

МАШИНОБУДУВАННЯ ТЕХНОЛОГІЯ МЕТАЛІВ МАТЕРІАЛОЗНАВСТВО

MACHINE BUILDING
PROCESS METALLURGY
MATERIALS SCIENCE

УДК 624.073

И.В. Павленко, магістр,
Н.Г. Сурьянинов, д-р техн. наук, проф.,
Одес. нац. политехн. ун-т

РАСЧЕТ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

И.В. Павленко, М.Г. Сур'янінов. Розрахунок ортотропних пластин чисельно-аналітичним методом граничних елементів. Пропонується застосування чисельно-аналітичного методу граничних елементів до розрахунку ортотропних пластин. Перехід від двовимірної задачі до одновимірної виконано з використанням варіаційного методу Канторовича-Власова. Розглянуто всі чотири можливі варіанти коренів характеристичного рівняння. Отримано повну систему аналітичних виразів ортонормованих фундаментальних функцій.

Ключові слова: ортотропна пластина, метод граничних елементів, варіаційний метод, фундаментальні функції.

И.В. Павленко, Н.Г. Сурьянинов. Расчет ортотропных пластин численно-аналитическим методом граничных элементов. Предлагается применение численно-аналитического метода граничных элементов для расчета ортотропных пластин. Переход от двумерной задачи к одномерной выполнен с использованием вариационного метода Канторовича-Власова. Рассмотрены все четыре возможных варианта корней характеристического уравнения. Получена полная система аналитических выражений ортонормированных фундаментальных функций.

Ключевые слова: ортотропная пластина, метод граничных элементов, вариационный метод, фундаментальные функции.

I.V. Pavlenko, N.G. Suryaninov. Calculation of orthotropic plates by the numeral-analytical boundary elements method. Application of numeral-analytical boundary elements method is offered for the calculation of orthotropic plates. A transition from a two-dimensional task to a unidimensional one is executed with the use of variational method of Kantorovich-Vlasov. All the four possible variants of the roots of the characteristic equation are considered. The complete system of analytical expressions of orthonormal fundamental functions is obtained.

Keywords: orthotropic plate, boundary elements method, variational method, fundamental functions.

В машиностроении, строительстве, авиации и других областях современной техники широко используются тонкостенные металлические конструкции в виде пластин, обладающие ря-

дом статических и технологических преимуществ по сравнению с другими конструктивными формами. Вследствие опирания по всему контуру или по значительной его части, пластины отличаются высокой несущей способностью, так как под действием нагрузки изгибаются в двух направлениях, и их сопротивление деформациям используется значительно эффективнее, чем в балках. Кроме того, в пластинах достигается совмещение несущих и ограждающих функций, что приводит к экономичным решениям.

В последнее время появилось много новых высокопрочных материалов, большинство которых обладает анизотропией, т.е. неодинаковыми свойствами в разных направлениях. Особый интерес представляют ортотропные, или ортогонально анизотропные, материалы, которые характеризуются наличием трех взаимно перпендикулярных плоскостей симметрии свойств. К таким материалам относятся композиционные материалы, армированные последовательно чередующимися слоями волокон в двух взаимно перпендикулярных направлениях и тканями с продольно-поперечной укладкой, а также слоистые композиционные материалы, армированные в двух неортогональных направлениях с правильным чередованием слоев. К ортотропным материалам относится также древесина. И этот список можно продолжить.

Широкое распространение анизотропных материалов послужило началом соответствующих исследований в области механики анизотропных конструкций, и, в частности, пластин. Аналитических решений получено мало, и здесь весьма эффективным оказывается применение численно-аналитического метода граничных элементов (ЧА МГЭ), который предложен и разрабатывается в ОНПУ [1, 2]. Метод состоит в разработке фундаментальной системы решений (аналитически) и функций Грина (также аналитически) для каждой рассматриваемой задачи. Для учета определенных граничных условий, или условий контакта между отдельными модулями (так мы называем отдельный элемент системы), составляется небольшая система линейных алгебраических уравнений, которую необходимо решать численно.

Таким образом, важнейшим этапом решения любой задачи является вывод аналитических выражений системы фундаментальных ортонормированных функций, чему, собственно, и посвящена данная работа.

Дифференциальное уравнение изгиба ортотропной пластины имеет вид

$$D_1 \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 W(x, y)}{\partial y^4} = q(x, y), \quad (1)$$

где жесткости определяются формулами

$$D_1 = \frac{E_x h^3}{12(1 - \mu_{xy} \mu_{yx})}; \quad D_2 = \frac{E_y h^3}{12(1 - \mu_{xy} \mu_{yx})};$$

$$D_3 = D_1 \mu_{xy} + 2D_k = D_2 \mu_{yx} + 2D_k; \quad D_k = \frac{Gh^3}{12},$$

где E_x, E_y — модули упругости в направлениях осей;

G — модуль сдвига;

h — толщина пластины;

μ_{xy}, μ_{yx} — коэффициенты Пуассона.

Кинематические параметры (прогиб и углы поворота)

$$W(x, y); \quad \theta_x(x, y) = \frac{\partial W(x, y)}{\partial x}; \quad \theta_y(x, y) = \frac{\partial W(x, y)}{\partial y}. \quad (2)$$

Статические параметры (изгибающие моменты, поперечные силы и крутящий момент)

$$\left\{ \begin{array}{l} M_x = -D_1 \left[\frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} + \mu_{xy} \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} \right]; \\ M_y = -D_2 \left[\frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} + \mu_{yx} \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} \right]; \\ Q_x = -\frac{\partial}{\partial x} \left[D_1 \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} + D_3 \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} \right]; \\ Q_y = -\frac{\partial}{\partial y} \left[D_2 \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial y^2} + D_3 \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x^2} \right]; \\ H = -D_k \frac{\partial^2 W(x, y)}{\partial x \partial y}. \end{array} \right. \quad (3)$$

Основное разрешающее уравнение (1) имеет четвертый порядок и является дифференциальным уравнением в частных производных. Функция, являющаяся решением этого уравнения, зависит от двух переменных, т.е. имеет место двумерная задача. В то же время алгоритм ЧА МГЭ предполагает решение одномерной задачи. Это достигается применением вариационного метода Канторовича-Власова.

Разложим прогиб $W(x, y)$ в функциональный ряд

$$W(x, y) = W_1(y)X_1(x) + W_2(y)X_2(x) + \dots + W_n(y)X_n(x). \quad (4)$$

Безразмерную систему функций $X_i(x)$ необходимо выбрать такой, чтобы она максимально точно описывала форму изогнутой поверхности пластины в направлении оси OX . Очевидно, этому требованию удовлетворяют кривые прогиба балки, имеющей такие же условия опирания, как и пластина в направлении оси OX . Для выбора функции поперечного распределения прогибов $X(x)$ существуют два способа — *статический* и *динамический* [1].

При использовании статического способа прогиб балки определяется статической нагрузкой (рис. 1). Эта нагрузка должна быть такой, чтобы последовательно чередовались симметричные и кососимметричные формы кривой прогиба. Функции $X_i(x)$ представляются в виде степенных полиномов, которые легко дифференцировать, интегрировать и вычислять без применения сложных программ.

При использовании динамического способа прогибы балки представляются формами ее собственных колебаний (рис. 2). Если в статическом способе необходимо строить функции $X_i(x)$ в зависимости от нагрузки и реакций балки, то в динамическом способе достаточно менять только значения собственных частот, что весьма удобно. Однако, применения функции $X_i(x)$ по этому способу возможно только с применением персональных компьютеров. Функции $X_1(x)$ (индекс 1 у этих функций в дальнейшем опущен) для различных условий опирания представлены в таблице, где $\lambda = \omega$.

Будем удерживать в (4) один член ряда, что, как показано ранее, оказывается вполне достаточным для получения приемлемой точности результата [2], т.е.

$$W(x, y) = W(y)X(x). \quad (5)$$

Подставим (5) в (1)

$$D_1 X^{IV} W + 2D_3 X'' W'' + D_2 X W^{IV} = q. \quad (6)$$

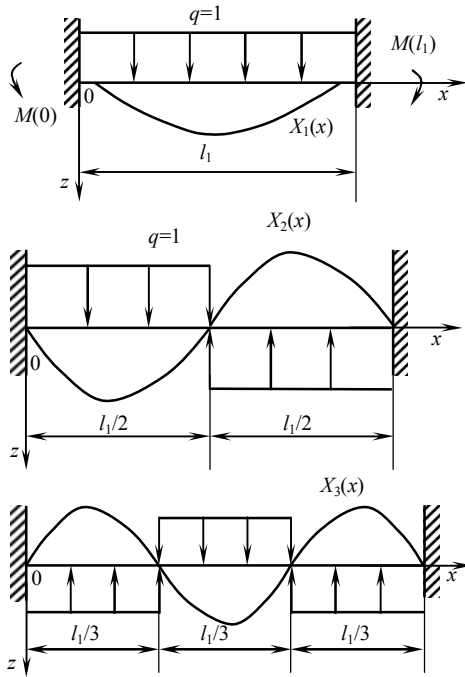


Рис. 1. Функции прогибов (статика)

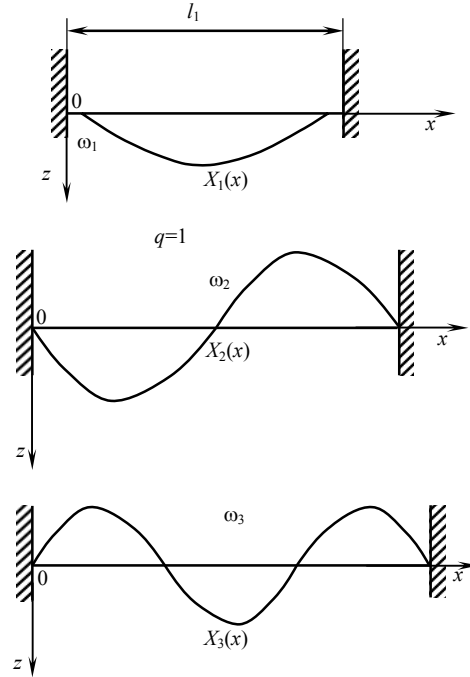


Рис. 2. Функции прогибов (динамика)

Умножим обе части (6) на X и проинтегрируем в пределах $[0; l_1]$, где l_1 — размер пластины в направлении оси x ,

$$D_1 W \int_0^{l_1} X^{IV} X dx + 2D_3 W'' \int_0^{l_1} X'' X dx + D_2 W^{IV} \int_0^{l_1} X^2 dx = \int_0^{l_1} q(x, y) X dx.$$

Схема балки	Форма собственных колебаний
	$X(x) = \sin(\lambda x / l_1) - \text{sh}(\lambda x / l_1) - \alpha_* [\cos(\lambda x / l_1) - \text{ch}(\lambda x / l_1)]; \alpha_* = \frac{\sin \lambda - \text{sh} \lambda}{\cos \lambda - \text{ch} \lambda}$
	$X(x) = \sin(\lambda x / l_1) - \text{sh}(\lambda x / l_1) - \alpha_* [\cos(\lambda x / l_1) - \text{ch}(\lambda x / l_1)]; \alpha_* = \frac{\sin \lambda + \text{sh} \lambda}{\cos \lambda + \text{ch} \lambda}$
	$X(x) = \sin(\lambda x / l_1) - \text{sh}(\lambda x / l_1) - \alpha_* [\cos(\lambda x / l_1) - \text{ch}(\lambda x / l_1)]; \alpha_* = \frac{\sin \lambda + \text{sh} \lambda}{\cos \lambda + \text{ch} \lambda}$
	$X(x) = \sin(\lambda x / l_1)$
	$X(x) = \sin(\lambda x / l_1) + \alpha_* \text{sh}(\lambda x / l_1); \alpha_* = \frac{\sin \lambda}{\text{sh} \lambda}$
	$X(x) = \sin(\lambda x / l_1) + \text{sh}(\lambda x / l_1) - \alpha_* [\cos(\lambda x / l_1) + \text{ch}(\lambda x / l_1)]; \alpha_* = \frac{\sin \lambda - \text{sh} \lambda}{\cos \lambda - \text{ch} \lambda}$

Умножим обе части (6) на X и проинтегрируем в пределах $[0; l_1]$, где l_1 — размер пластины в направлении оси x ,

$$D_1 W \int_0^{l_1} X^{IV} X dx + 2D_3 W'' \int_0^{l_1} X'' X dx + D_2 W^{IV} \int_0^{l_1} X^2 dx = \int_0^{l_1} q(x, y) X dx.$$

Введем обозначения

$$D_2 \int_0^{l_1} X^2 dx = A; \quad D_3 \int_0^{l_1} X'' X dx = B; \quad D_1 \int_0^{l_1} X^{IV} X dx = C,$$

тогда

$$W^{IV} A + 2W'' B + WC = q(y),$$

где $q(y) = \int_0^{l_1} q(x, y) X dx$.

Коэффициенты A, B, C можно вычислить в каком-либо математическом пакете, например, в MATLAB.

Обозначая $B/A = -r^2$; $C/A = s^4$, получим

$$W^{IV} - 2r^2 W'' + s^4 W = \frac{1}{A} q(y). \quad (7)$$

Соответствующее однородное уравнение имеет вид

$$W^{IV} - 2r^2 W'' + s^4 W = 0. \quad (8)$$

При постоянных D_1, D_2, D_3 поперечные силы Q_x, Q_y в (3) определяются выражениями

$$Q_x = - \left(D_1 \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + D_3 \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial x^2} \right); \quad (9)$$

$$Q_y = - \left(D_2 \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + D_3 \frac{\partial^3 W}{\partial x^2 \partial y} \right). \quad (10)$$

После применения процедуры метода Канторовича-Власова внутренние силовые факторы (3) с учетом (9) и (10) принимают вид

$$\begin{cases} M_x(x, y) = -D_1(WX'' + \mu_{xy}W''X); \\ M_y(x, y) = -D_2(W''X + \mu_{yx}WX''); \\ Q_x(x, y) = -(D_1WX'' + D_3W''X'); \\ Q_y(x, y) = -(D_2W''X + D_3W'X''); \\ H(x, y) = -D_k W'X'. \end{cases} \quad (11)$$

Дополним выражения (11) кинематическими параметрами

$$\begin{cases} \theta_x = WX'; \\ \theta_y = W'X. \end{cases} \quad (12)$$

Пластина рассматривается как обобщенный одномерный модуль [2], поэтому вектор ее состояния будет таким же, как и при изгибе балки,

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} W(y) \\ \theta_y(y) \\ M_y(y) \\ Q_y(y) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

где W, θ_y, M_y, Q_y — прогиб, угол поворота, момент и поперечная сила, соответственно.

Индекс “у” в дальнейшем будем опустим.

Решение уравнения (7) зависит от корней соответствующего ему характеристического уравнения [1]

$$K_{1-4} = \pm \sqrt{r^2 \pm \sqrt{r^4 - s^4}}. \tag{14}$$

Поскольку вектор состояния (13) содержит четыре компонента, а характеристическое уравнение имеет четыре корня, то для полного решения задачи об изгибе ортотропной пластины необходимо получить аналитические выражения 64-х фундаментальных функций. Вид этих функций определяется соотношением между r и s , которое зависит от граничных условий на продольных (вдоль оси y) краях пластины.

В соответствии с алгоритмом МГЭ [1] сначала нужно решить задачу Коши. Это решение в матричной форме имеет вид

$$\begin{matrix} W(y) \\ \theta(y) \\ M(y) \\ Q(y) \end{matrix} = \begin{matrix} A_{11} & A_{12} & -A_{13} & -A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & -A_{23} & -A_{13} \\ -A_{31} & -A_{32} & A_{22} & A_{12} \\ -A_{41} & -A_{31} & A_{21} & A_{11} \end{matrix} \begin{matrix} W(0) \\ \theta(0) \\ M(0) \\ Q(0) \end{matrix} + \int_0^y \begin{matrix} A_{14}(y-\xi) \\ A_{13}(y-\xi) \\ -A_{12}(y-\xi) \\ -A_{11}(y-\xi) \end{matrix} q(\xi) d\xi. \tag{15}$$

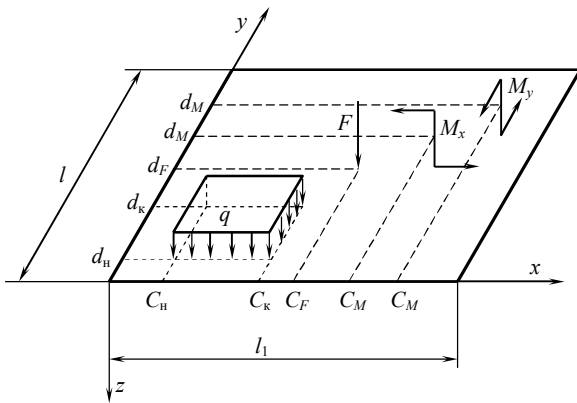


Рис. 3. Положительное направление поперечной нагрузки

Решение (15) записано для случая, когда ось z направлена “вниз”. Положительные направления обобщенных кинематических и статических параметров одномерной модели изгиба ортотропной прямоугольной пластины совпадают с положительными направлениями соответствующих параметров изгиба прямолинейного стержня [1].

Положительное направление поперечной нагрузки показано на рис. 3.

Таким образом, решение уравнения (1) с использованием метода Канторовича-Власова будет заключаться в определении функции прогиба

$$W(x, y) = W(y)X(x), \tag{16}$$

где функция $X(x)$ задана, а функция $W(y)$ определяется из (15).

Объем статьи не позволяет привести все 64 аналитических выражения фундаментальных ортонормированных функций, поэтому рассмотрим два варианта соотношения между r и s .

Первый вариант, когда $|s| < |r|$, что отвечает свободным продольным краям пластинки.

Корни характеристического уравнения [3]

$$\lambda_1 = \sqrt{r^2 + \sqrt{r^4 - s^4}}; \quad \lambda_2 = \sqrt{r^2 - \sqrt{r^4 - s^4}}.$$

Прогиб запишется в виде

$$W(y) = C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2 + C_3\Phi_3 + C_4\Phi_4, \tag{17}$$

где $\Phi_1 = sh\lambda_2 y; \Phi_2 = ch\lambda_1 y; \Phi_3 = sh\lambda_1 y; \Phi_4 = ch\lambda_2 y.$ (18)

Угол поворота

$$\theta(y) = W'(y) = C_1\Phi'_1 + C_2\Phi'_2 + C_3\Phi'_3 + C_4\Phi'_4. \tag{19}$$

Изгибающий момент

$$M(y) = -D_2 \left[W''(y) \int_0^{l_1} X^2 dx + \mu_{yx} W(y) \int_0^{l_1} X'' X dx \right] =$$

$$= - \left[AW''(y) + \mu_{yx} \frac{BD_2}{D_3} W(y) \right] = - [AW''(y) + RW(y)],$$
(20)

где $R = \mu_{yx} \frac{BD_2}{D_3}$.

Поперечная сила

$$Q(y) = - \left[D_2 W'''(y) \int_0^{l_1} X^2 dx + D_3 W'(y) \int_0^{l_1} X'' X dx \right] = - [AW'''(y) + BW'(y)].$$
(21)

Функции (18) в точке $y = 0$ принимают следующие значения:

$$\Phi_1(0) = \Phi_3(0) = 0; \quad \Phi_2(0) = \Phi_4(0) = 1.$$

Постоянные $C_1 - C_4$ можно определить из соотношения

$$\bar{\Phi}_0 \bar{C}_i = \bar{P}_i, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$
(22)

где $\bar{\Phi}_0 = \begin{vmatrix} \Phi_1(0) & \Phi_2(0) & \Phi_3(0) & \Phi_4(0) \\ \Phi_1'(0) & \Phi_2'(0) & \Phi_3'(0) & \Phi_4'(0) \\ -[A\Phi_1''(0) + R\Phi_1(0)] - [A\Phi_2''(0) + R\Phi_2(0)] - [A\Phi_3''(0) + R\Phi_3(0)] - [A\Phi_4''(0) + R\Phi_4(0)] \\ -[A\Phi_1'''(0) + B\Phi_1'(0)] - [A\Phi_2'''(0) + B\Phi_2'(0)] - [A\Phi_3'''(0) + B\Phi_3'(0)] - [A\Phi_4'''(0) + B\Phi_4'(0)] \end{vmatrix}$.

В результате решения уравнения (22) получим

$$\begin{cases} C_1 = -\frac{A\lambda_1^2 + B}{\lambda_2 A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \theta_0 - \frac{1}{\lambda_2 A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} Q_0; \\ C_2 = \frac{A\lambda_2^2 + R}{A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} W_0 + \frac{1}{A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} M_0; \\ C_3 = \frac{A\lambda_2^2 + B}{\lambda_1 A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \theta_0 + \frac{1}{\lambda_1 A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} Q_0; \\ C_4 = -\frac{A\lambda_1^2 + R}{A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} W_0 - \frac{1}{A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} M_0. \end{cases}$$
(23)

Через фундаментальные функции компоненты вектора состояния (13) выражаются в виде

$$\begin{cases} W(y) = A_{11}W_0 + A_{12}\theta_0 + A_{13}M_0 + A_{14}Q_0; \\ \theta(y) = A_{21}W_0 + A_{22}\theta_0 + A_{23}M_0 + A_{24}Q_0; \\ M(y) = A_{31}W_0 + A_{32}\theta_0 + A_{33}M_0 + A_{34}Q_0; \\ Q(y) = A_{41}W_0 + A_{42}\theta_0 + A_{43}M_0 + A_{44}Q_0. \end{cases}$$
(24)

Сопоставляя (17), (19)...(21) с (24) и учитывая (23), получим 16 фундаментальных функций при свободных продольных кромках пластины

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \frac{1}{A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left[(A\lambda_2^2 + R)\Phi_2 - (A\lambda_1^2 + R)\Phi_4 \right]; \quad A_{12} = -\frac{1}{A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left(\frac{A\lambda_1^2 + B}{\lambda_2} \Phi_1 - \frac{A\lambda_2^2 + B}{\lambda_1} \Phi_3 \right); \\
A_{13} &= \frac{1}{A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} (\Phi_2 - \Phi_4); \quad A_{14} = -\frac{1}{A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left(\frac{\Phi_1}{\lambda_2} - \frac{\Phi_3}{\lambda_1} \right); \\
A_{21} &= \frac{1}{A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left[\lambda_1(A\lambda_2^2 + R)\Phi_3 - \lambda_2(A\lambda_1^2 + R)\Phi_1 \right]; \\
A_{22} &= \frac{1}{A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left[(A\lambda_2^2 + B)\Phi_2 - (A\lambda_1^2 + B)\Phi_4 \right]; \quad A_{23} = \frac{\lambda_1\Phi_3 - \lambda_2\Phi_1}{A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}; \quad A_{24} = \frac{\Phi_2 - \Phi_4}{A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}; \\
A_{31} &= \frac{(A\lambda_1^2 + R)(A\lambda_2^2 + R)}{A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} (\Phi_4 - \Phi_2); \\
A_{32} &= \frac{1}{A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left[\frac{(A\lambda_1^2 + B)(A\lambda_2^2 + R)}{\lambda_2} \Phi_1 - \frac{(A\lambda_1^2 + R)(A\lambda_2^2 + B)}{\lambda_1} \Phi_3 \right]; \\
A_{33} &= \frac{1}{A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left[(A\lambda_2^2 + R)\Phi_4 - (A\lambda_1^2 + R)\Phi_2 \right]; \quad A_{34} = \frac{1}{A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left(\frac{A\lambda_2^2 + R}{\lambda_2} \Phi_1 - \frac{A\lambda_1^2 + R}{\lambda_1} \Phi_3 \right); \\
A_{41} &= \frac{1}{A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left[\lambda_2(A\lambda_2^2 + B)(A\lambda_1^2 + R)\Phi_1 - \lambda_1(A\lambda_2^2 + R)(A\lambda_1^2 + B)\Phi_3 \right]; \\
A_{42} &= \frac{(A\lambda_1^2 + B)(A\lambda_2^2 + B)}{A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} (\Phi_4 - \Phi_2); \\
A_{43} &= \frac{1}{A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left[\lambda_2(A\lambda_2^2 + B)\Phi_1 - \lambda_1(A\lambda_1^2 + B)\Phi_3 \right]; \\
A_{44} &= \frac{1}{A(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left[(A\lambda_2^2 + B)\Phi_4 - (A\lambda_1^2 + B)\Phi_2 \right].
\end{aligned}$$

Рассмотрим второй вариант, когда $s = r$, что отвечает шарнирному опиранию продольных кромок пластинки.

Корни (14) $K_{1-4} = \pm\sqrt{r^2}$.

Прогиб запишется в виде

$$W(y) = C_1\Phi_1 + C_2\Phi_2 + C_3\Phi_3 + C_4\Phi_4, \quad (25)$$

где $\Phi_1 = \operatorname{ch}ry$; $\Phi_2 = \operatorname{ch}ry$; $\Phi_3 = \operatorname{sh}ry$; $\Phi_4 = \operatorname{ysh}ry$. (26)

Фундаментальные функции при шарнирном опирании продольных кромок пластины имеют вид

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \Phi_2 - \frac{Ar^2 + R}{2Ar} \Phi_4; \quad A_{12} = \frac{3Ar^2 + B}{2Ar^3} \Phi_3 - \frac{Ar^2 + B}{2Ar^2} \Phi_1; \quad A_{13} = -\frac{\Phi_4}{2Ar}; \quad A_{14} = \frac{1}{2Ar^3} (\Phi_3 - r\Phi_1); \\
A_{21} &= \frac{Ar^2 - R}{2Ar} \Phi_3 - \frac{Ar^2 + R}{2A} \Phi_1; \quad A_{22} = \Phi_2 - \frac{Ar^2 + B}{2Ar} \Phi_4; \quad A_{23} = -\frac{r\Phi_1 + \Phi_3}{2Ar}; \quad A_{24} = -\frac{\Phi_4}{2Ar}; \\
A_{31} &= \frac{(Ar^2 + R)^2}{2Ar} \Phi_4; \quad A_{32} = \frac{(Ar^2 + B)(Ar^2 + R)}{2Ar^2} \Phi_1 + \frac{Ar^2(B - Ar^2) - R(B + 3Ar^2)}{2Ar^3} \Phi_3; \\
A_{33} &= \Phi_2 + \frac{Ar^2 + R}{2Ar} \Phi_4; \quad A_{34} = \frac{Ar^2 + R}{2Ar^2} \Phi_1 + \frac{Ar^2 - R}{2Ar^3} \Phi_3.
\end{aligned}$$

$$A_{41} = \frac{(Ar^2 + B)(Ar^2 + R)}{2A} \Phi_1 + \frac{Ar^2(Ar^2 - B) + R(B + 3Ar^2)}{2Ar} \Phi_3;$$
$$A_{42} = \frac{(Ar^2 + B)^2}{2Ar} \Phi_4; \quad A_{43} = \frac{Ar^2 + B}{2A} \Phi_1 + \frac{B + 3Ar^2}{2Ar} \Phi_3; \quad A_{44} = \Phi_2 + \frac{Ar^2 + B}{2A} \Phi_4.$$

Полученные в работе аналитические выражения фундаментальных функций позволяют решать краевые задачи изгиба ортотропных пластин при любых условиях закрепления и произвольном характере внешних нагрузок.

Литература

1. Численно-аналитический метод граничных элементов / А.Ф. Дашченко, Л.В. Коломиец, В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов. В 2 т. — Одесса: ВМВ, 2010. — Т. 1 — 415 с. — Т. 2 — 510 с.
2. Оробей, В.Ф. Практикум по решению краевых задач механики: учеб. пособие для студентов техн. специальностей / В.Ф. Оробей, Н.Г. Сурьянинов — Одесса: Астропринт, 2011. — 408 с.
3. Бермант, А.Ф. Курс математического анализа / А.Ф. Бермант. — М.: Гостехиздат, 1953. — 358 с.

References

1. Chislenno-analiticheskiy metod granichnykh elementov [Numerical-Analytical Method of Boundary Elements] / A.F. Dashchenko, L.V. Kolomiets, V.F. Orobey, N.G. Suryaninov — Odessa, 2010. — Vol. 1 — 415 p. — Vol. 2 — 510 p.
2. Orobey, V.F. Praktikum po resheniyu kraevykh zadach mekhaniki: uchebnoe posobie dlya studentov tekhnicheskikh spetsial'nostey [Workshop on the Solution of Boundary Value Problems in Mechanics: The manual for students of technical specialties] / V.F. Orobey, N.G. Suryaninov — Odessa, 2011. — 408 p.
3. Bermant, A.F. Kurs matematicheskogo analiza [Course in Mathematical Analysis] / A.F. Bermant. — Moscow: 1953. — 358 p.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Одес. нац. политехн. ун-та Оробей В.Ф.

Поступила в редакцию 6 марта 2012 г.