнену ММ виду (2.84) — (2.86).

Приймається, що визначеними повністю вважаються параметри диференційних операторів білінійної форми $a(\Psi, v - \Psi)$, яка є коерцитивною та задає лінійне перетворення $a(\Psi): H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$; коефіцієнти при похідній шуканої функції за часом $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ (в разі розв'язування нестаціонарної або еволюційної задач); примусова сила $f \in F_{\text{доп}}$, що може бути функцією незалежних як часової t, так і просторової $\bar{z} = [z_1, z_2, ..., z_k]^{\mathrm{T}}$, $k = \overline{1, n}$ координат, а також початкові умови $\Psi(t, z)\big|_{t=0} = \Psi_0(z)$. Також відомою є структура підінтегральних виразів, що визначають вид функціоналів $\mathbf{j}(\cdot)$, які задано виразами (2.87), (2.88). Ставиться задача відшукання функції стану $\Psi = \Psi(t, z)$, що задовольняє варіаційній нерівності виду (2.84) та критерію якості

$$J = \min_{v} \int_{\Gamma} \int_{0}^{T} \left| v(t, z) - \Psi(t, z) \right| dt \; d\Gamma \qquad (2.90)$$

або

$$J = \min_{v} \int_{\Omega} \int_{0}^{T} \left| v(t, z) - \Psi(t, z) \right| dt \; dz \; . \qquad (2.91)$$

Критерій (2.90) застосовується, якщо задача розв'язується на границі Γ просторової області Ω, а критерій (2.91) — якщо всередині просторової області Ω. Зауважимо, що інтегральна різниця між пробною $v(t, z)$ та шуканою $\Psi(t, z)$ функціями розглядається як кількісна міра — штраф за відхилення перебігу досліджуваного процесу від його реального значення (в критеріях (2.90) та (2.91) з метою незалежності J від знака різниці функцій $v(t, z)$ та $\Psi(t, z)$, підінтегральний вираз береться по модулю).

Відповідно до [3], як і передбачає метод МФГ, уведемо низку позначень та виконаємо певні перетворення.

Підінтегральні вирази для функціоналів (2.87) и (2.88) представимо наступним чином (відповідно для просторової області Ω і її границі Γ):

$$\mathbf{j}[\Psi(t, z)] = \int_{\Gamma} \Phi[\Psi(t, z)] d\Gamma \; ; \quad \mathbf{j}[\Psi(t, z)] = \int_{\Omega} \Phi[\Psi(t, z)] d\Omega \; , \qquad (2.92)$$

$$\mathbf{j}[v(t, z)] = \int_{\Gamma} \Phi[v(t, z)] d\Gamma \; ; \quad \mathbf{j}[v(t, z)] = \int_{\Omega} \Phi[v(t, z)] d\Omega \; , \qquad (2.93)$$

Враховуючи введені позначення та виконані перетворення, задача (2.84), (2.85) прийме вигляду (наприклад, у постановці на границі Γ)

$$\Psi \in K : \left[m(z) \frac{\partial \Psi}{\partial t}, v - \Psi \right] + a(\Psi, v - \Psi) + \int_{\Gamma} \Phi(v) d\Gamma - \int_{\Gamma} \Phi(\Psi) d\Gamma \geq$$

$$\geq (f, v - \Psi); \quad \forall v, \Psi \in H^1(\Omega), \tag{2.94}$$

$$\Psi(t, z)\big|_{t=0} = \Psi_0(z). \tag{2.95}$$

Розв’яжемо варіаційну задачу (2.94), (2.95) на основі методів оптимізації із залученням функції Гамільтона. Отримаємо необхідні умови оптимізації. При цьому зауважимо, що в класичній теорії екстремальних задач, обмеження (власно умови) формулюються у вигляді рівностей або елементарних нерівностей [109, 110, 131]. Тому, відповідно [131] і, дотримуючись [3], приведемо задачу (2.94), (2.95) до формулювання з обмеженнями у вигляді рівностей та елементарних нерівностей. Для цього введемо до розгляду додаткову невідому функцію $\theta(\Psi, v)$, де $\Psi = \Psi(t, z)$ та $v = v(t, z)$ — визначено раніше, а $\theta[\Psi(t, z), v(t, z)] \in L^{\infty}(\Sigma)$ та по структурі відповідає алгебраїчній сумі функціоналів $\mathbf{j}(\cdot)$ (співвідношення (2.87) та (2.88)). Тоді простором визначення функції $\theta[\Psi(t, z), v(t, z)]$ слугує Θ_{Σ}, яке є банаховим простором з нормою

$$\left\| \theta[\Psi(t, z), v(t, z)] \right\|_{\Theta_{\Sigma}} = \left\| \theta[\Psi(t, z), v(t, z)] \right\|_{L^{\infty}(\Sigma)}.$$

Визначимо для $\theta(\Psi, v)$ простір припустимих функцій

$$\Theta_{\Sigma_{\text{доп}}} = \left\{ \theta[\Psi(t, z), v(t, z)] \in \Theta_{\Sigma} \Big|_{\theta(u, v) \geq D} \right\},$$

де D — певне задане додатне число.

Введемо умову

$$\{\theta[\Psi(t, z), v(t, z)], [v(t, z) - \Psi(t, z)]\} \geq 0 \ \forall v, \Psi \in K. \tag{2.96}$$

З урахуванням виконаних перетворень задачу (2.94), (2.95) приведемо до *тотожної*, але більш простої екстремальної задачі для обмежень у вигляді рівностей та елементарних нерівностей

$$\Psi(t, z) \in K : \left[m(z) \frac{\partial \Psi(t, z)}{\partial t}, v(t, z) - \Psi(t, z) \right] + a[\Psi(t, z), v(t, z) - \Psi(t, z)] +$$

$$+ \int_{\Gamma} \{\Phi[v(t, z)]\} d\Gamma - \int_{\Gamma} \{\Phi[\Psi(t, z)]\} d\Gamma -$$

$$-\{\theta[\Psi(t,z),v(t,z)],[v(t,z)-\Psi(t,z)]\}=[f,v(t,z)-\Psi(t,z)];\ \forall v,\Psi\in K\ , \quad (2.97)$$

$$\Psi(t,z)\big|_{t=0}=\Psi_0(z). \quad (2.98)$$

Для перетвореної задачі, в ході оптимізаційної процедури її розв’язування, вирази (2.96), (2.97) утворюють систему обмежень, які, відповідно вже можна розглядати як елементарну нерівність (вираз (2.97)) та рівність (вираз (2.98)).

Наявність в (2.97) інтегралів ускладнює розв’язання оптимізаційної задачі. Тому, далі, з урахуванням [3], перетворимо (2.97) наступним чином. Введемо допоміжні функції $\phi[v(t,z)]$, $\phi[\Psi(t,z)]$ у відповідності до виразів

$$\phi'_{z\in\Gamma}[\Psi(t,z)]=\Phi[\Psi(t,z)],\ \ \phi'_{z\in\Gamma}[v(t,z)]=\Phi[v(t,z)],$$

звідки

$$\phi[u(t,z)]=\int_{\Gamma}\{\Phi[\Psi(t,z)]\}\,d\Gamma\ ,\ \ \phi[v(t,z)]=\int_{\Gamma}\{\Phi[v(t,z)]\}\,d\Gamma\ .$$

Тоді (2.97) можна записати у вигляді

$$\Psi(t,z)\in K:\left[m(z)\frac{\partial\Psi(t,z)}{\partial t},v(t,z)-\Psi(t,z)\right]+a[\Psi(t,z),v(t,z)-\Psi(t,z)]+$$

$$+\phi[v(t,z)]-\phi[\Psi(t,z)]-$$

$$-\{\theta[\Psi(t,z),v(t,z)],[v(t,z)-\Psi(t,z)]\}=\{[f,v(t,z)-\Psi(t,z)],\{\theta[\Psi(t,z),v(t,z)],$$

$$[v(t,z)-\Psi(t,z)]\}\}\geq 0\ ;\ \forall v,\Psi\in K\ . \quad (2.99)$$

Необхідні та *достатні* умови оптимальності задачі (2.99), (2.98), (2.90) (або (2.91)) отримано в додатку В. Там само детально розглянуто модифікацію методу МФГ щодо розв’язування варіаційних нерівностей, які являють собою ММ процесів фільтрації у гетерогенних системах.

2.3.2. Алгоритмічні засоби реалізації дискретних ММ процесів фільтрації у гетерогенних системах

Покажемо застосування модифікованого методу МФГ та реалізуючого його алгоритму розв’язування задачі моделювання динаміки процесів фільтрації у гетерогенних системах (реалізація варіаційної задачі (2.99), (2.98), (2.89)).

Моделювання динаміки процесів фільтрації у гетерогенних системах в кінцевому випадку зводиться до варіаційної задачі виду (2.99), (2.98), розв'язання якої, в свою чергу, зводиться до оптимізаційної процедури мінімізації критерію якості (2.89).

У додатку В отримано *необхідні* та *достатні* умови оптимальності задачі виду (2.99), (2.98), (2.89). При цьому слід вказати на наступне. Покоординатний аналог (В.15) містить $(n+1)$ функцій $v_i(t, z_i)$, $(n+1)$ функцій $\theta_i(t, z_i)$ та $(n+1)$ функцій $p_i(t, z_i)$. Тоді, оскільки умов екстремальності, представлених рівняннями (В.16), всього $(n+1)$, а невідомих в них — $(3n+3)$, то систему (В.16) не може бути розв'язано однозначно. Для *однозначного розв'язування* (В.16) визначимо також наступні частинні похідні

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta_i(t, z_i)} = \tilde{p}_i(t, z_i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \tag{2.100}$$

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial p_i(t, z_i)} = \left[m(z_i) \frac{\partial \tilde{\Psi}_i(t, z_i)}{\partial t}, \tilde{v}_i(t, z_i) - \tilde{\Psi}_i(t, z_i) \right], \quad i = 0, 1, 2, \dots, n. \tag{2.101}$$

В такому випадку, в системі (В.16), (2.100), (2.101) число рівнянь уже співпадає з числом невідомих.

Тоді процедура розв'язування варіаційної задачі (2.99), (2.98), (2.89) на основі модифікованого методу МФГ виглядає наступним чином:

1. Записується рівняння динаміки (В.2) с урахуванням додаткової координати $\sigma(t, z)$.

2. Складається допоміжна функція $\tilde{H}$ (функція Гамільтона) у відповідності до виразу (В.15).

3. Визначається пробна функція $v^*(t, z)$, яка забезпечує максимум функції $\tilde{H}$ у відповідності до виразу (В.16). Для до визначення незалежних невідомих змінних $\theta(t, z)$ та $p(t, z)$ система (В.16) доповнюється рівняннями (2.100) та (2.101).

4. Шукана функція $\Psi = \Psi(t, z)$ буде дорівнювати пробній функції $v = v^*(t, z)$, яка забезпечує максимальне значення функції $\widetilde{H}$.

В додатку Г розроблено дискретний аналог неперервної ММ виду (2.99), (2.98), який представлено у векторно-матричній формй (Г.8) — (Г.10).

Алгоритм машинного розв'язування задачі (Г.8) — (Г.10) полягає в наступному.

1. ***Для кроку за часом*** $\mu = 1$.

1.1. Завдання вихідних значень: $\Psi^{0}_{z_1, z_2}$, $v^{\hat{\mu}}_{z_1, z_2} \equiv u^{\hat{\mu}}_{z_1, z_2}$, $m_{z_1, z_2}(\hat{\mu})$, $k_{z_1, z_2}(\hat{\mu})$, Δt, $\hat{\mu} = 0 + (\Delta t/2)$, Δz_1, Δz_2, $z_1 = \overline{1, Z_1}$, $z_2 = \overline{1, Z_2}$.

1.2. Визначення значень коефіцієнтів $B^{\hat{\mu}}_{z_1, z_2}$, $C^{\hat{\mu}}_{z_1, z_2}$, $D^{\hat{\mu}}_{z_1, z_2}$, $E^{\hat{\mu}}_{z_1, z_2}$, $F^{\hat{\mu}}_{z_1, z_2}$; $\hat{\mu} = 0 + (\Delta t/2)$ в рівняннях (Г.7).

1.3. Формування розширеної дискретної ММ динаміки з урахуванням додаткової координати $\sigma^{\hat{\mu}}_{z_1, z_2}$, $\hat{\mu} = 0 + (\Delta t/2)$ і складання функції Гамільтона $H^{\hat{\mu}}_{z_1, z_2}$, $\hat{\mu} = 0 + (\Delta t/2)$ у відповідності до виразу (В.14).

1.4. Запис (в дискретній формі) умови (В.16) максимуму функції Гамільтона $H^{\hat{\mu}}_{z_1, z_2}$, $\hat{\mu} = 0 + (\Delta t/2)$.

1.5. Доповнення дискретної форми умови (В.16) до системи рівняннями (2.100), (2.101) (в дискретній формі).

1.6. Визначення пробної функції $v^{\hat{\mu}}_{z_1, z_2}$, $\hat{\mu} = 0 + (\Delta t/2)$, що забезпечує максимум функції Гамільтона $H^{\hat{\mu}}_{z_1, z_2}$, $\hat{\mu} = 0 + (\Delta t/2)$, шляхом розв'язування системи дискретних аналогів рівняння (В.16), (2.100), (2.101).

1.7. Визначення поля значень шуканої функції стану $\Psi^{1}_{z_1, z_2}$ для кроку за часом $\mu = 1$ шляхом розв'язування дискретних рівнянь динаміки (Г.7) — (Г.9).

1.8. Формування та виведення підсумкового поля для функції стану $\Psi^{1}_{z_1, z_2}$ для кроку за часом $\mu = 1$.

2. ***Для кроку за часом*** $\mu \neq 1$.

2.1. Визначення значень коефіцієнтів $B_{z_1,z_2}^{\hat{\mu}}$, $C_{z_1,z_2}^{\hat{\mu}}$, $D_{z_1,z_2}^{\hat{\mu}}$, $E_{z_1,z_2}^{\hat{\mu}}$, $F_{z_1,z_2}^{\hat{\mu}}$; $\hat{\mu} = N + (\Delta t/2)$, $N = 1, 2, \ldots$ у рівняннях (Г.7).

2.2. Формування розширеної дискретної ММ динаміки урахуванням додаткової координати $\sigma_{z_1,z_2}^{\hat{\mu}}$, $\hat{\mu} = 0 + (\Delta t/2)$ та складання функції Гамільтона $H_{z_1,z_2}^{\hat{\mu}}$, $\hat{\mu} = N + (\Delta t/2)$, $N = 1, 2, \ldots$ у відповідності до дискретної форми у виразі (В.14).

2.3. Запис (в дискретній формі) умови (В.16) максимуму функції Гамільтона $H_{z_1,z_2}^{\hat{\mu}}$, $\hat{\mu} = N + (\Delta t/2)$, $N = 1, 2, \ldots$.

2.4. Доповнення дискретної форми умови (В.16) до системи рівняннями (2.100), (2.101) (в дискретній формі).

2.5. Визначення пробної функції $v_{z_1,z_2}^{\hat{\mu}}$, $\hat{\mu} = 0 + (\Delta t/2)$, що забезпечує максимум функції Гамільтона $H_{z_1,z_2}^{\hat{\mu}}$, $\hat{\mu} = N + (\Delta t/2)$, $N = 1, 2, \ldots$, шляхом розв'язування системи дискретних аналогів рівнянь (В.16), (2.100), (2.101).

2.6. Визначення поля значень шуканої функції стану Ψ_{z_1,z_2}^{1} для кроку за часом $\mu \neq 1$ шляхом розв'язування дискретних рівнянь динаміки (Г.7) — (Г.9).

2.7. Формування та виведення підсумкового поля для функції стану $\Psi_{z_1,z_2}^{\hat{\mu}}$ для кроку за часом $\hat{\mu} = N$, $N = 1, 2, \ldots$.

3. ***Перевірка умови*** $\hat{\mu}\big|_N = M$. Якщо $\hat{\mu}\big|_N < M$, то $\hat{\mu}\big|_N = \hat{\mu}\big|_N + 1$ і перехід до п. 2. Якщо $\hat{\mu}\big|_N = M$, тоді перехід до п. 4.

4. ***Закінчення алгоритму***. Питання чисельного дослідження дискретних ММ процесів фільтрації у гетерогенних системах розглянуто у розділі 4.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2

1. Виконано систематизацію та класифікацію процесів фільтрації у гетерогенних системах (на прикладах реології газорідинних сумішей) в основу чого покладено особливості якісного перебігу фізичних явищ досліджуваних процесів.

На підставі запропонованих систематизації та класифікації обґрунтовано підхід до математичної формалізації динаміки процесів фільтрації газорідинних сумішей, який поширено на загальну сукупність процесів фільтрації у гетерогенних системах.

2. Розроблено, у відповідності до запропонованої класифікації, ММ процесів фільтрації з притаманною гетерогенною поведінкою у вигляді варіаційних нерівностей у частинних похідних, які дозволяють врахувати особливості перебігу фізичних явищ (питому вагу газової фази у суміші, здатність розчинності газової фази у рідинній фазі суміші, умови утворення та розвитку газової фази в суміші, вплив граничного градієнта на реологію суміші), що забезпечує адекватний опис досліджуваних процесів. Розроблені ММ являють собою модельну підтримку систем моделювання при розв’язанні задач прикладної реології.

Для запропонованих ММ виконано якісне дослідження з метою строгого доведення існування та єдиності розв’язків відповідних варіаційних нерівностей. Виконано узагальнення даних ММ, що дає змогу на уніфікованій основі розробити метод та інструментальні засоби їх реалізації.

3. Набув подальшого розвитку (для випадку процесів фільтрації у гетерогенних системах) метод обчислювальної реалізації ММ, які представлено у вигляді варіаційних нерівностей у частинних похідних. Метод являє собою модифікацію методу, в основу якого покладено оптимізаційну процедуру максимуму функції Гамільтона (метод МФГ).

Розроблено дискретні ММ процесів фільтрації у гетерогенних системах, а також алгоритмічні засоби реалізації цих моделей.

3. МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ТА ЗАСОБИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ФІЛЬТРАЦІЇ У ФРАКТАЛЬНО-ГЕТЕРОГЕННИХ ПЛАСТОВИХ СИСТЕМАХ

Останнім часом з'явилася низка робіт (наприклад, [134]) в яких досліджуються питання раніше не вивченої проблеми впливу процесу утворення фрактальних структур на фільтрацію внутрішньопластових рідин. Цей вплив може здійснюватися за рахунок *фрактальної структури* пористого середовища [64] або самої системи рідин, що фільтруються та мають *неоднорідний* (*гетерогенний*) *характер* [67]. В роботі [64] стверджується, що перехід від лінійного закону фільтрації до нелінійного в значній мірі залежить від розподілу пор за розмірами пористого середовища (або від *фрактальності*, тобто, іншими словами: *самоподібності* структури пористого середовища, що зберігається у випадку зміни геометричних розмірів пор середовища). Разом з тим в роботі [67] показано, що гетерогенні рідини, зокрема, емульсії та системи багатофазних рідин, які не змішуються, мають динамічну *фрактальну* структуру, яка визначається взаємодією між частинками дисперсної фази.

Враховуючи зазначене вище, для практики важливим є визначення фрактальних характеристик ґрунтів пористого середовища та їх вплив на фільтрацію пластових рідин (як прояву *гетерогенних систем* [47]). Відомою є низка робіт з експериментального визначення *фрактальних розмірностей* пористих середовищ. Зокрема, в роботі [65] методом скануючої електронної мікроскопії визначено просторову фрактальну розмірність реального зразка пористого середовища, в [136] вперше запропоновано метод визначення фрактальної розмірності за експериментальною ізотермою адсорбції газу, який (метод) віднайшов свій розвиток в роботах [68, 137]. В роботах [47, 138] запропоновано непрямі способи визначення фрактальних характеристик пласта за кривими відновлення тиску [47] та реакції пластової системи на миттєву зміну тиску [138].

Одначе, у наведених роботах фрактальні властивості пористого середовища та їх вплив на фільтраційні процеси внутрішньопластових рідин (*гетерогенних систем*) досліджувалися на основі натурних експериментів. Це ускладнено в практичній реалізації, оскільки вимагає проведення експериментів в умовах реальної пластової системи (або її фізичного відтворення при лабораторних дослідженнях), спеціального обладнання та суттєвих ресурсних витрат.

Розглядається перспективним, з точки зору часових та матеріальних витрат, застосування засобів математичного моделювання для дослідження фрактальних геологічних структур та реології (фільтрації рідин у пористому середовищі як прояву *гетерогенних систем*) фрактально-неоднорідних (що те саме: *фрактально-гетерогенних*) пластових систем. Важливим етапом проведення математичного моделювання для зазначених задач є формування адекватної математичної моделі (ММ) досліджуваних процесів. В деяких роботах, наприклад, [62, 63, 66] започатковано спробу формалізації реології в пористих середовищах у випадку фрактальної структури останньої, одначе дані моделі отримано для ідеального лотка Хеле-Шоу та мають виключно теоретичне значення. При цьому слід зазначити, що на поточний момент в літературі не виявлено ММ, які описують фільтраційні (частинний випадок реологічних) процеси для рідких гетерогенних (в тому числі багатофазних) систем, і які забезпечують розв’язання практичних задач в умовах реальних фрактально-неоднорідних пластових структур.

Важливим фактором фізичної картини фільтрації багатофазних рідин, що не змішуються, зокрема, *гетерогенних систем* у *фрактально-неоднорідних* середовищах, є те [67], що при зменшенні взаємодії між частинками, внаслідок зниження концентрації дисперсної фази, фрактальна структура системи, яка фільтрується, зникає. Інакше кажучи, можна стверджувати, що, у даному випадку, процес реології носить *виражений спрямований характер*.

Як показано у ряді робіт, наприклад [3], адекватним математичним описом фільтраційних процесів в пластових пористих середовищах з вираженою спрямованістю розвитку процесу є варіаційні нерівності. Виходячи з цього, у подальшому, будемо розробляти ММ процесу реології у фрактально-неоднорідних пористих середовищах в класі *варіаційних нерівностей у частинних похідних*.

3.1. Математична модель процесу фільтрації у фрактально-гетерогенних пластових системах

Якісний опис процесу реології багатокомпонентної (гетерогенної) системи у пористому середовищі. Для багатофазних рідин (рідких систем), що фільтруються, важливим аспектом при моделюванні динаміки є визначення *фронту поділу* між окремими компонентами. Дана задача може мати також самостійне прикладне значення, наприклад, коли досліджується процес витискання однієї рідини іншою. Припущення щодо «гладкості» фронту поділу компонент в багатофазній (а також у *гетерогенній*) системі можливо лише у випадку «близькості» фізико-хімічних властивостей цих компонент (або дрібнодісперсності та низької концентрації гетерогенної системи). В іншому випадку «гладкість» фронту порушується, а потік, що фільтрується, набуває *фрактально-неоднорідну* структуру зі «складним» фронтом поділу фаз. Ще більш складну картину фільтрації (реології) набуває випадок, коли з границею Γ області моделювання Ω контактують різні компоненти багатофазної (суть — гетерогенної) системи.

В пластовій гідро-газодинаміці умовою, яка визначає границю поділу двох (для простоти подальшого розгляду) компонент багатофазного або гетерогенного потоку, що фільтруються, може слугувати «стрибок» *насиченості* S в функції Баклея-Леверета [4, 5, 23]

$$J(S) = \frac{k_1^0(S_1)}{\mu_1\, k_1^0(S_1) + \mu_2\, k_2^0(S_2)}, \tag{3.1}$$

де $k_1^0(S_1)$ та $k_2^0(S_2)$ — відносні фазові проникності компонент, які фільтруються; μ_1 та μ_2 — їх в'язкості; S_1 та S_2 — насиченості пористого простору компонентами, що фільтруються, відповідно.

Фізично «стрибок» насиченості зумовлено наявністю у однієї з компонент багатофазної системи напруження зсуву τ, яке перевищує граничне значення ($\tau > \tau^*$). В літературі така компонента набула назву «такої, що витискає» [1 — 3, 36]. Експериментально встановлено [36], що фронт поділу компонент багатофазної системи, яка фільтрується, просувається *стало* (тобто *фрактально-неоднорідна* структура процесу реології відсутня), якщо рухомість компоненти, яка витискає не перевищує рухомість компоненти, яка витискається, тобто

$$\frac{k_1(S_1)}{\mu_1} \le \frac{k_2(S_2)}{\mu_2}. \qquad (3.2)$$

Даний випадок фільтрації (реології) двокомпонентної системи (тобто з «гладкою» границею поділу) ілюструє рис. 3.1а, на якому представлено динаміку процесу фільтрації водо-нафтової суміші (вода — компонента, яка витискає, і вона займає світлу область; нафта — компонента, яка витискається, і вона займає темну область) між двома експлуатаційними свердловинами (їх позначено на малюнку чорними точками).

На практиці більш зручно користуватися виразом, отриманим з (3.2) діленням останнього на усереднену швидкість фільтрації ϖ

$$\frac{\partial P(t,z)}{\partial \eta} > 0, \quad \frac{\partial P_c(S)}{\partial \eta} > 0, \qquad (3.3)$$

де $P(t,z)$ — задає внутрішньопластовий (усереднений) тиск для компонент багатофазної системи, що фільтрується; $P_c(S)$ — капілярний тиск, зумовлений наявністю відмінних швидкостей фільтрації для компонент у багатокомпонентній системі; η — нормаль до градієнту внутрішньопластового тиску $P(t,z)$ на границі Γ.

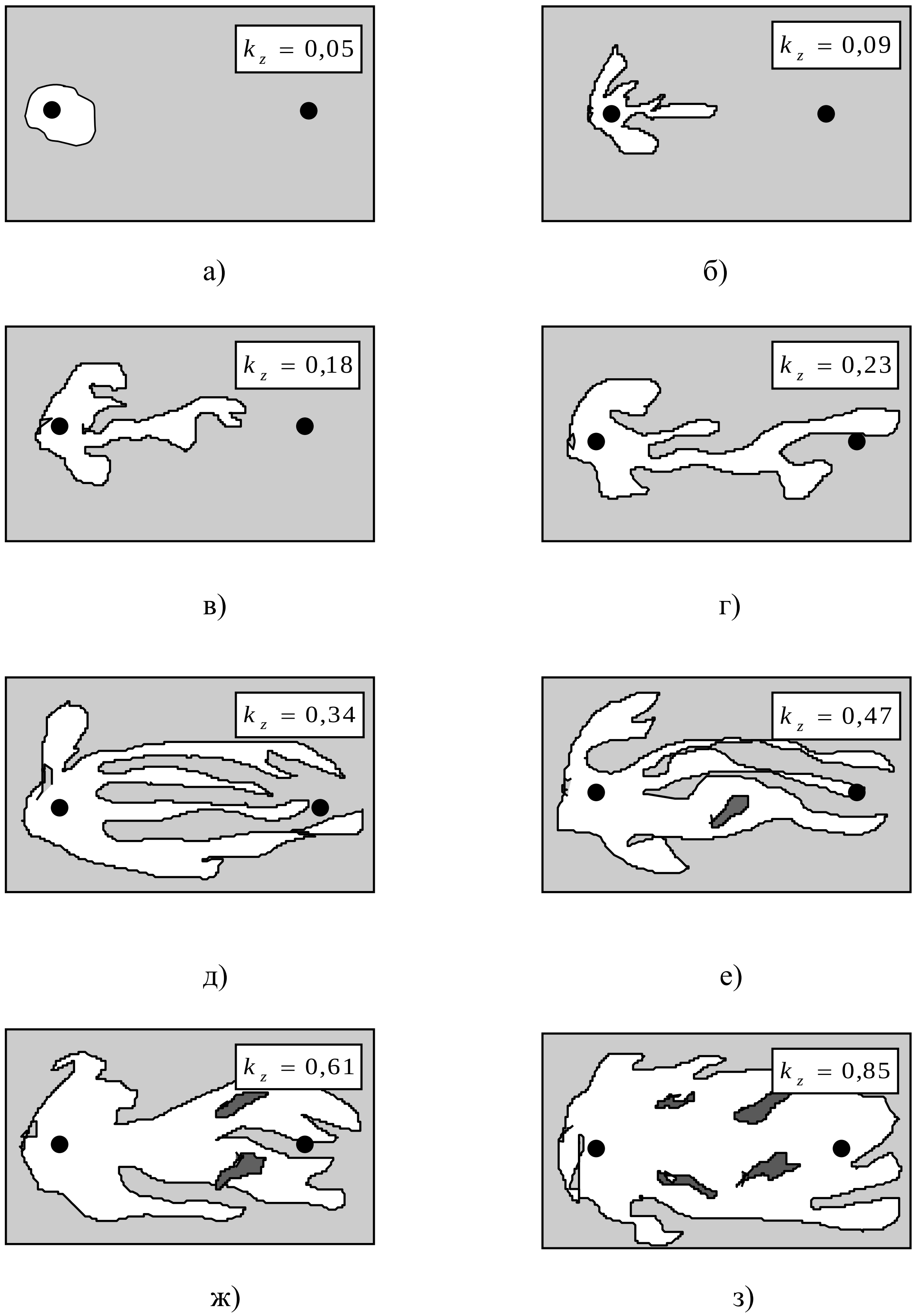


Рисунок 3.1 — Картина фільтрації (реології) двокомпонентної системи на прикладі водо-нафтової суміші при різних значеннях пропускної здатності k_z пористого середовища

В іншому випадку швидкість фільтрації компоненти, яка витискається ϖ_2, вище швидкості зміни насиченості компоненти, яка витискає, що спричиняє утворення *фрактально-гетерогенної* структури процесу фільтрації (реології), тобто суттєвому порушенню «гладкості» фронту поділу (рис. 3.1б, 3.1в). При цьому фізична картина фільтраційного (реологічного) процесу характеризується появою «пальців» компоненти, яка витискає (рис. 3.1г, 3.1д). В граничному випадку, в потоці, що фільтрується, можливо, навіть, утворення «зон застою» [3, 36], які являють собою ділянки компоненти, яка витискається, з нульовою швидкістю фільтрації $\varpi_2 = 0$ (рис. 3.1е, 3.1ж, 3.1з). Іншими словами: компонента, яка витискається, «відступає» повільніше, ніж просувається компонента, яка витискає, що, фізично, й визначає механізм утворення *фрактально-гетерогенної* структури і, як наслідок, «зон застою».

Уявімо, що в момент часу $t = 0$ поверхня фронту поділу являє собою площину $F(z_i) = \Xi_0,\ i = 1,2$. Порушення сталості фронту поділу врахуємо у вигляді нестаціонарних збурень, які порушують постійність насиченостей компонент S_j багатофазної системи ($j = 2$ — для двофазного випадку) в областях розповсюдження фронту та спотворюючи його «гладкість», що відобразиться наступним чином

$$F(z_i, t) = \Xi_0(t);\ i = 1,2\,, \tag{3.4}$$

де z_i — відповідають незалежним просторовим координатам у незбуреній площині фронту поділу.

Виражена спрямованість розвитку процесу фільтрації (реології), що розглядається, і про яку було зазначено вище, свідчить про його (процесу) відхилення від лінійного закону Дарсі [1, 2, 36] (тобто щодо лінійної залежності швидкості фільтрації ϖ від градієнту внутрішньо пластового тиску $\mathrm{grad}\,(P)$) та про можливу наявність граничного градієнта G, який зумовлює відсутність просування фронту поділу за ненульового значення внутрішньопластового тиску (тобто $\varpi = 0$ при $P(t, z) \neq 0;\ \mathrm{grad}\,(P) \leq G$).

Формалізовано дане припущення представимо наступним чином (для двокомпонентного потоку, $j = 1, 2$)

$$\varpi_j = -\frac{k_j\left(S_j\right)}{\mu_j}\left[\operatorname{grad}\left(P_j\right) - \frac{G_j}{\left|\operatorname{grad}\left(P_j\right)\right|}\right]; \ \left|\operatorname{grad}\left(P_j\right)\right| > G_j,$$

$$\varpi_j = 0; \ \left|\operatorname{grad}\left(P_j\right)\right| \le G_j; \quad j = 1, 2. \tag{3.5}$$

Рівняння динаміки виду (3.5) доповнимо рівняннями нерозривності (випадок двох компонент у багатофазній системі)

$$\operatorname{div}\left(\varpi_j\right) - (-1)^j m \frac{\partial S_j}{\partial t} = 0; \quad j = 1, 2. \tag{3.6}$$

Граничні умови (ГУ) на збуреній поверхні фронту поділу компонент (3.4), які виражають рівність тисків перед та за фронтом поділу, а також витрат

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \eta} = m\,\overline{\varpi}\left(S_1^h - S_1^f\right); \ \frac{\partial Q_2}{\partial \eta} = m\,\overline{\varpi}\left(S_2^h - S_2^f\right)$$

визначено на незбуреній поверхні фронту витискання Ξ_0.

Очевидно, що для «гладкості» границі поділу необхідно обмеженість збурень на поверхні Ξ_0. Тоді, для визначення збурень швидкостей, тисків та насиченостей, отримаємо наступні вирази (в наведених нижче виразах збурення відповідних величин позначено знаком тильда, а незбурені величини позначено індексом 0)

$$\varpi_j = -\frac{k_j\left(S_j\right)}{\mu_j} J_0\left(S_j\right)\left[\operatorname{grad}\left(\tilde{P}_j\right) - \frac{G_j}{\left|\operatorname{grad}\left(\tilde{P}_j\right)\right|}\right]; \ \left|\operatorname{grad}\left(\tilde{P}_j\right)\right| > G_j,$$

$$\varpi_j = 0; \quad \left|\operatorname{grad}\left(\tilde{P}_j\right)\right| \le G_j; \quad j = 1, 2, \tag{3.7}$$

з ГУ, які враховують обмежені збурення (або їх відсутність) на поверхні фронту $F\left(z_i\right) = \Xi_0$; $i = 1, 2$

$$\frac{\partial \tilde{P}\left(t, z_i\right)}{\partial \eta} > 0, \quad \frac{\partial \tilde{P}_c(S)}{\partial \eta} > 0; \ i = 1, 2, \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial \tilde{Q}_j}{\partial \eta} = m\,\overline{\varpi}\left(S_j^h - S_j^f\right); \quad j = 1,2\,. \tag{3.9}$$

Таким чином, формулювання задачі про сталість фронту поділу компонент багатофазної системи фактично зводиться до визначення збурень насиченості («стрибку» насиченості) із системи (3.7) з ГУ (3.8), (3.9).

Одначе виникнення *фрактально-гетерогенної* структури процесу фільтрації (реології) свідчить про значні збурення фронту поділу компонент багатофазної системи, що, формалізовано, повинно бути відбито в ГУ, оскільки останні визначають геометрію фронту поділу. У відповідності до однієї з властивостей, яка складає основу визначення фрактальних систем, фрактальна структура являє собою систему з *дробовою розмірністю* (що іменується в літературі, наприклад [62, 63, 67, 134], *фрактальною розмірністю*), що геометрично поєднує *фрактальні кластери* (або *агрегати*). При цьому фрактальний кластер являє собою сукупність достатньо великого числа елементів, які всередині даної сукупності зберігають свою індивідуальність [62, 63, 67]. З точки зору фільтрації (реології) багатокомпонентних систем, під фрактальним кластером будемо розуміти появу сукупності «пальців» компоненти, яка витискає, на фронті поділу (рис. 3.1г, 3.1д).

Якщо виконати апроксимацію фронту поділу в межах одного «пальця» ломаною лінією, то її довжину можна представити в наступному вигляді

$$L = a\left(R/a\right)^D, \tag{3.10}$$

де L — лінійний розмір «пальця» компоненти, яка витискає (по прямій); a — розмір ланки ломаної лінії (усереднений розмір «зерна» пористого простору); R — розмір фрактального кластера (радіус сфери, яка охоплює «палець»); D — фрактальна розмірність, що забезпечує для кластера певну область масштабів, в якій виконується апроксимація виду (3.10).

Розв'язуючи (3.10) відносно фрактальної розмірності D, отримаємо

$$D = \left[\ln(L) - \ln(a)\right]/\left[\ln(R) - \ln(a)\right]. \tag{3.11}$$

Враховуючи реальні (усереднені) геологічні значення параметрів [6, 8], що входять до (3.10), і, підставляючи їх в (3.11), можна оцінити величину фрактальної розмірності для пористих середовищ, в яких здійснюється фільтрація (реологія) багатокомпонентних (або *гетерогенних*) систем

$$D = [\ln(100) - \ln(0{,}1)]/[\ln(50) - \ln(0{,}1)] =$$

$$= [4{,}605 - (-2{,}302)]/[3{,}912 - (-2{,}302)] = 1{,}112 \ .$$

Далі, маючи реологічні фрактальні характеристики багатокомпонентної (або *гетерогенної*) системи при значних збуреннях фронту поділу компонент, можна сформувати *математичну модель* фрактально-неоднорідної системи.

Формалізація задачі реології фрактально-неоднорідної (гетерогенної) системи у вигляді варіаційної нерівності. Сформулюємо ММ процесу фільтрації (реології) *фрактально-гетерогенної* системи, яка характеризується порушенням «гладкості» фронту поділу компонент [188]. Запишемо для плаского випадку ($i = 2$) рівняння динаміки (3.7) відповідно для компоненти, яка витискається ($j = 1$), і для компоненти, яка витискає ($j = 2$) з урахуванням «стрибка» насиченості в функції Баклея-Леверета та параметра шпаруватості m середовища, в якому реалізується фільтраційний (реологічний) процес

$$(-1)^j \frac{m\,\partial S_j}{\partial t} - \frac{k_j(S_j)}{\mu_j} J(S_j) \left\{ \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial z_i} \left[\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z_i} - \frac{d\tilde{P}_c}{dS_j} - G_j \left(\left| \frac{\partial \tilde{P}}{\partial z_i} \right| \right)^{-1} \right] \right\} = \frac{1}{h} Q_j , \qquad (3.12)$$

де h — товщина реологічного пласта (в літературі використовується термін «потужність пласта», наприклад, [1, 2, 7]).

Початкові та граничні умови приймуть вигляд

$$S_j(0,z)\Big|_{z\in\Omega} = S_{j_0}(z); \quad \tilde{P}(0,z)\Big|_{z\in\Omega} = \tilde{P}_0(z); \quad j = 1,2 , \qquad (3.13)$$

$$\left.\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \eta}\right|_{L\in\Gamma} > 0 ; \quad \left.\frac{\partial S_j}{\partial \eta}\right|_{L\in\Gamma} > 0 ; \quad \left.\frac{\partial P_c(S_j)}{\partial \eta}\right|_{L\in\Gamma} > 0 , \quad j = 1,2 . \qquad (3.14)$$

Приведемо ММ процесу реології *фрактально-гетерогенної* системи до варіаційної форми (тобто, варіаційної нерівності) [139, 140]. З цією метою введемо до розгляду пробні функції v_j, за фізичною природою аналогічними функціям насиченості $S_j(t,z)$, $j=1,2$ і визначених на множині K: $\forall v \in K$, $K = \{v \,|\, v \geq 0$ майже скрізь в $\Omega\}$. Скалярно помножимо рівняння системи (3.12) відповідно на $(v - S_1)$ та $(v - S_2)$. Далі, застосувавши, до перетворених таким чином рівнянь (3.12) функцію Гріна, отримаємо

$$\left[(-1)^j \frac{m\,\partial S_j}{\partial t}, \left(v - S_j\right)\right] -$$

$$-\int_\Omega \frac{k_j\left(S_j\right)}{\mu_j} J\left(S_j\right)\left\{\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial z_i}\left[\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z_i} - \frac{d\tilde{P}_c}{dS_j}\frac{\partial S_j}{\partial z_i} - G_j\left(\left|\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z_i}\right|\right)^{-1}\right]\frac{\partial\left(v - S_j\right)}{\partial z_i}\right\} dz_i =$$

$$= \frac{1}{h} Q_j, \left(v - S_j\right) + \int_\Gamma \left[\frac{\partial S_j}{\partial \eta}, \left(v - S_j\right)\right] d\Gamma\,, \quad \forall v, S_j \in K\,, \quad j = 1, 2\,. \qquad (3.15)$$

Визначимо білінійну форму

$$a\left[\tilde{P}, \left(v - S_j\right)\right] = \int_\Omega \left[\frac{k_j\left(S_j\right)}{\mu_j} J\left(S_j\right)\sum_{i=1}^{2} \frac{d\tilde{P}_c}{dS_j}\frac{\partial S_j}{\partial z_i}\frac{\partial\left(v - S_j\right)}{\partial z_i}\right] dz \qquad (3.16)$$

і функціонали

$$\mathbf{j}(v) = \int_\Omega \left[\frac{k_j\left(v_j\right)}{\mu_j} J\left(v_j\right)\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial z_i^2} - G_j\left(\left|\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z_i}\right|\right)^{-1}\right] dz\,, \qquad (3.17)$$

$$\mathbf{j}(S) = \int_\Omega \left[\frac{k_j\left(S_j\right)}{\mu_j} J\left(S_j\right)\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial z_i^2} - G_j\left(\left|\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z_i}\right|\right)^{-1}\right] dz\,. \qquad (3.18)$$

Тоді, в результаті очевидних перетворень, приходимо до наступної системи варіаційних нерівностей у частинних похідних

$$S_j \in K: \left[(-1)^j \frac{m\,\partial S_j}{\partial t}, \left(v - S_j\right)\right] - a\left[\tilde{P}, \left(v - S_j\right)\right] - \mathbf{j}\left(v_j\right) + \mathbf{j}\left(S_j\right) \geq \left[\frac{1}{h} Q_j, \left(v - S_j\right)\right],$$

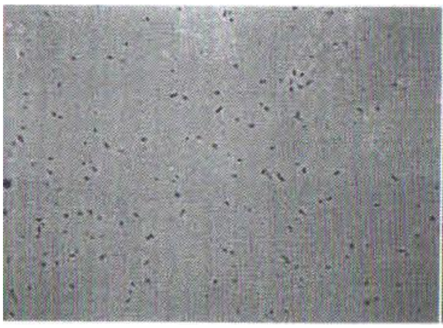
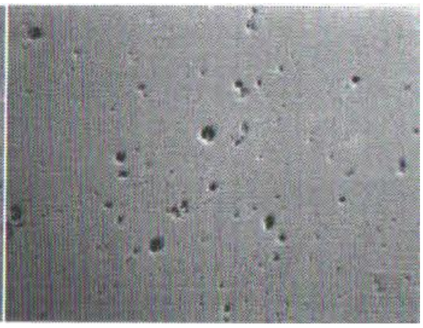
$$\forall v_j, S_j \in K\,, \quad j = 1, 2\,. \qquad (3.19)$$

Отримана система варіаційних нерівностей вигляду (3.19) доповнюється початковими (3.13) та граничними (3.14) умовами.

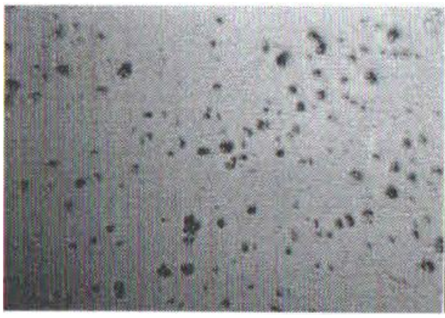
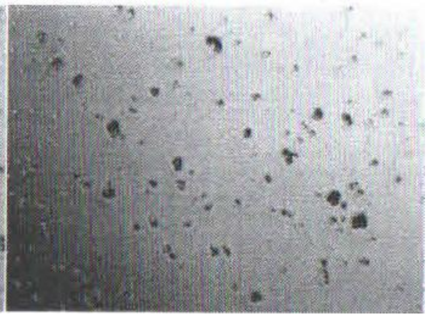
3.2. Математична модель процесу фільтрації у фрактально-гетерогенних системах з урахуванням взаємодії часток дисперсної фази

Для дисперсних систем з реологічними властивостями, які залежать від часу, наприклад, *тиксотропних* [141, 142], нелінійними ефектами, зокрема, коливанням реологічних характеристик, яке пов'язано із взаємодією структурних елементів [143]. Взаємодія часток дисперсної фази у неньютонівських системах в силу відносно невеликого розміру часток дисперсної фази (≈ 10 мкм [47]) не спричиняє відчутної часової зміни фільтраційних (реологічних) характеристик, одначе відбивається на їх *стаціонарній реології*. Пояснення реологічних проявів в'язких неньютонівських систем можливо на основі визначення оптичних характеристик потоку [144, 145]. При цьому прозорість системи зростає за умови утворення агрегатів (*фракталів*) часток дисперсної фази, а за умови їх руйнування — зменшується [144]. Таким чином, в описаних дослідженнях, по зміні прозорості робилися висновки щодо динаміки взаємодії часток. Звісно, що подібного роду дослідження *фрактально-гетерогенних* систем потребують проведення складних натурних експериментів, причому, з урахуванням реального часу, який, в силу інерційних властивостей середовища реології (наприклад, часу стабілізації дисперсної фази), може бути значним.

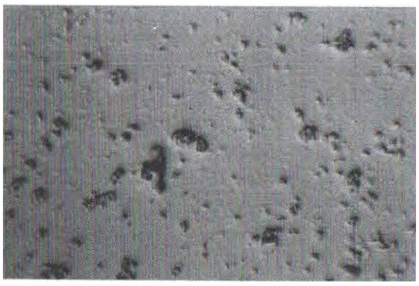
Відомі також натурні експериментальні дослідження з визначення однорідності розподілу часток дисперсної фази [67]. В ході експериментів по мікрофотографіям (як приклад, наведено на рис. 3.2) будувалися залежності числа часток, які розташовуються в довільно обраному колі, від його радіусу r, тобто $f = n(r)$ для різних концентрацій активної маси в розчині. На основі побудованих залежностей (їх сімейства, або вибірки) визначалася *фрактальна розмірність* геометричної структури системи. На рис. 3.3 показано залежність фрактальної розмірності D від концентрації полімеру.

а) $C = 0{,}05$ % б) $C = 1{,}0$ %

в) $C = 2{,}0$ % г) $C = 3{,}0$ %



д) $C = 5{,}5$ %

Рисунок 3.2 — Мікрофотографії водного розчину гідролізованого поліакрілонітріла (ПАН) при різній концентрації C активної маси

D

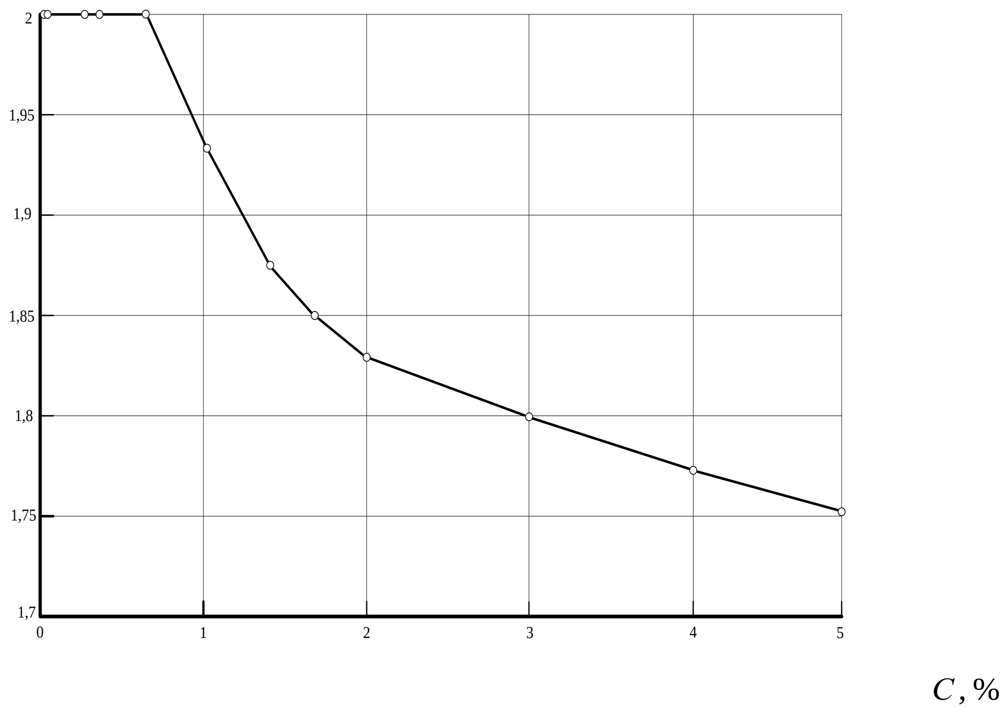


Рисунок 3.3 — Залежність фрактальної розмірності d від концентрації C полімеру

Досліди показують, що при низьких концентраціях ($C \leq 1\%$) геометрична структура системи однорідна і фрактальна розмірність відповідає евклідовій розмірності поверхні. Подальше зростання концентрації спричиняє ($C > 1\%$) зниження фрактальної розмірності неоднорідностей.

Викладене вище дозволило запропонувати [47, 67] наступну *кінематичну модель* процесу, який спостерігався. З підвищенням швидкості зсуву число елементарних включень зростає за рахунок руйнування асоціатів. Зі збільшенням числа елементарних включень підсилюється взаємодія між ними та уявна в'язкість фрактально-гетерогенної системи збільшується.

Процеси, що перебігають в концентрованих дисперсних системах, в основному, мають динамічний характер. Їх теоретичне дослідження з урахуванням ефектів *коагуляції* [146 — 147], навіть для найпростіших випадків, являє значні математичні складності [149, 150].

В роботах [143, 151 — 153] на основі *кінетичного* підходу .досліджено тиксотропні процеси в складних системах та показано, що в рамках цього підходу можна передбачити (спрогнозувати) реологічні властивості дисперсії. Одначе, в цих дослідженнях не бралися до уваги вплив взаємодії часток дисперсної фази на еволюцію реологічних характеристик дисперсії та динаміка руху дисперсної фази.

Запропонуємо ММ процесу фільтрації у фрактально-гетерогенних системах, яка буде враховувати взаємодію кожного виду часток дисперсної фази та динаміку руху дисперсійного середовища.

Нехай C_1 та C_2 відповідно концентрації елементарних включень і асоціантів. В якості «елементарних включень» та «асоціантів» будемо розуміти прийняту в літературі [47] термінологію, яка, в першому випадку, визначає частки, які не руйнуються за будь-яких обставин, а в другому випадку — крупні частки, які утворюються в результаті агрегації (суть за рахунок властивості *фрактальності*) «елементарних включень». Скористаємося рівнянням еволюції дисперсної фази, представленому в роботі [141]

$$\frac{dC_1}{dt} = (\alpha_2\gamma - \beta_1)C_2 - \alpha_1\gamma C_1(1-\alpha_1 C_1) - (\beta_1+\beta_2)C_1 + \beta_1 C_1,$$

$$\frac{dC_2}{dt} = -\alpha_2 C_2\gamma(1-\alpha_2 C_2) + \beta_2 C_2, \qquad (3.20)$$

$$C_1(0) + C_2(0) \le C = \mathrm{const}\ ,$$

де α_1 та α_2 — невід'ємні числа, які характеризують інтенсивність руйнування елементарних включень та асоціантів; β_1 та β_2 — невід'ємні числа, які характеризують інтенсивність відновлення концентрації часток обох видів, відповідно; γ — швидкість зсуву часток у фрактально-гетерогенній системі.

За відсутності руху фільтраційного потоку через границю Γ просторової області Ω (що не звужує загальності міркувань, а лише спрощує математичні викладки) варіаційні нерівності (3.19), що визначає динаміку процесу фільтрації приймуть вигляд наступної системи рівнянь

$$(-1)^j \frac{m\,\partial S_j}{\partial t} = \frac{k_j(S_j)}{\mu_j} J(S_j)\left[\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2} + \frac{dP_c}{dS_j}\right] dz\ , \quad j = 1, 2\ . \qquad (3.20)$$

Для наближеної оцінки впливу динаміки руху самої рідини на фільтрацію фрактально-гетерогенної системи приймемо, що швидкість зсуву є величина постійна, тобто $\gamma = -(\partial P/\partial z) = \text{const}$. Тоді можна записати, що

$$\Delta P \cong \gamma\ . \qquad (3.21)$$

З системи (3.20) з урахуванням припущення (3.21) маємо

$$(-1)^j \frac{m\,\partial S_j}{\partial t} = \frac{k_j(S_j)}{\mu_j} J(S_j)\gamma^2, \quad j = 1, 2\ . \qquad (3.22)$$

В’язкість фрактально-гетерогенної системи з плином часу змінюється і її можна обчислити за формулою [138]

$$\mu_j = \mu_{j_0} + \mu_{j_1} \frac{C_2}{C}; \quad j = 1, 2\ , \qquad (3.23)$$

де μ_{j_0} , $\mu_{j_1} \dfrac{C_2}{C}$ — відповідно постійна та змінна складові в’язкості системи.

Враховуючи (3.23) з (3.22) можна отримати

$$(-1)^j \frac{m\,\partial S_j}{\partial t} = \frac{k_j(S_j)}{\mu_{j_0} + \mu_{j_1}\dfrac{C_2}{C}} J(S_j)\gamma^2, \quad j = 1, 2\ . \qquad (3.24)$$

Поєднавши в систему вирази (3.20) та (3.24) можна визначити динаміку зміни реологічних параметрів дисперсної системи.

Стаціонарні значення змінних C_1, C_2 та γ можна віднайти з рівнянь ((3.20, (3.24), що у підсумку дає

$$q_2 = \frac{\left(\beta_1 + \dfrac{\beta_1}{\beta_2}\gamma_0 + \dfrac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_2}\gamma_0^2\right) + \sqrt{\left(\beta_1 + \dfrac{\beta_1}{\beta_2}\gamma_0 + \dfrac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_2}\gamma_0^2\right) - 4\beta_1 C\alpha_0}}{2\alpha_0}, \qquad (3.25)$$

$$\alpha_0 = \frac{\alpha_1\alpha_2\gamma_0^3}{\beta_2}\alpha_2 + \frac{\alpha_1\alpha_2\gamma^4}{\beta_2^2} + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_2}\alpha_0\gamma_0^2, \quad q_1 = \frac{\gamma_0^2 q_2(1 - \alpha_2 q_2)}{\beta_2}, \qquad (3.26)$$

$$\gamma_0 = \frac{\Delta P}{2z} \cdot \frac{k_j(S_j)}{\mu_{j_0} + \mu_{j_1}\frac{C_2}{C}} J(S_j); \quad j = 1, 2 . \qquad (3.27)$$

Якщо уповільнення інтенсивності руйнування часток (елементарних включень та асоціантів) значно менше за інтенсивність їх руйнування, то з (3.25) можна отримати

$$q_1 = \frac{\frac{\alpha_2 \gamma_0}{\beta_2} C}{1 + \frac{\alpha_2}{\beta_2}\gamma_0 + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta_1 \beta_2}\gamma_0^2}, \quad q_2 = \frac{C}{1 + \frac{\alpha_2}{\beta_2}\gamma_0 + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta_1 \beta_2}\gamma_0^2} . \qquad (3.28)$$

На підставі (3.27) з урахуванням (3.28) будемо мати

$$\gamma_0^3 - \left(\frac{\Delta P}{2z\mu_{j_0}} - \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)\gamma_0^2 - \left[\frac{\Delta P}{2z\mu_{j_0}}\frac{\beta_1}{\alpha_1} - \left(1 + \frac{\mu_{j_1}}{\mu_{j_0}}\right)\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_1}\right]\gamma_0 -$$

$$- \frac{\Delta P \beta_1 \beta_2}{2z\mu_{j_0}\alpha_1\alpha_1} = 0 ; \quad j = 1, 2 . \qquad (3.29)$$

З (3.29) витікає

$$\gamma_0 = \sqrt[3]{-\frac{n}{2} + \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{w}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{n}{2} - \sqrt{\left(\frac{n}{2}\right)^2 + \left(\frac{w}{3}\right)^3}} +$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta P}{2z\mu_{j_0}} - \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right); \quad j = 1, 2 , \qquad (3.30)$$

де

$$n = -\frac{2}{27}\left(\frac{\Delta P}{2z\mu_{j_0}} - \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{\Delta P}{2z\mu_{j_0}} - \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)\left[\frac{\Delta P}{2z\mu_{j_0}} \cdot \frac{\beta_1}{\alpha_1} - \left(1 + \frac{\mu_{j_1}}{\mu_{j_0}}\right)\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}\right] -$$

$$- \frac{\Delta P \beta_1 \beta_2}{2z\mu_{j_0}\alpha_1\alpha_1} = 0 ; \quad j = 1, 2 ,$$

$$w = -\frac{1}{3}\left(\frac{\Delta P}{2z\mu_{j_0}} - \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)^2 - \frac{\Delta P}{2z\mu_{j_0}} \cdot \frac{\beta_1}{\alpha_1} + \left(1 + \frac{\mu_{j_1}}{\mu_{j_0}}\right)\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2} .$$

Значення q_1 та q_2 визначаються з (3.28) з урахуванням (3.30).

Уявімо, що навколо стаціонарного становища q_1, q_2 та γ_0 відбувається незначна флуктуація, відповідно δ_1, δ_2 та ε:

$$C_1 = q_1(1+\delta_1),\ C_2 = q_2(1+\delta_2),\ \gamma = \gamma_0 + \varepsilon . \tag{3.31}$$

Тоді з (3.20) та (3.24) отримаємо рівняння збуреного руху фрактально-гетерогенної системи:

$$\frac{d\delta_1}{dt} - [\alpha_1\gamma_0(1-2\alpha_1 q_1) + (\beta_1+\beta_2)]\delta_1 + \frac{q_2}{q_1}(\alpha_2\gamma_0 - \beta_1)\delta_2 +$$

$$+\left(\alpha_1 q_1 + \frac{\alpha_2 q_2}{\alpha_1 q_1}\right)\alpha_1\varepsilon,$$

$$\frac{d\delta_2}{dt} = \frac{q_2\beta_2}{q_1}\delta_1 + (2\alpha_2 q_2 - 1)\alpha_2\gamma_0\delta_2 + (\alpha_2 q_2 - 1)\alpha_1\varepsilon, \tag{3.32}$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\gamma_0\mu_{j_1}\frac{q_2}{C}\delta_2 - \left(\mu_{j_0} + \frac{\mu_{j_1} q_2}{C}\right);\quad j = 1, 2 .$$

Таким чином [154], остаточно, система (3.32) являє собою ММ процесу фільтрації у фрактально-гетерогенних системах з урахуванням взаємодії часток дисперсної фази.

3.3. Врахування розривності коефіцієнтів та неточності вихідних даних при моделюванні процесів фільтрації у фрактально-гетерогенних системах

Визначення *характеристик фрактально-гетерогенних систем*, зокрема, фрактальної розмірності, пов'язано з певними похибками, зумовленими неточністю вхідних даних, а також можливою розривністю коефіцієнтів ММ, викликаною гетерогенним характером пористого середовища або самоподібністю структури власно самої ММ.

В даному розділі дослідимо особливості процедур математичного моделювання процесу фільтрації у фрактальне-гетерогенних системах, спричинених вищеозначеними факторами.

Загальну теорію можливості розв'язування крайових задач для лінійних та квазілінійних диференційних рівнянь параболічного типу з розривними коефіцієнтами розроблено в роботах [155, 156]. На основі цієї теорії було розв'язано низку прикладних задач однофазної фільтрації як для стаціонарного [155], так і для нестаціонарного [155, 156] випадків.

Одначе досі не віднайшла свого розв'язання задача нестаціонарної фільтрації для *багатофазних* та *фрактально-гетерогенних* систем, що описуються рівняннями параболічного типу з *розривними коефіцієнтами* та з коефіцієнтами, що квадратично інтегруються. В практичних додатках, за умови застосування неточних даних ця задача ускладнюється і може бути віднесена до класу некоректних задач через виникнення несталості розв'язку. Для розв'язування такої задачі скористаємося проекційним методом Гальоркіна, в якому базисна (координатна) система функцій співпадає з проекційною системою. В якості базисних функцій приймемо багатомірні вейвлети Добеші [164], які залежать як від незалежних просторової змінної z, так і від часової змінної t, а коефіцієнти розкладання розв'язку задачі визначаються в рамках регулярного кратномасштабного вейвлет-аналізу [157]. Варіаційну задачу, що при цьому утворюється, будемо розв'язувати регуляризуючим методом О. М. Тихонова [158] із застосуванням принципу узагальнюючої нев'язки [159].

Як і раніше, в розділі 3.2, для простоти викладення, але не звужуючи загальності розмірковувань, розглянемо диференційне рівняння несталого плаского фільтраційного потоку виду (3.20). Доповнимо постановку задачі умовою, відповідно до якої пласт розкрито продуктивною свердловиною радіусом r_0:

$$(-1)^j \frac{m\,\partial S_j}{\partial t} = \frac{k_j\left(S_j\right)}{\mu_j} J\left(S_j\right)\left[\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2} + \frac{dP_c}{dS_j}\right] dz\ ;$$

$$r_0 < r < R\,,\ \ t \in \left(t_0, t_1\right),\ \ \ j = 1, 2\ . \qquad (3.33)$$

При початковій умові

$$P\left(z, t_0\right) = \xi_0\left(r\right),\ \ r \in \left(r_0, R\right) \qquad (3.34)$$

та крайових (граничних) умовах

$$P\left(r_0, t\right) = P_0\left(t\right),\ \ P\left(R, t\right) = 0\,,\ \ t \in \left(t_0, t_1\right). \qquad (3.35)$$

У виразах (3.33) — (3.35) $P(z,t) = \Delta p(z,t) = p_0 - p(z,t)$; $p(z,t)$ — тиск рідини в точці $z \in \overline{\Omega} = \Omega \bigcup \Gamma$ в момент часу t; p_0 — початковий пластовий тиск; $k_j(z, t)$ — проникність пласта по відношенню до фаз (для конкретності розглядається двофазний потік $j = 1, 2$) багатофазної рідини, що фільтрується (наприклад, водо-нафтової суміші, яка утворюється при водонапірному режимі розробки нафтових родовищ); μ_j — в'язкості фаз багатофазної рідини (або гетерогенної системи), що фільтрується.

Будемо вважати, що функції $\xi_0(z)$ та $P_0(t)$ задовольняють наступним умовам:

— $\xi_0(z) = \overset{0}{W}{}_2^1(Q_r)$, тобто така, що квадратично інтегрується на $[r_0, R]$ разом з узагальненою похідною $(d\xi_0 / dz)$ в смислі Соболєва [155, 156, 160], та приймає «в середньому квадратичному» нульові граничні значення;

— $\|P_0(t)\|_{t_Q|t_0,t_1|} \le \nu_1$, $\|P_0'(t)\|_{t_Q|t_0,t_1|} \le \nu_2$.

Нехай $Q_{r_0,R} = \Omega_{0,R} \times (t_0, t_1)$ — циліндр на площині змінних (z,t). $\Omega_{0,R} = (r_0, R)$, і функції $k_j(z, t)$, $j = 1, 2$ задовольняють на Q_{t_0,t_1} умовам:

— $\nu_3 \le k(r, t) \le \nu_4$, $\nu_3 > 0$;

— $k_j(z, t)$, $j = 1, 2$ мають узагальнені похідні $[\partial k_j(z, t) / \partial z]$, для яких $\max\limits_{Q_{t_0,t_1}} \left| \dfrac{\partial k_j(z,t)}{\partial z} \right| < \infty$.

Передостання умова забезпечує рівномірну (по z та t) параболічність рівняння (3.33).

Для однорідного пласта ($k(r, t) = \text{const}$) крайові задачі з крайовими умовами першого та другого роду розглянуто в [161, 162]. Необхідність врахування гетерогенної структури пористого середовища в гідродинамічних задачах відмічається у багатьох відомих роботах з фільтрації (наприклад, [49, 162 — 168]), але не має остаточного розв'язку. Дослідження задач фільтрації у гетерогенних та фрактально-гетерогенних середовищах в основному орієнтовані на *точні вихідні дані* (або *дані вимірювань*), в той час коли на практиці ці дані можуть бути отримані (або виміряні) лише наближено. Неврахування даного факту може спричинити значні відхилення отриманого розв'язку від розв'язку при точних даних (несталий розв'язок). Крім того, існуючі методи розв'язування задач фільтрації (зокрема, методи засновані на застосуванні перетворення Фур'є) не дають можливості визначити структурні особливості процесу, що надто важливо для гетерогенних систем, і можуть бути використані лише у випадку існування класичного розв'язку задачі.

Після очевидних перетворень (замін змінних) задача (3.33) — (3.35) зводиться до наступної задачі:

$$Lu(z,t) \equiv \frac{\partial}{\partial t}u(z,t) - Mu(z,t) = f(z,t), \quad z \in \overline{\Omega}, \quad t \in (0,l), \tag{3.36}$$

$$u(z,t) = \xi_0(r), \quad r \in (0,l), \tag{3.37}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \quad t \in (0,T). \tag{3.38}$$

Тут $T = l$, $l = 2\vartheta - 1$; ϑ — порядок вейвлетів, які будуть використовуватися у подальшому для вейвлет-розкладань функцій $k_j(z,t)$, $f(z,t)$ та $u(z,t)$:

$$Mu \equiv \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{c}{R-r_0}k_j(z,t)u_r\right] + \frac{c\,k_j(z,t)\cdot u_r}{r_0\,l + z(R-r_0)}, \quad c = \frac{l\,(t_1 - t_0)}{\mu\,(R-r_0)},$$

$$f(z,t) = \frac{\partial f_1(z,t)}{\partial z} - f_0(z,t), \quad f_1(z,t) = -\frac{c\,k_j(z,t)}{l(R-r_0)}\cdot P_0(t),$$

$$f_0(z,t) = \frac{c}{l}\cdot\frac{k_j(z,t)}{r_0\,l + z(R-r_0)}\cdot P_0(t) + \left(1 - \frac{z}{l}\right)\cdot P_0'(t); \quad j = 1,2. \tag{3.39}$$

З метою спрощення запису після заміни змінних збережено позначення для $k_j(z,t)$, $\xi_0(z)$, $P_0(t)$ та $P_0'(t)$.

Задачу (3.36) — (3.38) назвемо умовно задачею $A_{1,0}(Q_T)$, де $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $\Omega = (0,l)$; перший з індексів в позначенні задачі означає, що крайові умови є умовами першого роду, а другий — що ці умови однорідні (тобто нульові).

У подальшому будемо використовувати введені в [151, 152] функціональні простори $W_2^{1,0}(Q_T)$, $W_2^{1,1}(Q_T)$, $W_2^{2,1}(Q_T)$, $V_2(Q_T)$ та $V_2^{1,0}(Q_T)$, а також відповідні їм простори $\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$, $\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$, $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(Q_T)$, $\overset{0}{V}{}_2(Q_T)$ та $\overset{0}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$. Нуль зверху над позначенням простору означає, що беруться лише ті елементи даного простору, які обертаються на нуль у «середньому квадратичному» на боковій границі $S_T = \{(z,t): z = 0 \bigcup z = l\}$ прямокутника Q_T.

Під розв'язком задачі будемо розуміти узагальнений розв'язок в смислі визначення з [155, 156]. А саме узагальненим розв'язком з $V_2^{1,0}(Q_T)$ ($W_2^{1,0}(Q_T)$) задачі $A_{1,0}(Q_T)$ будемо називати функцію $u(r,t)$ з $\overset{0}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ ($\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$), яка задовольняє рівнянню (3.36) та початковій умові (3.37) в смислі інтегральної тотожності

$$\int\limits_{Q_r}\left[u\eta_t - \frac{c}{R-r_0}k_j(z,t)u_r\eta_r + \frac{k_j(z,t)}{r_0 l + r(R-r_0)}u_r\eta\right]dz\,dt =$$

$$= \int\limits_{Q_r}\left\{\frac{c\,k_j(z,t)}{l(R-r_0)}\cdot P_0(t)\eta_r - \left[\frac{c}{l}\cdot\frac{c\,k_j(r,t)}{l(R-r_0)}\cdot P_0(t) + \right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(1-\frac{z}{l}\right)P_0'(t)\right]\eta\right\}dz\,dt + \int\limits_{\Omega}\xi_0(r)\eta(z,0)\,dz\,,\quad j=1,2 \tag{3.40}$$

при будь-якій функції $\eta(r,t)$ з $\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$, що дорівнює нулю при $t = T$. Відповідність крайовим умовам (3.38) міститься в тому, що $u \in \overset{0}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ ($u \in \overset{0}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$), тобто умови (3.38) задовольняються у «середньому квадратичному». При цьому похідні u_r, η_r та η_t в (3.40) є узагальненими похідними. Будь-який узагальнений розв'язок з $u \in \overset{0}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$ задачі $A_{1,0}(Q_T)$ буде її узагальненим розв'язком з $\overset{0}{V}{}_2^{1,0}(Q_T)$ [155].

З доведених теорем у роботі [156] витікає, що за умов, зазначених вище для функцій $\psi_0(r)$, $k(r,t)$ та $P_0(t)$ існує єдиний узагальнений розв'язок задачі $A_{1,0}(Q_T)$ з $u \in \overset{0}{W}{}_2^{1,0}(Q_T)$, що належить $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(Q_T)$ та задовольняє рівнянню $Lu = f$, $f \in L_2(Q_T)$ ($f \equiv \dfrac{\partial f_1}{\partial r} - f_0$) майже скрізь в Q_T.

Виконаємо **вейвлет-представлення** розв'язку задачі. В крупномасштабному аналізі (КМА) в $L_2(\Re^2)$, який використовує ортонормовані базиси вейвлетів, будь-якій функції $u(x)$ з $L_2(\Re^2)$ відповідає ряд [153]

$$u(x) = \langle u, f \rangle \times \varphi(x) + \sum_{\lambda \in \bigcup\limits_{j=0} \Lambda_j} \langle u, \xi_\lambda \rangle \times \psi_\lambda(x), \qquad (3.41)$$

$\xi_\lambda(x) = 2^s \psi_\ell(2^s \cdot x - k)$, $\Lambda_s = \{\lambda = (\ell, s, k) : 1 \le \ell \le 3, k \in K^2\}$, $K^2 = K \times K$, K — множина цілих невід'ємних чисел; $k = (k_1, k_2) \in K^2$; $x = (x_1, x_2) \in \Re^2$ (для задачі $A_{1,0}(Q_T)$ $x_1 = z, x_2 = t$); $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — знак скалярного добутку.

Функції

$$\varphi(x-k),\ \xi_\lambda(x) = 2^s \xi_t(2^s \cdot x - k),\ \lambda = (\ell, j, k),\ 1 \le \ell \le 3, k \in K^2, \qquad (3.42)$$

де

$$\varphi(x-k) = \varphi(x_1 - k_1)\varphi(x_2 - k_2),\ \varphi_1(x-k) = \varphi(x_1 - k_1)\varphi(x_2 - k_2),$$

$$\xi_2(x-k) = \xi(x_1 - k_1)\varphi(x_2 - k_2),\ \xi_3(x-k) = \xi(x_1 - k_1)\xi(x_2 - k_2)$$

утворюють сепарабельний отронормований базис (ОНБ) в $L_2(\Re^2)$.

Функції $\varphi(x)$ та $\xi(x)$ при $x \in \Re^1$, які називаються відповідно скейлінг-функції (така, що масштабує) та вейвлет-функції, мають компактні носії в $(0, l)$ та визначаються як ряд [163]

$$\varphi(x) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{l} h_k^{(\vartheta)} \times \varphi(2x - k), \quad \xi(x) = \sqrt{2}\sum_{k=0}^{l} g_k^{(\vartheta)} \times \varphi(2x - k), \tag{3.43}$$

$l = 2\vartheta - 1$ ($\vartheta \geq 1$ — ціле додатне число); $g_k^{(\vartheta)} = (-1)^k \times h_k^{(\vartheta)}$. Коефіцієнти $h_k^{(m)}$ для вейвлетів Хаара ($\vartheta = 1$) мають значення $h_0^{(1)} = h_1^{(1)} = 1/\sqrt{2}$, а для вейвлетів Добеші ${}_\vartheta\varphi(x)$ порядку $\vartheta > 1$ значення $h_k^{(\vartheta)}$ для $\vartheta = \overline{2,10}$ наведено в [160].

Локальну та глобальну регулярність вейвлетів з компактними носіями детально досліджено в [164]. При цьому методами Фур'є встановлено, що для вейвлетів $\varphi(x)$, $x \in \Re$, значення глобального показника Гельдера не менше за $2{,}158$ при $m \geq 7$.

Кратномасштабний аналіз в $L_2(\Re^2)$ складається з послідовності просторів апроксимацій $\{V_s\}(s \geq 0) V_0 \subset V_1 \subset ... \subset V_s \subset ...$, де V_s — замкнутий простір в $L_2(\Re^2)$ з базисом

$$\varphi_s(x) = 2^s \varphi(2^s \cdot x - k), \quad x = (x_1, x_2) \in \Re^2, \quad k = (k_1, k_2) \in K^2.$$

Оскільки функція $\varphi(x)$, $x \in \Re^1$, фінітна на $[0, l]$ при будь-якому $\vartheta \geq 1$ та двічі неперервно диференціюється на $[0, l]$ при $\vartheta \geq 7$, то послідовність $\{V_s\}(s \geq 0)$ при виборі базису $\{\varphi_s(x - k)\}$ на основі функції $\varphi(x)$ з $l = 2\vartheta - 1$, $\vartheta \geq 7$ буде породжувати (за визначенням у [157]) 2-регулярний КМА в $L_2(\Re^2)$. Це означає, що для будь-якого цілого m і для будь-якого мультиіндексу $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, що задовольняє умові $|\alpha| \leq 2$ ($|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2$), для функції $g(x) = \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2)$ виконується нерівність

$$\left|\partial^\alpha g(x)\right| \leq C_\vartheta \left(1 + \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right)^{-\vartheta}.$$

Якщо P_s — ортогональний проектор простору $L_2(\Re^2)$ на V_s, то на підставі теореми, сформульованої та доведеної в [157], для будь-якої функції з простору Соболєва $W_2^1(Q_T)$ послідовність $P_s f$ збігається до f в $W_2^1(Q_T)$-нормі, тобто:

$$\lim_{j\to\infty}\left\|\partial^{\alpha} P_s f - \partial^{\alpha} f\right\|_{L_2(Q_T)} = 0\,,\quad |\alpha| \le 1. \qquad (3.44)$$

У відповідності до вище згаданої теореми з [153], розподіл (узагальнена функція) f належить $W_2^1(Q_T)$ тоді і тільки тоді, коли її вейвлет-коефіцієнти $\alpha\langle\lambda\rangle = \langle f, \xi_\lambda\rangle$ в базисі (3.42), що відповідає 2-регулярному КМА, задовольняють умові

$$\sum_{j=0}\sum_{\lambda\in\Lambda} 4^j |\alpha(\lambda)|^2 < \infty\,. \qquad (3.45)$$

Для виконання умови (3.45) достатньо вважати, що вейвлет-коефіцієнти $d_{i,s,k_1,k_2} = \langle f, \xi_{i,s,k_1,k_2}\rangle$ функції f задовольняє нерівностям

$$d_{i,s,k_1,k_2} \le 2^{-2s}\eta_s \quad \left(i=\overline{1,3};\, s\ge 0;\, k_1, k_2 = \overline{0, 2^s - 1}\right), \qquad (3.46)$$

де $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\eta_s^2 < \infty$, наприклад, $\eta_s = s^{-(1+\gamma)/2}$, $\gamma > 0$.

Результати виконаних досліджень представлено в роботі [169].

3.4. Дискретна ММ процесів фільтрації у фрактально-гетерогенних системах та її обчислювальна реалізація

Для поширених випадків фільтрації у фрактально-гетерогенних системах запропоновано відповідні неперервні ММ, які детально досліджено в розділах 3.1 та 3.2. З метою їх подальшої обчислювальної реалізації розробимо дискретні аналоги розроблених ММ на прикладі моделі виду (3.19), (3.13), (3.14).

При розробці різницевих аналогів виразів (3.19), (3.13), (3.14) для компактності запису введемо позначення

$$\kappa_{l\,w,r}^{\;m} = \frac{k_{l_{w,r}}\left(S_{j_{w,r}}^{\,m-1}\right)}{\mu_{l_{w,r}}\left(z_{w,r}\right)},\;\; \kappa_{l\,w,r}^{\;m+1} = \frac{k_{l_{w,r}}\left(S_{j_{w,r}}^{\,m}\right)}{\mu_{l_{w,r}}\left(z_{w,r}\right)},$$

$$l = 1,\, 2, 3;\;\; w = \overline{1,W}\,; r = \overline{1,R}\;,\quad j = 1, 2\;,$$

де $\kappa_l,\, l = 1,2,3$ — визначають провідності [1, 2] для відповідних компонент.

Для різницевого аналога варіаційної нерівності (3.19), використовуючи векторно-матричну форму (Г.7) при $n = 2$, отримаємо ($\sigma = 0{,}5$)

$$\frac{1}{2\,\Delta z_1^2}\left\{\kappa_{1_{w-1,r}}^{m+1}\left(J_{w-1,r}^{\,m+1}\right)S_{j_{w-1,r}}^{\,m}\,G_j\left(\frac{P_{w-1,r}^{\,m}-P_{w-1,r}^{\,m-1}}{S_{j_{w-1,r}}^{\,m}-S_{j_{w-1,r}}^{\,m-1}}\right)\left[v_{w-1,r}^{\,m}-S_{j_{w-1,r}}^{\,m}\right]\right\}+$$

$$+\frac{1}{2\,\Delta z_1^2}\left[\kappa_{1_{w-1,r}}^{m+1}\left(J_{w-1,r}^{\,m+1}\right)S_{j_{w-1,r}}^{\,m}\,G_j\left(P_{w-1,r}^{\,m+1}-P_{w-1,r}^{\,m}\right)\left|v_{w-1,r}^{\,m}\right|\right]-$$

$$-\frac{1}{2\,\Delta z_1^2}\left[\kappa_{1_{w-1,r}}^{m+1}\left(J_{w-1,r}^{\,m+1}\right)S_{3_{w-1,r}}^{\,m}\,G_j\left(P_{w-1,r}^{\,m+1}-P_{w-1,r}^{\,m}\right)\left|S_{3_{w-1,r}}^{\,m}\right|\right]+$$

$$+\frac{1}{2\,\Delta z_2^2}\left\{\kappa_{1_{w,r-1}}^{m+1}\left(J_{w,r-1}^{\,m+1}\right)S_{j_{w,r-1}}^{\,m}\,G_j\left(\frac{P_{w,r-1}^{\,m}-P_{w,r-1}^{\,m-1}}{S_{2_{w,r-1}}^{\,m}-S_{2_{w,r-1}}^{\,m-1}}\right)\left[v_{w,r-1}^{\,m}-S_{j_{w,r-1}}^{\,m}\right]\right\}+$$

$$+\frac{1}{2\,\Delta z_2^2}\left[\kappa_{1_{w,r-1}}^{m+1}\left(J_{w,r-1}^{\,m+1}\right)S_{j_{w,r-1}}^{\,m}\,G_j\left(P_{w,r-1}^{\,m+1}-P_{w,r-1}^{\,m}\right)\left|v_{w,r-1}^{\,m}\right|\right]-$$

$$-\frac{1}{2\,\Delta z_2^2}\left[\kappa_{1_{w,r-1}}^{m+1}\left(J_{w,r-1}^{\,m+1}\right)S_{j_{w,r-1}}^{\,m}\,G_j\left(P_{w,r-1}^{\,m+1}-P_{w,r-1}^{\,m}\right)\left|S_{j_{w,r-1}}^{\,m}\right|\right]+$$

$$+\frac{1}{2\,\Delta z_1^2}\left\{\kappa_{1_{w+1,r}}^{m+1}\left(J_{w+1,r}^{\,m+1}\right)S_{j_{w+1,r}}^{\,m}\,G_j\left(\frac{P_{w+1,r}^{\,m}-P_{w+1,r}^{\,m-1}}{S_{j_{w+1,r}}^{\,m}-S_{j_{w+1,r}}^{\,m-1}}\right)\left[v_{w+1,r}^{\,m}-S_{j_{w+1,r}}^{\,m}\right]\right\}+ \qquad (3.46)$$

$$+\frac{1}{2\,\Delta z_1^2}\left[\kappa_{1_{w+1,r}}^{m+1}\left(J_{w+1,r}^{\,m+1}\right)S_{j_{w+1,r}}^{\,m}\,G_j\left(P_{w+1,r}^{\,m+1}-P_{w+1,r}^{\,m}\right)\left|v_{w+1,r}^{\,m}\right|\right]-$$

$$-\frac{1}{2\,\Delta z_1^2}\left[\kappa_{1_{w+1,r}}^{m+1}\left(J_{w+1,r}^{\,m+1}\right)S_{j_{w+1,r}}^{\,m}\,G_j\left(P_{w+1,r}^{\,m+1}-P_{w+1,r}^{\,m}\right)\left|S_{j_{w+1,r}}^{\,m}\right|\right]+$$

$$+\frac{1}{2\,\Delta z_2^2}\left\{\kappa_{1_{w,r+1}}^{m+1}\left(J_{w,r+1}^{m+1}\right)S_{j_{w,r+1}}^{m}G_j\left(\frac{P_{w,r+1}^{m}-P_{w,r+1}^{m-1}}{S_{j_{w,r+1}}^{m}-S_{j_{w,r+1}}^{m-1}}\right)\left[v_{w,r+1}^{m}-S_{j_{w,r+1}}^{m}\right]\right\}+$$

$$+\frac{1}{2\,\Delta z_2^2}\left[\kappa_{1_{w,r+1}}^{m+1}\left(J_{w,r+1}^{m+1}\right)S_{j_{w,r+1}}^{m}G_j\left(P_{w,r+1}^{m+1}-P_{w,r+1}^{m}\right)\left|v_{w,r+1}^{m}\right|\right]-$$

$$-\frac{1}{2\,\Delta z_2^2}\left[\kappa_{1_{w,r+1}}^{m+1}\left(J_{w,r+1}^{m+1}\right)S_{j_{w,r+1}}^{m}G_j\left(P_{w,r+1}^{m+1}-P_{w,r+1}^{m}\right)\left|S_{j_{w,r+1}}^{m}\right|\right]-$$

$$-\left\{\left[\frac{1}{2\,\Delta z_1^2}\kappa_{1_{w+1,r}}^{m+1}+\frac{1}{2\,\Delta z_2^2}\kappa_{1_{w,r+1}}^{m+1}+\left(\frac{1}{2\,\Delta z_1^2}+\frac{1}{2\,\Delta z_2^2}\right)\kappa_{1_{w,r}}^{m+1}\right]\left(\frac{P_{w,r}^{m}-P_{w,r}^{m-1}}{S_{j_{w,r}}^{m}-S_{j_{w,r}}^{m-1}}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(J_{w,r+1}^{m+1}\right)S_{j_{w,r+1}}^{m}G_j\left(v_{w,r}^{m}-S_{j_{w,r}}^{m}\right)\right\}-$$

$$-\left\{\left[\frac{1}{2\,\Delta z_1^2}\kappa_{1_{w+1,r}}^{m+1}+\frac{1}{2\,\Delta z_2^2}\kappa_{1_{w,r+1}}^{m+1}+\left(\frac{1}{2\,\Delta z_1^2}+\frac{1}{2\,\Delta z_2^2}\right)\kappa_{1_{w,r}}^{m+1}\right]\left(J_{w,r}^{m+1}\right)S_{j_{w,r}}^{m}G_j\times\right.$$

$$\left.\times\left(P_{w,r}^{m+1}-P_{w,r}^{m}\right)\left|v_{w,r}^{m}\right|\right\}+$$

$$+\left\{\left[\frac{1}{2\,\Delta z_1^2}\kappa_{1_{w+1,r}}^{m+1}+\frac{1}{2\,\Delta z_2^2}\kappa_{1_{w,r+1}}^{m+1}+\left(\frac{1}{2\,\Delta z_1^2}+\frac{1}{2\,\Delta z_2^2}\right)\kappa_{1_{w,r}}^{m+1}\right]\left(J_{w,r}^{m+1}\right)S_{j_{w,r}}^{m}G_j\times\right.$$

$$\left.\times\left(P_{w,r}^{m+1}-P_{w,r}^{m}\right)\left|S_{j_{w,r}}^{m}\right|\right\}\geq$$

$$\geq-\frac{m_{w,r}}{\Delta t}\left(S_{j_{w,r}}^{m+1}-S_{j_{w,r}}^{m}\right)-\frac{1}{h_{w,r}}\sum_{j=1}^{K_1}\left(\xi_{j_{w,r}}\right)Q_{1_j}^{m+1},\quad j=1,2\,.$$

Доповнимо (3.46) до системи дискретними аналогами початкових та граничних умов

$$P_{w,r}^{m}\Big|_{m=0}=P_{w,r}^{0};\; S_{j_{w,r}}^{m}\Big|_{m=0}=S_{j_{w,r}}^{0};\; m=\overline{0,M},\; w=\overline{1,W},\; r=\overline{1,R},\quad j=1,2\,. \tag{3.47}$$

$$P_{0,z_2}=\frac{1}{\Delta z_1}\left(P_{0,r}^{m}-P_{1,r}^{m}\right),\quad P_{W+1,z_2}=\frac{1}{\Delta z_1}\left(P_{W+1,r}^{m}-P_{W,r}^{m}\right),$$

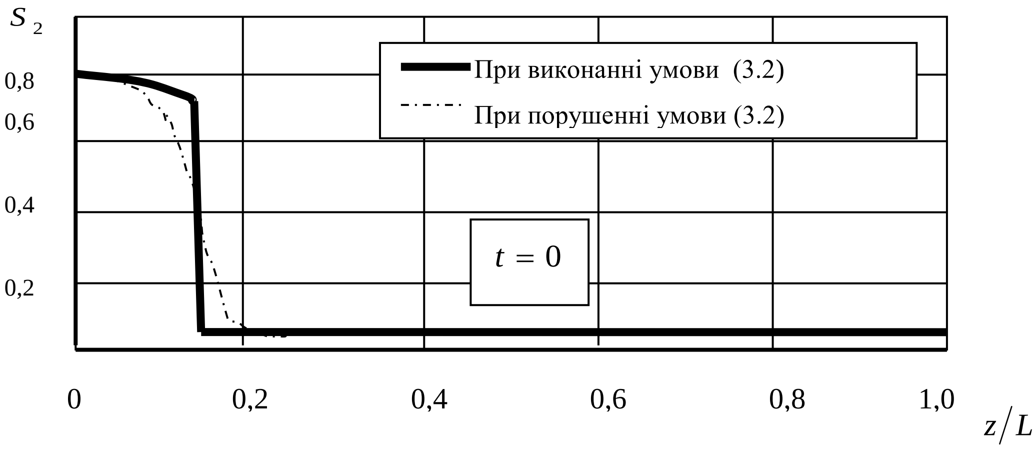
$$P_{z_1,0}=\frac{1}{\Delta z_2}\left(P_{w,0}^{m}-P_{w,1}^{m}\right),\quad P_{z_1,R+1}=\frac{1}{\Delta z_2}\left(P_{w,R+1}^{m}-P_{w,R}^{m}\right), \tag{3.48}$$

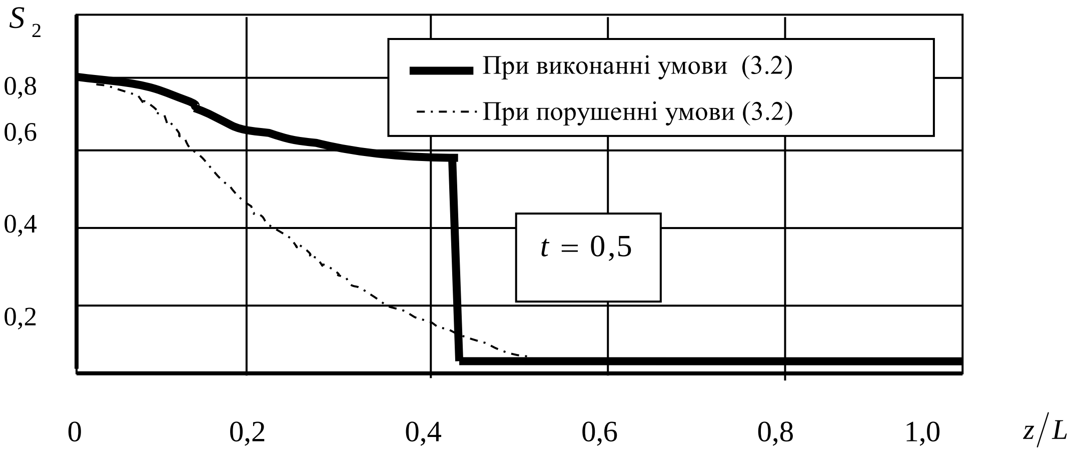
$$S_{j_{0,z_2}}=\frac{1}{\Delta z_1}\left(S_{j_{0,r}}^{m}-S_{j_{1,r}}^{m}\right),\quad S_{j_{W+1,z_2}}=\frac{1}{\Delta z_1}\left(S_{j_{W+1,r}}^{m}-S_{j_{W,r}}^{m}\right),$$

$$S_{j_{z_1,0}} = \frac{1}{\Delta z_2}\left(S^m_{j_{w,0}} - S^m_{j_{w,1}}\right), \quad S_{j_{z_1,R+1}} = \frac{1}{\Delta z_2}\left(S^m_{j_{w,R+1}} - S^m_{j_{w,R}}\right), \quad j = 1, 2 .$$

Отримані таким чином сукупності систем дискретних виразів для всіх $w = \overline{1, W}$; $r = \overline{1, R}$ будуть являти собою дискретну ММ процесів фільтрації у фрактально-гетерогенних системах.

Дискретну ММ виду (3.46) — (3.48) за допомогою очевидних перетворень можна звести до матричної форми, яка аналогічна представленню (Г.8) — (Г.10), що дає змогу реалізувати розроблену дискретну ММ процесів фільтрації у фрактально-гетерогенних системах, спираючись на алгоритм, описаний у розділі 2.3.2 дисертаційної роботи. Результати чисельного дослідження ММ виду (3.46) — (3.48) представлено на рис. 3.4.





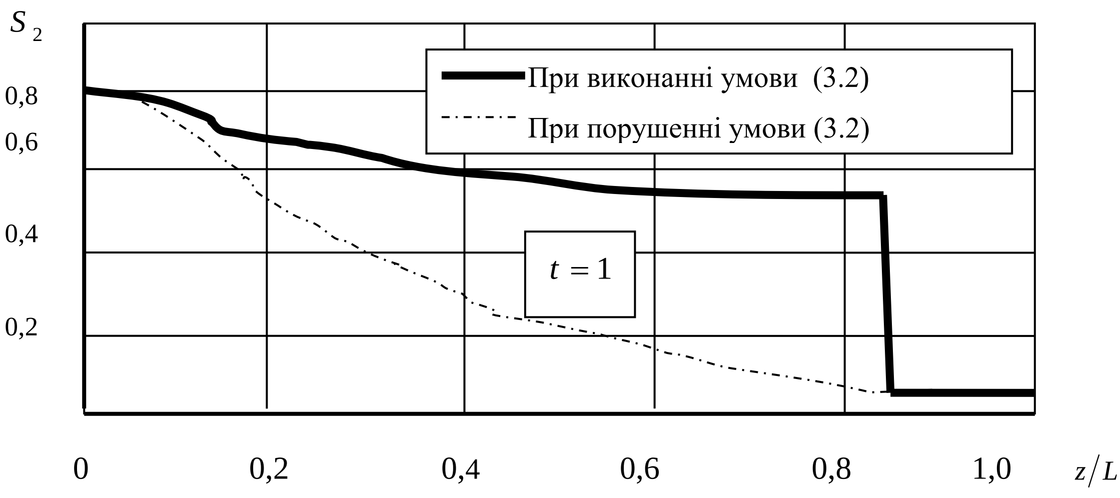


Рисунок 3.4 — Значення функції Баклея — Леверетта для процесу фільтрації у фрактально-гетерогенній системі (S_2 — насиченість для компоненти $j = 2$): суцільна лінія — при виконанні умови (3.2); штрих пунктирна лінія — при порушенні умови (3.2)

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3

1. Розроблено ММ процесів фільтрації гетерогенних систем (зокрема, наприклад: багатофазних рідин, що не змішуються; емульсій; суспензій тощо), в разі, якщо останні характеризуються властивостями фрактальності (самоподібності) структури, причому як самої субстанції, що здійснює рух фільтрації, так і просторової області, в якій відбувається процес фільтрації. Моделі представлено в класі варіаційних нерівностей у частинних похідних та реалізовано на основі модифікованого методу МФГ.

2. Розроблено ММ процесів фільтрації у фрактально-гетерогенних системах з урахуванням взаємодії часток дисперсної фази. Моделі дають змогу виконати моделювання дисперсних систем з реологічними властивостями, які залежать від часових характеристик (наприклад, тиксотропних) або з нелінійними ефектами (зокрема, коливаннями реологічних характеристик, пов’язаних із взаємодією структурних елементів). Відповідні ММ розроблено у вигляді варіаційних нерівностей, коефіцієнти при частинних похідних в яких мають просторово-часові або нелінійні характеристики.

3. Показано можливість врахування розривності коефіцієнтів та неточності вхідних даних при моделюванні процесів фільтрації у фрактально-гетерогенних системах, що представлено та сформульовано як некоректно поставлену задачу. Розв’язання даної задачі здійснено на основі проекційного методу Гальоркіна, в якому базисна (координатна) система функцій співпадає з проекційною системою. При цьому в якості базисних функцій прийнято багатомірні вейвлети.

4. Розроблено дискретні ММ процесів фільтрації у фрактально-гетерогенних системах та запропоновано алгоритмічні засоби їх обчислювальної реалізації.

4. КОМП'ЮТЕРНІ ЗАСОБИ ТА ПРАКТИКА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ЗАДАЧ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ФІЛЬТРАЦІЇ У ГЕТЕРОГЕННИХ СИСТЕМАХ

Застосування інтелектуальних принципів комп'ютерного дослідження складних фізичних процесів, здебільшого, обмежується відсутністю ефективних інструментальних програмних засобів (ІПЗ), які забезпечують проведення широкого кола досліджень як кількісного характеру (наприклад, отримання полів пластового тиску, насиченостей фаз у багатофазному потоці або визначення фронту поділу між цими фазами в ході розв'язування задач моделювання), так і якісного характеру (зокрема, класифікації гетерогенних систем, які фільтруються, або при розв'язуванні задач аналізу останніх). Розробка проблемно-орієнтованих програмних продуктів для задач імітаційного та комп'ютерного дослідження широкого кола природних та промислово важливих фізичних процесів, зокрема таких, що відбуваються в гетерогенних системах, являє собою актуальну проблему і, на даний час, набуває практичну спрямованість.

У даному розділі дослідимо низку питань, пов'язаних із створенням комп'ютерних засобів розв'язування задач моделювання процесів фільтрації (реології) у гетерогенних системах. Використовуючи дані засоби як інструментальну базу, розглянемо приклади практичного застосування запропонованих підходів до моделювання процесів фільтрації у гетерогенних системах в умовах типових природних та промислових об'єктів. Зокрема, виконаємо прогнозне моделювання динамічного стану продуктивного пласта з газованою нафтою, який розкрито системою експлуатаційних свердловин (розділ 4.2). Також визначимо фронт поділу між компонентами (та його фрактальну розмірність) для двофазної рідинної гетерогенної системи за припущення фрактального характеру процесу фільтрації, що відбувається в системі (розділ 4.3).

4.1. Розробка інструментальних програмних засобів моделювання процесів фільтрації у гетерогенних системах

4.1.1. Обґрунтування вибору платформи та засобів розробки програмного забезпечення

Досвід показує [170, 171], що при виконанні математичних розрахунків в умовах комп'ютерного дослідження складних об'єктів і процесів ефективність обчислювального експерименту визначається як якістю наявного *алгоритмічного*, так і *програмного* забезпечення — власно: інструментарію комп'ютерного дослідження. На поточний час на етапі реалізації ММ різного роду об'єктів та процесів застосовуються пакети прикладних програм (ППП) чисельного аналізу та моделювання, що містять в собі системну частину (ядро пакету) та набір функціональних блоків (Toolbox) [172 — 174]. Ядро пакету, зазвичай, виконує функції сервісного характеру і призначено для організації зв'язку функціональних модулів між собою, а також для уведення, зберігання та відображення інформації [174].

В ряді робіт [170, 171, 175 — 185], на основі значної кількості тестів, проведено порівняльний аналіз найбільш поширених платформ моделювання: Matlab, Mathematica, Maple тощо. Аналіз показав, що проста вбудована мова програмування платформи Matlab дозволяє легко створювати власні алгоритми. При цьому простота мови програмування компенсується значною кількістю функцій Matlab та відповідних Toolbox. Дане поєднання, з урахуванням використання формалізованих процедур, забезпечує швидку розробку ефективних програм, спрямованих на розв'язування практичних задач [175, 176]. Крім того, основна перевага платформи моделювання Matlab полягає у відкритості коду, що дає змогу у користувацьких додатках використовувати як внутрішні запрограмовані алгоритми, так і змінювати їх. В останньому випадку реалізується можливість обміну даними між додатками Matlab та іншими програмами, а також створювати додатки типу «клієнт — сервер» [175, 176, 178].

Таким чином, враховуючи результати аналізу літературних джерел, а також доступністю в програмуванні, в якості програмної платформи при розробці ІПЗ комп'ютерного моделювання процесів фільтрації у гетерогенних системах обрано ППП Matlab.

4.1.2. Структурна організація інструментальних засобів

Як зазначалося вище, розроблені ІПЗ являють собою користувацькі додатки, створені на платформі проблемно-орієнтованого пакету Matlab, які організаційно поєднано в *автоматизований комплекс* розв'язання задач моделювання процесів фільтрації у гетерогенних системах [185, 187]. Розглянемо принципи, за якими створено автоматизований комплекс.

Інструментальна реалізація математичної моделі досліджуваного процесу. Динамічні властивості досліджуваного процесу реалізуються на основі узагальненої ММ процесів фільтрації у гетерогенних системах, представленої у вигляді (2.84) — (2.86) і тотожної до неї задачі (2.97), (2.96), (2.98), яку зведено до виду рівностей та елементарної нерівності. Виходячи з аналізу конкретного процесу фільтрації, визначаються коефіцієнти дифузійних та динамічних членів (тобто коефіцієнти при відповідних частинних похідних).

Як зазначалося в розділі 2, задачу моделювання процесів фільтрації у гетерогенних системах математично може бути зведено до стаціонарної або нестаціонарної (динамічної), що визначається наявністю похідної за часом у правій частині рівняння динаміки (вираз (2.97)). Завдання типу задачі, яку розв'язується (стаціонарна або нестаціонарна), здійснюється в режимі *Type equation* автоматизованого комплексу. В межах даного режиму можна обрати один з варіантів: *Static* або *Non static*. Таким чином, у випадку стаціонарної задачі, динамічні властивості гетерогенної системи будуть визначатися виразом:

$$\operatorname{div}\left[\frac{R_{sj}k_j}{\mu_j}\operatorname{grad}\left(\Psi\right)\right]=\pm f\left(z\right);\quad z\in\overline{\Omega},\quad j=1,2\,. \tag{4.1}$$

У випадку нестаціонарної задачі динамічні властивості гетерогенної системи визначаються виразом:

$$\operatorname{div}\left[\frac{R_{sj}k_j}{\mu_j}\operatorname{grad}\left(\Psi\right)\right] = -m\frac{\partial\Psi}{\partial t} \pm f\left(t, z\right);\ \ t \in \left(0, t_k\right)\ z \in \overline{\Omega},\ \ j = 1, 2\ . \qquad (4.2)$$

Для кожного з $j = 1, 2$ рівнянь динаміки у виразах (4.1), (4.2) передбачено своє поле запису. Наявність точкових джерел $f\left(z\right)$ або $f\left(t, z\right)$ в цих виразах також задається у передбачених полях діалогових вікон.

Коефіцієнти ММ досліджуваного процесу задаються в режимі *Set model parameters*. В залежності від конкретного виду ММ може бути задано *постійні* або *змінні* коефіцієнти при частинних похідних виразів (4.1), (4.2). При цьому коефіцієнти можуть бути однотипними як у всій області моделювання Ω (або включно в області Ω та її границі Γ), так і у окремих областях Ω_l, $l = 1, 2, ..., N$ гетерогенної системи (або, так само, включно в областях Ω_l та їх границях Γ_l). Процедура введення значень коефіцієнтів при частинних похідних, які складають відповідні ММ зводиться до наступного. В ініціалізованому діалоговому вікні *Liquid parameters* надається можливість задати коефіцієнти правої частини виразів (4.1) (або (4.2)), що визначають фізико-хімічні властивості компонентів гетерогенної системи. При цьому в діалоговому вікні відображається загальний вид правої частини (4.1) (або (4.2)) для відповідного процесу фільтрації.

У випадку *постійних* фізико-хімічних параметрів досліджуваних процесів фільтрації зручною формою завдання коефіцієнтів може бути наступна:

$$\phi \times \nabla\left(\Psi\right) \ \text{ або } \ \nabla\left[\phi \times \nabla\left(\Psi\right)\right], \qquad (4.3)$$

де ϕ — довільне представлення коефіцієнту при відповідних дифузійних членах (4.1) (або (4.2)); Ψ — узагальнена форма представлення шуканої функції стану досліджуваного процесу фільтрації у гетерогенній системі.

Для завдання *змінних* (або *нелінійних*) коефіцієнтів використовується поелементні операції з масивами. Потрібний вид залежності коефіцієнтів

ММ від просторових координат $\phi_j = \phi_j(z)$; $z \in \overline{\Omega}$, $j = 1, 2$ або шуканої функції $\Psi = \Psi(t, z)$ визначається функціональною залежністю виду $\phi = \phi[\Psi(t, z)]$, яку вказується для кожного фізичного параметру.

При розв'язуванні *нестаціонарних* задач повинно бути задано *початкові умови*. Вони задаються в режимі *Initial conditions*. Формалізоване представлення початкових умов має вигляд:

$$\rho_0 \times \Psi_0 = \mathrm{P}, \tag{4.4}$$

де ρ_0 — ваговий коефіцієнт (безрозмірна величина, яка, наприклад, може визначати масштаб шкали завдання початкових умов); Ψ_0 — нормоване значення початкових умов; P — абсолютне значення початкових умов.

Початкові умови може бути перевизначено на будь-якому етапі підготовки до розв'язання прикладної задачі, але перед інтегруванням диференційних рівнянь динаміки (4.1) (або (4.2)).

В розділі 2 при розробці ММ процесів фільтрації у гетерогенних системах було визначено, що *граничними умовами* для класу задач, що розглядаються, можуть розглядатися граничні умови 1 роду (типу Діріхле) або 2 роду (типу Неймана). Представлення та завдання граничних умов в автоматизованому комплексі при цьому здійснюється в режимі *Set boundary*. При ініціалізації цього режиму доступними стають тільки границі просторової області Ω. Тип граничних умов може бути завдано окремо для кожного елементу загальної границі Γ області Ω.

Для граничних умов 1 роду формалізоване представлення визначається наступним чином

$$\rho_\Gamma \times \Psi' = \Psi_\Gamma, \tag{4.5}$$

де ρ_Γ — ваговий коефіцієнт (безрозмірна величина); Ψ' — нормоване значення шуканої функції на границі Γ; Ψ_Γ — завдане значення шуканої функції на границі Γ.

Для граничних умов 2 роду формалізоване представлення визначається наступним чином

$$\rho_{\Gamma}^{\text{п}} \times \nabla\Psi' = \partial\Psi_{\Gamma}, \qquad (4.6)$$

де $\rho_{\Gamma}^{\text{п}}$ — потоковий ваговий коефіцієнт (безрозмірна величина); $\nabla\Psi'$ — градієнт від нормованого значення шуканої функції на границі Γ; $\partial\Psi_{\Gamma}$ — завдане значення потоку через границю Γ.

Граничні умови, так само як і початкові умови, можуть бути перевизначеними на будь-якому етапі підготовки до розв'язання прикладної задачі, але перед інтегруванням диференційних рівнянь динаміки (4.1) (або (4.2)). При завданні просторової області Ω розвитку фізичного процесу фільтрації у гетерогенній системі застосовується принцип конструктивної геометрії CBSG (Constructive Bloc Solid Geometry), який використовується в платформі Matlab в задачах дослідження розподілених систем [175, 176, 178]. У відповідності до цього принципу складна область моделювання Ω декомпозується на кінцеву сукупність геометрично простих (елементарних [175, 176] або типових [178]) областей Ω_r де $r = \overline{1, R}$ — загальне число типових областей. Кожна з областей Ω_r, в даному випадку, розглядається як *геометричний примітив* [175, 176] (тобто як підобласть з найпростішою геометрією, границю Γ_r якої для пласких задач, що розглядаються, можна *аналітично* описати лінією *не вище 2-го порядку*). Таким чином, геометричні примітиви розглядаються як *пласкі фігури*, для яких завчасно (засобами платформи Matlab) створено програмно-алгоритмічне забезпечення процедур конструювання геометричних форм. З існуючого можливого набору стандартних примітивів платформи Matlab [175, 176] у автоматизованому комплексі використано наступні:

— *прямокутник*, побудову якого здійснюється *з довільного кута* (Renctangle — corner);

— *прямокутник*, побудову якого здійснюється *з центру* (Renctangle — centre);

— *еліпс*, побудову якого здійснюється *з центру* (Ellipse — centre). Частинним випадком еліпса може слугувати *окружність*.

У відповідності до прийнятого у Matlab принципу *конструктивної геометрії* (CBSG), при формуванні області Ω складної форми, кожний із задіяних примітивів Ω_r, ідентифікується і йому присвоюється відповідне ім’я. Ідентифікація (у даному випадку — встановлення характеристик та розмірів) примітивів та їх розташування здійснюється у діалоговому вікні *Object identification/location*. Дане діалогове вікно може бути викликано також і для вже сформованого об’єкту, якщо для нього необхідно змінити відповідні характеристики. З метою конструктивної композиції області Ω окремі примітиви Ω_r може бути вкрито більш крупними. В частинному випадку даний прийом використовується при необхідності *віднімання* областей [85, 86].

Візуалізація результатів розв’язання задач моделювання динаміки та ідентифікації ММ. В автоматизованому комплексі прийнято дві форми візуалізації результатів розв’язання задачі:

— у вигляді графіків;

— у вигляді оцифрованих масивів.

Графіки (пласкі та тривимірні) використовуються для відображення розв’язків у локальних точках областей моделювання, причому тривимірні графіки використовуються в разі необхідності відображення *профілю* функції, яка моделюється (в якості аргументів виступають: обидві незалежні просторові координати пласкої області моделювання Ω — моделюється профіль статичного режиму або у фіксований момент часу для всієї області Ω; одна просторова незалежна координата пласкої області моделювання Ω та незалежна часова координата — моделюється профіль динамічного режиму по фіксованому перетину). *Оцифровані* масиви (переважно у вигляді впорядкованих таблиць) використовуються для представлення та аналізу полів шуканої функції, причому поля формуються у відповідності до фіксованих кроків моделювання у часі.

На програмному рівні для візуалізації розв’язків задач моделювання динаміки та ідентифікації ММ в автоматизованому комплексі використовуються вбудовані функції *pdeplot* та *pdemesh* програмної платформи Matlab [175, 176, 178]. Вказані функції використовуються для графічного відображення геометрії просторової області Ω, її границь, сітки дискретизації (для зазначених процедур використовується функція *pdemesh*), а також виведення результату розв'язання (зокрема, для формування графіків використовується функція *pdeplot*, а оцифровані масиви формуються окремими підпрограмами, що представлено відповідними M -файлами).

Вид діалогових вікон автоматизованого комплексу представлено у додатку Д.

4.2. Прогнозне моделювання динамічного стану продуктивного пласта з газованою нафтою

Виконаємо прогнозне моделювання динамічного стану продуктивного пласта з газованою «легкою» нафтою, розкритого системою експлуатаційних свердловин. В якості досліджуваного пласта розглянемо ділянку реального покладу нафти, реологічний опис якого дано в роботі [3]. Для прийнятої геометрії покладу, а також дебітів та технологічного призначення експлуатаційних свердловин, на відміну від досліджуваного в роботі [3] флюїду, що фільтрується (двофазного водо-нафтового продукту), будемо розглядати гетерогенну систему у вигляді газованої «легкої» нафти, на підставі фізико-хімічних характеристик якої обраховано коефіцієнти ММ.

З опису [3] відомо, що пласт являє собою (рис. 4.1) прямокутну область Ω $(\bar{z} = (z_1, z_2) \in \Omega$; $z_{1_{\max}} = 6500$ м, $z_{2_{\max}} = 4750$ м$)$ з границею Γ, яку утворюють чотири (попарно паралельні) відрізка Γ_l, $l = \overline{1, 4}$. Фільтраційний

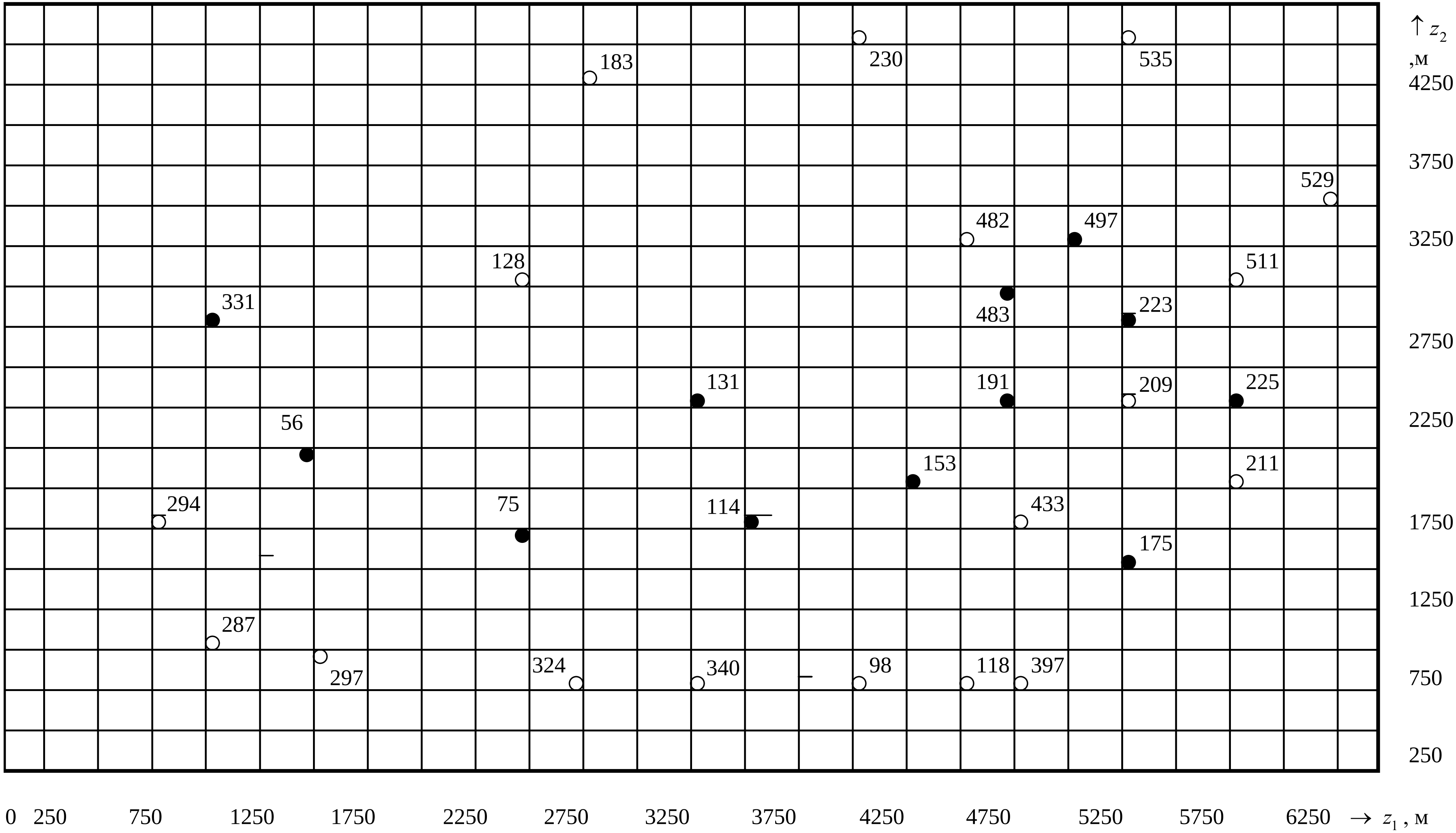


Рисунок 4.1 — Схема розташування експлуатаційних свердловин (ЕС) в просторовій області Ω нафтоносного покладу (пласта)

Умовні позначки: ● — добувна свердловина (ДС), ○ — нагнітальна свердловина (НС) рух газованої нафти в пласті визначається системою з 30 експлуатаційних свердловин (ЕС), з яких: 12 — добувні (ДС) та 18 нагнітальних (НС). Умовні (технологічні) номери та абсолютні координати розташування ЕС наведено в табл. 4.1. Приймається, що для просторових точок $\bar{z}_N$; $N=\overline{1,30}$, в яких розташовано ЕС, відомі «забойні» тиски $u_{зб}(t,\bar{z}_N)\big|_{t=T}$, газонасиченість $S_г(t,\bar{z}_N)\big|_{t=T}$ та фізико-хімічні параметри пористого середовища (шпаруватість $m(t,\bar{z}_N)\big|_{t=T}$ та проникність по відношенню до кожної з фаз газованої нафти $k_j(t,\bar{z}_N)\big|_{t=T}$ (індекс j приймає значення $j=н$, що означає «нафта», та $j=г$, що означає «газ»), а також в'язкість фаз газованої нафти $\mu_j(t,\bar{z}_N)\big|_{t=T}$ (значення індексу j наведено вище) на момент часу $T=0$, що відповідає початку обчислювального експерименту. Інші вихідні дані взято з табл. 4.2. В якості вихідної для побудови ММ досліджуваного процесу фільтрації приймається модель виду (2.22) з початковими (2.23) та граничними (2.24), (2.25) умовами.

Таким чином, підстановка значень коефіцієнтів, та застосування описаних в розділі 2 перетворень, дає ММ ділянки нафтового покладу, яка реалізується:

$$\frac{0{,}053\cdot\partial S_г(t,z)}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial z_i}\left[\left(\frac{3146{,}7\cdot 0{,}12\times 10^{-3}}{0{,}052\cdot 0{,}029}+\frac{1127{,}4}{4{,}6\cdot 0{,}98}\right)\frac{\partial u(t,z)}{\partial z_i}\right]\geq$$

$$\geq\frac{1}{h_l}\sum_{l=1}^{30}\frac{|Q_l|}{0{,}98}, \qquad (4.7)$$

з початковими

$$u(t,z)\big|_{t=0}=u(z) \qquad (4.8)$$

та граничними умовами

$$\frac{\partial u(t,z)}{\partial\eta}\leq 0,\ \left[u^{д}_{зб_i}(z)-u(t,z)\right]\Big|_{z\in\Gamma_i}\leq 0;\ i=\overline{1,N_д}, \qquad (4.9)$$

$$\frac{\partial u(t,z)}{\partial\eta}>0,\ \left[u^{н}_{зб_j}(z)-u(t,z)\right]\Big|_{z\in\Gamma_j}>0;\ j=\overline{1,N_н}, \qquad (4.10)$$

Таблиця 4.1 — ЕКСПЛУАТАЦІЙНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДІЛЯНКИ НАФТОВОГО ПОКЛАДУ

(значення, що варіюються, вказано на момент часу $T = 0$)

№ з/п	Технологічний (умовний) номер свердловини	Абсолютні координати, м		Потужність пласта, м	Шпаруватість пласта, %	Пластовий тиск, атм	Газонасиченість, %	Дебіт, м^3/доб
		z_1	z_2		m			
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**8**	**9**	**10**
1	56	1500	2000	6,2	4,3	124,6	7,6	-135,0
2	75	2500	1500	4,6	6,2	131,2	7,4	-210,0
3	98	4000	500	7,0	5,1	128,4	8,1	68,0
4	114	3500	1500	9,2	7,8	120,3	7,2	-320,0
5	118	4500	500	9,8	6,4	124,6	8,4	96,0
6	128	2500	3000	8,4	5,3	147,3	8,9	260,0
7	131	3250	2250	8,6	4,6	123,7	7,2	-350,0
8	153	4250	3250	6,3	6,1	125,1	7,1	-425,0
9	175	5250	1250	7,4	3,9	124,8	7,4	-240,0
10	183	2750	4250	4,8	7,3	117,4	8,3	85,0
11	191	4750	2250	8,6	5,7	123,4	7,3	-270,0
12	209	5250	2250	7,9	4,9	136,2	8,4	130,0
13	211	5750	1750	8,3	5,4	134,7	8,4	175,0
14	223	5250	2750	9,1	6,7	122,8	7,2	-360,0
15	225	5750	2250	7,6	6,0	124,6	7,3	-190,0
16	230	4000	4500	5,3	3,8	124,8	8,2	74,0
17	287	1000	750	6,1	4,4	118,4	8,3	83,0
18	294	750	2000	5,4	5,2	119,2	8,4	67,0
19	297	1500	750	6,6	6,8	119,6	8,3	58,0
20	324	2750	500	4,7	3,7	118,6	8,2	65,0
21	331	1000	3000	6,8	4,3	123,4	7,4	-180,0
22	340	3250	500	5,1	4,6	126,3	8,1	62,0
23	397	4750	500	5,8	6,5	125,2	8,2	83,0
24	433	4750	1500	6,5	5,9	129,4	8,3	125,0
25	482	4500	3250	6,3	7,1	126,1	8,4	164,0
26	483	4750	3000	7,9	6,9	123,7	7,3	-220,0
27	497	5000	3250	8,3	4,5	123,5	7,2	-280,0
28	511	5750	3000	8,4	7,0	128,3	8,4	185,0
29	529	6250	3500	6,7	5,3	121,6	8,4	63,0
30	535	5250	4500	5,8	4,9	124,2	8,4	56,0

Таблиця 4.2 — ВИХІДНІ ДАНІ ДЛЯ ЧИСЕЛЬНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ДІЛЯНКИ НАФТОВОГО ПОКЛАДУ

(фізико-хімічні параметри фаз вказано на момент часу $T = 0$)

№ з/п	**Найменування параметру**	**Позначення**	**Одиниця виміру**	**Значення**
1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	Розміри пласта	$z_{1\max} \times z_{1\max}$	м × м	6500 × 4750
2	Крок дискретизації за просторовими координатам	$\Delta z_1, \Delta z_2$	м, м	125, 125
3	Розмірність сітки просторових координат	R, W		52 × 40
4	Число експлуатаційних свердловин, з них: — добувних — нагнітальних	$K_1 + K_2$ K_1 K_2		30 12 18
5	Час моделювання	t_k	доба	160
6	Крок дискретизації за часовою координатою	Δt	доба	40
7	Число кроків моделювання по часовій координаті			4
8	Шпаруватість (середнє значення по пласту)	$m(z)$	%	5,3
9	Пропускна спроможність границі	τ		0
10	Граничний градієнт тиску	G	атм	15
11	В’язкість газової фази	$\mu_{г}$	мПа · с	0,052
12	В’язкість нафтової фази	$\mu_{н}$	мПа · с	4,6
13	Проникність для газової фази	$k_{г}$	мД	3146,7
14	Проникність для нафтової фази	$k_{н}$	мД	1127,4
15	Об’ємний коефіцієнт газу	$B_{г}$	—	0,029
16	Коефіцієнт розчинності газу в нафті	$R_{sн}$	—	$0{,}12 \times 10^{-3}$

де η — нормаль до границі Γ області Ω.

Знак рівності в умові (4.9) визначає відсутність перетоку газованої нафти через границю Γ області Ω (тобто відповідає нульовій пропускній здатності границі $\tau = 0$ за певного перебігу процесу фільтрації, що вказано в табл. 4.2).

У відповідності до модифікованого методу МФГ складемо зведену до (4.7) — (4.10) задачу, яка, з урахуванням прийнятих вихідних даних, буде мати вигляд (для моменту часу $t = 0$)

$$\frac{0{,}053 \cdot \partial p_S^*(t,z)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_i}\left[\left(\frac{3146{,}7 \cdot 0{,}12 \times 10^{-3}}{0{,}052 \cdot 0{,}029} + \frac{1127{,}4}{4{,}6 \cdot 0{,}98}\right)\frac{\partial p_u^*(t,z)}{\partial z_i}\right] \geq$$

$$\geq \frac{1}{h_l}\sum_{l=1}^{30}\frac{|Q_l|}{0{,}98}, \qquad (4.11)$$

з початковими

$$p_u^*\Big|_{t=t_k} = 2u(t_k, z); \quad p_S^*\Big|_{t=t_k} = 2S_{\text{г}}(t_k, z), \quad \forall \bar{z}, \bar{z}_j \in \Omega \qquad (4.12)$$

та граничними умовами

$$\left.\frac{\partial p_S^*(t,z)}{\partial \eta}\right|_{z=0} \geq 0, \qquad (4.13)$$

де η — нормаль до границі Γ області Ω.

Для прийнятих початкових та граничних умов за результатами розв'язування прямої (4.7) — (4.10) та зведеної (4.11) — (4.13) задач, у відповідності до процедури методу МФГ (розділ 2.3 та додаток В) виконується моделювання процесу фільтрації газованої «легкої» нафти. Результати розв'язування задачі представлено на рис. 4.2 та рис. 4.3.

Порівняльне моделювання процесів фільтрації у гетерогенних системах по методу МФГ і із застосуванням ММ на основі ДРЧП показало підвищення якості моделювання за рахунок зменшення середньоквадратичної похибки на $(4\ldots8)\%$.

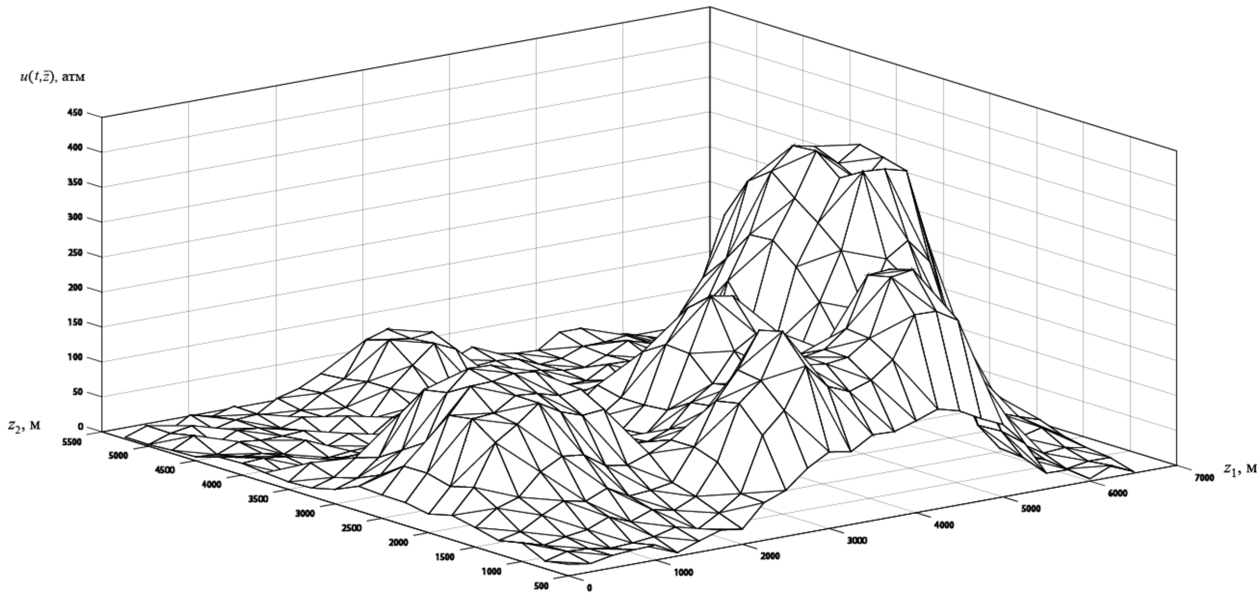


Рисунок 4.2 — Поле пластового тиску $u = u(t, z)$

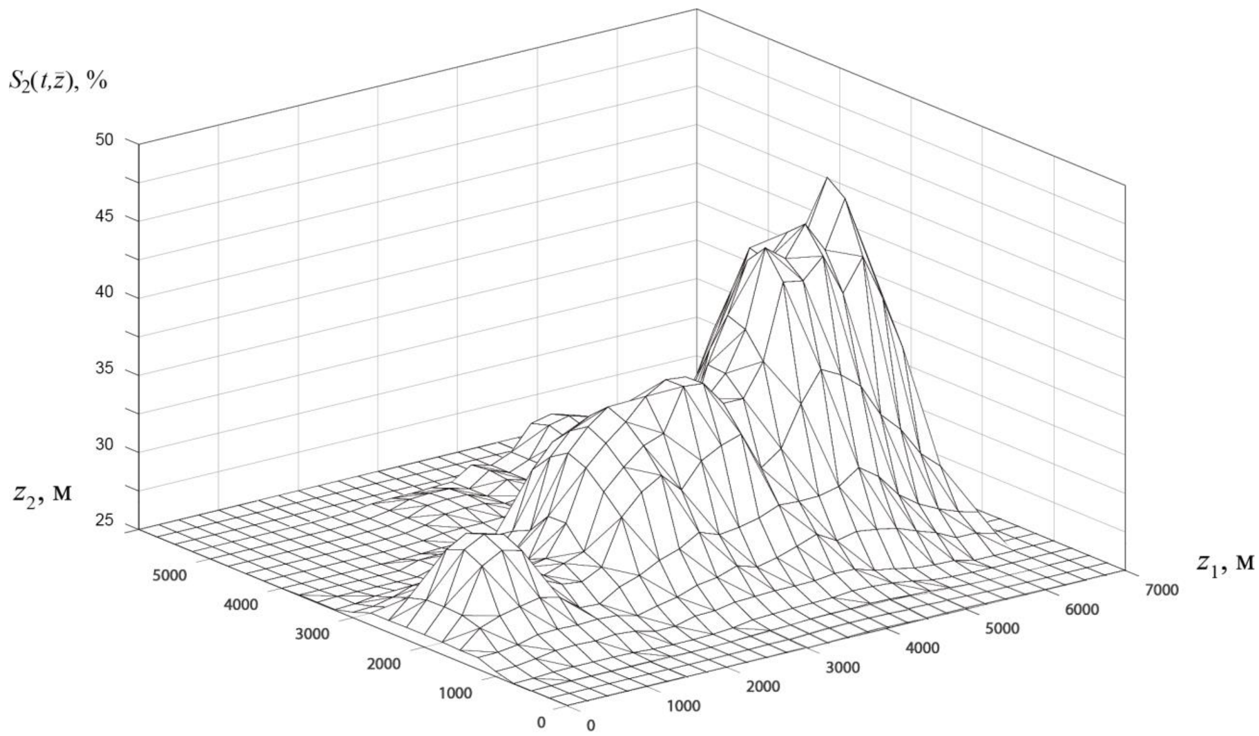


Рисунок 4.3 — Поле газонасиченості $S_2 = S_2(t, z)$

4.3. Моделювання процесу фільтрації у двофазній фрактально-гетерогенній системі

В якості модельного прикладу процесу фільтрації у фрактально-гетерогенній системі розглянемо водонапірний режим розробки нафтового покладу, який реалізовано для пласта, що розкрито системою двох свердловин: добувною (ДС) та нагнітальною (НС). Розвиток процесу фільтрації у двофазній (гетерогенній) системі можна характеризувати просуванням *фронту* поділу між фазами (нафтою, що витискається, та водою, яка витискає), а «гладкість» цього фронту визначає прояв *фрактальних властивостей* процесу фільтрації. При цьому мірою оцінки «гладкості» фронту між фазами гетерогенної системи може слугувати «стрибок» насиченості в функції Баклея-Леверета (вираз (3.1)) як зазначалося в розділі 3.1 дисертаційної роботи.

Геометрію області моделювання Ω утворює пласка прямокутна область з максимальними значеннями незалежних просторових координат $z_{1_{\max}}$ та $z_{2_{\max}}$. Вихідні дані для розв'язування задачі наведено у табл. 4.3.

За вихідну ММ процесу, що розглядається, оберемо систему (3.12) — (3.14), яка, з урахуванням вихідних даних, приймає вигляд (наявність капілярного тиску $\tilde{P}_c$ не враховується) [188]

$$-\frac{0{,}03\cdot\partial S_1}{\partial t}-\frac{J(S_1)}{0{,}3\cdot10^{-2}}\left\{\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial z_i}\left[\frac{\partial\tilde{P}}{\partial z_i}-G\left(\left|\frac{\partial\tilde{P}}{\partial z_i}\right|\right)^{-1}\right]\right\}=0{,}16\cdot Q_1\,, \qquad (4.14)$$

$$\frac{0{,}03\cdot\partial S_2}{\partial t}-\frac{J(S_2)}{0{,}51\cdot10^{-3}}\left\{\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial z_i}\left[\frac{\partial\tilde{P}}{\partial z_i}-G\left(\left|\frac{\partial\tilde{P}}{\partial z_i}\right|\right)^{-1}\right]\right\}=0{,}16\cdot Q_2\,, \qquad (4.15)$$

з початковими та граничними умовами

$$S_2(0,z)\Big|_{z\in\Omega}=0{,}5\,;\quad \tilde{P}(0,z)\Big|_{z\in\Omega}=155\ \text{атм}\,, \qquad (4.16)$$

$$\left.\frac{\partial\tilde{P}}{\partial\eta}\right|_{L\in\Gamma}>0\,;\quad \left.\frac{\partial S_j}{\partial\eta}\right|_{L\in\Gamma}>0\,,\quad j=1,2\,. \qquad (4.17)$$

Таблиця 4.3 — ВИХІДНІ ДАНІ ДЛЯ ЧИСЕЛЬНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПРОЦЕСУ ФІЛЬТРАЦІЇ У ФРАКТАЛЬНО-ГЕТЕРОГЕННІЙ СИСТЕМІ

№ з/п	Найменування параметру	Позначення	Одиниця виміру	Числове значення
1.	Розміри пласта		м х м	600 x 800
2.	Крок дискретизації за просторовими координатами		м, м	50, 50
3.	Розмірність сітки просторових координат		—	12, 16
4.	Крок дискретизації за часовою координатою		сутки	90
5.	Потужність пласта		м	6
6.	Шпаруватість пористого середовища		%	3
7.	Початкове значення пластового тиску		атм	155
8.	Початкове значення водонасиченості		%	50
9.	Граничний градієнт	K_1	атм	65
10.	Число нагнітальних свердловин	Q_1	—	1
11.	Дебіт фази, яка витискається		м³/с	0,15
12.	Число нагнітальних свердловин		—	1
13.	Дебіт фази, яка витискає	k_1	м³/с	0,25
14.	Проникність фази, яка витискається	μ_1	мД	1427,3
15.	В’язкість фази, яка витискається	k_2	мПа · с	4,6
16.	Проникність фази, яка витискає	μ_1	мД	2173,8
17.	В’язкість фази, яка витискає		мПа · с	1,1

Для розв’язання поставленої задачі (4.14) — (4.17) застосовано модифікований метод МФГ, алгоритм якого детально описано у додатку Д та розділі 2.3.

Результат моделювання ілюструє рис. 4.4, на якому виділено фронт «заводнення» пласта (суть шуканий фронт поділу між фазами) навколо добувної свердловини. На рисунку 4.4. цифрами в вузлах дискретизації (та відповідними відтінками кольору) показано динаміку просування фронту «заводнення» пласта.

Фрактальну характеристику процесу фільтрації — *фрактальну розмірність* — визначимо на підставі виразу (3.11), враховуючи реальні геометричні параметри елементів реологічної структури процесу, а саме: лінійного розміру «пальця» компоненти, яка витискає (води); усередненого розміру «зерна» пористого простору; розміру фрактального кластера (радіусу сфери, яка охоплює «палець»). Підстановка в (3.11) числових значень вказаних параметрів, визначених у відповідності до рис. 4.3, дає оцінку:

$$D = \left[\ln(150) - \ln(0{,}1)\right] / \left[\ln(75) - \ln(0{,}1)\right] =$$

$$= \left[5{,}106 - (-2{,}302)\right] / \left[4{,}317 - (-2{,}302)\right] = 1{,}104 \; .$$

Аналіз фрактальної розмірності (ступеню само подібності [189]) дає змогу зробити такий висновок: чим більше значення фрактальної розмірності, тим більше збуреність фронту поділу фаз. Слід зазначити, що до збільшення фрактальної розмірності можуть призвести значні дебіти експлуатаційних свердловин (як джерела збурень), висока шпаруватість пористого простору, а також високі значення проникності фаз гетерогенної системи.

Експериментальні дослідження показали, що при значеннях фрактальної розмірності $D \to 1{,}0$ фрактальна структура процесу фільтрації у гетерогенній системі зникає, а фронт поділу фаз набуває властивості «гладкості».

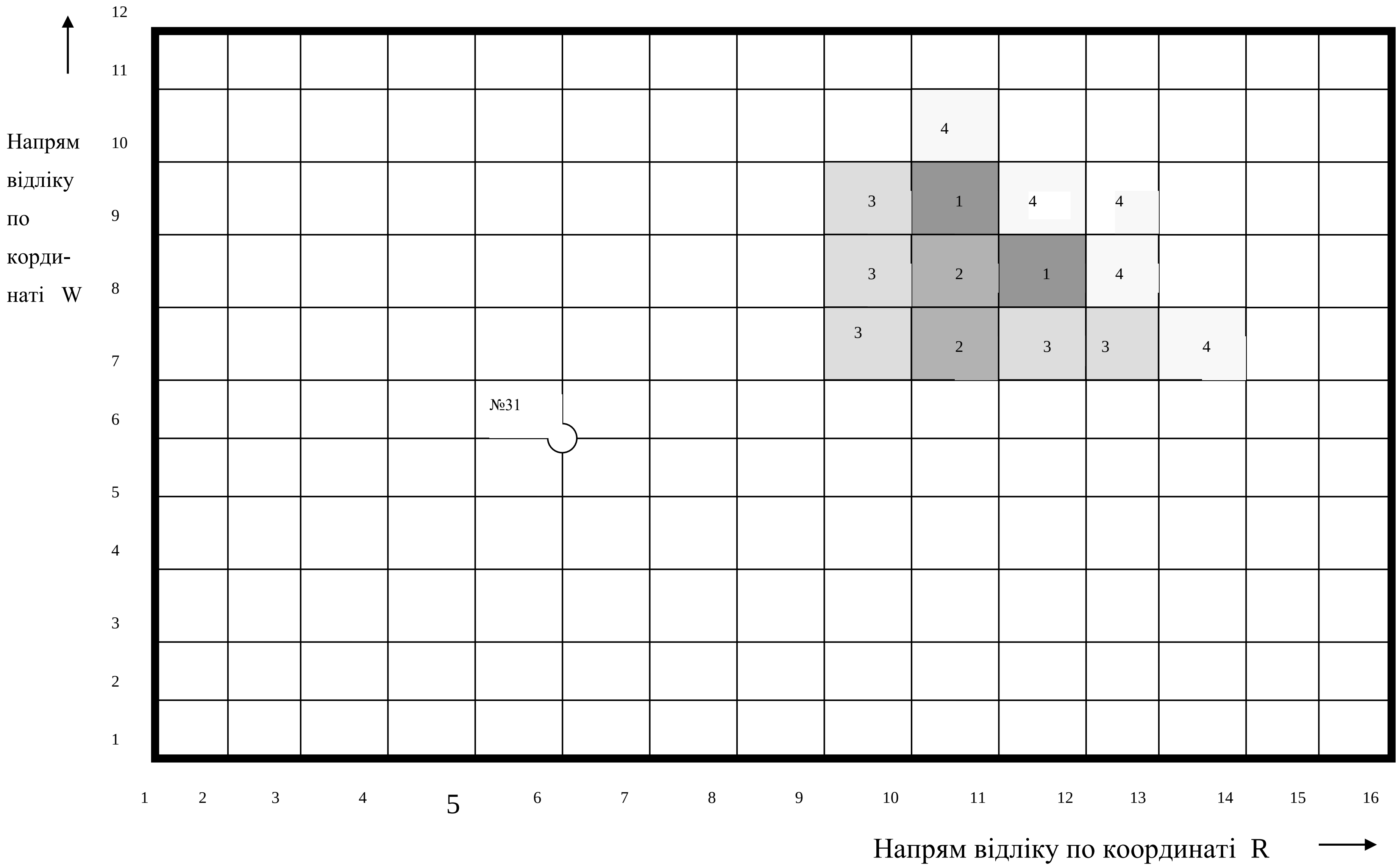


Рисунок 4.4 — Моделювання процесу фільтрації у фрактально-гетерогенній системі (№31 – нагнітальна свердловина. Цифри в вузлах дискретизації показують (умовно) динаміку просування фронту «заводнення» пласта)

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 4

1. Розроблено та запропоновано інструментальні програмні засоби (ІПЗ) розв’язування задач моделювання процесів фільтрації у гетерогенних системах. ІПЗ реалізовано на платформі спеціалізованого пакету Matlab.

2. Розглянуто досвід застосування розроблених у дисертаційній роботі ММ, методів та засобів математичного моделювання в практиці дослідження процесів фільтрації у гетерогенних і фрактально-гетерогенних системах.

На прикладах реальних процесів фільтрації виконано розв’язування наступних практичних задач:

— виконано прогнозне моделювання динамічного стану продуктивного пласта з газованою нафтою;

— виконано моделювання процесу фільтрації у двофазній фрактально-гетерогенній системі та визначено фрактальну характеристику процесу — фрактальну розмірність. Аналіз останньої дозволив якісно оцінити ступінь «гладкості» фронту поділу фаз гетерогенної системи. Моделюванням показано, що при значеннях фрактальної розмірності $D \to 1{,}0$ фрактальна структура процесу фільтрації у гетерогенній системі зникає, а фронт поділу фаз набуває властивості «гладкості».

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі розв'язано важливу наукову задачу, яка полягає у створенні моделей, методу чисельного моделювання процесів фільтрації у гетерогенних системах на основі застосування та розвитку апарату варіаційних нерівностей, а також у розробці комп'ютерно-орієнтованих інструментальних засобів моделювання, які забезпечують ефективне розв'язування прикладних задач при дослідженні і практичному використанні широкого класу природних та технологічних процесів і об'єктів.

В тому числі отримано наступні теоретичні та практичні результати:

1. Виконано аналіз основних обчислювальних процесів, які реалізуються в системах моделювання природних та технологічних об'єктів, що відрізняються явищами фільтрації (реології) гетерогенного характеру. Показано, що застосування існуючих систем моделювання процесів фільтрації з притаманною гетерогенною поведінкою, обмежено недостатньою ефективністю та універсальністю цих систем та зумовлено дією комплексу протиріч. Зокрема, при значному зростанні можливостей та зменшенням вартості інструментальних засобів має місце обмеженість методів побудови відповідних систем моделювання; при вираженому інформаційному характері обчислювальних процедур в системах моделювання недостатньо знаходять застосування адекватні ММ як первинне джерело даних для побудови систем моделювання; при схожості задач в системах моделювання, що розв'язуються (наприклад, реалізація виразів динаміки та побудова полів шуканих функцій), в них спостерігається обмеженість застосування уніфікованих методів та процедур відшукання відповідних розв'язків; при розширенні кола задач, що розв'язуються, мають місце обмежені можливості систем моделювання (наприклад, модельної підтримки, методологічного та алгоритмічного забезпечення).

2. Показано, що найбільш повно особливості фізики перебігу процесів фільтрації у гетерогенних системах (неоднорідність фізико-

хімічного складу субстанції, що фільтрується, або середовища, в якому відбувається процес фільтрації; наявність або поява фазових переходів, спричинених зміною умов перебігу процесу фільтрації; різко виражена спрямованість розвитку; наявність граничних градієнтів функції стану; в’язкопластичність субстанції, яка фільтрується тощо) описуються в рамках апарату варіаційних нерівностей у частинних похідних. Це дозволило обґрунтувати вибір варіаційних нерівностей в якості адекватних ММ процесів фільтрації з притаманною гетерогенною поведінкою, а також напрямку досліджень щодо створення та практичного застосування систем моделювання зазначеними процесами.

3. Виконано систематизацію та класифікацію процесів фільтрації у гетерогенних системах в основу яких покладено особливості якісного перебігу фізичних явищ досліджуваних процесів. На підставі запропонованих систематизації та класифікації розроблено ММ процесів фільтрації з притаманною гетерогенною поведінкою у вигляді варіаційних нерівностей у частинних похідних (з відповідними початковими та граничними умовами) для яких сформульовано і строго доведено теореми існування та єдиності отримуваних розв’язків. Дані ММ являють собою модельну підтримку розробленої системи моделювання досліджуваних процесів і дозволяють підвищити якість моделювання (зменшити нормовану середньоквадратичну похибку на $(4\ldots8)\%$) у порівнянні з моделями у вигляді диференційних рівнянь у частинних похідних за рахунок можливості математичної формалізації особливостей якісного перебігу фізичного процесу (зокрема, фільтрації газорідинних сумішей як типових випадків гетерогенних систем: питомої ваги газової фази у суміші, здатності розчинності газової фази у рідинній фазі суміші, умов утворення та розвитку газової фази в суміші, впливу граничного градієнта на реологію суміші).

4. Набув подальшого розвитку (для випадку процесів фільтрації у гетерогенних системах) метод обчислювальної реалізації ММ, які представлено у вигляді варіаційних нерівностей у частинних похідних.

Метод являє собою модифікацію методу, в основу якого покладено оптимізаційну процедуру максимуму функції Гамільтона (метод МФГ).

Розроблено дискретні ММ процесів фільтрації у гетерогенних системах, а також алгоритмічні засоби реалізації цих моделей на підставі модифікованого методу МФГ.

5. Розроблено ММ процесів фільтрації гетерогенних систем в разі, якщо останні характеризуються властивостями фрактальності (самоподібності) структури, причому як самої субстанції, що здійснює фільтраційний рух (зокрема, наприклад: багатофазні рідини, що не змішуються; емульсії; суспензії тощо), так і просторової області, в якій відбувається процес фільтрації. Область теоретичного та практичного застосування розроблених ММ поширюється за умови врахування взаємодії часток дисперсної фази, причому з реологічними властивостями, які залежать від часових характеристик (наприклад, тиксотропних) або з нелінійними ефектами (зокрема, коливаннями реологічних характеристик, пов’язаних із взаємодією структурних елементів).

Моделі також представлено в класі варіаційних нерівностей у частинних похідних та реалізовано на основі модифікованого методу МФГ.

Показана можливість врахування розривності коефіцієнтів та неточності вхідних даних при моделюванні процесів фільтрації у фрактально-гетерогенних системах, що представлено та сформульовано як некоректно поставлена задача. Останню розв’язано на основі вейвлет підходу.

6. Розроблено та запропоновано автоматизований комплекс інструментальних програмних засобів (ІПЗ) розв’язування задач моделювання процесів фільтрації у гетерогенних системах. ІПС дозволяють виконати різнобічний цикл прикладних досліджень зазначених процесів в умовах обчислювального експерименту. Застосування комплексу ІПЗ дозволило скоротити час моделювання в $(1{,}2\ldots1{,}4)$ рази у порівнянні з базовим пакетом Matlab.

7. Розглянуто досвід застосування розроблених у дисертаційній роботі ММ, методу та засобів математичного моделювання в практиці дослідження процесів фільтрації у гетерогенних і фрактально-гетерогенних системах. Зокрема розв’язано наступні прикладні задачі:

— виконано прогнозне моделювання динамічного стану продуктивного пласта з газованою нафтою, ММ якого визначено на підставі запропонованих в дисертаційній роботі класифікаційних ознак процесів фільтрації у гетерогенних системах, причому достовірність правильної класифікації підвищено за рахунок зменшення сумарної похибки 1 та 2 роду на $(3\ldots5)\%$;

— виконано моделювання процесу фільтрації у двофазній фрактально-гетерогенній системі та визначено фрактальну характеристику процесу — фрактальну розмірність. Аналіз останньої дозволив якісно оцінити ступінь «гладкості» фронту поділу фаз гетерогенної системи. Моделюванням показано, що при значеннях фрактальної розмірності $D \to 1{,}0$ фрактальна структура процесу фільтрації у гетерогенній системі зникає, а фронт поділу фаз набуває властивості «гладкості».

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Азиз, Х. Математическое моделирование пластовых систем [Текст] / Х. Азиз, Э. Сеттари. — М.: Недра, 1982. — 406 с.
2. Кричлоу, Генри Б. Современная разработка нефтяных месторождений — проблемы моделирования [Текст] / Генри Б. Кричлоу. — М.: Недра, 1979. — 302 с.
3. Верлань, А. Ф. Математическое моделирование аномальных диффузионных процессов [Текст] / А. Ф. Верлань, С. А. Положаенко, Н. Г. Сербов. — К.: Наукова думка, 2011. — 416 с.
4. Мирзаджанзаде, А. Х. Моделирование процессов нефтегазодобычи. Нелинейность, неравновесность, неопределенность [Текст] / А. Х. Мирзаджанзаде, М. М. Хасанов, Р. Н. Бахтизин. — М.-Ижевск: АНО ИКИ, 2004. — 368 с.
5. Сулейманов, Б. А. Экспериментальные исследования фильтрации релаксирующих жидкостей в неоднородных пористых средах [Текст] / Б. А. Сулейманов, Э. М. Аббасов, Н. С. Алиев // Инженерно-физический журнал. — 1996. — Т. 69, № 1. — С. 9 — 15.
6. Мацевитый, Ю. М. Моделирование нелинейных процессов в распределенных системах [Текст] / Ю. М. Мацевитый, В. Е. Прокофьев — К.: Наукова думка, 1985.— 303 с.
7. Бутковский, А. Г. Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами [Текст] / А. Г. Бутковский, Л. Ш. Пустыльников. — М.: Наука, 1980. — 383 с.
8. Коздоба, Л. А. Электрическое моделирование явлений тепло- и массопереноса.— М.: Энергия, 1972.— 296 с.
9. Коздоба, Л. А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. — М.: Наука, 1975.— 227 с.

10. Коздоба, Л. А. Методы решения обратных задач теплопроводности [Текст] / Л. А. Коздоба, П. Г. Круковский. — К,: Наукова думка, 1982. — 360 с.

11. Ажогин, В. В. Автоматизированное проектирование математического обеспечения АСУ ТП [Текст] / В. В. Ажогин, М. З. Згуровский. — К.: Выща шк., 1986. — 334 с.

12. Самарский, А. А. Теория разностных схем [Текст] / А. А. Самарский. — М.: Наука, 1983. — 616 с.

13. Самарский, А. А. Методы решения сеточных уравнений [Текст] / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. — М.: Наука, 1978. — 591 с.

14. Самарский А. А. Математическое моделирование на ЭВМ [Текст] / А. А. Самарский. — М.: Наука, 1989. — Т.1. — 357 с.

15. Самарский, А. А. Численные методы: Учеб. Пособие для ВУЗов [Текст] / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — М.: Наука, 1989. — 429 с.

16. Рихтмайер, Р. Разностные методы решения краевых задач [Текст] / Р. Рихтмайер, К. Мортон. — М.: Мир, 1982. — 418 с.

17. Фадеев, Д. К. Вычислительные методы линейной алгебры [Текст] / Д. К. Фадеев, В. Н. Фадеева. — М.: Физматгиз, 1963. — 734 с.

18. Марчук, Г. И. Методы вычислительной математики [Текст] / Г. И. Марчук. — М.: наука, 1989. — 608 с.

19. Виноградов, Г. В. Реология полимеров [Текст] / Г. В. Виноградов, А. Я. Малкин. — М.: Химия, 1977. — 440 с.

20. Сюняев, З. И. Реология нефтяных дисперсных систем [Текст] / З. И. Сюняев, Р. З. Сюняев, А. Н. Садыков. — М.: Химия, 1990. — 240 с.

21. Баренблатт, Г. И. Движение жидкостей и газов в природных пластах [Текст] / Г. И. Баренблатт, В. М. Ентов, В. М. Рыжик. — М.: Недра, 1984. — 211 с.

22. Хасанов, М. М. Нелинейные и неравновесные эффекты в реологически сложных средах [Текст] / М. М. Хасанов, Г. Т. Булгакова. — М.-Ижевск: АНО ИКИ, 2003. — 288 с.

23. Меликов, Г. Х. Экспериментальное исследование влияния релаксационных свойств газожидкостных систем на фильтрацию в неоднородных пористых средах [Текст] / Г. Х. Меликов, М. Г. Азизов // Изв. ВУЗов СССР. Нефть и газ. — 1988, № 10. — С. 35 — 38.

24. Некоторые вопросы гидродинамики вязких и вязкопластичных жидкостей в применении к нефтедобыче [Текст]: Автореферат на соискание ученой степени д-ра техн. наук / Канд. техн. наук А. Х. Мирзаджанзаде. — Аккад. наук СССР: Ин- механики, 1957. — 36 с.

25. Мирзаджанзаде, А. Х. Вопросы гидродинамики вязкопластичных и вязких жидкостей в нефтедобыче [Текст] / А. Х. Мирзаджанзаде. — Баку: Азнефтеиздат, 1959 — 328 с.

26. Баренблатт, Г. И. Неравновесные эффекты при фильтрации вязкоупругих жидкостей [Текст] / Г. И. Баренблатт, Ю. Г. Мамедов, А. Х. Мирзаджанзаде и др. // Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 5, С. 76 — 83.

27. Warren J. E. Flow in heterogeneous porous media / J. E. Warren, H. S. Price // SPEJ, 1968, № 5. — P. 203 — 209.

28. Мирзаджанзаде, А. Х. Подземная гидрогазодинамика: Учеб. пособие [Текст] / А. Х. Мирзаджанзаде, И. М. Аметов, К. С. Басниев. — М.: Гос. акад. нефти и газа им. И. М. Губкина, 1992. — 473 с.

29. Вахитов, Г. Г. Особенности вытеснения водой нефтей с вязкоупругими свойствами [Текст] / Г. Г. Вахитов, А. Х. Мирзаджанзаде, В. М. Рыжик и др. // Нефтяное хозяйство. — 1977, № 4. — С. 38 — 41.

30. Згуровский, М. З. Анализ и управление односторонними физическими процессами [Текст] / М. З. Згуровский, А. Н. Новиков. — К.: Наукова думка, 1996. — 326 с.

31. Полубаринова-Кочина, П. Я. Теория движения грунтовых вод [Текст] / П. Я. Полубаринова-Кочина. — М.: Гостоптехиздат, 1977. — 664 с.

32. Булыгин, В. Я. Гидромеханика нефтяного пласта [Текст] / В. Я. Булыгин. — М.: Недра, 1974. — 354 с.

33. Баренблат, Г. И. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа [Текст] / Г. И. Баренблат, В. М. Ентов, В. М. Рыжик.— М.: Недра, 1972. — 285 с.

34. Монин, А. С. Статистическая гидромеханика [Текст] / А. С. Монин, А. М. Яглом. — М.: Наука, 1967. — Ч. 1. — 293 с.

35. Швидлер, М. И. Статистическая гидромеханика пористых сред [Текст] / М. И. Швидлер. — М. Недра, 1985. — 288 с.

36. Бернадинер, М. Г. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей [Текст] / М. Г. Бернадинер, В. М. Ентов. — М.: Наука, 1975. — 199 с.

37. Сейвинс, Дж. Неньютоновское течение в пористой среде [Текст] / Дж. Сейвинс // Механика. Сб. переводов, 1974, № 2 (144), С. 59 — 115.

38. Лионс, Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными [Текст] / Ж.-Л. Лионс — М.: Мир, 1972.— 414 с.

39. Панагиатопулос, П. Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии [Текст] / П. Панагиатопулос. — М.: Мир, 1989. — 494 с.

40. Главачек, И. Решение вариационных неравенств в механике [Текст] / И. Главачек, Я. Гаслингер, И. Нечас, Я. Ловишек. — М.: Мир, 1986. — 270 с.

41. Положаєнко, С. А. Варіаційна постановка задачі витискання в’язко-пластичної рідини в’язкою [Текст] / С. А. Положаєнко // Тр. Одесского политехн. ун-та. — Одесса, 1999. — Вып. 1 (7). — С. 245 — 248.

42. Дюво, Г. Неравенства в механике и физике [Текст] / Г. Дюво, Ж.-Л.. Лионс. — М.: Наука, 1980.— 383 с.

43. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелынейных краевых задач [Текст] / Ж.-Л. Лионс.— М.: Мир. 1972.— 587 с.

44. Чарный, И. А. Подземная гидрогазодинамика [Текст] / И. А. Чарный. — М.: Энергия, 1983. — 378 с.

45. Коллинз, Р. Течение жидкостей через пористые материалы [Текст] / Р. Коллинз. — М.: Мир, 1994. — 375 с.

46. Уолис, Г. Одномерные двухфазные течения [Текст] / Г. Уолис. — М.: Мир, 1992. — 440 с.

47. Сулейманов, Б. А. Особенности фильтрации гетерогенных систем [Текст] / Б. А. Сулейманов. — М.-Ижевск: АНО ИКИ, 2006. — 354 с.

48. Thomas L. K. Reservoir simulation of variable double-point problems / L. K. Thomas, W. B Lumpkin, G. M. Reheis // Trans. SPE of AIME. — 2007, vol. 261. — P. 10 — 16.

49. Saez A. The effective homogeneous behavior of heterogeneous porous media / A. Saez, C. J. Otero, I. Rusinek // Transport in porous media. — 1989, № 4. — P. 212 — 238.

50. Marshall R. J. Flow of viscoelastic fluids through porous media / R. J. Marshall, A. B. Metzner // Industrial Engineering Chemistry Fundamentals. — 1967, 6(3). — P. 393 — 400.

51. Abdo M. K Why scale forms and how to predict it // SPE Production and Facilities, February. — 1994. — P. 47 — 54.

52. Evenoldsen, J. Pressure Drop Through Gravel Packs / J. Evenoldsen, H. K. Rasmusen, A. Seasen // Annual Transactions of the Nordic Rheology Society. — 1995. — V. 3. — PP. 45 — 57.

53. Григоращенко, В. И. Применение полимеров в добыче нефти [Текст] / В. И. Григоращенко, Зайцев Ю. В., А. Х. Мирзаджанзаде и др. — М.: Недра, 1978. — 217 с.

54. Chauveteau, G. Influence of Microgels in Polysaccharide Solutions on Their Flow Behavior Through Porous Media / G. Chauveteau, N. Kohler // SPE Journal. — 1984, № 24 (3). — P. 361 — 368. doi: 10.2118/9295-PA.

55. De Gennes, P. G. Scaling Concept in Polymer Physics / P. G. De Gennes // Journal Polym. Sci. Polym. Lett. Ed. — 1979, № 17. — P. 379 — 386.

56. Сулейманов, Б. А. О фильтрации дисперсных систем в неоднородной пористой среде [Текст] / Б. А. Сулейманов // Коллоидный журнал. — 1995. — Т. 57, № 5. — С. 743 — 746.

57. Сулейманов, Б. А. Особенности фильтрации неньютоновских систем в неоднородных пористых средах [Текст] / Б. А. Сулейманов // Нефтяное хозяйство. — 1995, № 7. — С. 47 — 49.

58. Бельков, В. М. Теория нестационарного течения неньютоновских жидкостей в капилляре [Текст] / В. М. Бельков, Н. Б. Урьев // Коллоидный журнал. — 1995. — Т. 57, № 2. — С. 47 — 59.

59. Школьников, Е. И. Уточнение выражений для проницаемости пористого слоя при вязком течении газов и жидкостей под действием перепада давления [Текст] / Е. И. Школьников, С. Н. Ковтунов, В. В. Волкова // Коллоидный журнал. — 1996. — Т. 58, № 4. — С. 553 — 561.

60. Wycoff, R. D. Flow of Gas-Liquid Mixtures through Unconsolidated sands / R.D. Wycoff, M. O. Botset // Journal Physics. — 1936, V. 7. — P. 61 — 73.

61. Мирзаджанзаде, А. Х. Технология и техника добычи нефти [Текст] / А. Х. Мирзаджанзаде, А. А. Болотов, Г. Х. Меликов. — М.: Недра, 1986. — 216 с.

62. Федер, Е. Фракталы [Текст] / Е. Федер. — М.: Мир, 1991. — 254 с.

63. Смирнов, Б. М. Физика фрактальных кластеров [Текст] / Б. М. Смирнов. — М.: Наука, 1991. — 133 с.

64. Гийон, Э. Фракталы и перколяция в пористой среде [Текст] / Э. Гийон, К. Д. Минтеску, Ж. П. Юлен, С. Ру // Успехи физических наук. — 1991. — Т. 161, № 10. — С. 121 — 128.

65. Katz, A. J. Fractal Sandstone Pores: Implications between for Conductivity and Pore Formation / A. J. Katz, A. H. Thompson // Physical Review Letters. — 1985. — V. 54. — P. 1325 — 1332.

66. Moulu, J. C. A new model for three-phase relative permeability’s based on a fractal representation of the porous media / J. C. Moulu, O. Vizika, F. Kalandjian // SPE Formation Evaluation. — 1997, August. — SPE 38891. — P. 147 — 158.

67. Зосимов, В. В. Динамическая фрактальная структура эмульсий, обусловленная движением и взаимодействием частиц. Численная модель [Текст] / В. В. Зосимов, Д. Н. Тарасов // Журнал экспериментальной и теоретической физики . — 1997. — Т. 111. — Вып. 4. — С. 1314 — 1319.

68. Черкашинин, Г. Ю. Оценка фрактальной размерности дисперсных систем на основании уравнения, описывающего адсорбцию в микропорах [Текст] / Г. Ю. Черкашинин, В. А. Дроздов // Журнал физической химии. — 1998. — Т. 72, № 1. — С. 88 — 92.

69. Кузнецов, О. Л. Применение ультразвука в нефтяной промышленности [Текст] / О. Л. Кузнецов, С. А. Ефимова. — М.: Недра, 1983. — 192 с.

70. Гадиев, С. М. Использование вибраций в добыче нефти[Текст] / С. М. Гадиев. — М.: Недра, 1997. — 159 с.

71. Боголюбов, Н. Б. Интенсификация добычи нефти низкочастотным акустическим воздействием [Текст] / Б. Н. Боголюбов, В. Н. Лобанов, Л. С. Бриллиант и др. // Нефтяное хозяйство. — 2000, № 9. — С. 30 — 35.

72. Кузнецов, О. Л. Физические основы вибрационного воздействия на нефтегазовые пласты [Текст] / О. Л. Кузнецов, Э. М. Ситмкин, Дж. Чилингар. — М.: Мир, 2001. — 206 с.

73. Стаховский, И. Р. Вейвлетный анализ временных сейсмических рядов [Текст] / И. Р. Стаховский // Доклады РАН. — 1996. — Т. 350, № 3. — С. 393 — 396.

74. Sastova, N. A wavelet multilevel solution of the stationary geoelectrical field in the non-homogeneous environment / N. Sastova, E. Drstakova, P. A. Kucera // Математическое моделирование. — 2002. — Т. 14, № 5. — С. 75 — 88.

75. Нигматулин, Р. И. Основы механики гетерогенных сред [Текст] / Р. И. Нигматулин. — М.: Наука, 1978. — 374 с.

76. Яновский, Ю. Г. Механика и наномеханика структурно-сложных и гетерогенных сред [Текст] / Ю. Г. Яновский. — М. : Альянстрансатом, 2010. — 162 с.

77. Северюхин, А. В. Механика и физико-химия гетерогенных сред [Текст] / А. В. Северюхин. — Ижевск : ИМ, 2015. — 379 с.

78. Пальмов, В. А. Элементы тензорной алгебры и тензорного анализа: Учебное пособие [Текст] / В. А. Пальмов. – СПб: Изд-во Политехн. ун-та, 2008. – 109 с.

79. Кувыркин, Г. Н. Математическая модель нелокальной термовязкоупругой среды. Определяющие уравнения [Текст] / Г. Н. Кувыркин // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Серия «Естественные науки». — № 1 (48), 2013. — С. 26 — 33.

80. Онами, М. Введение в микромеханику [Текст] / М. Онами, С. Имасимидзу, К. Гэнка. — М.: металлургия, 1987. — 280 с.

81. Зарубин, В. С. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды [Текст] / В. С. Зарубин, Г. Н. Кувыркин. — М.: Изд-во МГТУ им. Баумана, 2008. — 512 с.

82. Кондауров, В. И. Основы термомеханики конденсированной среды [Текст] / В. И. Кондауров, В. Е. Фортов. — М.: МФТИ, 2002. — 382 с.

83. Кондауров, В. И. Механика и термодинамика насыщенной пористой среды [Текст] / В. И. Кондауров. — М.: МФТИ, 2007. — 294 с.

84. Корн, Г. Справочник по математике [Текст] / Г. Корн, Т. Корн. — М.: Наука, 1977. — 831 с.

85. Bercovici, D. A two-phase model for compaction and damage 1. General theory / D. Bercovici, Ya. Ricard, G. Schubert // J. Geophys. Res. — 2001. — Vol. 106 (B5). — PP. 8887 — 8906.

86. Ходырев, Е. Д. Математическая модель фильтрации в трещиновато-пористых гетерогенных средах [Текст] / Е. Д. Ходырев // Наукові праці УкрНДМІ НАН України. — 2012, № 11. — С. 130 — 136.

87. Линьков, А. М. Об источниках наследственного типа в задачах переноса [Текст] / А. М. Линьков, Е. Д. Ходырев // ДАН СССР. Механика. — 1988. — Т. 302, № 2. — С. 280 — 283.

88. Линьков, А. М. Модель фильтрации с источниками наследственного типа [Текст] / А. М. Линьков, Е. Д. Ходырев // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. — 1989, № 3. — С. 174 — 178.

89. Новиков, А. Н. О реализации одного класса вариационных неравенств [Текст] // Электронное моделирование .— 1994.— № 1.— С. 39 — 45.

90. Згуровский, М. З. Прикладные методы анализа и управления нелинейными процессами и полями [Текст] / М. З. Згуровский, В. С. Мельник, А. Н. Новиков.— К.: Наукова думка, 2004.— 588с.

91. Коллатц, Л. Функциональный анализ и вычислительная математика [Текст] / Л. Коллатц. — М., Мир 1969. — 447 с.

92. Нагиев, Ф. Б. Особенности фильтрации неньютоновских систем в неоднородных пористых средах [Текст] / Ф. Б. Нагиев // Нефтяное хозяйство. — 1995, № 7. — С. 47 — 49.

93. Ентов, В. М. Гидродинамическое моделирование разработки неоднородных нефтяных пластов [Текст] / В. М. Ентов, Ф. Д. Турецкая // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. — 1995, № 6. — С. 87 — 94.

94. Ортега, Дж. Итерационные методы решения нелинейных систем со многими неизвестными [Текст] / Дж. Ортега, В. Гейнболт. — М.: Мир, 1995. — 352 с.

95. Хейгеман, Л. Прикладные итерационные методы [Текст] / Л. Хейгеман, Д. Янг. — М.: Мир, 1999. — 448 с.

96. Форсайт, Дж. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений [Текст] / Дж. Форсайт, К. Моллер. — М.: Мир. 2006. — 168 с.

97. Гловински, Р. Численное исследование вариационных неравенств [Текст] / Р. Гловински, Ж.-Л. Лионс, Р. Тримольер. — М.: Мир, 1979. — 574 с.

98. Радкевич, Е. В. Краевые задачи со свободной границей [Текст] / Е. В. Радкевич, А. С. Меркулов. — Ташкент: Изд-во ФАН УзССР, 1988. — 184 с.

99. Полубаринова-Кочина, П. Я. Теория движения грунтовых вод [Текст] / П. Я. Полубаринова-Кочина. — М.: Гостоптехиздат, 1977. — 664 с.

100. Монахов, В. Н. Краевые задачи со свободными границами для систем эллиптических уравнений [Текст] / В. Н. Монахов. — Новосибирск: Наука, 1977. — 424 с.

101. Иваненко, В. И. Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами [Текст] / В. И. Иваненко, В. С. Мельник. — К.: Наукова думка, 1988. — 286 с.

102. Иваненко, В. И. Вариационные неравенства и стабилизация нелинейных распределенных систем [Текст] / В. И. Иваненко, В. С. Мельник // Докл. АН СССР. — Сер. А. — 1989. — С. 67 — 70.

103. Швидлер, М. И. Статистическое моделирование фильтрационных процессов в неоднородных средах. Обзор. [Текст] / М. И. Швидлер // Изв. ВУЗов. Геология и разведка. — 1983. — № 5. — С. 66 — 83.

104. Эфрос, Д. А. Исследование фильтрации неоднородных систем [Текст] / Д. А. Эфрос. — Л.: Гостоптехиздат, 1963. — 249 с.

политехн. ун-та. — Одесса, 1999. — Вып. 1 (7). — С. 245 — 248.

105. Крылов, А. П. Проектирование разработки нефтяных месторождений [Текст] / А. П. Крылов. — М.: Гостоптехиздат, 1962. — 275 с.

106. Бабе, Г. Д. Идентификация моделей гидравлики [Текст] / Г. Д. Бебе. — Новосибирск: Наука, 1980. — 161 с.

107. Автоматизация проектирования систем управления: Сб. статей [Текст] / Под ред. В. А. Трапезникова. — М.: Статистика, 1978. — 198 с.

108. Chen, W. H. Estimation of the location of the boundary of a petroleum reservoir [Текст] / W. H. Chen, I. H. Sienfeld // Sos Pet. Eng. J. — 1975. — **15**, № 1. — P. 19 — 38.

109. Васильев, Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач [Текст] / Ф. П. Васильев. — М.: Наука, 1979. — 429 с.

110. Васильев, Ф. П. Методы решения экстремальных задач [Текст] / Ф. П. Васильев. — М.: Наука, 1981. — 399 с.

111. Болотов, А. А. Реологические свойства растворов и газов в жидкости [Текст] / А. А. Болотов, А. Х. Мирзаджанзпде, Н. И. Нестеров // Известия АН СССР, Механика жидкости и газа. — 1988. — № 5. — С. 172 — 175.

112. Меликов, Г. Х. Исследование влияния неравновесности на гидродинамические характеристики газожидкостных систем при давлении выше давления насыщения: дис. … канд. техн. наук: спец. 01.02.05 «Механика жидкости, газа и плазмы» [Текст] / Г. Х. Меликов. — Баку, 1987. — 109 с.

113. Мирзаджанзаде, А. Х. Физика нефтяного и газового пласта [Текст] / А. Х. Мирзаджанзаде, И. М. Ахметов, А. Г. Ковалев. — М.—Ижевск: ИКИ, 2005. — 280 с.

114. Уббелоде, А. Плавление и кристаллическая структура [Текст] / А. Уббелоде. — М.: Наука, 1975. — 279 с.

115. Френкель Я. И. Кинетическая теория жидкостей [Текст] / Я. И. Френкель. — Л.: Наука, 1975. — 592 с.

116. Зельдович, Я. Б. Избранные труды. Химическая физика и гидродинамика [Текст] / Я. Б. Зельдович. — М.: Наука, 1984. — С. 107 — 122.

117. Буевич, Ю. А. О докритическом образовании зародышей в жидкости с поверхностно-активным веществом (ПАВ) [Текст] / Ю. А. Буевич // Инженерно-физический журнал. — 1987. — Т. 52, № 5. — С. 394 — 402.

118. Сиротюк, М. Г. Стабилизация газовых пузырьков в воде [Текст] / М. Г. Сиротюк // Акустический журнал. — 1970. — Т. 16, № 4. — С. 567 — 569.

119. Бункин, Н. Ф. Бабстоны — стабильные газовые микропузырьки в сильно разбавленных растворах электролитов [Текст] / Н. Ф. Бункин, Ф. В. Бункин // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1992. — Т. 101, № 2. — С. 512 — 527.

120. Акуличев, В. А. Гидратация ионов и кавитационная прочность воды [Текст] / В. А. Акуличев // Акустический журнал. — 1996. — Т. 72, № 2. — С. 160 — 165.

121. Савич, В. С. Математическое моделирование течения газированной жидкости в докретической области гетерогенных систем [Текст] / В. С. Савич // Інформатика та математичні методи в моделюванні. — 2015. — Т. 5, № 2. — С. 160 — 166.

122. Киндерлерер, Д. Введение в вариационные неравенства и их приложения [Текст] / Д. Киндерлерер, Г. Стампаккья.— М.: Мир. 1983.— 256 с.

123. Ричардсон, Дж. Ф. Начало псевдоожижения и однородные системы [Текст] / Дж. Ф. Ричардсон // В кН.: Псевдоожижение. — М.: Химия, 1974. — С. 37 — 73.

124. Бабаев, Р. Д. Экспериментальное исследование образования микрозародышей в газоконденсатных системах / Р. Д. Бабаев, А. А. Сулейманов, Абдель Монем Мохаммад Ахмед // Темат. Сб. научн. Тр.: Разработка новой микрозародышевой технологии. — Баку: АзИНЕФТЕХИМ, 1991. — С. 12 — 17.

125. Савич, В. С. Математичне моделювання фільтраційних процесів газонасичених ньютонівської та неньютонівської рідин в зоні тиску насичення [Текст] / В. С. Савич, О. О. Ошовська // Інформатика та математичні методи в моделюванні. — 2014. — Т. 4, № 4. — С. 375 — 380.

126. Савич, В. С. Моделювання стаціонарної фільтрації неньютонівських рідин у неоднорідному середовищі [Текст] / В. С. Савич, О. О. Ошовська // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць /Інститут кібернетики ім. В. М. Глушкова НАНУ, Кам’янець-Подільський націон. ун-т ім. Івана Огієнка. — Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський націон. ун-т ім. Івана Огієнка, 2014. — Вип. 11. — С. 147 — 155.

127. Савич, В. С. Моделювання стаціонарної фільтрації аномальних рідин у неоднорідному середовищі [Текст] / В. С. Савич // Праці V Міжнародної науково-практичної конференції «Обробка сигналів і негаусівських процесів»: Тези доповідей. — Черкаси: ЧДТУ, 2015. — С. 201 — 203.

128. Горбань, Ю. С. О принадлежности T -решений вариационных неравенств соболевским пространствам [Текст] / Ю. С. Горбань //

Всеукраїнська наукова конференція молодих вчених і студентів з диференціальних рівнянь та їх застосувань, присвячена 100-річневому ювілею Я. Б. Лопатинського, Донецьк, 6 — 7 грудня, 2006 р., тези доповідей. — С. 46 — 48.

129. Горбань, Ю. С. О невесовом условии суммируемости T -решений вырождающихся анизотропных вариационных неравенств [Текст] / Ю. С. Горбань // Труды ИПММ НАН Украины. — 2010. — Т. 21. — С. 56 — 63.

130. Chen, W.H. Estimation of the location of the boundary of a petroleum reservoir / Chen W.H., Sienfeld I.H. [Текст] // Sos Pet. Eng. J.— 1975.- Vol. 15. № 1.— P. 19 — 38.

131. Васильев, Ф. П. Лекции по методам решения экстремальных задач [Текст] / Ф. П. Васильев. — М.: Изд-во МГУ, 1974. — 367 с.

132. Чураков, Е. П. Оптимальные и адаптивные системы [Текст] / Е. П. Чураков. — М.: Энергоатомиздат, 1987. — 254 с.

133. Понтрягин, Л. С. Математическая теория оптимальных процессов [Текст] / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. — М.: Наука, 1983. — 392 с.

134. Мандельбот, Б. Фрактальная геометрия природы [Текст] / Б. Мандельбот. — М.-Ижевск: МКИ, 2002. — 656 с.

135. Яворский, Е. М. Справочник по физике [Текст] / Е. М. Яворский, А. А. Детлаф. — М.: Наука, 1968. — 939 с.

136. Avnir, D. Chemistry in non integer dimensions between two and three. Fractal surfaces of absorbents [Текст] / D. Avnir, D. Farin, P. Pfeifer // The Journal of Chemical Physics. — 1983. — V. 79, № 7. — P. 3566 — 3571.

137. Неймарк, А. В. Термодинамический метод расчета поверхностной фрактальной размерности [Текст] / А. В. Неймарк // Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 1990. — Т. 51. — Вып. 10. — С. 535 — 538.

138. Chang, J. Pressure-Transient Analysis of Fractal Reservoir [Текст] / J. Chang, Y. C. Yortsos // SPE Formation Evaluation. — 1990, March. — SPE 18170. — P. 31 — 38.

139. Лысенко, Н. А. Математическая модель процесса фильтрации в многокомпонентной системе с «промежуточным» агентом [Текст] / Н. А. Лысенко, В. С. Савич // Сучасні інформаційні технології 2015 (МІТ-2015): Матеріали п’ятої Міжнародної науково-практичної конференції студентів і молодих науковців, 21 — 22 квітня 2015 р. — Одеса, ВМВ, 2015. — С. 78 — 79.

140. Савич, В. С. Математична модель процесу фільтрації у гетерогенній системі з «проміжним агентом» Текст] / В. С. Савич // Сучасні інформаційні технології 2016 (МІТ-2016): Матеріали шостої Міжнародної науково-практичної конференції студентів і молодих науковців, 25 — 27 квітня 2016 р. — Одеса, ВМВ, 2015. — С. 69 — 71.

141. Астарита, Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей [Текст] / Дж. Астарита, Дж. Марручи: пер. с англ. под ред. Ю. А. Буевича. — М.: Мир, 1978. — 309 с.

142. Кондратенко, А. В. Тиксотропные свойства донных грунтов [Текст] / А. В. Кондратенко. — СПб, 2004. — 273 с.

143. Харин, Т. В. Реология вязкоупругих тиксотропных жидкостей типа нефтей и полимерных растворов и расплавов [Текст] / Т. В. Харин // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. — 1984, № 3. — С. 21 — 26.

144. Бибик, Е. Е. Измерение сил сцепления частиц в агрегированных дисперсных системах [Текст] / Е. Е. Бибик, И. С. Лавров // Коллоидный журнал. — 1970. — Т. 32, № 4. — С. 483 — 488.

145. Барань, Ш. Флокуляция суспензий каолина катионными полиэлектролитами [Текст] / Ш. Барань, Д. Грегори // Коллоидный журнал. — 1996. — Т. 58, № 1. — С. 12 — 18.

146. Зоннтаг, Г. Коагуляция и устойчивость дисперсных систем [Текст] / Г. Зоннтаг, К. Шнитке. — Л.: Химия, 1973. — 451 с.

147. Ямлинский, В. В. Коагуляционные контакты в дисперсных системах [Текст] / В. В. Ямлинский, В. А. Пчелкин, Е. А. Амелина, Е. Д. Щукин. — М.: Химия, 1982. — 184 с.

148. Запольский, А. К. Коагулянты и флокулянты в процессах очистки воды [Текст] / А. К. Запольский, А. А. Баран. — Л.: Химия, 1987. — 205 с.

149. Волощук, В. М. Процессы коагуляции в дисперсных системах [Текст] / В. М. Волощук, Ю. С. Седунов. — Л.: Гидрометиоиздат, 1975. — 320 с.

150. Урьев, Н. Б. Физико-химические основы технологии дисперсных систем и материалов [Текст] / Н. Б. Урьев. — М.: Химия, 1988. — 256 с.

151. Свалов, А. М. Об одной модели тиксотропных систем [Текст] / А. М. Свалов // Коллоидный журнал. — 1987. — Т. 49, № 4. — С. 799 — 802.

152. Quemada, D. Rheological modeling of complex fluids. I. The concept of effective volume friction revisited [Текст] / D. Quemada // Eur. Phys. J.AP. — 1998. — V. 1. — P. 119 — 127.

153. Харин, Т. В. Интерпретация данных ротационной вискозиметрии вязкоупругих тиксотропных жидкостей [Текст] / Т. В. Харин // Доклады АН СССР. — 1987. — Т. 293, № 4. — С. 823 — 827.

154. Положаєнко, С. А. Інформаційна технологія реалізації засобів моделювання фрактально-неоднорідних гетерогенних пластових систем [Текст] / С. А. Положаєнко, В. С. Савич // Winter InfoCom 2016: Матеріали III Міжнародної науково-практичної конференції, м. Київ, 1 — 2 грудня 2016 р. — К.: Вид-во ТОВ «Інженіринг», 2016. — С. 30 — 33.

155. Ладыженская, О. А. Краевые задачи математической физики [Текст] / О. А. Ладыженская. — М.: Наука, 1975. — 407 с.

156. Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа [Текст] / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцев. — М.: Наука, 1987. — 736 с.

157. Новиков, И. Я. Основы теории всплесков [Текст] / И. Я. Новиков, С. Б. Стечкин // Успехи математических наук. — 1998. — Т. 53, № 6. — С. 53 — 128.

158. Тихонов, А. Н. Методы решения некорректных задач [Текст] / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. — М.: Наука, 1979. — 285 с.

159. Гончарский, А. В. Обобщенный принцип невязки [Текст] / А. В. Гончарский, А. С. Леонов, А. С. Ягола // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2009. — Т. 14, № 2. — С. 295 — 302.

160. Соболев, С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике [Текст] / С. Л. Соболев. — М.: Наука, 2001. — 255 с.

161. Басниев, К. С. Подземная гидравлика [Текст] / К. С. Басниев, А. М. Власов, И. Н. Кочина и др. — М.: Недра, 2012. — 303 с.

162. Щелкачев, В. Н. Основы и приложения теории неустановившейся фильтрации. Ч. 1 [Текст] / В. Н. Щелкачев. — М.: Нефть и газ, 2005. — 586 с.

163. Дремин, И. М. Вейвлеты и их использование [Текст] / И. М. Дремин, О. В. Иванов, В. А. Нечитайло // Успехи математических наук. — 2011. — Т. 171, № 5. — С. 465 — 501.

164. Чуи, К.. Введение в вейвлеты [Текст] / К. Чуи. — М.: Мир, 2004. — 412 с.

165. Quintard, M. Two phase flow in heterogeneous porous media: the method of large-scale averaging [Текст] / M. Quintard, S. Whitaker // Transport in porous media. — 1988, № 3. — P 357 — 413.

166. Chauveteau, G. Rodlike Polymer Solution Flow Through Fines Pores: Influence of Pole Size on Rheological Behavior [Текст] / G Chauveteau // Journal of the Rheological. — 1999. — V. 26 (2). — P. 111 — 142.

167. Enevoldsen, J. Pressure Drop Throgh Gravel Packs [Текст] / J. Enevoldsen, H. K. Rasmusen // Annual Transactions of the Nordic Rheology Society. — 1995. — V. 3. — P. 45 — 47.

168. Bayada, G. Inequations variationnelles elliptiques avec conditions aux limites periodiques [Текст] / G. Bayada // J. Anal. Math. — 1978.— Vol. 34.— P. 47 — 53.

169. Положаєнко, С. А. Математичне моделювання процесу фільтрації з розривними коефіцієнтами у гетерогенних системах за умови неточних вхідних даних / С. А. Положаєнко, В. С. Савич // Інформатика та математичні методи в моделюванні. — 2016. — Т. 6, № 4. — С. 372 — 379.

170. Айвазян, С. А. Программное обеспечение персональных ЭВМ по статистическому анализу данных [Текст] / С. А.Айвазян // Компьютер и экономика: экономические проблемы компьютеризации общества. М.: Наука, 1991. — С. 91 — 107.

171. Сироджа, И. Б. Математическое и программное обеспечение интеллектуальных компьютерных систем [Текст] / И. Б. Сироджа. — Харьков: ХАИ, 1992. — 100 с.

172. Фомин, А. А. Применение современных информационных технологий в системах диагностического контроля [Текст] / А. А. Фомин // Вісник Кременчуцького державного політехнічного університету: Наукові праці КДПУ. — Кременчук: КДПУ. — 2003. — Вип. 3 (20). — С. 179 — 182.

173. Фомин, А. А. Автоматизированная система научных исследований для решения задач неразрушаюшего контроля [Текст] / А. А. Фомин, В. Д. Павленко // Всеукраинская научно-практическая конференция «Человек и космос»: Сборник тезисов. — Днепропетровск: НЦАОМУ. — 1999. — С. 123.

174. Павленко В. Д. Интегрированная инструментальная середа для решения задач статистической классификации [Текст] / В. Д. Павленко, А. А. Фомин, С. И. Качур, В. В. Михальчук // Международная научно-практическая конференция молодых ученых «Молодежь третьего тысячелетия: гуманитарные проблемы и пути их решения». — Одесса: ОНПУ, 2000. — С. 190 — 194.

175. Дьяконов, В. П. Matlab 6.0 [Текст] / В. П. Дьяконов.— СПб.:Питер, 2001. — 592 с.

176. Дьяконов, В. П. Справочник по применению системы PC Matlab [Текст] / В. П. Дьяконов. — М.:Физматлит, 1993. — 113 с.

177. Краснопрошина, А. А. Современный анализ систем управления с применением MATLAB, Simulink, Control System: Учеб. пособие [Текст] / А. А. Краснопрошина, Н. Б. Репникова, А. А. Ильченко.— К.: Корнийчук, 1999. – 144 с.

178. Лазарев, Ю. Ф. Matlab 5.x [Текст] / Ю. Ф. Лазарев.— К.: BHV, 2000. — 384 с.

179. Гурский, Д. А. Вычисления в MatCad [Текст] / Д. А. Гурский, Е. С. Турбина. — СПб: Питер, 2006. — 544 с.

180. Охорзин, В. А. Компьютерное моделирование в системе MatCad [Текст] / В. А. Охорзин. — М.: Финансы и статистика, 2006. — 249 с.

181. Campbell, S. L. Modeling and Simulation in Scilab/Scicor [Текст] / S. L. Campbell, S. L. — Springer, 2005. — 313 p.

182. Тропин, М. С. Численные и инженерные расчеты в среде Scilab [Текст] / М. С. Тропин. — М.: Федеральное агентство по образованию, 2008. — 650 с.

183. Гультяев, А. Н. Визуальное моделирование в среде Matlab [Текст] / А. Н. Гультяєв. — СПб: Питер, 2000. — 430 с.

184. Мэтьюз, Дж. Г. Численные методы. Использование Matlab [Текст] / Дж. Г. Мэтьюз / Пер. с англ. под ред. Ю. В. Козаченко. — 3-е изд. — М: Вильямс, 2001. — 713 с.

185. Kwon, Y. W. The Finite Element Method using MATLAB [Текст] / Y. W. Kwon. — Boca Raton a. o. CRC Press, 1997. — 519 p.

186. Савич, В. С. Автоматизированный вычислительный комплекс для реализации имитационного моделирования гетерогенных систем [Текст] / В. С. Савич // Електротехнічні та комп’ютерні системи. К.: Техніка, 2015. — № 17 (93). — С. 87 — 93.

187. Polozhaenko, S. A. Mathematical modeling and identification of filtration processes in heterogeneous stratal systems [Текст] / S. A. Polozhaenko, V. S. Savich // Colloquium-journal. — 2017. — № 2. — P. 47 — 54.

188. Савич, В. С. Математическая формализация процесса образования фрактальных структур при водонапорном режиме нефтедобычи [Текст] / В. С. Савич // Сборник публикаций мультидисциплинарного научного журнала «Архивариус» по материалам XVI международной научно-практической конференции: «Наука в современном мире». — Киев: мультидисциплинарный научный журнал «Архивариус», 2017. — С. 87 — 92.

189. Гринченко, В. Т. Фракталы [Текст] / В. Т. Гринченко, В. Т. Мацыпура, А. А. Снарский. — К.: Наукова думка, 2013. — 270 с.

ДОДАТОК А. ДОКУМЕНТИ, ЩО ПІДТВЕРДЖУЮТЬ ВПРОВАДЖЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ДИСЕРТАЦІЙНОЇ РОБОТИ

ФІЗИКО-ХІМІЧНИЙ ІНСТИТУТ ЗАХИСТУ НАВКОЛИШНЬОГО СЕРЕДОВИЩА І ЛЮДИНИ МОН УКРАЇНИ ТА НАН УКРАЇНИ

Вул. Преображенська, 3, м. Одеса, 65082, тел. (048) 723-11-16, тел./факс (048) 726-47-67, 723-75-39
E-mail: eksvar@ukr.net; eksvar@hotbox.ru, ЄДРПОУ – 01530125

від 28.02.2017р. № 46/1
на № __________ від __________

ЗАТВЕРДЖУЮ
Директор
Заслужений діяч науки і техніки
України, д.х.н., професор
__________ А.А.-А. Еннан
«__» __________ 2017 р.

АКТ
впровадження результатів дисертаційного дослідження
САВИЧА Віталія Святославовича на тему:
«МОДЕЛІ, МЕТОД ТА ЗАСОБИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ФІЛЬТРАЦІЇ У ГЕТЕРОГЕННИХ СИСТЕМАХ»

Фізико-хімічний інститут захисту навколишнього середовища і людини МОН України та НАН України прийняв до впровадження математичні моделі (ММ) процесів фільтрації у гетерогенних середовищах та їх програмні засоби: запропоновані Савичем В. С. ММ адекватно описують процеси об'ємної фільтрації аеродисперсних частинок, що утворюються при електродуговому зварюванні металів, зокрема дозволяють здійснювати розрахунковим шляхом оптимізацію технологічних режимів фільтрації аерозолів з використанням різних фільтруючих матеріалів. Останнє вельми важливе при виборі фільтруючих матеріалів (діаметр волокна та щільності їх упаковки) і розрахунку оптимального режиму фільтрації (швидкості газо-повітряної суміші).

Результати дисертаційної роботи Савича В. С. впроваджено у вигляді моделей та програмних комп’ютерних засобів у теорію та практику дослідження процесів росту фрактальних структур, а також при розробці фільтруючих елементів установок санітарної очистки повітря у складально- зварювальних цехах, призначених для захисту органів дихання зварників та робітників суміжних професій.

Провідний науковий співробітник,
к. ф.-м. н. __________ Кіро С. А.

УКРАИНА

ПУБЛИЧНОЕ АКЦИОНЕРНОЕ ОБЩЕСТВО «ОДЕССКИЙ ПРИПОРТОВЫЙ ЗАВОД»

А/я № 304, Главпочтамт, г. Одесса, 65001
Телефон: справочная завода:758-60-09
приемная: 758-60-58
Факс: 758-60-08
Т/с № 26008013149980 в филиале
Одесское областное управление
АО «Ощадбанк", МФО 328845
Код ЕГРПОУ №00206539
E-mail: office@opz.odessa.ua

УКРАЇНА

ПУБЛІЧНЕ АКЦІОНЕРНЕ ТОВАРИСТВО «ОДЕСЬКИЙ ПРИПОРТОВИЙ ЗАВОД»

А/с № 304, Головпоштамт, м. Одеса, 65001
Телефон: довідка заводу: 758-60-09
приймальня: 758-60-58
Факс: 758-60-08
П/р № 26005300136269 у філії
Одеське обласне управління
АТ «Ощадбанк», МФО 328845
Код ЄДРПОУ №00206539
E-mail: office@opz.odessa.ua

ARCH OF EUROPE GOLD STAR

№ 921 **от** 04.04.17 р.

На № 588/97-07 **от** 07.03.17 р.

"ОДЕСЬКИЙ ПРИПОРТОВИЙ ЗАВОД" №1 00206539

ЗАТВЕРДЖУЮ

В.о. Головного інженера

______________С.І. Кімінчіджі

«03» 04 2017р.

АКТ

розгляду результатів дисертаційного дослідження

САВИЧА Віталія Святославовича на тему:

«МОДЕЛІ, МЕТОДИ ТА ЗАСОБИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ФІЛЬТРАЦІЇ У ГЕТЕРОГЕННИХ СИСТЕМАХ»

ПУБЛІЧНЕ АКЦІОНЕРНЕ ТОВАРИСТВО «ОДЕСЬКИЙ ПРИПОРТОВИЙ ЗАВОД» прийняло до впровадження з можливим застосуванням нові математичні моделі (ММ) процесів фільтрації у гетерогенних середовищах, а також комплекс програмних засобів реалізації зазначених ММ. Вказані наукові та практичні добутки дисертаційної роботи можуть знайти застосування в існуючій в умовах підприємства системі автоматизованого управління технологічними процесами (АУТП).

Застосування розробленого у дисертаційній роботі комплексу програмних засобів дозволяє зняти проблему оперативної корекції та під налаштування ММ в умовах безперервності виробництва.

Запропоновані САВИЧЕМ В.С. математичні моделі розроблено з урахуванням фізико-хімічних явищ, які притаманні певним процесам фільтрації у гетерогенних середовищах, тому їх можна вважати адекватними моделями і, на відміну від широкого поширених рекурентних ММ, вони забезпечують високу точність моделювання у всьому діапазоні зміни технологічних параметрів. Остання обставина важлива при пере налаштуванні системи АУТП з урахуванням різних технологічних параметрів виробничих процесів.

Впровадження комп'ютерних засобів реалізації ММ процесів фільтрації у гетерогенних середовищах демонструє свою ефективність у зменшенні витрат на переналаштуванні системи АУТП та у підвищенні якості готової продукції (зменшення відхилень від нормативних показників).

Запропоновані ММ дозволять проводити обрахунок технологічних режимів з більш високими регламентними показниками, що визначає їх переваги у практичному застосуванні.

Начальник цеху виробництва аміаку І.С. Коба

Заступник головного інженера -
начальник ВТВ В.С. Журавльов

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Проректор з наукової та
науково-педагогічної роботи
Одеського національного
політехнічного університету
професор НЕСТЕРЕНКО С. А.

____

«17» 04 2017 р.

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Одеський національний політехнічний університет
02071045

А К Т

впровадження результатів дисертаційної роботи
САВИЧА Віталія Святославовича
«МОДЕЛІ, МЕТОД ТА ЗАСОБИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ФІЛЬТРАЦІЇ У ГЕТЕРОГЕННИХ СИСТЕМАХ»
у навчальному процесі Одеського національного політехнічного університету

Чинну довідку видано в тому, що в курсах лекцій з дисциплін «Автоматизація проектування систем управління» та «Автоматизація типових виробничих процесів», що читаються студентам за спеціальністю 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» на кафедрі комп'ютеризованих систем управління Інституту комп'ютерних систем ОНПУ, використовуються наукові результати, одержані в дисертаційній роботі САВИЧА Віталія Святославовича.

Принципи побудови та реалізації математичних моделей процесів фільтрації у гетерогенних системах викладаються за темами: «Моделі технологічних процесів та систем управління» — дисципліни «Автоматизація типових виробничих процесів», «Машинні методи та інструментальні програмні засоби реалізації математичних моделей систем управління» — дисципліни «Автоматизація проектування систем управління».

При вивченні методів машинного синтезу законів управління, та інструментальних засобів машинної ідентифікації, що розглядаються в дисципліні «Автоматизація проектування систем управління», використовуються відповідні підходи математичної формалізації об'єктів управління (тобто складання їх математичних моделей), що враховують наявність фізично притаманних явищам фільтрації у промислово важливих та природних процесах запізнювань на елементи векторів простору стану та управління. Крім того, в теоретичному матеріалі, що викладається у зазначеній дисципліні, використано методи реалізації відповідних математичних моделей, засновані на градієнтних процедурах оптимізації.

При розгляді питань практичної реалізації систем комп'ютерного моделювання та машинної ідентифікації типових виробничих процесів використовуються запропоновані в дисертаційній роботі САВИЧА Віталія Святославовича комп'ютерні засоби розв'язання задач моделювання процесів фільтрації у гетерогенних та фрактально-гетерогенних системах.

Навчальний процес підтримано САВИЧЕМ Віталієм Святославовичем у співпраці з лекторами відповідних курсів, що знайшло відбиття у підготовці розділів конспектів лекцій та методичних вказівок до практичних і лабораторних робіт із зазначених дисциплін.

Директор Інституту комп'ютерних систем, д.т.н., професор — С. Г. АНТОЩУК

ДОДАТОК Б. ДОВЕДЕННЯ ЄДИНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ВАРІАЦІЙНИХ ЗАДАЧ, ЩО ОПИСУЮТЬ ПРОЦЕСИ ФІЛЬТРАЦІЇ ГАЗОРІДИННИХ СУМІШЕЙ

Для дослідження якісних властивостей отримуваних розв'язків варіаційних задач, що описують різні випадки процесів фільтрації газорідинних сумішей у пористих середовищах, сформулюємо та доведемо наступні теореми.

Теорема Б. 1. Для білінійної форми (2.48) (або (2.53)) та функціоналів виду (2.49), (2.50) розв'язок задачі (2.51) (або (2.52)) — єдиний.

Доведення теореми Б. 1. Білінійна форма $a(u,v-u)$ є коерцитивною. Дійсно, білінійна форма $a(u,v-u)$ визначається лінійним оператором (2.48) (або нелінійним (2.53), що, натомість, не впливає на загальний характер міркувань), який задає відображення $a: H^1(\Omega) \to H^1(\Omega)$ в смислі елементів $v, u \in H^1(\Omega)$. На підставі уведених в розділі 2.2 визначень функцій v, u очевидно, що $\|v-u\| \to 0$. Тоді справедливо твердження

$$\frac{\langle av - au, v - u \rangle}{\|v - u\|^2} \to +\infty, \quad \forall v, u \in H^1(\Omega),$$

звідки витікає коерцитивність білінійної форми $a(u,v-u)$ [77], тобто існує таке $\alpha > 0$, що

$$a(v-u, v-u) \ge \alpha \|v-u\|^2, \ \ \forall v, u \in H^1(\Omega).$$

Приймемо, що u_1, u_2 — розв'язки задачі (2.51) (або (2.52)), які відповідають примусовим силам $f_1, f_2 \in H^1(\Omega)$ (у разі диференційної задачі (2.44) спостерігається тривіальний випадок $f_1 = f_2 \equiv 0$). Покажемо справедливість умови

$$\|u_1 - u_2\| \le \left(\frac{1}{\alpha}\right)\|f_1 - f_2\|_{H^1(\Omega)}. \qquad (Б.1)$$

Оскільки $K \subset H^1(\Omega)$, то відображення $f_1 \to u_1;\ f_2 \to u_2$ — лінійні и ліпшицеві. Тоді для розв’язків u_1, u_2 задачі (2.51) (або (2.52) очевидно

$$a(u_i, v - u_i) + \mathbf{j}(v) - \mathbf{j}(u_i) \ge \left\langle f_i, v - u_i \right\rangle,\ \ \forall v, u_i \in K\ ,\ \ i = 1, 2. \qquad (Б.2)$$

У виразах (Б.2) виконаємо підстановки: $v = u_2$ — в нерівність для u_1, а $v = u_1$ — в нерівність для u_2. Виконаємо почленне додавання нерівностей (Б.2), в результаті чого отримаємо

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) + \mathbf{j}(u_1 - u_2) \le \left\langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \right\rangle.$$

Внаслідок коерцитивності білінійної форми $a(u, v-u)$ можна записати

$$\alpha\|u_1 - u_2\|^2 + \mathbf{j}(u_1 - u_2) \le \left\langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \right\rangle \le \|f_1 - f_2\|_{H^1(\Omega)}\|u_1 - u_2\|,$$

звідки витікає справедливість (Б.1). Тим самим доведено єдиність розв’язку задачі (2.51) (або (2.52)).

Теорема Б. 2. Для білінійної форми (2.61) та функціоналів виду (2.62), (2.63) розв’язок задачі (2.64) — єдиний.

Доведення теореми Б. 2. Для білінійної форми (2.33) в розділі 2.2 було доведено коерцитивність. Тому, в силу тотожності білінійних форм (2.33) та (2.64) будемо вважати доведеною коерцитивність останньої.

Припустимо, що існують розв’язки u_1, u_2 задачі (2.64), що відповідають примусовим силам $f_1,\ f_2 \in H^1(\Omega)$. Покажемо, що умова

$$\|u_1 - u_2\| \le \left(\frac{1}{\alpha}\right)\|f_1 - f_2\|_{H^1(\Omega)} \qquad (Б.2)$$

виконується, хоча б для одного $\alpha > 0$.

Оскільки $K \subset H^1(\Omega)$, то відображення $f_1 \to u_1;\ f_2 \to u_2$ — лінійні и ліпшицеві. Тоді для розв’язків u_1, u_2 задачі (2.64) справедливо

$$a(u_i, v-u_i) + \mathbf{j}(v) - \mathbf{j}(u_i) \geq \left\langle f_i, v-u_i \right\rangle, \quad \forall v, u_i \in K, \quad i = 1, 2.$$

У останніх виразах виконаємо підстановки: $v = u_2$ — в нерівність для u_1, а $v = u_1$ — в нерівність для u_2. Подальше почленне додавання нерівностей дає результат

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) + \mathbf{j}(u_1 - u_2) \leq \left\langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \right\rangle.$$

Внаслідок коерцитивності білінійної форми (2.64) можна записати

$$\alpha \left\| u_1 - u_2 \right\|^2 + \mathbf{j}(u_1 - u_2) \leq \left\langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \right\rangle \leq \left\| f_1 - f_2 \right\|_{H^1(\Omega)} \left\| u_1 - u_2 \right\|,$$

звідки витікає справедливість (Б.2). Тим самим доведено єдиність розв’язку задачі (2.64).

Теорема Б. 3. Для білінійної форми (2.71) та функціоналів виду (2.72), (2.73) розв’язок задачі (2.74) — єдиний.

Доведення теореми Б. 3. Для доведення єдності розв’язку задачі (2.74) дослідимо опуклість функціоналів $\mathbf{j}(v)$ и $\mathbf{j}(S_\Gamma)$ виду (2.72) и (2.73) та обґрунтуємо коерцитивність білінійної форми (2.71).

Деякий функціонал $\mathbf{j}(\xi)$ вважається опуклим на множині K, якщо він не приймає значення $-\infty$ та виконується умова [125]

$$\mathbf{j}((1-\alpha)\xi_1 + \alpha\xi_2) \leq (1-\alpha)\mathbf{j}(\xi_1) + \alpha\mathbf{j}(\xi_2), \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in K. \qquad \text{(Б.3)}$$

Запишемо умову (Б.3) для функціонала $\mathbf{j}(v)$ виду (2.72):

$$\int_\Omega \left| grad\ [(1-\alpha)v_1 + \alpha v_2] \right| dz \leq (1-\alpha) \int_\Omega \left| \mathrm{grad}\ (v_1) \right| dz +$$

$$+ \alpha \int_\Omega \left| \mathrm{grad}\ (v_2) \right| dz, \quad \forall v_1, v_2 \in K. \qquad \text{(Б.4)}$$

Покажемо, що (Б.4) виконується. Нехай $v_2 = v_1 + \varphi$. Тоді, в силу властивостей градієнта функції [59], приходимо до рівності

$$\int_{\Omega} \left|\text{grad }(\alpha\varphi)\right| dz = \alpha \int_{\Omega} \left|\text{grad }(\varphi)\right| dz\ , \quad \forall v_1 \in K\ ,$$

що означає відповідність умові опуклості функціонала $\mathbf{j}(v)$.

Аналогічний висновок можна отримати і для функціонала $\mathbf{j}(u)$. Білінійна форма (2.71) структурно аналогічна формі (2.30), що визначає її коерцитивність. Тоді, на підставі опуклості функціоналів (2.72) и (2.73), а також в силу коерцитивності білінійної форми (2.71) робимо висновок, що задача (2.71) має єдиний розв’язок.

Теорема Б. 4. Для білінійної форми (2.80) та функціоналів виду (2.81), (2.82) розв’язок задачі (2.83) — єдиний.

Доведення теореми Б. 4. Як і в попередньому випадку зауважимо, що єдиність розв’язку задачі (2.84) визначається видом функціоналів $\mathbf{j}(v)$ та $\mathbf{j}(S_г)$ (тобто — їх опуклістю) та властивістю коерцитивності білінійної форми (2. 80). Покажемо, що функціонали $\mathbf{j}(v)$ та $\mathbf{j}(S_г)$ — опуклі.

Запишемо умову (Б.3) для функціонала $\mathbf{j}(v)$ (вираз (2.81)

$$k \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_k^2} \left|\left[(1-\alpha) v_1 + \alpha v_2\right]\right| dz \le (1-\alpha) k \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_k^2} \left|v_1\right| dz +$$

$$+ \alpha k \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_k^2} \left|v_2\right| dz\ . \tag{Б.5}$$

Покажемо, що (Б.5) виконується. Нехай $v_2 = v_1 + \varphi$. Тоді можна записати

$$k \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_i^2} \left|v_1 + \alpha\varphi\right| dz \le (1-\alpha) k \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_i^2} \left|v_1\right| dz + \alpha k \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_i^2} \left|v_1 + \varphi\right| dz\ .$$

Від останнього виразу, в результаті очевидних перетворень (тобто приведення подібних членів та враховуючи заміну $v_2 = v_1 + \varphi$), приходимо до рівності

$$k\int_{\Omega}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial z_k^2}\left|\alpha\varphi\right|dz=\alpha\, k\int_{\Omega}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial z_k^2}\left|\varphi\right|dz\,.$$

Таким чином, умова опуклості функціонала $\mathbf{j}(v)$ виконується. Аналогічний висновок можна зробити і для функціонала $\mathbf{j}(S_г)$. Властивість коерцитивності, визначена при доведенні теореми Б.3, можна поширити і на білінійну форму виду (2.80). При цьому зазначимо, що наявність в білінійній формі (2.80) члена $\frac{du_c}{dS_г}$ не порушує її коерцитивності, оскільки лінійність оператора $a(S_г, v-S_г)=\left\langle a\,S_г, v-S_г\right\rangle$ в даному випадку розглядається лише в смислі відображення $a: H^1(\Omega)\to H^1(\Omega)$.

Тоді, на підставі опуклості функціоналів (2.81), (2.82) та в силу коерцитивності білінійної форми (2.80) робимо висновок, що задача (2.83) має єдиний розв’язок.

ДОДАТОК В. НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ ОПТИМАЛЬНОСТІ ЗАДАЧІ (2.99), (2.98), (2.90) (або (2.91))

Для сформульованої в розділі 2.3 екстремальної задачі (2.99), (2.98), (2.90) (або (2.91)) отримаємо *необхідні* та *достатні умови* екстремуму.

Дотримуючись принципу максимуму [131 — 133], введемо нову координату $\sigma(t,z)$ у відповідності до виразів (у подальшому, для конкретності, будемо розглядати тільки задачу, поставлену для границі Γ, одначе це не впливатиме на загальність розмірковувань та отриманих висновків)

$$\frac{\partial^2\sigma(t,z)}{\partial t\,\partial z} = \left|v(t,z) - \Psi(t,z)\right|\Big|_{z\in\Gamma}, \quad \frac{\partial^2\sigma(t,z)}{\partial t\,\partial z} = \left|v(t,z) - \Psi(t,z)\right|\Big|_{z\in\Omega}. \qquad (В.1)$$

Таким чином, вихідна задача буде розглядатися в $(n+1)$-мірному просторі з рівнянням динаміки

$$\tilde{\Psi}(t,z)\in K : \left[m(z)\frac{\partial\tilde{\Psi}(t,z)}{\partial t}, \tilde{v}(t,z) - \tilde{\Psi}(t,z)\right] + a\left[\tilde{\Psi}(t,z), \tilde{v}(t,z) - \tilde{\Psi}(t,z)\right] +$$

$$+\phi\left[\tilde{v}(t,z)\right] - \phi\left[\tilde{\Psi}(t,z)\right] -$$

$$-\left\{\theta\left[\tilde{\Psi}(t,z), \tilde{v}(t,z)\right], \left[\tilde{v}(t,z) - \tilde{\Psi}(t,z)\right]\right\} = \left[f, \tilde{v}(t,z) - \tilde{\Psi}(t,z)\right] \;;\; \forall \tilde{v}, \tilde{\Psi} \in K. \qquad (В.2)$$

де

$$\tilde{\Psi}(t,z) = \left[\sigma(t,z),\, \Psi_1(t,z), ...,\, \Psi_n(t,z)\right],\;\; \tilde{v}(t,z) = \left[\sigma(t,z),\, v_1(t,z), ...,\, v_n(t,z)\right]$$

при початкових умовах

$$\tilde{\Psi}(0,z) = \left[0, \Psi_0(z)\right].$$

Уявімо, що віднайдено шукану функцію $\Psi(t,z)$. Цій умові відповідає співвідношення

$$\min_v \int_\Gamma \int_0^T \left\|\left[\tilde{v}(t,z) - \Psi(t,z)\right]\right\| dt\, d\Gamma \to J_{\min} = J^*.$$

В момент часу $t = \tau\ (0 < \tau < T)$ введемо голчасту варіацію $\delta\tilde{v}$ тривалістю ε. В результаті виконаної варіації зміниться значення функціоналу J

$$\widehat{J} = \int_0^T \left\| \left[\tilde{v}(t,z) - \Psi(t,z) \right] \right\| dt > J_{\min} \quad .$$

Запишемо аналітично результат варіації

$$\delta\tilde{v}(t,z) = \tilde{v}(t,z) - \tilde{\Psi}(t,z) =$$

$$= \varepsilon \left\{ \left\{ a\left[\tilde{\Psi}(t,z)\right], \tilde{v}(t,z) - \tilde{\Psi}(t,z) \right\} + \phi\left[\tilde{v}(t,z)\right] - \phi\left[\tilde{\Psi}(t,z)\right] - \right.$$

$$- \left\{ \theta\left[\tilde{\Psi}(t,z), \tilde{v}(t,z)\right], \left[\tilde{v}(t,z) - \tilde{\Psi}(t,z)\right] \right\} - \left[f, \tilde{v}(t,z) - \tilde{\Psi}(t,z) \right] \Big\} -$$

$$- \left. \left\{ \left\{ a\left[\tilde{\Psi}(t,z)\right] \tilde{\Psi}(t,z), \tilde{\Psi}(t,z) \right\} + \phi\left[\tilde{\Psi}(t,z)\right] - \left\{ \theta\left[\tilde{\Psi}(t,z)\right], \tilde{\Psi}(t,z) \right\} - \left[f, \tilde{\Psi}(t,z) \right] \right\} \right|_{t=\tau} .$$

(B.3)

Виразимо $\tilde{v}(t,z)$ через варіацію та оптимальну функцію стану

$$\tilde{v}(t,z) = \tilde{\Psi}(t,z) + \delta\tilde{v}(t,z). \qquad \text{(B.4)}$$

Підставимо (В.4) в (В.2) в результаті чого отримаємо

$$\tilde{\Psi}(t,z) \in K : \left\{ m(z) \frac{\partial \tilde{\Psi}(t,z)}{\partial t}, \left[\tilde{\Psi}(t,z) + \delta\tilde{v}(t,z)\right] - \tilde{\Psi}(t,z) \right\} +$$

$$+ \left\{ a\left[\tilde{\Psi}(t,z)\right] \tilde{\Psi}(t,z), \left[\tilde{\Psi}(t,z) + \delta\tilde{v}(t,z)\right] - \right.$$

$$\left. - \tilde{\Psi}(t,z) \right\} + \phi\left[\tilde{\Psi}(t,z) + \delta\tilde{v}(t,z)\right] - \phi\left[\tilde{\Psi}(t,z)\right] -$$

$$- \left\{ \theta\left\{\tilde{\Psi}(t,z), \left[\tilde{\Psi}(t,z) + \delta\tilde{v}(t,z)\right]\right\}, \left[\tilde{\Psi}(t,z) + \delta\tilde{v}(t,z)\right] - \tilde{\Psi}(t,z) \right\} -$$

$$- \left\{ f, \left[\tilde{\Psi}(t,z) + \delta\tilde{v}(t,z)\right] - \tilde{\Psi}(t,z) \right\}; \left[\tilde{\Psi}(t,z) + \delta\tilde{v}(t,z)\right] \in K . \qquad \text{(B.5)}$$

Для подальших перетворювань використаємо покоординатний аналог (В.5)

$\tilde{\Psi}_i(t,z_i) \in K$:

$$\left\{ m(z_i) \frac{\partial \tilde{\Psi}_i(t,z_i)}{\partial t}, \left[\tilde{\Psi}_i(t,z_i) + \delta\tilde{v}_i(t,z_i)\right] - \tilde{\Psi}_i(t,z_i) \right\} +$$

$$\left\{ a\left[\tilde{\Psi}_i(t,z_i)\right] \tilde{\Psi}_i(t,z_i), \left[\tilde{\Psi}_i(t,z_i) + \delta\tilde{v}_i(t,z_i)\right] - \tilde{\Psi}_i(t,z_i) \right\} +$$

$$+ \phi\left[\Psi_i(t,z_i) + \delta\tilde{v}_i(t,z_i)\right] - \phi\left[\tilde{\Psi}_i(t,z_i)\right] -$$

$$- \left\{ \theta\left\{\tilde{\Psi}_i(t,z_i), \left[\tilde{\Psi}_i(t,z_i) + \delta\tilde{v}_i(t,z_i)\right]\right\}, \left[\tilde{\Psi}_i(t,z_i) + \delta\tilde{v}_i(t,z_i)\right] - \tilde{\Psi}_i(t,z_i) \right\} -$$

$$- \left\{ f, \left[\tilde{\Psi}_i(t,z_i) + \delta\tilde{v}_i(t,z_i)\right] - \tilde{\Psi}_i(t,z_i) \right\}; \left[\tilde{\Psi}_i(t,z_i) + \delta\tilde{v}_i(t,z_i)\right] \in K ,$$

$$i = 0, 1, 2, ..., n\,. \qquad \text{(В.6)}$$

Виконаємо в (В.6) розкладання нелінійних функцій в ряд Тейлора та обмежимося розглядом величин 1-го порядку малості

$$m(z_i)\left\{\frac{\partial \tilde{\Psi}_i(t, z_i)}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{v}_i(t, z_i)}{\partial t}\right\} =$$

$$= \left\{a\left[\tilde{\Psi}_i(t, z_i)\right]\tilde{\Psi}_i(t, z_i), \tilde{\Psi}_i(t, z_i)\right\} + \phi\left[\tilde{\Psi}_i(t, z_i)\right] - \left[f, \tilde{\Psi}_i(t, z_i)\right] +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial\left\{\left\{a\left[\tilde{\Psi}_i(t, z_i)\right]\tilde{\Psi}_i(t, z_i), \tilde{\Psi}_i(t, z_i)\right\} + \phi\left[\tilde{\Psi}_i(t, z_i)\right] - \left[f, \tilde{\Psi}_i(t, z_i)\right]\right\}}{\partial \tilde{v}_i(t, z_i)},$$

$$i = 0, 1, 2, ..., n\,. \qquad \text{(В.7)}$$

З (В.7) можна отримати

$$m(z_i)\frac{\partial \delta \tilde{v}_i(t, z_i)}{\partial t} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial\left\{\left\{a\left[\tilde{\Psi}_i(t, z_i)\right]\tilde{\Psi}_i(t, z_i), \tilde{\Psi}_i(t, z_i)\right\} + \phi\left[\tilde{\Psi}_i(t, z_i)\right] - \left[f, \tilde{\Psi}_i(t, z_i)\right]\right\}}{\partial \tilde{v}_i(t, z_i)} \delta \tilde{v}_i(t, z_i),$$

$$i = 0, 1, 2, ..., n\,. \qquad \text{(В.8)}$$

Звернімося тепер до моменту часу $t = T$. Визначимо варіацію функціоналу в момент часу $t = T$

$$\delta J_{t=T} = \hat{J} - J_{\min} > 0 \quad \text{або} \quad -\delta J_{t=T} = -\delta\sigma(t, z)_{t=T} \le 0\,.$$

Введемо змінну $\tilde{p}(t, z)$ таким чином, щоб при $t = T$ виконувалася умова

$$-\delta J_{t=T} = -\delta\sigma(T, z) = \left\langle \delta\tilde{v}(t, z), \tilde{p}(t, z)\right\rangle_{t=T}. \qquad \text{(В.9)}$$

Покоординатний аналог (В.9) виглядає наступним чтном

$$-\delta J_{t=T} = -\delta\sigma(T, z_i) = \left\langle \delta\tilde{v}_i(t, z_i), \tilde{p}_i(t, z_i)\right\rangle_{t=T}.$$

Оскільки $\delta\sigma(T, z) > 0$, то для того, щоб був справедливим останній вираз, повинно мати місце: $p^0(T, z_i) = -1; p_j(T, z_j) = 0,$ де $i = 0, 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., n$. Тоді, якщо оптимальний розв’язок не віднайдено, то $-\delta J < 0$, а у випадку оптимального розв’язку $-\delta J = 0$, тобто для оптимального розв'язування варіація функціоналу повинна дорівнювати нулю. Зв'яжемо змінну $\tilde{p}(t,z)$ з рівнянням динаміки досліджуваного процесу через пробну функцію $v(t,z)$. Віднайдемо таку змінну $\tilde{p}(t,z)$, яка задовольняє умові

$$\left\langle \delta\tilde{v}(t,z),\ \tilde{p}(t,z)\right\rangle = \left\langle \delta\tilde{v}(T,z),\ \tilde{p}(T,z)\right\rangle_{\tau+\varepsilon\le T} = C = \mathrm{const}\ .$$

Тоді

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\langle \delta\tilde{v}(t,z),\ \tilde{p}(t,z)\right\rangle = \left\langle \frac{\partial\,\delta\tilde{v}(t,z)}{\partial t},\ \tilde{p}(t,z)\right\rangle +$$

$$+\left\langle \frac{\partial\, v(t,z)\,\tilde{p}(t,z)}{\partial t},\ \delta\tilde{v}(t,z)\right\rangle_{\tau+\varepsilon\le T} = 0\,. \qquad \text{(В.10)}$$

Покоординатний аналог (В.10) має вигляд

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial\,\delta\tilde{v}_i(t,z)}{\partial t}\,\tilde{p}_i(t,z) + \sum_{i=0}^{n}\delta\tilde{v}_i(t,z)\,\frac{\partial\,\tilde{p}_i\tilde{v}_i(t,z)}{\partial t} = 0\,,\quad i=0,1,2,\ldots,n\,. \qquad \text{(В.11)}$$

Підставимо в (В.11) значення похідної $\dfrac{\partial\,\delta\tilde{v}_i(t,z)}{\partial t}$ з (В.8)

$$\sum_{i=0}^{n}\tilde{p}_i(t,z_i)\times$$

$$\times\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial\left\{\left\{a\left[\tilde{\Psi}_i(t,z_i)\right]\tilde{\Psi}_i(t,z_i),\ \tilde{\Psi}_i(t,z_i)\right\}+\phi\left[\tilde{\Psi}_i(t,z_i)\right]-\left[f,\tilde{\Psi}_i(t,z_i)\right]\right\}}{m(z_i)\times\partial\tilde{v}_i(t,z_i)}\,\delta\tilde{v}_i(t,z_i)+$$

$$+\sum_{i=0}^{n}\delta\tilde{v}_i(t,z_i)\,\frac{\partial\,\tilde{p}_i(t,z_i)}{\partial t} = 0\,,\quad i=0,1,2,\ldots,n\,. \qquad \text{(В.12)}$$

Змінимо порядок підсумовування в (В.12)

$$\sum_{i=0}^{n}\delta\tilde{v}_i(t,z_i)+$$

$$+\left\{\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial\left\{\left\{a\left[\tilde{\Psi}_i(t,z_i)\right]\tilde{\Psi}_i(t,z_i),\ \tilde{\Psi}_i(t,z_i)\right\}+\phi\left[\tilde{\Psi}_i(t,z_i)\right]-\left[f,\tilde{\Psi}_i(t,z_i)\right]\right\}}{m(z_i)\times\partial\tilde{v}_i(t,z_i)}\right. +$$

$$\left.+\frac{\partial\,\tilde{p}_i(t,z)}{\partial t}\right\} = 0\,,\quad i=0,1,2,\ldots,n\,.$$

Тоді

$$\frac{\partial \tilde{p}_i(t,z)}{\partial t} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial \left\{ \left\{ a\left[\tilde{\Psi}_i(t,z_i)\right]\tilde{\Psi}_i(t,z_i),\, \tilde{\Psi}_i(t,z_i) \right\} + \phi\left[\tilde{\Psi}_i(t,z_i)\right] - \left[f,\, \tilde{\Psi}_i(t,z_i)\right] \right\}}{m(z_i) \times \partial \tilde{v}_i(t,z_i)} \, \tilde{p}_i(t,z_i),$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots, n\,.$$

Зауважимо, що останнє рівняння є *зведеним* до (2.99), а змінну $\tilde{p}(t,z)$ виражено через функцію стану.

Знову звернемося до варіації функціоналу с урахуванням $t = T$

$$-\,\delta J_{\,t=T} = \left\langle \delta\tilde{v}(t,z),\, \tilde{p}(t,z) \right\rangle_{t=T} = 0\,.$$

Замінимо варіацію $\delta\tilde{v}(t,z)$ виразом (B.3), скоротимо на ε і, оскільки τ може бути будь-яким, отримаємо

$$\Big\langle \Big\{ \left\{ a\left[\tilde{\Psi}(t,z)\right], \tilde{v}(t,z) - \tilde{\Psi}(t,z) \right\} + \phi\left[\tilde{v}(t,z)\right] - \phi\left[\tilde{\Psi}(t,z)\right] \; -$$

$$- \left\{ \theta\left[\tilde{\Psi}(t,z), \tilde{v}(t,z)\right], \left[\tilde{v}(t,z) - \tilde{\Psi}(t,z)\right] \right\} \; - \left[f,\, \tilde{v}(t,z) - \tilde{\Psi}(t,z)\right] \Big\}, \tilde{p}(t,z) \Big\rangle_{t=\tau} \; -$$

$$\Big\langle \left\{ a\left[\tilde{\Psi}(t,z)\right], \tilde{v}(t,z) - \tilde{\Psi}(t,z) \right\} + \phi\left[\tilde{v}(t,z)\right] \; - \left[f,\, \tilde{\Psi}(t,z) - \tilde{\Psi}(t,z)\right], \tilde{p}(t,z) \Big\rangle_{t=\tau} = 0\,.$$

(B.13)

З (B.13) витікає, що другий доданок в ньому відповідає *оптимальному розв'язку* варіаційної нерівності (2.99). У випадку, коли оптимальний розв'язок $\Psi(t,z)$ віднайдено, варіація функціоналу J буде дорівнювати нулю, тобто $\delta J = 0$. Враховуючи це, перший доданок в (B.12), що визначається функцією Гамільтона

$$\tilde{H} = \Big\langle \Big\{ \left\{ a\left[\tilde{\Psi}(t,z)\right], \tilde{v}(t,z) - \tilde{\Psi}(t,z) \right\} + \phi\left[\tilde{v}(t,z)\right] - \phi\left[\tilde{\Psi}(t,z)\right] \; -$$

$$- \left\{ \theta\left[\tilde{\Psi}(t,z), \tilde{v}(t,z)\right], \left[\tilde{v}(t,z) - \tilde{\Psi}(t,z)\right] \right\} - \left[f,\, \tilde{v}(t,z) - \tilde{\Psi}(t,z)\right] \Big\}, \tilde{p}(t,z) \Big\rangle\,, \qquad \text{(B.14)}$$

повинен приймати максимальне значення.

Покажемо можливість визначення максимального значення функції Гамільтона. Покоординатний аналог (B.14) визначається наступним чином

$$\tilde{H} = \Big\langle \Big\{ \big\{ a\big[\tilde{\Psi}_i(t, z_i)\big], \tilde{v}_i(t, z_i) - \tilde{\Psi}_i(t, z_i) \big\} + \phi\big[\tilde{v}_i(t, z_i)\big] - \phi\big[\tilde{\Psi}_i(t, z_i)\big] -$$

$$- \big\{ \theta\big[\tilde{\Psi}_i(t, z_i), \tilde{v}_i(t, z_i)\big], \quad \big[\tilde{v}_i(t, z_i) - \tilde{\Psi}_i(t, z_i)\big] \big\} -$$

$$- \big[f, \tilde{v}_i(t, z_i) - \tilde{\Psi}_i(t, z_i) \big] \Big\}, \tilde{p}_i(t, z_i) \Big\rangle \ . \qquad \text{(В.15)}$$

Для забезпечення *максимального значення функції* $\tilde{H}$ необхідно прирівняти нулю все частинні похідні цієї функції по пробній функції $v(t, z)$, що, з урахуванням (В.15), дає систему рівнянь

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial v_i(t, z_i)} = 0 \ , \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n \ . \qquad \text{(В.16)}$$

Таким чином, отримано *необхідні* (рівність нулю другого доданку в (В.12)) та *достатні* (вираз (В.16)) умови оптимальності задачі (2.99), (2.98), (2.90) (або (2.91)). Наведена процедура оптимізаційного пошуку розв’язку варіаційної нерівності (2.84) з початковими умовами (2.85) на основі застосування принципу максимуму складає суть *модифікації методу МФГ* щодо реалізації ММ процесів фільтрації у гетерогенних системах.

ДОДАТОК Г. ДИСКРЕТИЗАЦІЯ НЕПЕРЕРВНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ПРОЦЕСІВ ФІЛЬТРАЦІЇ У ГЕТЕРОГЕННИХ СИСТЕМАХ

Для чисельної реалізації неперервних ММ процесів фільтрації, які було запропоновано в розділі 2.2, необхідно виконати їх дискретизацію. Спираючись на результати досліджень щодо дискретизації неперервних ММ, виконаних в роботі [3] на прикладах аномальних ДП з представленням моделей останніх у вигляді варіаційних нерівностей, зауважимо наступне.

В роботі [3] запропоновано та обґрунтовано підхід до розробки дискретних ММ аномальних ДП, який засновано на поєднанні методу *сумарної апроксимації* та *інтегро-інтерполяційного* методу. Перший дозволяє отримати економічні, з точки зору обчислювальної реалізації, *різницеві схеми*, а другий — приводить до *дивергентних сіток*, для яких закони збереження (на основі яких отримано, зокрема, також і неперервні ММ процесів фільтрації гетерогенних системах) є алгебраїчним наслідком різницевих рівнянь. Оскільки, як було зазначено вище, аномальні ДП (які розглянуто в роботі [3]) за фізичними явищами в значній мірі тотожні процесам фільтрації у гетерогенних системах, то виконаємо подальший розвиток підходу до дискретизації неперервних ММ, запропонований в [3], поширивши його на випадок ММ процесів фільтрації у гетерогенних системах. Принагідно зазначимо також, що подальші розмірковування, з метою уніфікації та типізації по відношенню до розглянутого класу процесів фільтрації у гетерогенних системах (враховуючи виконані систематизацію та класифікацію цих процесів в розділі 2.2), здійснимо, взявши до уваги узагальнену модель виду (2.84), (2.85).

Введемо на відрізку $0 \le t \le t_k$ рівномірну сітку

$$\omega_{\Delta t} = \left\{ t_{\mu} = \mu \cdot \Delta t;\ \mu = \overline{0, M};\ \Delta t = \left(t_k / M \right) \right\},$$

де μ — номер часового шару дискретної моделі (слід взяти до уваги: номер часового шару є *індексом* при відповідних змінних і його не слід ототожнювати з параметром *в’язкості*, який у спеціальній літературі, зокрема [1, 2, 4, 5, 9 — 25, 28, 29], прийнято позначати літерою μ , і якій нижче, у відповідних виразах, є *змінною*).

Розіб’ємо інтервал Δt на j частин (для плоских задач, що розглядаються, $j = 2$), уводячи проміжну точку

$$t_{\hat{\mu}} = t_{\mu+1/2} = t_{\mu} + \frac{\Delta t}{2} \ . \qquad (\text{Г}.1)$$

В неперервній ММ двовимірне рівняння динаміки (2.97) з початковими (2.85) та граничними (2.86) умовами замінимо системою одновимірних рівнянь (для спрощення запису параметри у функцій опустимо)

$$\left[\frac{m_{(1)}}{2}\frac{\partial \Psi_{(1)}}{\partial t}\frac{\partial(v-\Psi)_{(1)}}{\partial z_{(1)}}\right] = -\frac{1}{2}a_{(1)}\left[\frac{\partial(v-\Psi)_{(1)}}{\partial z_{(1)}}\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\phi_{(1)}(v) - \frac{1}{2}\phi_{(1)}(\Psi) - \left\{\frac{1}{2}\theta_{(1)}\left[(v-\Psi)_{(1)}\right]\right\} - \frac{1}{2}\left[m_{(1)} f(v-\Psi)_{(1)}\right],$$

$$\frac{\partial \Psi_{(1)}}{\partial \eta} = \varphi_{(1)}(t,0); \ \left(t_{\mu} < t \le t_{\hat{\mu}};\, z_{(1)} = 0\right),$$

$$\Psi_{(1)}(0,z) = \Psi_{0_{(1)}}(z), \qquad (\text{Г}.2)$$

$$\left[\frac{m_{(2)}}{2}\frac{\partial \Psi_{(2)}}{\partial t}\frac{\partial(v-\Psi)_{(2)}}{\partial z_{(2)}}\right] = -\frac{1}{2}a_{(2)}\left[\frac{\partial(v-\Psi)_{(2)}}{\partial z_{(2)}}\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\phi_{(2)}(v) - \frac{1}{2}\phi_{(2)}(\Psi) - \left\{\frac{1}{2}\theta_{(2)}\left[(v-\Psi)_{(2)}\right]\right\} - \frac{1}{2}\left[m_{(2)} f(v-\Psi)_{(2)}\right],$$

$$\frac{\partial \Psi_{(2)}}{\partial \eta} = \varphi_{(2)}(t,0); \ \left(t_{\hat{\mu}} < t \le t_{\mu+1};\, z_{(2)} = 0\right),$$

$$\Psi_{(1)}\left(t_{\hat{\mu}}, z\right) = \Psi_{0_{(1)}}\left(t_{\hat{\mu}}, z\right). \qquad (\text{Г}.3)$$

Індекс в круглих дужках показує, для якої просторової координати записано відповідні рівняння.

Системи дискретних рівнянь (Г.2) та (Г.3) розв’язуються за допомогою інтегро–інтерполяційного методу, який приводить до дивергентних сіткових аналогів для області Ω .

Побудуємо різницеву схему для дискретних рівнянь систем (Г.2), (Г.3). Введемо рівномірну сітку (за простором для плаского випадку $n=2$) на відрізку $0 \le z \le z_{n_{\max}}$:

$$\omega_{\Delta z} = \left\{ z_{n_\rho} = \rho \cdot \Delta z_n;\ \rho = \overline{0, P};\ \Delta z_n = \left(z_{n_{\max}} / P \right) \right\},\ \ n = 2\ .$$

Запишемо рівняння балансу для перших рівнянь систем (Г.2), (Г.3) на просторовому відрізку $\left[z_{\hat{\rho}^-}, z_{\hat{\rho}^+} \right]$ за час $\Delta t = t_{\hat{\mu}} - t_\mu$, $\hat{\rho}^- = \rho - 1/2$, $\hat{\rho}^+ = \rho + 1/2$ (нижні індекси в круглих дужках опущено):

$$\frac{1}{2}\int\limits_{z_{\hat{\rho}^-}}^{z_{\hat{\rho}^+}} \left\{ m(t_{\hat{\mu}}, z)\Psi(t_{\hat{\mu}}, z)\cdot\left[v(t_{\hat{\mu}}, z) - \Psi(t_{\hat{\mu}}, z) \right] - m(t_\mu, z)\Psi(t_\mu, z)\cdot\left[v(t_\mu, z) - \Psi(t_\mu, z) \right] \right\} dz =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{t_\mu}^{t_{\hat{\mu}}} \left[a(t, z_{\hat{\rho}^+}) - a(t, z_{\hat{\rho}^-}) \right] \cdot \left\{ \left[v(t_{\hat{\mu}}, z) - \Psi(t_{\hat{\mu}}, z) \right] - \left[v(t_\mu, z) - \Psi(t_\mu, z) \right] \right\} dt -$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{t_\mu}^{t_{\hat{\mu}}} \cdot \left\{ \left[\phi(v, t, z_{\hat{\rho}^+}) \right] - \left[\phi(v, t, z_{\hat{\rho}^-}) \right] \right\} dt - \frac{1}{2}\int\limits_{t_\mu}^{t_{\hat{\mu}}} \cdot \left\{ \left[\phi(\Psi, t, z_{\hat{\rho}^+}) \right] - \left[\phi(\Psi, t, z_{\hat{\rho}^-}) \right] \right\} dt + \quad (Г.4)$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{t_\mu}^{t_{\hat{\mu}}} \cdot \left\{ \left[\theta(v, t, z_{\hat{\rho}^+}) \right] - \left[\theta(v, t, z_{\hat{\rho}^-}) \right] \right\} dt - \frac{1}{2}\int\limits_{t_\mu}^{t_{\hat{\mu}}} \cdot \left\{ \left[\theta(\Psi, t, z_{\hat{\rho}^+}) \right] - \left[\theta(\Psi, t, z_{\hat{\rho}^-}) \right] \right\} dt -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_{t_\mu}^{t_{\hat{\mu}}} \left\{ m(t_{\hat{\mu}}, z) \left\{ f(t, z_{\hat{\rho}^+}) \cdot \left[v(t, z_{\hat{\rho}^+}) - \Psi(t, z_{\hat{\rho}^+}) \right] \right\} - \left\{ f(t, z_{\hat{\rho}^-}) \cdot \left[v(t, z_{\hat{\rho}^-}) - \Psi(t, z_{\hat{\rho}^-}) \right] \right\} \right\} dt\ .$$

Виконаємо кінцево-різницеву апроксимацію інтегральних виразів, що входять до (Г.4)

$$\frac{1}{2}\int\limits_{z_{\hat{\rho}^-}}^{z_{\hat{\rho}^+}} \left\{ m(t_{\hat{\mu}}, z)\Psi(t_{\hat{\mu}}, z)\cdot\left[v(t_{\hat{\mu}}, z) - \Psi(t_{\hat{\mu}}, z) \right] - m(t_\mu, z)\Psi(t_\mu, z)\cdot\left[v(t_\mu, z) - \Psi(t_\mu, z) \right] \right\} dz \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}\Delta z \left[m_{\hat{\mu},\rho}\ \Psi_{\hat{\mu},\rho} \left(v_{\hat{\mu},\rho} - \Psi_{\hat{\mu},\rho} \right) - m_{\mu,\rho}\ u_{\mu,\rho} \left(v_{\mu,\rho} - \Psi_{\mu,\rho} \right) \right];$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_{t_\mu}^{t_{\hat{\mu}}} \left[a(t, z_{\hat{\rho}^+}) - a(t, z_{\hat{\rho}^-}) \right] \cdot \left\{ \left[v(t_{\hat{\mu}}, z) - \Psi(t_{\hat{\mu}}, z) \right] - \left[v(t_\mu, z) - \Psi(t_\mu, z) \right] \right\} dt \approx$$

$$\approx -\frac{\Delta t\,\sigma}{2}\left(a_{\hat{\mu},\hat{\rho}^+} - a_{\hat{\mu},\hat{\rho}^-}\right)\left[\left(v_{\hat{\mu},\hat{\rho}^+} - \Psi_{\hat{\mu},\hat{\rho}^+}\right) - \left(v_{\hat{\mu},\hat{\rho}^-} - \Psi_{\hat{\mu},\hat{\rho}^-}\right)\right] -$$

$$-\frac{\Delta t\,\sigma}{2}(1-\sigma)\left(a_{\hat{\mu},\hat{\rho}^+} - a_{\hat{\mu},\hat{\rho}^-}\right)\left[\left(v_{\hat{\mu},\hat{\rho}^+} - \Psi_{\hat{\mu},\hat{\rho}^+}\right) - \left(v_{\hat{\mu},\hat{\rho}^-} - \Psi_{\hat{\mu},\hat{\rho}^-}\right)\right] - ;$$

$$\frac{1}{2}\int_{t_\mu}^{t_{\hat{\mu}}} \cdot \left\{\left[\phi\left(v, t, z_{\hat{\rho}^+}\right)\right] - \left[\phi\left(v, t, z_{\hat{\rho}^-}\right)\right]\right\} dt - \frac{1}{2}\int_{t_\mu}^{t_{\hat{\mu}}} \cdot \left\{\left[\phi\left(\Psi, t, z_{\hat{\rho}^+}\right)\right] - \left[\phi\left(\Psi, t, z_{\hat{\rho}^-}\right)\right]\right\} dt \approx$$

$$\approx \frac{\Delta t\,\sigma}{2}\left[\left(\phi^{v}_{\hat{\mu},\hat{\rho}^+} - \phi^{v}_{\hat{\mu},\hat{\rho}^-}\right) - \left(\phi^{u}_{\hat{\mu},\hat{\rho}^+} - \phi^{u}_{\hat{\mu},\hat{\rho}^-}\right)\right]; \qquad (\Gamma.5)$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_\mu}^{t_{\hat{\mu}}} \cdot \left\{\left[\theta\left(v, t, z_{\hat{\rho}^+}\right)\right] - \left[\theta\left(v, t, z_{\hat{\rho}^-}\right)\right]\right\} dt - \frac{1}{2}\int_{t_\mu}^{t_{\hat{\mu}}} \cdot \left\{\left[\theta\left(\Psi, t, z_{\hat{\rho}^+}\right)\right] - \left[\theta\left(\Psi, t, z_{\hat{\rho}^-}\right)\right]\right\} dt \approx$$

$$\approx \frac{\Delta t\,\sigma}{2}\left[\left(\theta^{v}_{\hat{\mu},\hat{\rho}^+} - \theta^{v}_{\hat{\mu},\hat{\rho}^-}\right) - \left(\theta^{u}_{\hat{\mu},\hat{\rho}^+} - \theta^{u}_{\hat{\mu},\hat{\rho}^-}\right)\right];$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_\mu}^{t_{\hat{\mu}}} \left\{m\left(t_{\hat{\mu}}, z\right)\left\{f\left(t, z_{\hat{\rho}^+}\right) \cdot \left[v\left(t, z_{\hat{\rho}^+}\right) - \Psi\left(t, z_{\hat{\rho}^+}\right)\right]\right\} - \left\{f\left(t, z_{\hat{\rho}^-}\right) \cdot \left[v\left(t, z_{\hat{\rho}^-}\right) - \Psi\left(t, z_{\hat{\rho}^-}\right)\right]\right\}\right\} dt \approx$$

$$\approx -\frac{\Delta t\,\sigma}{2}\left\{m_{\hat{\mu},\rho}\left(f_{\mu,\hat{\rho}^+}\right)\left[\left(v_{\hat{\mu},\hat{\rho}^+} - \Psi_{\hat{\mu},\hat{\rho}^+}\right) - \left(v_{\hat{\mu},\hat{\rho}^-} - \Psi_{\hat{\mu},\hat{\rho}^-}\right)\right]\right\} -$$

$$-\frac{\Delta t\,\sigma}{2}(1-\sigma)\left\{m_{\mu,\rho}\left(f_{\mu,\hat{\rho}^+}\right)\left[\left(v_{\mu,\hat{\rho}^+} - \Psi_{\mu,\hat{\rho}^+}\right) - \left(v_{\mu,\hat{\rho}^-} - \Psi_{\mu,\hat{\rho}^-}\right)\right]\right\}.$$

Апроксимуємо кожний доданок (Г.4) в граничних точках $z = 0$ и $z_{j_{\max}}$. Апроксимацію будемо здійснювати в паралелепіпеді $0 \le z \le z_{j_{\max}}$; $t_\mu \le t \le t_{\hat{\mu}}$.

Для граничної точки $z = 0$:

$$\frac{1}{2}\int_{z_{\hat{\rho}^-}}^{z_{\hat{\rho}^+}} \left\{m\left(t_{\hat{\mu}}, z\right)\Psi\left(t_{\hat{\mu}}, z\right) \cdot \left[v\left(t_{\hat{\mu}}, z\right) - \Psi\left(t_{\hat{\mu}}, z\right)\right] - m\left(t_\mu, z\right)\Psi\left(t_\mu, z\right) \cdot \left[v\left(t_\mu, z\right) - \Psi\left(t_\mu, z\right)\right]\right\} dz \approx$$

$$\approx \frac{1}{2}\Delta z\left[m_{\hat{\mu},0}\,\Psi_{\hat{\mu},0}\left(v_{\hat{\mu},0} - \Psi_{\hat{\mu},0}\right) - m_{\mu,0}\,\Psi_{\mu,0}\left(v_{\mu,0} - \Psi_{\mu,0}\right)\right];$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_\mu}^{t_{\hat{\mu}}} \left[a\left(t, z_{\hat{\rho}^+}\right) - a\left(t, z_{\hat{\rho}^-}\right)\right] \cdot \left\{\left[v\left(t_{\hat{\mu}}, z\right) - \Psi\left(t_{\hat{\mu}}, z\right)\right] - \left[v\left(t_\mu, z\right) - \Psi\left(t_\mu, z\right)\right]\right\} dt \approx$$

$$\approx -\frac{\Delta t\,\sigma}{2}\left(a_{\hat{\mu},1} - a_{\hat{\mu},0}\right)\left[\left(v_{\hat{\mu},1} - \Psi_{\hat{\mu},1}\right) - \left(v_{\hat{\mu},0} - \Psi_{\hat{\mu},0}\right)\right] -$$

$$-\frac{\Delta t\,\sigma}{2}(1-\sigma)\left(a_{\hat{\mu},1}-a_{\hat{\mu},0}\right)\left[\left(v_{\hat{\mu},1}-\Psi_{\hat{\mu},1}\right)-\left(v_{\hat{\mu},0}-\Psi_{\hat{\mu},0}\right)\right];$$

$$\frac{1}{2}\int_{t_\mu}^{t_{\hat{\mu}}}\left\{\left[\phi\left(v,t,z_{\hat{\rho}^+}\right)\right]-\left[\phi\left(v,t,z_{\hat{\rho}^-}\right)\right]\right\}dt-\frac{1}{2}\int_{t_\mu}^{t_{\hat{\mu}}}\cdot\left\{\left[\phi\left(\Psi,t,z_{\hat{\rho}^+}\right)\right]-\left[\phi\left(\Psi,t,z_{\hat{\rho}^-}\right)\right]\right\}dt\approx$$

$$\approx\frac{\Delta t\,\sigma}{2}\left[\left(\phi^{v}_{\hat{\mu},1}-\phi^{v}_{\hat{\mu},0}\right)-\left(\phi^{u}_{\hat{\mu},1}-\phi^{u}_{\hat{\mu},0}\right)\right]; \qquad (Г.6)$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_\mu}^{t_{\hat{\mu}}}\cdot\left\{\left[\theta\left(v,t,z_{\hat{\rho}^+}\right)\right]-\left[\theta\left(v,t,z_{\hat{\rho}^-}\right)\right]\right\}dt-\frac{1}{2}\int_{t_\mu}^{t_{\hat{\mu}}}\cdot\left\{\left[\theta\left(\Psi,t,z_{\hat{\rho}^+}\right)\right]-\left[\theta\left(\Psi,t,z_{\hat{\rho}^-}\right)\right]\right\}dt\approx$$

$$\approx\frac{\Delta t\,\sigma}{2}\left[\left(\theta^{v}_{\hat{\mu},1}-\theta^{v}_{\hat{\mu},0}\right)-\left(\theta^{u}_{\hat{\mu},1}-\theta^{u}_{\hat{\mu},0}\right)\right];$$

$$-\frac{1}{2}\int_{t_\mu}^{t_{\hat{\mu}}}\left\{m\left(t_{\hat{\mu}},z\right)\left\{f\left(t,z_{\hat{\rho}^+}\right)\cdot\left[v\left(t,z_{\hat{\rho}^+}\right)-\Psi\left(t,z_{\hat{\rho}^+}\right)\right]\right\}-\left\{f\left(t,z_{\hat{\rho}^-}\right)\cdot\left[v\left(t,z_{\hat{\rho}^-}\right)-\Psi\left(t,z_{\hat{\rho}^-}\right)\right]\right\}\right\}dt\approx$$

$$\approx-\frac{\Delta t\,\sigma}{2}\left\{m_{\hat{\mu},0}\left(f_{\mu,1}\right)\left[\left(v_{\hat{\mu},1}-\Psi_{\hat{\mu},1}\right)-\left(v_{\hat{\mu},0}-\Psi_{\hat{\mu},0}\right)\right]\right\}-$$

$$-\frac{\Delta t\,\sigma}{2}(1-\sigma)\left\{m_{\mu,0}\left(f_{\mu,1}\right)\left[\left(v_{\mu,1}-\Psi_{\mu,1}\right)-\left(v_{\mu,0}-\Psi_{\mu,0}\right)\right]\right\}.$$

Для граничної точки $z=z_{n_{\max}}$ апроксимація (Г.4) виконується аналогічно (у відповідних виразах у змінних будуть індекси $\hat{\mu}, z_{n_{P-1}}$ або $\hat{\mu}, z_{n_P}$; $z_{n_P}=z_{n_{\max}}$, $n=\overline{1,2}$).

Таким чином, остаточно, різницева схема для системи (Г.2), (Г.3) прийме вигляд

$$B_{j_{\hat{\mu},0}}\Psi_{j_{\hat{\mu},0}}\cdot(v-\Psi)_{j_{\hat{\mu},0}}=F_{j_{\mu,0}}(v-\Psi)_{j_{\mu,0}}+$$

$$+C_{j_{\mu,0}}\phi(v)_{j_{\mu,0}}-C_{j_{\mu,0}}\phi(\Psi)_{j_{\mu,0}}+D_{j_{\mu,0}}\theta(v)_{j_{\mu,0}}-D_{j_{\mu,0}}\theta(\Psi)_{j_{\mu,0}}-$$

$$-E_{j_{\mu,0}}f(v-\Psi)_{j_{\mu,0}},\quad \rho=0;\ j=1,2,$$

$$B_{j_{\hat{\mu},\rho}}\Psi_{j_{\hat{\mu},\rho}}\cdot(v-\Psi)_{j_{\hat{\mu},\rho}}=$$

$$=\left[F_{j_{\mu,\hat{\rho}^+}}\cdot(v-\Psi)_{j_{\hat{\mu},\hat{\rho}^+}}-F_{j_{\mu,\hat{\rho}^-}}\cdot(v-\Psi)_{j_{\hat{\mu},\hat{\rho}^-}}\right]+ \qquad (Г.7)$$

$$+\left[C_{j_{\mu,\hat{\rho}^+}}\phi(v)_{j_{\hat{\mu},\hat{\rho}^+}}-C_{j_{\mu,\hat{\rho}^-}}\phi(\Psi)_{j_{\hat{\mu},\hat{\rho}^-}}\right]-\left[D_{j_{\mu,\hat{\rho}^+}}\theta(v)_{j_{\hat{\mu},\hat{\rho}^+}}-D_{j_{\mu,\hat{\rho}^-}}\theta(\Psi)_{j_{\hat{\mu},\hat{\rho}^-}}\right]-$$

$$+\left[E_{j_{\mu,\hat{\rho}^+}} f(v-\Psi)_{j_{\mu,\hat{\rho}^+}} - E_{j_{\mu,\hat{\rho}^-}} f(v-\Psi)_{j_{\mu,\hat{\rho}^-}}\right], \quad \rho=\overline{1, P-1}; \; j=1,2,$$

$$B_{j_{\hat{\mu},P}} \Psi_{j_{\hat{\mu},P}} \cdot (v-\Psi)_{j_{\hat{\mu},P}} = F_{j_{\mu,P}} (v-\Psi)_{j_{\mu,P}} +$$

$$+C_{j_{\mu,P}} \phi(v)_{j_{\mu,P}} - C_{j_{\mu,P}} \phi(\Psi)_{j_{\mu,P}} + D_{j_{\mu,P}} \theta(v)_{j_{\mu,P}} - D_{j_{\mu,P}} \theta(\Psi)_{j_{\mu,P}} -$$

$$-E_{j_{\mu,P}} f(v-\Psi)_{j_{\mu,P}}, \quad \rho=P; \; j=1,2,$$

де коефіцієнти консервативної різницевої схеми визначаються наступним чином:

$$B_{j_{\hat{\mu},0}} = \frac{1}{2} m_{j_{\hat{\mu},0}} \cdot \frac{\Delta z}{2}; \qquad F_{j_{\hat{\mu},0}} = \frac{\sigma\Delta t}{2} + \frac{\Delta t}{2}(1-\sigma);$$

$$C_{j_{\hat{\mu},0}} = \frac{R_{s\text{ф}} k_{j_{\hat{\mu},0}}}{\mu_{j_{\hat{\mu},0}}}\left[\frac{\sigma\Delta t^2}{4} - \frac{\Delta t^2}{4}(1-\sigma)\right]; \; D_{j_{\hat{\mu},0}} = \frac{R_{s\text{ф}} k_{j_{\hat{\mu},0}}}{\mu_{j_{\hat{\mu},0}}}\left[\frac{\sigma\Delta t^2}{4} - \frac{\Delta t^2}{4}(1-\sigma)\right];$$

$$E_{j_{\hat{\mu},0}} = m_{j_{\hat{\mu},0}}\left[\frac{\sigma\Delta t^2}{4} - \frac{\Delta t^2}{4}(1-\sigma)\right],$$

$$B_{j_{\hat{\mu},P}} = \frac{1}{2} m_{j_{\hat{\mu},P}} \cdot \frac{\Delta z}{2}; \qquad F_{j_{\hat{\mu},P}} = \frac{\sigma\Delta t}{2} + \frac{\Delta t}{2}(1-\sigma);$$

$$C_{j_{\hat{\mu},P}} = \frac{R_{s\text{ф}} k_{j_{\hat{\mu},P}}}{\mu_{j_{\hat{\mu},P}}}\left[\frac{\sigma\Delta t^2}{4} - \frac{\Delta t^2}{4}(1-\sigma)\right]; \; D_{j_{\hat{\mu},P}} = \frac{R_{s\text{ф}} k_{j_{\hat{\mu},P}}}{\mu_{j_{\hat{\mu},P}}}\left[\frac{\sigma\Delta t^2}{4} - \frac{\Delta t^2}{4}(1-\sigma)\right];$$

$$E_{j_{\hat{\mu},P}} = m_{j_{\hat{\mu},P}}\left[\frac{\sigma\Delta t^2}{4} - \frac{\Delta t^2}{4}(1-\sigma)\right],$$

$$B_{j_{\hat{\mu},\rho}} = \frac{1}{2} m_{j_{\hat{\mu},\rho}} \Delta z; \; F_{j_{\hat{\mu},\hat{\rho}^+}} = \frac{\sigma\Delta t}{2} + \frac{\Delta t}{2}(1-\sigma); \; F_{j_{\hat{\mu},\hat{\rho}^=}} = \frac{\sigma\Delta t}{2} + \frac{\Delta t}{2}(1-\sigma);$$

$$C_{j_{\hat{\mu},\hat{\rho}^+}} = \frac{R_{s\text{ф}} k_{j_{\hat{\mu},\hat{\rho}^+}}}{\mu_{j_{\hat{\mu},\hat{\rho}^+}}}\left[\frac{\sigma\Delta t^2}{4} - \frac{\Delta t^2}{4}(1-\sigma)\right]; \; C_{j_{\hat{\mu},\hat{\rho}^-}} = \frac{R_{s\text{ф}} k_{j_{\hat{\mu},\hat{\rho}^+}}}{\mu_{j_{\hat{\mu},\hat{\rho}^+}}}\left[\frac{\sigma\Delta t^2}{4} - \frac{\Delta t^2}{4}(1-\sigma)\right];$$

$$D_{j_{\hat{\mu},\hat{\rho}^+}} = \frac{R_{s\text{ф}} k_{j_{\hat{\mu},\hat{\rho}^+}}}{\mu_{j_{\hat{\mu},\hat{\rho}^+}}}\left[\frac{\sigma\Delta t^2}{4} - \frac{\Delta t^2}{4}(1-\sigma)\right]; \; D_{j_{\hat{\mu},\hat{\rho}^-}} = \frac{R_{s\text{ф}} k_{j_{\hat{\mu},\hat{\rho}^-}}}{\mu_{j_{\hat{\mu},\hat{\rho}^-}}}\left[\frac{\sigma\Delta t^2}{4} - \frac{\Delta t^2}{4}(1-\sigma)\right];$$

$$E_{j_{\hat{\mu},\hat{\rho}+}} = m_{j_{\hat{\mu},\hat{\rho}+}}\left[\frac{\sigma\Delta t^2}{4} - \frac{\Delta t^2}{4}(1-\sigma)\right]; \; E_{j_{\hat{\mu},\hat{\rho}^-}} = m_{j_{\hat{\mu},\hat{\rho}-}}\left[\frac{\sigma\Delta t^2}{4} - \frac{\Delta t^2}{4}(1-\sigma)\right].$$

Розв'язком системи (2.84), (2.85) для моментів часу $t = t_\mu$, $\mu = 0, 1, 2, \ldots$ є функції $\Psi\left(t_{\tilde{\mu}}, z\right) = \Psi_{(2)}\left(t_{\tilde{\mu}}, z\right)$ ($\tilde{\mu} = \mu + 1$), які, в свою чергу, визначено через $\Psi_{(1)}\left(t_{\hat{\mu}}, z\right)$ и $\Psi\left(t_{\hat{\mu}}, z\right)$ ($\hat{\mu} = \mu + 1/2$). Далі, при запису різницевих рівнянь будемо використовувати результуючі значення для часових шарів μ та $\tilde{\mu} = \mu + 1$.

Приведемо різницеву схему (Г.7) до *векторно-матричної форми*, що забезпечує можливість наступного чисельного розв'язування (машинну реалізацію). При цьому оберемо випадок *неявної* дискретної моделі, що відповідає значенню параметра $0 < \sigma \le 1$ в різницевій схемі (Г.5). Застосування неявної різницевої схеми забезпечує *безумовну сталість* обчислювального процесу та знімає *обмеження* на выбір *кроку* дискретизації за часом [12 — 18]. Тоді векторно-матрична форма системи (Г.5) запишеться таким чином

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_{\tilde{\mu}} = \mathbf{F}_\mu \cdot \Big\{ & \sigma(\mathbf{v} - \boldsymbol{\Psi})_{\tilde{\mu},\rho+1} - 2\sigma(\mathbf{v} - \boldsymbol{\Psi})_{\tilde{\mu},\rho} + \sigma(\mathbf{v} - \boldsymbol{\Psi})_{\tilde{\mu},\rho-1} + \\
& + (1-\sigma)(\mathbf{v} - \boldsymbol{\Psi})_{\mu,\rho+1} - 2(1-\sigma)(\mathbf{v} - \boldsymbol{\Psi})_{\mu,\rho} + (1-\sigma)(\mathbf{v} - \boldsymbol{\Psi})_{\mu,\rho-1} \Big\} - \\
& - \mathbf{C}_\mu \big[\sigma\phi(v)_{\tilde{\mu},\rho+1} - 2\sigma\phi(v)_{\tilde{\mu},\rho} + \sigma\phi(v)_{\tilde{\mu},\rho-1} + \\
& + (1-\sigma)\phi(v)_{\mu,\rho+1} - 2(1-\sigma)\phi(v)_{\mu,\rho} + (1-\sigma)\phi(v)_{\mu,\rho-1} \big] + \\
& - \mathbf{C}_\mu \big[\sigma\phi(\Psi)_{\tilde{\mu},\rho+1} - 2\sigma\phi(\Psi)_{\tilde{\mu},\rho} + \sigma\phi(\Psi)_{\tilde{\mu},\rho-1} + \\
& + (1-\sigma)\phi(\Psi)_{\mu,\rho+1} - 2(1-\sigma)\phi(\Psi)_{\mu,\rho} + (1-\sigma)\phi(\Psi)_{\mu,\rho-1} \big] + \\
& + \mathbf{D}_\mu \big[\sigma\,\boldsymbol{\theta}(v, \Psi)_{\tilde{\mu},\rho+1} - 2\sigma\,\boldsymbol{\theta}(v, \Psi)_{\tilde{\mu},\rho} + \sigma\,\boldsymbol{\theta}(v, \Psi)_{\tilde{\mu},\rho-1} + \\
& + (1-\sigma)\boldsymbol{\theta}(v, \Psi)_{\mu,\rho+1} - 2(1-\sigma)\boldsymbol{\theta}(v, \Psi)_{\mu,\rho} + (1-\sigma)\boldsymbol{\theta}(v, \Psi)_{\mu,\rho-1} \big] + \\
& + \mathbf{E}_\mu\, \mathbf{f}_{\mu,\rho}(v, \Psi)_{\mu,\rho},
\end{aligned}
\qquad (\text{Г}.8)
$$

де

$$
\mathbf{F}_{\mu,0} = \frac{F_{\mu,0}}{B_{\mu,0}}; \quad \mathbf{C}_{\mu,0} = \frac{C_{\mu,0}}{B_{\mu,0}}; \quad \mathbf{D}_{\mu,0} = \frac{D_{\mu,0}}{B_{\mu,0}}; \quad \mathbf{E}_{\mu,0} = \frac{E_{\mu,0}}{B_{\mu,0}};
$$

$$\mathbf{F}_{\mu,P} = B\frac{F_{\mu,P}}{A_{\mu,P}};\ \ \mathbf{C}_{\mu,P} = \frac{C_{\mu,P}}{B_{\mu,P}};\ \ \mathbf{D}_{\mu,P} = \frac{D_{\mu,P}}{B_{\mu,P}};\ \ \mathbf{E}_{\mu,P} = \frac{E_{\mu,P}}{B_{\mu,P}};$$

$$\mathbf{F}_{\mu,\rho} = \frac{F_{\mu,\rho}}{B_{\mu,\rho+1} - 2B_{\mu,\rho} + B_{\mu,\rho-1}};\ \mathbf{C}_{\mu,\rho} = \frac{C_{\mu,\rho}}{B_{\mu,\rho+1} - 2B_{\mu,\rho} + B_{\mu,\rho-1}};$$

$$\mathbf{D}_{\mu,\rho} = \frac{D_{\mu,\rho}}{B_{\mu,\rho+1} - 2B_{\mu,\rho} + B_{\mu,\rho-1}};\ \mathbf{E}_{\mu,\rho} = \frac{E_{\mu,\rho}}{B_{\mu,\rho+1} - 2B_{\mu,\rho} + B_{\mu,\rho-1}}.$$

Система (Г.7) доповнюється відповідними початковими

$$\mathbf{\Psi}(0) = \mathbf{\Psi}_0;\ \ \mathbf{\Psi}_0 = \left[\Psi_{0,0}\ \Psi_{0,1}\ \ \Psi_{0,2}\ \ldots\ \Psi_{0,P}\ \right]^T \tag{Г.9}$$

Та граничними умовами

$$\left(\partial\mathbf{\Psi}_{\mu,0} \big/ \partial\eta\right) = \varphi_{\mu,0},\ \ \left(\partial\mathbf{\Psi}_{\mu,P} \big/ \partial\eta\right) = \varphi_{\mu,P}. \tag{Г.10}$$

Алгоритмічні засоби реалізації дискретної ММ (Г.8) — (Г.10) представлено в розділі 2.3.

ДОДАТОК Д. ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ ІНСТРУМЕНТАЛЬНИХ ЗАСОБІВ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ФІЛЬТРАЦІЇ У ГЕТЕРОГЕННИХ СИСТЕМАХ

Вид діалогових вікон, які відповідають режимам роботи програмного комплексу

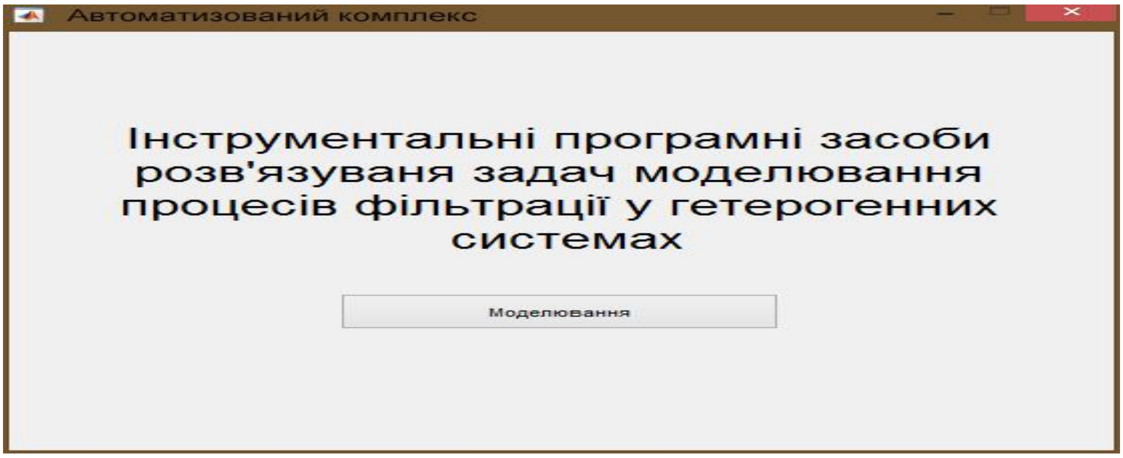


Рисунок Д.1 — Вікно вибору режиму моделювання

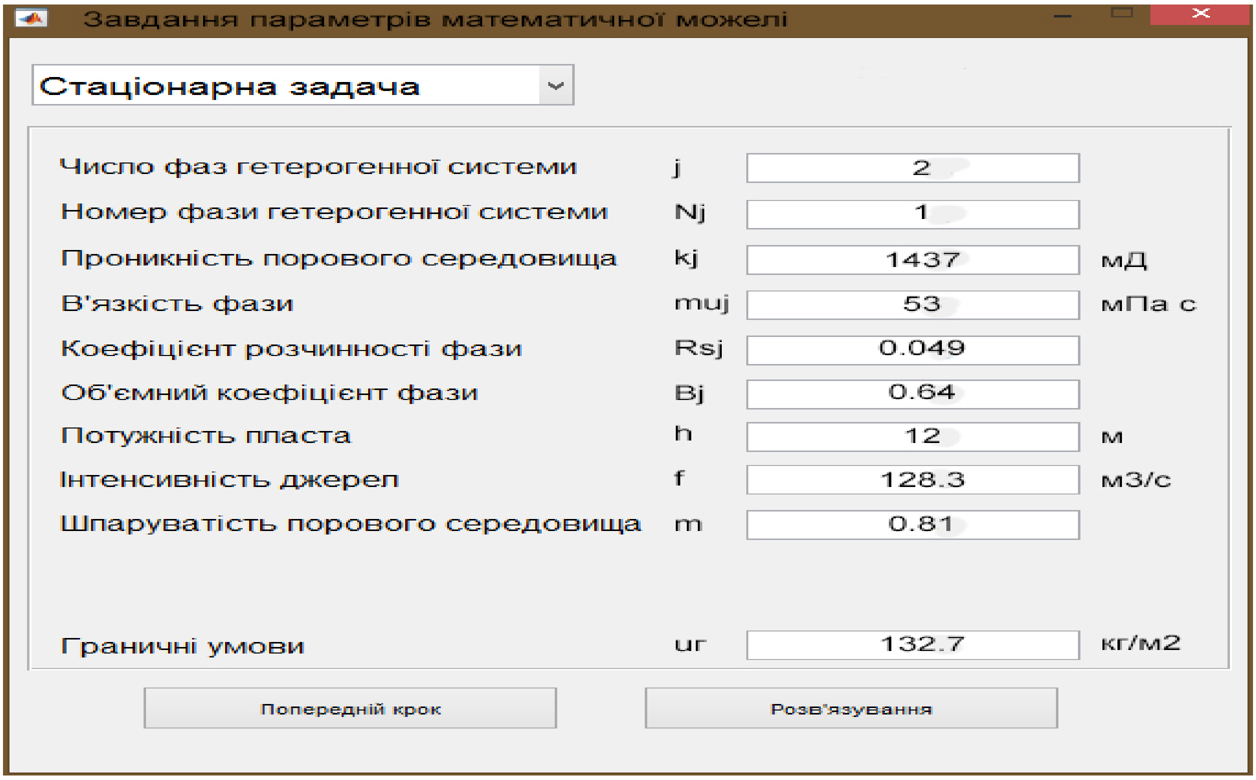


Рисунок Д. 2 — Вікно завдання параметрів математичної моделі (стаціонарна задача)

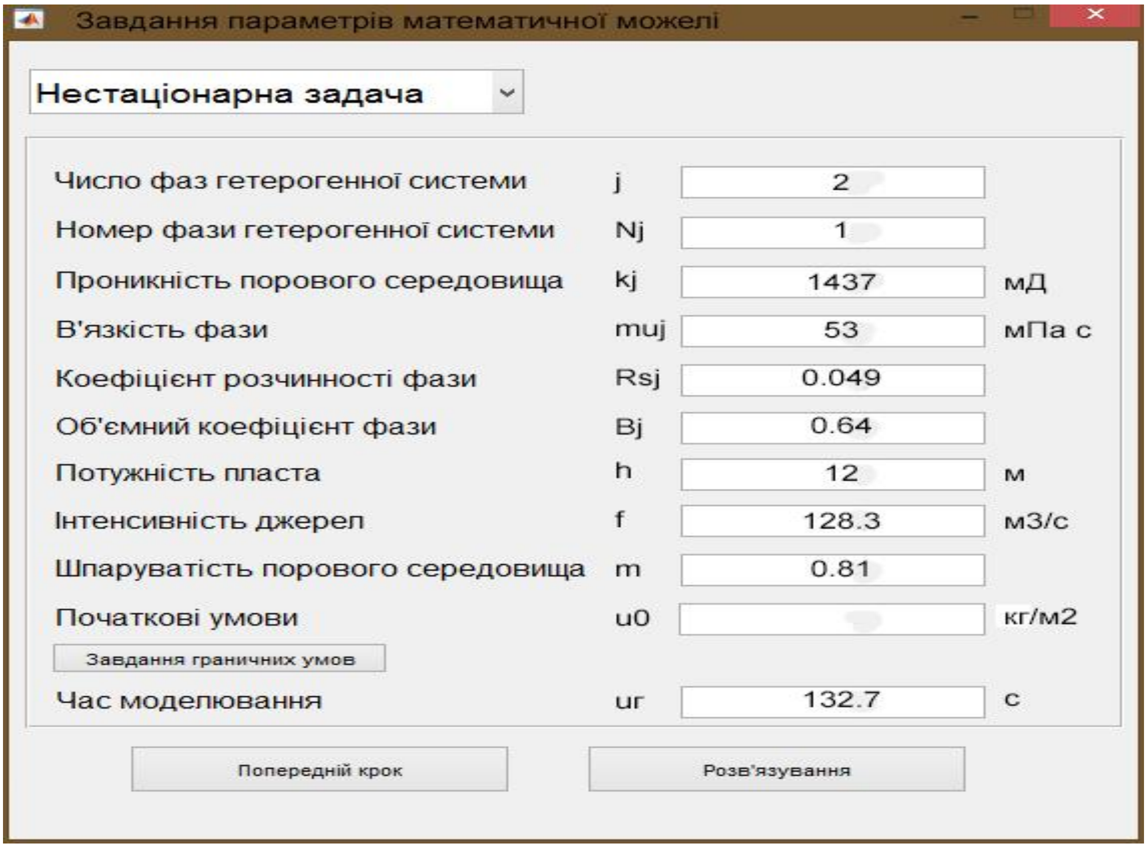


Рисунок Д. 3 — Вікно завдання параметрів математичної моделі (нестаціонарна задача)

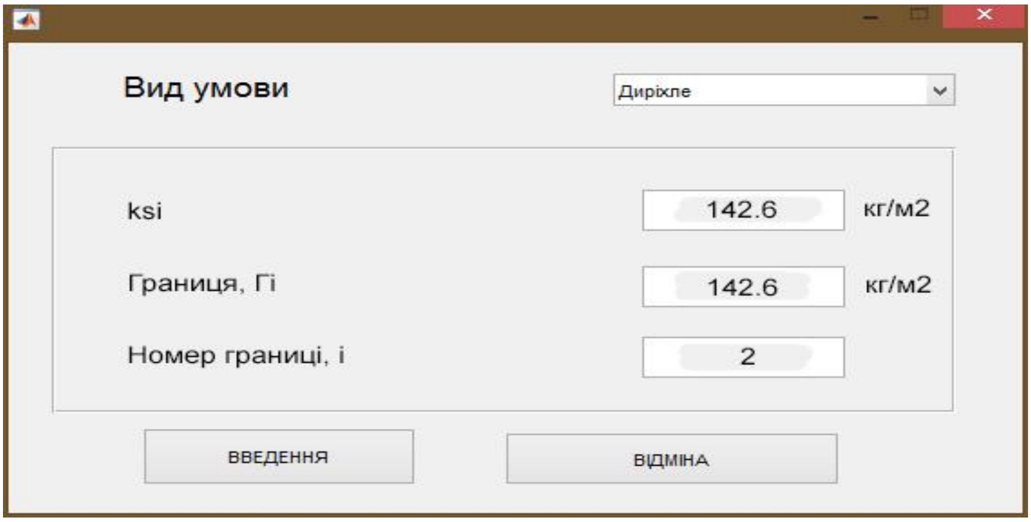


Рисунок Д. 4 — Вікно завдання граничних умов