УДК 624.04

Н.Г. Сурьянинов д-р техн. наук, проф.,
Ю.В. Корниенко магистр,
Одес. нац. политехн. ун-т

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ГРАФОВ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

М.Г. Сур'янінов, Ю.В. Корнієнко. **Застосування теорії графів для описання топологічних зв'язків стержневих систем.** Розглянуто основні передумови автоматизації початкового етапу розрахунку стержневих систем, пов'язані з описанням топології системи. Показано ефективність застосування теорії графів і матричної алгебри.
Ключові слова: орієнтований граф, матриця інциденцій, ферма, рама, топологія.

Н.Г. Сурьянинов, Ю.В. Корниенко. **Применение теории графов для описания топологических связей стержневых систем.** Рассмотрены основные предпосылки автоматизации начального этапа расчета стержневых систем, связанные с описанием топологии системы. Показана эффективность применения теории графов и матричной алгебры.
Ключевые слова: ориентированный граф, матрица инциденций, ферма, рама, топология.

N.G. Surianinov, Yu.V. Korniyenko. **Application of graph theory for the description of topological connections of rod systems.** The main preconditions of the initial stage automation of the rod systems calculation, which are connected with the description of system topology, are considered. Efficiency of application of the graph theory and matrix algebra is shown.
Keywords: directed graph, incidence matrix, truss, frame, topology.

Наиболее рациональным математическим аппаратом, позволяющим четко сформулировать алгоритм решения задачи, является теория матриц. Матричная алгебра позволяет просто и наглядно выполнять промежуточные преобразования, создавать универсальные алгоритмы расчета сложных систем, и дает возможность легко реализовать эти алгоритмы в компьютерных программах.

Для полной автоматизации расчета не достает обычно только информации о топологии системы, т.е. данных о расчетной схеме конструкции, выраженных в виде определенных цифровых наборов. Аналогичная проблема возникает и при использовании численно-аналитического метода граничных элементов [1]. Здесь при расчете стрежневых систем для построения основных матриц метода, задания информации об условиях сопряжения элементов (модулей) в узлах и о граничных условиях необходимо знать топологические связи в системе.

Сказанное относится к весьма широкому кругу конструкций — рамам, фермам, арочным системам, тонкостенным стрежням. Избавиться от этого недостатка, и тем самым полностью автоматизировать расчет, становится возможным при использовании теории графов [2, 3].

Как известно, граф представляет собой структуру в пространстве, состоящую из множества точек, взаимосвязанных множеством непрерывных, самопересекающихся кривых или прямых линий (ребер). Если при этом граничные точки ребра образуют упорядоченную пару вершин, то граф является ориентированным.

Каждому графу, имеющему n вершин и m ребер, можно поставить в соответствие так называемую матрицу ициденций размером $n{\times}m$, строки которой соответствуют вершинам, а столбцы — ребрам графа. Элементы матрицы инциденций ориентированного графа принимают значения 0, +1, –1.

Представим, например, в виде графов поперечные сечения тонкостенных стержней открытого, замкнутого и комбинированного профилей (рис. 1) и запишем матрицы инциденций **I** каждого из них.

ISSN 2076-2429 (print)
ISSN 2223-3814 (on line)

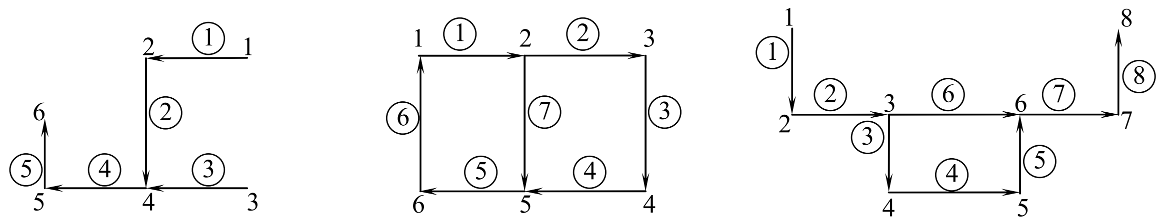

Рис. 1. Ориентированные графы поперечных сечений тонкостенных стержней открытого (а), закрытого (б) и комбинированного (в) профилей

$$\mathbf{I}_{\text{откр.}} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

$$\mathbf{I}_{\text{замкн.}} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

$$\mathbf{I}_{\text{комб.}} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Аналогичным образом можно описать расчетные схемы ферм или рам. Так, для фермы (рис. 2) матрица инциденций будет иметь вид

$$\mathbf{I}_{\text{ф}} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}. \tag{1}$$

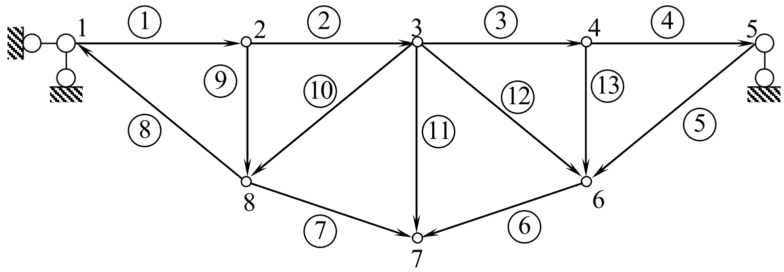

Рис. 2. Ориентированный граф фермы

Анализ матрицы (1) позволяет легко установить, какие стержни фермы сходятся в том или ином ее узле. Например, информация, содержащаяся в третьей строке матрицы (1), говорит о том, что в узле 3 располагается начало третьего, десятого, одиннадцатого и двенадцатого стержней и конец второго стержня. Каждый столбец матрицы инциденций обязательно содержит одну цифру 1 и одну –1, что естественно, т.к. любой стержень имеет начало и конец. Количество отличных от нуля цифр в строке никак не ограничивается и определяется числом стержней, сходящихся в соответствующем узле.

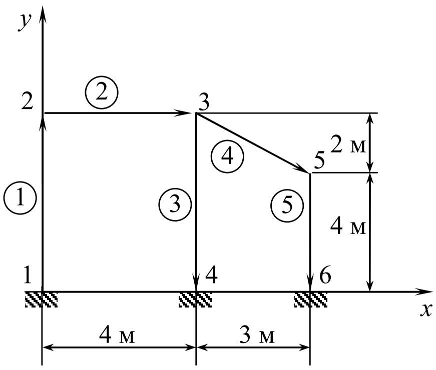

Рис. 3. Ориентированный граф рамы

Информация о системе, которая содержится в матрице инциденций, еще не обладает всей полнотой для автоматизации расчета. Необходимо задать координаты узлов и вычислить длину каждого элемента.

Рассмотрим эти процедуры на примере рамы (рис. 3).

Поместим начало координат в узел 1, а оси y и x направим соответственно вверх и вправо (рис. 3).

Введем вектор $\vec{\mathbf{K}}^{\mathrm{T}}$, содержащий координаты узлов рамы в выбранной системе координат

$$\vec{\mathbf{K}}^{\mathrm{T}} = \Big\| \| x_1 \quad y_1 \| \| x_2 \quad y_2 \| \ldots \| x_6 \quad y_6 \| \Big\|.$$

Здесь и далее индекс “Т” указывает на операцию транспонирования матриц [4].

Тогда вектор проекций длин стрежней рамы на координатные оси x и y определяется абсолютной величиной произведения матриц $\mathbf{I}^{\mathrm{T}}$ и $\vec{\mathbf{K}}^{\mathrm{T}}$

$$\vec{\mathbf{L}} = \operatorname{mod}(\mathbf{I}^{\mathrm{T}} \cdot \vec{\mathbf{K}}^{\mathrm{T}}) . \tag{2}$$

Теперь можно определить длину каждого стержня

ISSN 2076-2429 (print)
ISSN 2223-3814 (on line)

$$l_n = \sqrt{\begin{Vmatrix} l_{xn} & l_{yn} \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} l_{xn} \\ l_{yn} \end{Vmatrix}}, \qquad (3)$$

где n — число стержней рамы;

l_{xy}, l_{yn} — компоненты вектора $\vec{\mathbf{L}}$.

Для рассматриваемой рамы матрица инциденций $\mathbf{I}$ и вектор координат узлов принимают вид

$$\mathbf{I} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{Vmatrix};$$

$$\vec{\mathbf{K}}^{\mathrm{T}} = \begin{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 & 6 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 4 & 6 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 4 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 7 & 4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 7 & 0 \end{Vmatrix} \end{Vmatrix}.$$

Тогда, в соответствии с (2), проекции длин элементов рамы на координатные оси выглядят как

$$\vec{\mathbf{L}} = \begin{Vmatrix} \begin{Vmatrix} l_{x1} \\ l_{y1} \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} l_{x2} \\ l_{y2} \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} l_{x3} \\ l_{y3} \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} l_{x4} \\ l_{y4} \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} l_{x5} \\ l_{y5} \end{Vmatrix} \end{Vmatrix} = \mathrm{mod}\left(\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} 0 \\ 6 \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} 4 \\ 6 \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} 4 \\ 0 \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} 7 \\ 4 \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} 7 \\ 0 \end{Vmatrix} \end{Vmatrix} \right) = \begin{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 \\ 6 \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} 4 \\ 0 \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} 0 \\ 6 \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} 3 \\ 2 \end{Vmatrix} \\ \begin{Vmatrix} 0 \\ 4 \end{Vmatrix} \end{Vmatrix}.$$

По формуле (3) определим длину каждого стержня

$$l_1 = \sqrt{\begin{Vmatrix} 0 & 6 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 \\ 6 \end{Vmatrix}} = 6 \text{ м}; \; l_2 = \sqrt{\begin{Vmatrix} 4 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 4 \\ 0 \end{Vmatrix}} = 4 \text{ м}; \; l_3 = \sqrt{\begin{Vmatrix} 0 & 6 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 \\ 6 \end{Vmatrix}} = 6 \text{ м};$$

$$l_4 = \sqrt{\begin{Vmatrix} 3 & 2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 3 \\ 2 \end{Vmatrix}} = \sqrt{13} \text{ м}; \; l_5 = \sqrt{\begin{Vmatrix} 0 & 4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 \\ 4 \end{Vmatrix}} = 4 \text{ м}.$$

Всю приведенную информацию о системе следует дополнить вектором жесткости, элементами которого, в зависимости от вида конструкции и условий ее работы, будут произведения EI_n, EA_n и др. (здесь I_n — осевой момент инерции поперечного сечения n-го стержня, EA_n — площадь сечения, E — модуль упругости).

Таким образом, задавая матрицу инцидений ориентированного графа системы, вектор координат узлов и вектор жесткости всех стержней, можно получить информацию о расчетной схеме, что дает возможность полностью автоматизировать расчет.

Литература

1. Численно-аналитический метод граничных элементов / А.Ф. Дащенко, Л.В. Коломиец, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов — Одесса, ВМВ, 2010. — В 2 т. — Т. 1 — 416 с. — Т.2 — 512 с.
2. Зыков, А.А. Основы теории графов / А.А. Зыков. — М.: Наука, 1987. — 384 с.
3. Оре, О. Теория графов / О. Оре. — Спб.: Либроком, 2009. — 354 с.
4. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. — М.: Физматлит, 2004. — 560 с.

References

1. Chislenno-analiticheskiy metod granichnykh elementov [Numerical-analytical boundary elements method] / A.F. Dashchenko, L.V. Kolomiyets, V.F. Orobey, N.G. Surianinov. — Odessa, 2010. — In 2 volumes. — Vol. 1. — 416 p. — Vol. 2 — 512 p.
2. Zykov, A.A. Osnovy teorii grafov [Graph theory fundamentals] / A.A. Zykov. — Moscow, 1987. — 384 p.
3. Ore, O. Teoriya grafov [Graph theory]. / O. Ore. — St. Petersburg, 2009. — 354 p.
4. Gantmakher, F.R. Teoriya matrits [Theory of matrices] / F.R. Gantmakher. — Moscow, 2004. — 560 p.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. политехн. ун-та Сидоренко И.И.

Поступила в редакцию 29 октября 2013 г.