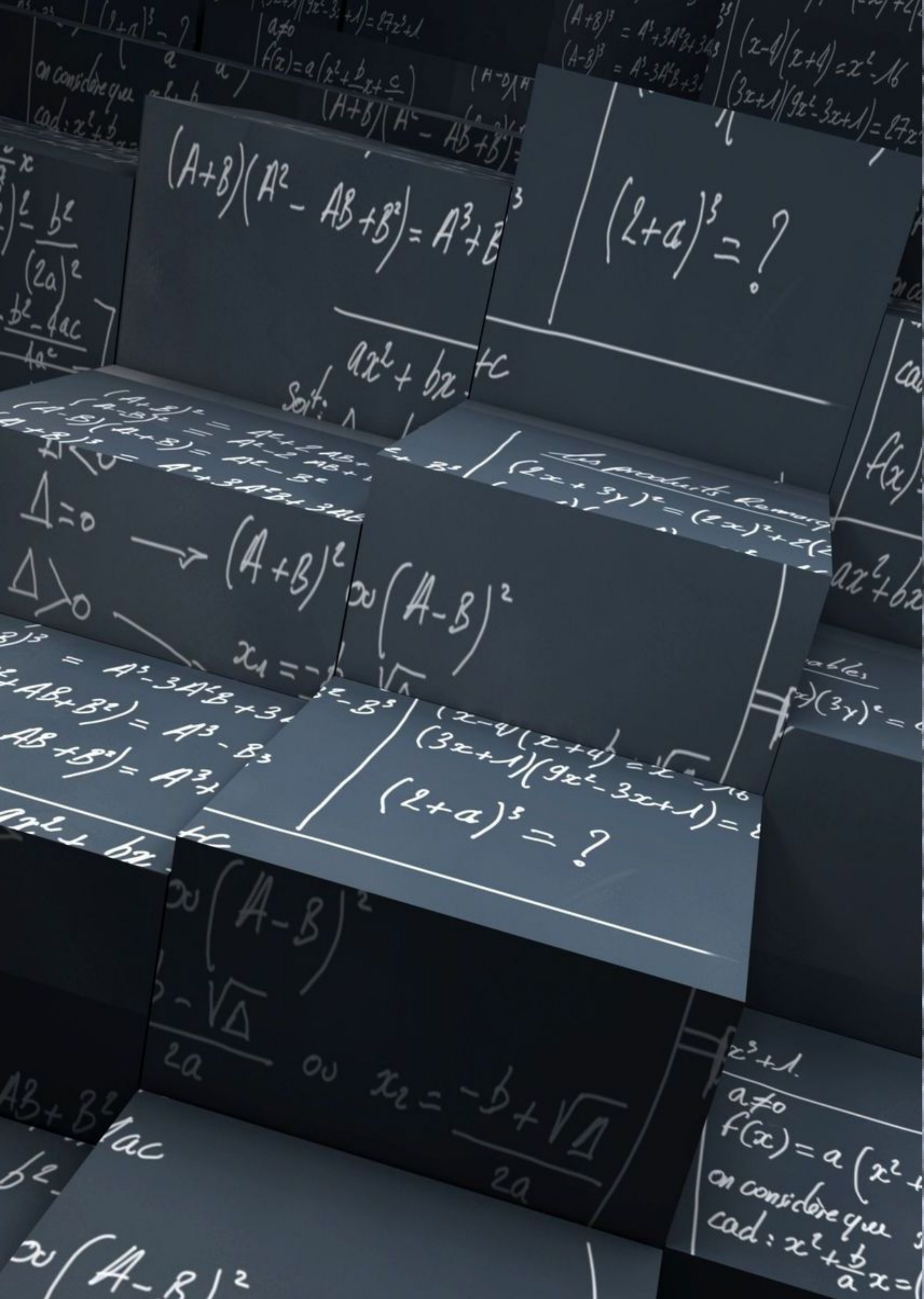


МАТЕМАТИКА

ГОТОВИМСЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

МАТЕМАТИКА

ГОТОВИМСЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ

Учебное пособие

2-е издание

Одесса
«Астропринт»
2017

УДК 51(076)
М34

Пособие адресовано всем, кто готовится к контрольной работе по математике II (областного) этапа Всеукраинского конкурса-защиты научно-исследовательских работ МАН, отделение «Вычислительная техника и программирование». Пособие будет полезным выпускникам школ при подготовке к внешнему независимому оцениванию, учителям математики, руководителям факультативов и кружков, а также всем учащимся начиная с 8-го класса, которые интересуются математикой.

Второе издание содержит минимальный теоретический материал, который сопровождается рассмотрением большого количества тренировочных задач. Изложение ведется на доступном, но, по-возможности, строгом языке.

В пособие вошли все контрольные работы (условия и решения) начиная с 2005 года.

Авторы:

Д. В. Буряк, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и моделирования систем Одесского национального политехнического университета;
Л. И. Плотникова, кандидат физико-математических наук, доцент, приват-профессор кафедры высшей математики и моделирования систем Одесского национального политехнического университета;
А. Н. Порпулит, старший преподаватель кафедры высшей математики и моделирования систем Одесского национального политехнического университета;
Н. В. Буряк, учитель высшей категории, учитель-методист, учитель математики Одесской общеобразовательной школы № 55 I–III ступеней Одесского городского совета Одесской области

Рецензенты:

В. В. Ковальчук, доктор физико-математических наук, профессор, директор Одесского колледжа компьютерных технологий Одесского государственного экологического университета;
О. Н. Задорина, кандидат педагогических наук, и. о. доцента кафедры методики преподавания естественно-математических дисциплин и информационных технологий Одесского областного института усовершенствования учителей

Утверждено и рекомендовано к печати заседанием методического совета Одесского областного гуманитарного центра внешкольного образования и воспитания *(протокол № 2 от 31.05.2017 г.)*

Ответственный за выпуск: ***Е. А. Давиденко***, заведующая отделом Малой академии наук Одесского областного гуманитарного центра внешкольного образования и воспитания

Авторы благодарны председателю совета директоров ОАО ПКФ «ОЛИМП-КРУГ» **Николаю Владимировичу Сапожникову** за проявленный интерес и финансовую поддержку при издании данного пособия

ISBN 978–966–927–287–4

Содержание

Предисловие

Начиная с 2003 года теоретический тур II (областного) этапа Всеукраинского конкурса-защиты научно-исследовательских работ Малой академии наук (отделение «Вычислительная техника и программирование») проводится на базе Одесского национального политехнического университета институтом компьютерных систем. Одним из условий данного этапа является, в частности, проведение контрольной работы по математике.

В связи с повышением требований, предъявляемых к участникам II (областного) этапа, конкурсанты должны владеть не только специальными знаниями, но и знаниями современных методов и приёмов решения примеров и задач различной трудности по всему курсу элементарной математики. Контрольная работа по математике, предлагаемая участникам, имеет свою специфику. Поэтому представляется актуальным издание данного пособия, целью которого является ознакомление участников с заданиями контрольных работ прошлых лет, уровнем их сложности и методами решений.

Начиная с 2007 года все участники II (областного) этапа разделены на три возрастные группы: 8–9-е классы, 10-е классы, 11-е классы. Пособие содержит контрольные работы за 2005−2017гг. для участников всех групп. Условия контрольных работ[1] составлены на основании «Программы по математике для общеобразовательных учебных заведений», рекомендованной Министерством образования и науки Украины[2], и приводятся в пособии без каких-либо изменений. Кроме того, ***полное и правильное решение заданий*** каждого уровня оценивается соответствующим количеством баллов. Контрольные работы содержат задания трёх уровней сложности. Начиная с 2010 года ***первый уровень*** содержит тестовые задания, в каждом из которых необходимо выбрать ***только один*** вариант ответа из предложенных. На каждое задание ***второго уровня*** необходимо дать ответ и записать короткое решение. И наконец, ***третий уровень*** состоит из заданий с развёрнутым ответом. Отметим, что задания первого и второго уровней соответствуют минимальным требованиям, предъявляемым к математической подготовке школьников. Задания третьего уровня ориентированы на проверку творческих возможностей участников II (областного) этапа и представляют собой интересные и, на первый взгляд, сложные задачи. При обычном способе решения эти задачи требуют длительных выкладок. Однако любой школьник, которому интересна математика, может ознакомиться с оригинальными и, как нам кажется, простыми способами решения таких задач, изучив данное пособие. Поняв красоту этих методов, он с удовольствием будет их применять

[1] Условия контрольных работ составлены как на русском, так и на украинском языках. Конкурсант вправе сам выбрать язык, на котором ему удобнее как читать условия контрольной работы, так и оформлять соответствующие решения.

[2] В связи с тем, что программа по математике для общеобразовательных учебных заведений периодически претерпевает изменения, мы внимательно следим за этим процессом и меняем не только темы, но и сложность заданий для соответствующих классов.

на практике. Ко всем заданиям приведены решения. Однако эти решения не следует рассматривать как образцы, они являются, в большинстве случаев, одним из возможных вариантов.

К сожалению, из-за отсутствия времени на традиционных уроках, не каждый учитель имеет возможность научить решать задачи, подобные задачам второго и, особенно, третьего уровней сложности. Поэтому во втором издании мы посчитали необходимым ознакомить конкурсантов не только с заданиями контрольных работ и методами их решения, но и сформулировать минимальный теоретический подготовительный материал. Наша цель – помочь любому научиться решать задачи чётко, компактно, быстро и просто. Мы придерживаемся мысли, что лучше одну задачу решить несколькими способами, чем несколько однотипных задач одним способом. И потому, при малейшей возможности, приводим несколько различных способов решения той или иной задачи. Кроме того, если при решении задачи будет применено неизвестное школьникам правило или условие равносильности, то в этом случае обязательно будет сказано, о чём именно идёт речь. Более того, полезным будет знакомство с элементами теории, где предлагаются и разбираются эффективные (не всегда стандартные) методы решения подобных задач.

Некоторые из рассматриваемых методов на самом деле известны, но на них как-то не акцентировалось внимание, они не были собраны в единое целое, как, например, решение классических иррациональных уравнений и неравенств или уравнений и неравенств, содержащих модуль. Ведь гораздо проще и приятней решать неравенство $\left(f(x)+g(x)\right)\left(f(x)-g(x)\right)\geq 0$ вместо неравенства $\left|f(x)\right|\geq\left|g(x)\right|$, то есть не раскрывая модуль и не обращая внимания на знаки выражений, входящих под знак модуля.

Достаточно много внимания в данном пособии уделяется теории многочленов, так как почти все разделы алгебры многочленов так или иначе связаны с решением алгебраических уравнений и их систем. Это – во-первых. Во-вторых, в школьном курсе математики эта теория занимает довольно-таки скромное место. Изучение многочленов в школе ограничивается лишь введением операций над ними и некоторыми элементарными сведениями и тесно связано, в частности, с такими темами, как «Квадратные уравнения» и «Квадратичная функция». Между тем теория многочленов находит самое широкое применение в науке и технике, поэтому знакомство с началами этой теории будет весьма полезным. В пособии в популярной форме излагаются элементы теории многочленов, приводятся примеры её применения при решении различных уравнений, освобождении от иррациональности, доказательстве числовых тождеств и т. п. Всё это поможет глубже понять излагаемый материал и самостоятельно проверить степень его усвоения. Изучение схемы Горнера и теоремы о рациональных корнях многочлена даёт общий метод разложения на множители любого алгебраического выражения. В свою очередь умение решать уравнения высших степеней позволит значительно расширить круг показательных, логарифмических, тригонометрических и иррациональных уравнений и неравенств. И наконец, в-третьих, теория многочленов составляет существенную часть университетских курсов алгебры, математического анализа и высшей математики. В связи с этим изложенная теория многочленов будет полезна не только школьникам, но и учащимся колледжей и техникумов, студентам младших курсов вузов, обучающимся на нематематических специальностях, а также студентам-заочникам.

Подчеркнём также важность базового (школьного) учебника. Хотя простого знакомства с его содержанием недостаточно для успешного написания контрольной работы по математике, но оно, безусловно, необходимо для адекватного восприятия материала данного пособия. Существенно важнее твёрдые знания и уверенное владение материалом школьного учебника, что совершенно необходимо для эффективной подготовки к контрольной работе. Обращаем внимание на то, что задачи контрольных работ зачастую специально составлены так, что даже небольшой пробел в знаниях приводит к фатальным последствиям.

Уверены, что в процессе подготовки к контрольной работе, данное пособие окажет участникам II (областного) этапа неоценимую помощь. Детально проработав материал пособия, конкурсанты научатся (на что мы очень надеемся!) не только видеть «скрытые ловушки» и «скользкие места» в наиболее трудных задачах, но и успешно преодолевать их. Пособие позволит проверить свои знания и объективно оценить уровень своей подготовки.

Заметим, что на выполнение контрольной работы отводится три часа. Поэтому для экономии времени при решении контрольной работы советуем пропускать задания, которые не удаётся выполнить сразу же, и переходить к следующим. К выполнению пропущенных заданий всегда можно вернуться, если останется время.

Надеемся, что данное пособие будет интересно тем, кто любознателен, кто любит думать, кто просто любит решать задачи, но не любит длинных и ненужных выкладок, кто любит придумывать новые способы решения уже известных задач. Мы также рассчитываем на то, что пособие поможет учителям математики в проведении внеклассной работы с учениками, которые хотят досконально, углубленно и всесторонне знать школьную математику, расширить их математический кругозор, подготовить к участию в контрольной работе II (областного) этапа Всеукраинского конкурса-защиты научно-исследовательских работ МАН.

Желаем успеха!

Понятие равносильности уравнений и неравенств

При решении неравенств и уравнений фундаментальное значение имеет понятие равносильности, которому, к сожалению, мало внимания уделяется в школьном курсе математики.

Два неравенства $f_1(x)>g_1(x)$ и $f_2(x)>g_2(x)$ или два уравнения $f_1(x)=g_1(x)$ и $f_2(x)=g_2(x)$ называются равносильными на некотором множестве X, если каждое решение первого неравенства (уравнения), принадлежащее множеству X, является решением второго, и наоборот, каждое решение второго, принадлежащее множеству X, является решением первого; или ни одно из неравенств (уравнений) на X не имеет решений. Таким образом, неравенства (уравнения) называются ***равносильными*** на множестве X, если ***множества решений*** этих неравенств (уравнений) ***совпадают***. Поэтому на практике часто вместо того, чтобы решать данное неравенство (уравнение), решают любое другое, более простое, равносильное данному. Замену одного неравенства (уравнения) другим, равносильным данному на X, называют равносильным переходом на X. Равносильный переход обозначают «$\Leftrightarrow$». То есть если, например, уравнение $f(x)=0$ равносильно уравнению $g(x)=0$, то в этом случае будем писать: $f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=0$.

Примеры

1). $\sqrt{\sin^2 x-1}=0 \Leftrightarrow \cos x=0$, так как решением первого уравнения являются все x, для которых $\sin^2 x=1$, но согласно основному тригонометрическому тождеству $\sin^2 x+\cos^2 x\equiv 1$, поэтому очевидно, что $\cos x=0$. Справедливо и обратное утверждение.

2). Уравнения $\sqrt{8-x^2}=x$ и $8-x^2=x^2$ не являются равносильными, так как $x=-2$ является решением второго уравнения, но не является решением первого.

3). Уравнения $\sin x=3$ и $\sqrt{1-x}=-1$ равносильны, так как оба не имеют решений.

При решении неравенств (уравнений) обычно применяются различные преобразования, в результате которых данное неравенство (уравнение) сводится к более простому (или к совокупности более простых). Поэтому важно знать, какие из преобразований сводят данное неравенство (уравнение) к равносильному неравенству (уравнению).

Итак, отметим основные операции, приводящие к равносильным соотношениям:

1. Если функции $f(x), g(x), h(x)$ определены на множестве X, то на X:

$$f(x)<g(x) \Leftrightarrow f(x)+h(x)<g(x)+h(x),$$
$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)+h(x)=g(x)+h(x).$$

Пример

Уравнения $3x^2+2x-5=7x-1$ и $3x^2+2x-5+(-7x+1)=7x-1+(-7x+1)$ равносильны. А уравнение $x^2=1$ не равносильно уравнению $x^2+\sqrt{x}=1+\sqrt{x}$. Здесь равносильность нарушена из-за того, что функция $h(x)=\sqrt{x}$ определена не при всех x из ОДЗ[1] уравнения $x^2=1$.

2. Если $h(x)>0$ на X, то на X:

$$f(x)<g(x)\Leftrightarrow f(x)h(x)<g(x)h(x),$$

то есть при умножении неравенства на положительную функцию знак неравенства не меняется.

3. Если $h(x)<0$ на X, то на X:

$$f(x)<g(x)\Leftrightarrow f(x)h(x)>g(x)h(x),$$

то есть при умножении неравенства на отрицательную функцию знак неравенства меняется на противоположный.

4. Если $h(x)\neq 0$ на X, то на X:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)h(x)=g(x)h(x).$$

5. Если $f(x)\geq 0, g(x)\geq 0$ на X, то на X:

$$f(x)<g(x)\Leftrightarrow f^2(x)<g^2(x),$$
$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow f^2(x)=g^2(x),$$
$$f(x)\leq g(x)\Leftrightarrow f^2(x)\leq g^2(x),$$

то есть если обе части неравенства или уравнения неотрицательны, то возведение в квадрат (или *любую чётную степень*) обеих частей неравенства или уравнения приводит к равносильному неравенству или уравнению соответственно. Заметим, что если левая и правая части неравенства имеют разные знаки, то нельзя возводить неравенство в квадрат, так как возведение в квадрат в этом случае может привести как к равносильному неравенству, так и к неравносильному: $-4<5\Leftrightarrow 16<25$; $-7<5$ но $49>25$.

[1] ОДЗ (область допустимых значений) уравнения, неравенства, системы или совокупности неравенств (уравнений) называется множество, являющееся пересечением областей определения всех функций, входящих в эти уравнения, неравенства, системы или совокупности неравенств (уравнений). Если не оговорено что-то специально, то под множеством X, на которых производятся равносильные преобразования, всегда будет подразумеваться ОДЗ.

Пример

Забегая немного вперёд, решим следующее уравнение: $\sqrt{x+2}=x$.

Первый способ (обычная техника решения):

$$\left(\sqrt{x+2}=x\right)\Big|\uparrow 2\Rightarrow x+2=x^2.$$

Полученное квадратное уравнение $x^2-x-2=0$ имеет корни $x_1=2, x_2=-1$. Так как обе части исходного уравнения возводились в квадрат, могли появиться посторонние корни. Поэтому необходимо сделать проверку:

1) $x_1=2$, тогда $\sqrt{2+2}=2$; $2=2$ – верное равенство;

2) $x_2=-1$, тогда $\sqrt{-1+2}=1$; $1=-1$ – неверное равенство.

Ответ: 2

Замечание: Если при решении уравнений или систем уравнений делается проверка, то ОДЗ можно не находить.

Второй способ (с помощью равносильных преобразований):

$$\sqrt{x+2}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=x^2, \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2=0, \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=2,\ x_2=-1, \\ x\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Ответ: 2

ОДЗ и тождественные преобразования

В результате анализа решений уравнений (неравенств) ВНО[1] по математике можно сделать следующий вывод: эти задачи не считаются обычно трудными, и большинство школьников с ними, по их мнению, справляются. В то же время многим не засчитываются эти решения из-за грубых ошибок. Почему же так происходит? На наш взгляд, дело в том, что у многих выпускников имеется огромный разрыв между приобретёнными техническими и вычислительными навыками и сознательным пониманием тех теоретических и логических основ, без которых правильно решать уравнения (неравенство) просто невозможно.

Упростить уравнение с помощью безошибочно проведённых выкладок может большинство, но заметить, как и почему эти выкладки приводят к приобретению или потере решения (корней) может далеко не каждый, а очень многие об этом даже и не задумываются.

Или взять вопрос о проверке. Одни считают, что это прихоть учителей, которой нужно волей или неволей подчиняться. Другие проверяют всё подряд. Такие мнения основаны на непонимании того, что такое проверка и какое значение она должна занимать в решении.

[1] ВНО – внешнее независимое оценивание (ЗНО – зовнішнє незалежне оцінювання).

Короче говоря, всякий должен владеть тем теоретическим минимумом, который необходим для решения уравнений (неравенств). К такому минимуму относится, прежде всего, ОДЗ – область допустимых значений.

Во многих учебных пособиях, адресованных выпускникам школ для подготовки к ВНО по математике, сейчас стараются избегать употребления буквосочетания «ОДЗ». Вероятно, это связано с изменениями программы по математике в средней школе и введением элементов математического анализа. Вместо ОДЗ стала необходимой «область определения» функций, и постепенно, само собой практически исчезло буквосочетание «ОДЗ». Всё реже встречаются задания на исследование громоздкого ОДЗ. Ясно одно, что при решении уравнений (неравенств) каждый раз говорить, а тем более писать, «найдём пересечение областей определения всех входящих в уравнение (неравенство) функций» просто невозможно. Поэтому часто в литературе как-то робко упоминается ОДЗ. Может быть, пора реабилитировать буквосочетание ОДЗ!?

При решении уравнений (неравенств) с одной переменной, когда возникает вопрос – находить ли ОДЗ, часто можно услышать категоричное «да» и не менее категоричное «нет». «Сначала нужно найти ОДЗ, а затем приступать к решению уравнения (неравенства)», – утверждают одни. «Незачем тратить время на ОДЗ, по ходу решения будем переходить к равносильному уравнению (неравенству) или к равносильной системе уравнений (неравенств). В конце концов, если это уравнение, то можно сделать проверку», – утверждают другие. Так находить или нет ОДЗ? Конечно, однозначного ответа на этот вопрос не существует. Нахождение ОДЗ уравнения или неравенства не является обязательным элементом решения. В каждом конкретном примере этот вопрос решается индивидуально.

Пример

Решить уравнение: $\sqrt{x^2-3x+2}+2\sqrt{4-x^2}+1=\sqrt{x-1}$.

Согласно определению, ОДЗ данного уравнения есть множество, являющееся пересечением областей определения всех функций, входящих в уравнение, то есть:

$$\begin{cases} x^2-3x+2\ge 0, \\ x-1\ge 0, \\ 4-x^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-2)\ge 0, \\ x-1\ge 0, \\ 4-x^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2\ge 0, \\ x-1\ge 0, \\ -2\le x\le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\ge 2, \\ x\le 2 \end{cases} \Rightarrow x=2.$$

Проверкой нетрудно убедиться, что $x=2$ корень исходного уравнения.

Ответ: 2

Как видим, корректно записанное ОДЗ позволило нам сразу же получить корень исходного уравнения. Другими словами, в одних случаях нахождение ОДЗ упрощает решение уравнения или неравенства, а в ряде случаев даже является необходимым этапом решения. В других же случаях найти ОДЗ иногда труднее (или вовсе невозможно), чем решить уравнение. Нахождение

ОДЗ в таком решении будет бесполезным. Тогда уравнение рациональнее решать без нахождения ОДЗ, а корень проверять простой подстановкой.

При этом надо понимать, что верно найденное ОДЗ и последующий отбор корней с его помощью не может гарантировать отсутствие ошибок. Важно помнить, что вне ОДЗ решений не существует, но не все значения, входящие в ОДЗ, служат решениями уравнения.

Важно отметить также, что с появлением элементов математического анализа приходится поступать более корректно и при проведении преобразований различных выражений. Напомним, что преобразование математического выражения называется тождественным, если оно верно при всех значениях входящих в него букв и переменных. Классическим примером являются формулы сокращённого умножения. Однако иногда те же формулы приходится применять к выражениям, определённым не везде, а лишь на некотором множестве. Тогда преобразования будут не просто тождественными, а будут тождественными в области определения заданных выражений (функций).

Пример

Известные из тригонометрии выражения $1+\cos 2x$ и $2\cos^2 x$ являются тождественно равными, в то время как выражения $\sin x$ и $\dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$ не являются тождественно равными, так как первое из них определено для $\forall x\in R$, а второе для $\forall x\in R/\{\pi+2k\pi;\, k\in Z\}$.

Заметим, что равенство $\sin x=\dfrac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$ иногда называют «условным тождеством», то есть его левая и правая части тождественно равны при выполнении некоторого дополнительного условия (возможно, не одного, а нескольких). В данном случае при $x\ne \pi+2k\pi,\, k\in Z$.

В дальнейшем мы будем говорить о тождественных преобразованиях в ОДЗ выражения. Это замечание, как показывает практика, важно, особенно для работы с преобразованным выражением.

Рассмотрим несколько примеров. Обычно примеры подобного типа встречаются в заданиях первого уровня ВНО. Наша цель состоит не в том, чтобы угадать ответ, а в том, чтобы понять, в чём состоит задача и как её правильно решать. Тогда выбрать правильный ответ не составит никакого труда.

Примеры

1). Найти значение выражения: $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+ab}}-\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}\right):\sqrt{\dfrac{a}{a+b}}$ при $a=4,\ b=5$.

В этом примере проще сразу же подставить $a=4,\ b=5$. Действительно:

$$\left(\frac{4}{\sqrt{16+20}}-\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4+5}}\right):\sqrt{\frac{4}{4+5}}=\left(\frac{4}{\sqrt{36}}-\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}\right):\sqrt{\frac{4}{9}}=\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right):\frac{2}{3}=0.$$

Ответ: 0

Однако чаще предлагают сначала преобразовать выражение, а уж потом подставить числа. Но зачастую преобразования делают нечётко:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+ab}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}\right):\sqrt{\frac{a}{a+b}}=\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}\right):\sqrt{\frac{a}{a+b}}=0.$$

Это неправильное решение. Почему? Так как в предложенном варианте нет никаких ограничений для a и b, то после преобразования мы можем подставлять **любые** числа a и b, в частности, $a=4,\ b=-4$ или $a=0,\ b=4$ и т. д., но при этих a и b исходное выражение не существует.

Если быть корректным, то правильное решение имеет вид:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+ab}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}\right):\sqrt{\frac{a}{a+b}}\equiv\left(\frac{\sqrt{a}\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{a+b}}-\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}\right):\sqrt{\frac{a}{a+b}}=0,\ a>0,\ a+b>0.$$

Ответ: 0, если $a>0,\ a+b>0$. При остальных a и b значение выражения не существует.

2). Доказать тождество: $1+\dfrac{1+\sqrt{x}}{1+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{x\sqrt{x}-1}=x$. $(*)$

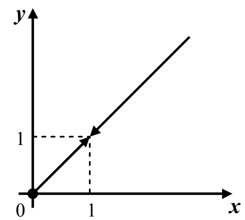
Проведём следующие преобразования левой части:

$$1+\frac{1+\sqrt{x}}{1+x+\sqrt{x}}:\frac{1}{x\sqrt{x}-1}=1+\frac{(1+\sqrt{x})(x\sqrt{x}-1)}{1+x+\sqrt{x}},\quad x\neq 1.$$

Как видим, уже это преобразование не является просто тождественным, так как выражение $(x\sqrt{x}-1)$ переместилось из знаменателя в числитель, и ОДЗ выражения изменилось. Далее:

$$1+\frac{(1+\sqrt{x})(x\sqrt{x}-1)}{1+x+\sqrt{x}}\equiv 1+\frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{x+\sqrt{x}+1}=1+x-1=x,\quad x\geq 0.$$

В предпоследнем переходе опять изменилось ОДЗ, так как исчез $\sqrt{x}$. Итак, очевидно, $1+\dfrac{1+\sqrt{x}}{1+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{x\sqrt{x}-1}=x,\ x\geq 0,\ x\neq 1$, то есть $(*)$ не является тождеством.



Для того чтобы наглядно убедиться в том, что $(*)$ не является тождеством, достаточно построить график функции $y=1+\dfrac{1+\sqrt{x}}{1+x+\sqrt{x}}:\dfrac{1}{x\sqrt{x}-1}$.

Если бы $(*)$ было тождеством, то мы построили бы график функции $y=x$. Но в нашем случае $D(y): x\in[0;1)\cup(1;+\infty)$. Значит, мы строим график $y=x$ при $x\in[0;1)\cup(1;+\infty)$. Как видно из рисунка, это уже не $y=x$.

Ответ: условие задачи не корректно, т. к. $(*)$ не является тождеством.

3). Упростить выражение: $\left(\dfrac{x-1}{x^{\frac{1}{3}}-1}+x^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{2}{3}}-1}$.

Проведём следующие тождественные преобразования в ОДЗ:

$$\left(\frac{x-1}{x^{\frac{1}{3}}-1}+x^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{x^{\frac{2}{3}}-1}\equiv\left(\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{1}{3}}+1\right)}{x^{\frac{1}{3}}-1}+x^{\frac{1}{3}}\right)\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}}-1}{\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)\cdot\left(x^{\frac{1}{3}}+1\right)}\equiv$$

$$\equiv\left(x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{1}{3}}+1\right)\cdot\frac{1}{\left(x^{\frac{1}{3}}+1\right)}\equiv\left(x^{\frac{1}{3}}+1\right)^2\cdot\frac{1}{\left(x^{\frac{1}{3}}+1\right)}\equiv x^{\frac{1}{3}}+1,\quad x\neq 1.$$

Так как мы сократили на $\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)$, то ОДЗ изменилось. На ограничении $x\geq 0$ нет смысла акцентировать ваше внимание. Это связано с тем, что исходное и преобразованное выражения определены при $\forall x\in[0;1)\cup(1;+\infty)$.

Ответ: $x^{\frac{1}{3}}+1$, если $\forall x\in[0;1)\cup(1;+\infty)$. При всех остальных значениях x исходное выражение не имеет смысла.

Замечание. Довольно часто абитуриенты в своих ответах (при упрощении выражений, решении уравнений (неравенств) и т. п.) заменяют, например, $\sqrt[3]{x}$ на $x^{\frac{1}{3}}$. В этом случае надо учитывать, что при возведении в степень, которая не является целым числом, основание степени не может быть числом отрицательным. Это следует из определения рациональной степени. Если же предположить, что существует величина $(-1)^{\frac{1}{3}}$, то должно быть выполнено равенство $(-1)^{\frac{1}{3}} = (-1)^{\frac{2}{6}}$, что невозможно. Другими словами, надо помнить, что функция $y = \sqrt[3]{x}$ определена для $\forall x \in (-\infty; +\infty)$, а функция $y = x^{\frac{1}{3}}$ – для $\forall x \in [0; +\infty)$. В противном случае, небрежное отношение к ОДЗ алгебраического выражения может привести, например, к тому, что уравнение

$$\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^4}} = -2$$

не имеет решения. Действительно, часто пишут:

$$\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^4}} = \frac{x \cdot x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}} = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}} = x^{\frac{1}{3}},\ x \neq 0, \text{ то есть в этом случае } x^{\frac{1}{3}} = -2,\quad x \neq 0.$$

Но последнее уравнение, очевидно, не имеет решений, так как для него $x \in (0; +\infty)$ и, следовательно, $x^{\frac{1}{3}} > 0$. Однако $x = -8$ является решением исходного уравнения, так как

$$\frac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^4}} = \sqrt[3]{x},\ x \neq 0, \text{ то есть } \sqrt[3]{x} = -2 \overset{def}{\Leftrightarrow} x = (-2)^3 = -8$$

(ОДЗ для исходного уравнения: $\forall x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$).

Напомним, что степенью числа $a > 0$ с рациональным показателем $r = \frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$ $(n > 1)$, называется число $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Степень числа 0 (ноль) определена только для положительных показателей, то есть $0^r \overset{def}{=} 0,\ \forall r > 0$. В частности, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, $a \geq 0$, $n \in N$.

Из определения степени с рациональным показателем следует, что для любого положительного a и любого рационального r число a^r положительно. При $a < 0$ рациональная степень числа a не определяется. Также неопределенно и выражение 0^0.

С другой стороны, корнем n-й степени из действительного числа a (обозначается: $\sqrt[n]{a}$) называется число (например x), n-я степень которого равна a, то есть

$$\sqrt[n]{a} = x \overset{def}{\Leftrightarrow} x^n = a.$$

Из определения следует, что:

$\forall a \in R$, $\exists\ \sqrt[2k-1]{a} = x \overset{def}{\Leftrightarrow} x^{2k-1} = a$, $k \in N$, например, $\sqrt[3]{(-8)} = -2 \overset{def}{\Leftrightarrow} (-2)^3 = -8$;

$\forall a \geq 0$, $\exists\ \sqrt[2k]{a} = \pm x \overset{def}{\Leftrightarrow} (\pm x)^{2k} = a$, $k \in N$, например, $\sqrt{4} = \pm 2 \overset{def}{\Leftrightarrow} (\pm 2)^2 = 4$ (как видно из этого примера, у вещественного квадратного корня существуют два значения (положительное и отрицательное), и это затрудняет работу с корнями. Чтобы обеспечить однозначность, вводится понятие арифметического корня, значение которого всегда положительно, – в примере это число 2. Другими словами, под арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного действительного числа a понимают неотрицательное число x, n-я степень которого равна a, то есть $\forall a \geq 0,\ \sqrt[n]{a} = x,\ x \geq 0 \overset{def}{\Leftrightarrow} x^n = a$);

$\forall a \in R,\ \exists\ \sqrt[2k]{a^{2k}} = |x| \overset{def}{\Leftrightarrow} |x|^{2k} = a^{2k},\ k \in N$.

Заметим, что в дальнейшем под извлечением корня чётной степени, в частности квадратного корня, будем понимать нахождение именно арифметического корня.

Учитывая всё вышесказанное, решите самостоятельно уравнение $\frac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt[8]{x^2}} = -2$.

4). Упростить выражение: $A = 1 - y + \frac{\sqrt[3]{(y-3)\sqrt{xy} + (3 - y^{-1})\sqrt{xy^{-1}}}}{\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{y^{-2}}} y^{\frac{5}{6}} x^{-\frac{1}{6}}$.

Проведя следующие тождественные преобразования в ОДЗ, получим:

$$A = 1 - y + x^{\frac{1}{6}} y^{\frac{2}{3}} y^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{(y-3)y^2 - (3y-1)}}{y-1} \cdot y^{\frac{5}{6}} x^{-\frac{1}{6}} = 1 - y + y \cdot \frac{\sqrt[3]{(y-1)^3}}{y-1} =$$
$$= 1 - y + y = 1,\quad x > 0,\ y > 0,\ y \neq 1.$$

Ответ: $A = 1$, $x > 0$, $y > 0$, $y \neq 1$.

Квадратные уравнения и уравнения, сводящиеся к ним

В школе подробно изучается тема «Квадратные уравнения и неравенства». Хотя, справедливости ради надо сказать, что при изучении этой темы иногда допускаются некоторые неточности.

Итак, как вам известно, уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где коэффициенты a, b, c − некоторые ***действительные*** числа, причем $a \neq 0$, называют квадратным уравнением. Если $a = 1$, то квадратное уравнение $x^2 + bx + c = 0$ называется ***приведённым***, в противном случае, то есть если $a \neq 1$, − ***неприведённым***[1].

Для решения квадратного уравнения[2] следует вычислить дискриминант $D = b^2 - 4ac$. Так, если:

а) $D < 0$, то уравнение ***не имеет действительных корней***;

б) $D > 0$, то уравнение имеет ***два различных действительных корня***, которые, как известно, находятся по формуле $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. В этом случае квадратный трёхчлен, стоящий в левой части уравнения, можно разложить на множители следующим образом: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$;

в) $D = 0$, то уравнение имеет ***два одинаковых действительных корня***[3] $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a}$. Известно, что это бывает тогда и только тогда, когда квадратный трёхчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ представим в виде $a(x - x_0)^2$, где $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ – корень данного квадратного трёхчлена. Таким образом, выражение «два одинаковых (совпадающих) корня» следует понимать как «один двукратный корень».

Вольность речи, которую мы допускаем, говоря о двух «совпадающих» корнях, имеет под собой серьезные основания. Подсчитывая число корней многочлена, в данном случае квадратного трёхчлена, разумно считать кратный корень столько раз, какова его кратность. В частности, при таком соглашении остаётся справедливой теорема о том, что число корней многочлена не превосходит его степени[4]. Например, пусть требуется ***найти сумму корней*** уравнения:

$$(x-3)(x^2+4x+4) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+2)^2 = 0.$$

Как видим, уравнение является элементарно простым, и ***некоторые из вас***, вычислив корни $x_1 = 3,\ x_2 = -2$, с лёгкостью нашли бы их сумму: $x_1 + x_2 = 1$. Однако это не так. Дело в том, что квадратное уравнение

[1] Не будем останавливаться на неполных квадратных уравнениях (квадратные уравнения, в которых коэффициент b или свободный член c равен нулю) и методе их решения, так как метод отыскания корней таких уравнений намного проще и вполне очевиден.

[2] Говоря в школьном курсе математики о корнях квадратного уравнения, имеют в виду только лишь ***действительные*** корни уравнения. Это обстоятельство имеет существенное значение в дальнейших рассуждениях и в соответствующих постановках задач.

[3] В школьном курсе алгебры говорят в таких случаях о двух «совпадающих» корнях. Ещё также говорят, что квадратное уравнение имеет кратный корень, или – корень второй кратности.

[4] Об этом поговорим ниже в разделе «Некоторые сведения из теории многочленов».

$x^2 + 4x + 4 = 0$ или, что то же самое, $(x+2)^2 = 0$ имеет два одинаковых корня $x_2 = x_3 = -2$ (здесь $D = 0$). Следовательно, сумма корней исходного уравнения равна $x_1 + x_2 + x_3 = -1$. Таким образом, очень важным является факт наличия равных (совпадающих или кратных) корней квадратного уравнения в случае равенства нулю его дискриминанта.

Для квадратных трёхчленов $f(x) = ax^2 + bx + c$ с действительными коэффициентами a, b, c $(a \neq 0)$ понятия простого и кратного корня имеют следующий геометрический смысл:

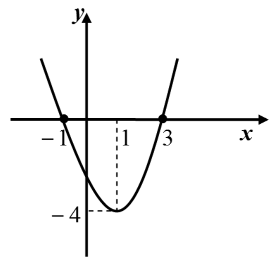


Рис. 1. $f(x) = x^2 - 2x - 3$

– корень x_0 является простым $(D > 0)$, если график квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ при $x = x_0$ пересекает ось абсцисс, не касаясь её (например, Рис. 1);

– корень x_0 является кратным (второй кратности) $(D = 0)$, если график квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ при $x = x_0$ касается оси абсцисс[1] (например, Рис. 2).

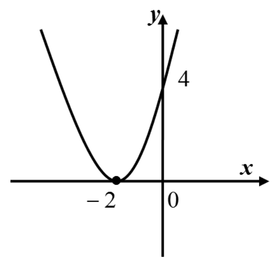


Рис. 2. $f(x) = x^2 + 4x + 4$

Если же вернуться теперь к уравнению $(x-3)(x^2+4x+4) = 0$, то, учитывая вышесказанное, графически его решение может быть представлено в виде Рис. 3.

Замечательной теоремой, позволяющей, не зная корней квадратного уравнения, вычислять их сумму или произведение, является ***прямая теорема Виета***: если x_1 и x_2 корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то выполняется соотношение:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases} \qquad (**)$$

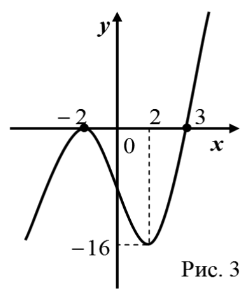


Рис. 3

[1] В качестве самостоятельной работы предлагаем следующее задание: записать уравнение касательной, проведённой к графику функции $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$, в точке с абсциссой $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ при условии, что $D \equiv b^2 - 4ac = 0$.

Обычно на практике для подбора корней квадратного уравнения пользуются ***обратной теоремой Виета***: если числа x_1 и x_2 таковы, что выполнены равенства соотношения $(**)$, то x_1 и x_2 корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$[1]. Формулы $(**)$ называются формулами Виета.

Замечания.

1. Если квадратное уравнение является приведённым, то есть $x^2+bx+c=0$, то соотношение $(**)$ перепишется в виде:

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ x_1+x_2=-b, \\ x_1 \cdot x_2 = c. \end{cases}$$

Сразу же отметим, возвращаясь к примеру, рассмотренному выше, что сумма корней квадратного уравнения $x^2+4x+4=0$, согласно теореме Виета, равна (-4). Опять же, если утверждать, что при $D=0$ квадратное уравнение имеет единственное решение, то как быть с теоремой Виета? Поэтому будьте внимательны в своих формулировках!

2. Далее, пусть требуется, не решая квадратного уравнения $x^2+13x+45=0$, найти сумму квадратов его корней. Столкнувшись с такой задачей, очень многие из вас совершенно правильно увидят в словах «*не решая уравнения*» подсказку и воспользуются теоремой Виета. Для этого сумма квадратов корней преобразуется так:

$$x_1^2+x_2^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2.$$

Поскольку $x_1+x_2=-13$ и $x_1 \cdot x_2=45$, получаем: $x_1^2+x_2^2=(-13)^2-90=79$. Однако этот результат неверен! Дело в том, что сумма квадратов корней исходного уравнения не существует, поскольку не существуют сами корни: дискриминант рассматриваемого квадратного уравнения отрицателен. У некоторых школьников это обстоятельство вызывает недоумение: как же так, сумма и произведение корней есть, а самих корней – нет! Это недоумение вызвано поверхностным знанием соотношений теоремы Виета. Посмотрите ещё раз на условие теоремы. В нём говорится о корнях квадратного трёхчлена, то есть предполагается, что они существуют! Поэтому условие $D \geq 0$ неотделимо от соотношений для суммы и произведения корней. *Заметьте, а мы вас предупреждали, что говоря в школьном курсе математики о корнях квадратного уравнения, имеют в виду только лишь* ***действительные корни уравнения.*** Рассмотренная в данном примере ошибка является характерной. Учтите это при решении задач с помощью теоремы Виета.

[1] Прямая теорема Виета может быть сформулирована как для приведённого квадратного трёхчлена, так и для трёхчлена общего вида, тогда как обратная теорема существует лишь для приведённого трёхчлена. Это объясняется тем, что зная два корня, невозможно однозначно определить три коэффициента квадратного трёхчлена, поэтому для определённости полагают $a=1$.

Несмотря на сказанное, теорема Виета может успешно применяться при решении различных задач, в частности, задач на исследование знаков корней квадратного трёхчлена. Это мощный инструмент решения многих задач с параметрами для квадратичной функции.

Скажем теперь несколько слов об уравнениях, которые сводятся к квадратным уравнениям. К таким уравнениям относятся уравнения вида:

$$a \cdot f^2(x)+b \cdot f(x)+c=0.$$

В общем случае такие уравнения решаются с помощью замены: $f(x)=t$, $t \in E(f)$ с последующим решением квадратного уравнения $at^2+bt+c=0$. Также при решении можно обойтись и без замены, решив совокупность двух уравнений:

$$f(x)=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{и} \quad f(x)=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Так, если $f(x)=x^2$, то исходное уравнение принимает вид $ax^4+bx^2+c=0$ и, как вы знаете, называется биквадратным.

Примеры

1). Решить уравнение: $\dfrac{x^2+x-5}{x}+\dfrac{3x}{x^2+x-5}=4$.

Решение. Обозначим $t=\dfrac{x^2+x-5}{x}$, тогда получаем уравнение $t+\dfrac{3}{t}=4$. Преобразуем последнее уравнение:

$$t+\frac{3}{t}=4 \Leftrightarrow \frac{t^2-4t+3}{t}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t^2-4t+3=0, \\ t \neq 0. \end{cases}$$

Квадратное уравнение $t^2-4t+3=0$ имеет корни: $t_1=1$; $t_2=3$ (как видим, $t_{1,2} \neq 0$). Таким образом:

$$\frac{x^2+x-5}{x}+\frac{3x}{x^2+x-5}=4 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\frac{x^2+x-5}{x}=1, \\ &\frac{x^2+x-5}{x}=3 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &\frac{x^2+x-5}{x}-1=0, \\ &\frac{x^2+x-5}{x}-3=0. \end{aligned}\right.$$

Получаем:

$$\begin{cases} x^2-5=0, \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2-2x-5=0, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

Следовательно, $x_{1,2}=\pm\sqrt{5}$ или $x_{3,4}=1\pm\sqrt{6}$. Нетрудно заметить, что все найденные корни входят в ОДЗ первоначального (данного в условии) уравнения. Почему? Объясните самостоятельно.

Ответ: $\left\{\ \pm\sqrt{5};\ 1\pm\sqrt{6}\ \right\}$

2). Решить уравнение: $x(x+2)(x+3)(x+5)=72$.

Решение. Перегруппируем сомножители в левой части и преобразуем полученное уравнение:

$$((x+2)(x+3))\cdot((x+5)x)=72 \iff (x^2+5x+6)(x^2+5x)=72.$$

Обозначим $y=x^2+5x$, тогда получим уравнение $(y+6)y=72$, или $y^2+6y-72=0$. Корни последнего уравнения: $y_1=6,\ y_2=-12$.

Таким образом, исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+5x=6, \\ x^2+5x=-12 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x^2+5x-6=0, \\ x^2+5x+12=0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x_1=-6,\ x_2=1, \\ x\in\{\varnothing\}\ (\text{т.к. } D=25-48=-23<0). \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-6;1\}$

3). Решить уравнение: $4x^2+12x+\dfrac{12}{x}+\dfrac{4}{x^2}=47$.

Решение. Сгруппировав слагаемые, перепишем исходное уравнение в виде:

$$4\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+12\left(x+\frac{1}{x}\right)=47.$$

Обозначим $y=x+\dfrac{1}{x}$, тогда $y^2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow x^2+\dfrac{1}{x^2}=y^2-2$.

С учётом этого получаем уравнение:

$$4(y^2-2)+12y=47 \quad \text{или} \quad 4y^2+12y-55=0 \Rightarrow y_1=\frac{5}{2};\ y_2=-\frac{11}{2}.$$

Таким образом, исходное уравнение равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}, \\ x+\dfrac{1}{x}=-\dfrac{11}{2} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{5}{2}=0, \\ x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{11}{2}=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} 2x^2-5x+2=0, \\ 2x^2+11x+2=0, \end{array}\right. \\ x\neq 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x_1=2,\ \ x_2=\dfrac{1}{2}, \\ x_{3,4}=\dfrac{-11\pm\sqrt{105}}{4}, \end{array}\right. \\ x\neq 0. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{2;\ \dfrac{1}{2};\ \dfrac{-11\pm\sqrt{105}}{4}\right\}$

4). Решить уравнение: $(x^2-16)(x-3)^2+9x^2=0$.

<u>Первый способ</u>: Очевидно, что $x=3$ не является решением данного уравнения, т. е. $x\neq 3$ Тогда выполним преобразования:

$$(x^2-16)(x-3)^2+9x^2=0 \iff x^2(x-3)^2+9x^2=16(x-3)^2 \iff$$
$$\iff x^2(x^2-6x+9)+9x^2=16(x-3)^2 \iff x^2(x^2-6x+18)=16(x-3)^2 \iff$$
$$\iff x^4-6x^2(x-3)=16(x-3)^2\,\Big|:(x-3)^2\neq 0 \iff \left(\frac{x^2}{x-3}\right)^2-6\left(\frac{x^2}{x-3}\right)-16=0.$$

Сделав замену $\dfrac{x^2}{x-3}=t$, получим следующее квадратное уравнение: $t^2-6t-16=0$. Следовательно, по обратной теореме Виета, $t_1=-2;\ t_2=8$.

Значит, если:

$t_1=-2$: $\dfrac{x^2}{x-3}=-2 \Rightarrow x^2+2x-6=0 \Rightarrow x_{1,2}=1\pm\sqrt{7}.$

$t_2=8$: $\dfrac{x^2}{x-3}=8 \Rightarrow x^2-8x+24=0 \Rightarrow x\in\{\varnothing\}$ (т.к. $D=64-96=-32<0$).

Ответ: $\left\{\ 1\pm\sqrt{7}\ \right\}$

<u>Второй способ</u>: Как и в первом случае, перепишем исходное уравнение в виде:

$$x^2(x-3)^2+9x^2=16(x-3)^2.$$

Теперь, дополнив до полного квадрата левую часть этого уравнения, можем записать:

$$(x(x-3)+3x)^2=16(x-3)^2+6x^2(x-3)$$

или

$$x^4-16(x-3)^2=6x^2(x-3)\,\Big|:(x-3)^2,\ x\neq 3,$$

$$\left(\frac{x^2}{x-3}\right)^2-6\left(\frac{x^2}{x-3}\right)-16=0.$$

Как видите, это то же уравнение, что и уравнение, полученное первым способом. Его корни были получены ранее (см.1-й способ).

Ответ: $\left\{\ 1\pm\sqrt{7}\ \right\}$

5). Решить уравнение: $(x^2+3x-2)(x^2+9x-2)+8x^2=0$.

<u>Первый способ</u>: Обозначив $x^2+3x-2=t$, перепишем исходное уравнение в виде: $t(t+6x)+8x^2=0 \iff t^2+(6x)\cdot t+(8x^2)=0$. Теперь решаем полученное квадратное уравнение относительно t. Очевидно, что $t_{1,2} = -3x \pm x$. Значит $t_1 = -2x$, $t_2 = -4x$. Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + 3x - 2 = -2x, \\ x^2 + 3x - 2 = -4x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 5x - 2 = 0, \\ x^2 + 7x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{33}}{2}, \\ x_{3,4} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{57}}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{ \dfrac{-5 \pm \sqrt{33}}{2}; \dfrac{-7 \pm \sqrt{57}}{2} \right\}$

Замечание. При решении примера данным способом возможны и другие замены. Например, если обозначить $x^2 - 2 = t$, то решаем следующее квадратное уравнение относительно t: $t^2 + (12x) \cdot t + (35x^2) = 0$. Очевидно, что $t_{1,2} = -6x \pm x \Rightarrow t_1 = -5x$, $t_2 = -7x$. В результате получаем совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 2 = -5x, \\ x^2 - 2 = -7x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 5x - 2 = 0, \\ x^2 + 7x - 2 = 0. \end{array}\right.$$

<u>Второй способ</u>: Очевидно, что $x = 0$ не является решением данного уравнения (проверяется непосредственной подстановкой). Поэтому, разделив уравнение на x^2 $(x \neq 0)$, можем переписать его в виде:

$$\left(x + 3 - \frac{2}{x}\right)\left(x + 9 - \frac{2}{x}\right) + 8 = 0 \Leftrightarrow \left(\left(x - \frac{2}{x}\right) + 3\right)\left(\left(x - \frac{2}{x}\right) + 9\right) + 8 = 0.$$

Обозначим: $x - \dfrac{2}{x} = t \Rightarrow (t + 3)(t + 9) + 8 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 12t + 35 = 0$. Значит, $t_1 = -5;\ t_2 = -7$. Следовательно:

$$\left[\begin{array}{l} x - \dfrac{2}{x} = -5, \\ x - \dfrac{2}{x} = -7 \end{array}\right. \overset{(x \neq 0)}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{l} x^2 + 5x - 2 = 0, \\ x^2 + 7x - 2 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{33}}{2}, \\ x_{3,4} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{57}}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{ \dfrac{-5 \pm \sqrt{33}}{2}; \dfrac{-7 \pm \sqrt{57}}{2} \right\}$

Замечание. Кроме того, возможна замена, рассмотренная в третьем примере. Для этого, прежде всего, раскроем скобки в исходном уравнении и приведём подобные. В результате получаем уравнение вида:

$$x^4 + 12x^3 + 31x^2 - 24x + 4 = 0.$$

Разделив уравнение на x^2 $(x \neq 0)$, получим:

$$x^2 + 12x + 31 - \frac{24}{x} + \frac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) + 12\left(x - \frac{2}{x}\right) + 31 + = 0.$$

Как и во втором способе, обозначив $x - \dfrac{2}{x} = t \Rightarrow x^2 + \dfrac{4}{x^2} = t^2 + 4$, можем записать: $t^2 + 12t + 35 = 0$. И так далее (см. 2-й способ).

<u>Иррациональные уравнения и неравенства</u>

Иррациональным называется уравнение (неравенство), в котором переменная (неизвестная величина) входит под знак корня (радикала).

Обратите внимание, что в контрольных работах довольно-таки часто встречаются иррациональные уравнения (неравенства). Это, в частности, связано с тем, что с их помощью можно легко распознать, в какой мере вы владеете такими понятиями, как: область определения функции и область допустимых значений; множество решений уравнения и неравенства; равносильность и неравносильность преобразований, и многими другими.

Ранее мы уже формулировали определение и основные свойства корней степени n:

– все корни чётной степени являются арифметическими;
– все корни нечётной степени определены при любом значении подкоренного выражения;
– функции $y = \sqrt[2n]{x}$ и $y = \sqrt[2n+1]{x}$ $(n \in N)$ являются возрастающими на всей своей области определения.

Задание «решить иррациональное уравнение (неравенство)» означает, что требуется найти все такие значения переменной x, при подстановке которых в уравнение (неравенство) получается верное числовое равенство (неравенство), либо требуется доказать, что таких значений x не существует. Основная идея большинства способов решения таких уравнений (неравенств) заключается в сведении их к рациональным алгебраическим уравнениям (неравенствам)[1]. Это возможно сделать, например, если ввести новую переменную (способ замены). Или же воспользоваться способом, который основывается на возведении обеих частей уравнения в степень, равную показателю степени корня. Однако, в этом случае, вы можете столкнуться с некоторыми трудностями. Предположим, что требуется решить простейшее иррациональное уравнение вида: $\sqrt{f(x)} = g(x)$. Встретив такое уравнение, не спешите возводить обе его части в квадрат! Дело в том, что при решении получившегося уравнения $f(x) = g^2(x)$ вы найдёте не только корни исходного

[1] Надеемся, что тема, связанная с рациональными уравнениями (неравенствами), рассмотрена в школе достаточно глубоко. И методы их решения, в частности – метод интервалов, вам хорошо известны.

уравнения, но и корни так называемого «теневого» уравнения $\sqrt{f(x)} = -g(x)$. Действительно, при возведении «теневого» уравнения во вторую степень вы также получите уравнение $f(x) = g^2(x)$. Корни «теневого» уравнения (если они существуют) являются посторонними корнями исходного уравнения. Важно помнить правило, которое исключает главную причину ошибок при возведении уравнений в квадрат: ***возводить уравнение в квадрат запрещается при тех значениях неизвестной, при которых левая и правая части уравнения имеют разные знаки***.

Если же вы решаете задачу, проводя равносильные преобразования, то можете не опасаться ни потери корней (что является невосполнимой утратой), ни приобретения посторонних решений.

Рассмотрим прежде всего методы решения простейших иррациональных уравнений.

- ***Уравнение вида***: $\sqrt{f(x)} = g(x)$. Очевидно, что в ОДЗ левая часть данного уравнения всегда неотрицательна. Поэтому решение уравнения может существовать только тогда, когда $g(x) \ge 0$. В этом случае обе части исходного уравнения неотрицательны, и возведение в квадрат даёт равносильное в ОДЗ уравнение, то есть можем записать:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$$

Обратите внимание на то, что при этом ОДЗ выполняется автоматически. Кроме того, добавлять к полученной системе ещё и неравенство $f(x) \ge 0$ в данном случае является лишним, так как оно автоматически выполняется в силу первого уравнения последней системы. А вот условие $g(x) \ge 0$ необходимо проверять. Это очень важное условие равносильности![1]

Примеры.

1). Решить уравнение: $x - \sqrt{2x^2 - 9x + 5} = 3$.

Решение. Воспользуемся условием равносильности:

$$x - \sqrt{2x^2 - 9x + 5} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 9x + 5} = x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 9x + 5 = (x-3)^2, \\ x - 3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 9x + 5 = x^2 - 6x + 9, \\ x \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 4 = 0, \\ x \ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = -1, \\ x_2 = 4, \end{array} \right. \\ x \ge 3 \end{cases} \Rightarrow x = 4.$$

Ответ: $x = 4$

[1] Указанное условие равносильности особенно полезно при решении тригонометрических уравнений, в которых нахождение ОДЗ связано с решением тригонометрических неравенств, что гораздо сложнее, чем решение тригонометрических уравнений. Ясно, что проверку в тригонометрических уравнениях условия $g(x) \ge 0$ не всегда просто сделать.

2). При каких значениях параметра a уравнение $ax - 3 = \sqrt{-x^2 + 18x - 72}$ имеет единственное решение?

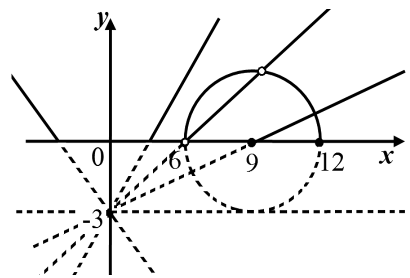
Решение. При решении данного примера воспользуемся не только предложенной выше схемой, но и геометрическим (графическим) методом. Запишем следующую систему (с учётом ОДЗ):

$$\begin{cases} -x^2 + 18x - 72 = (ax - 3)^2, \\ x^2 - 18x + 72 \le 0, \\ ax - 3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a^2 + 1)x^2 - 6(a+3)x + 81 = 0, \\ 6 \le x \le 12, \\ ax - 3 \ge 0. \end{cases}$$

Заметим, что геометрически уравнение $y = \sqrt{-x^2 + 18x - 72}$ определяет верхнюю полуокружность с центром в точке с координатами $(9; 0)$ и радиусом $R = 3$. Действительно:

$$y = \sqrt{-x^2 + 18x - 72} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = -x^2 + 18x - 72, \\ y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-9)^2 + y^2 = 3^2, \\ y \ge 0. \end{cases}$$

Уравнение $y = ax - 3$ определяет прямую, проходящую через точку с координатами $(0; -3)$. Учитывая, что $ax - 3 \ge 0$ (см. ОДЗ), имеем только лишь часть данной прямой, то есть луч, расположенный в верхней полуплоскости и началом в точке, лежащей на оси Ox. Кроме того, очевидно, что $a > 0$, иначе бы прямая $y = ax - 3$ не пересекала указанную полуокружность (см. рисунок).



Возвращаясь к постановке задачи, найдём теперь все значения параметра a, при которых соответствующие кривые (полуокружность и луч) пересекаются в единственной точке.

Далее, рассмотрим квадратное уравнение $(a^2 + 1)x^2 - 6(a+3)x + 81 = 0$, для которого $D \equiv 9(a+3)^2 - 81(a^2 + 1)$.

Тогда:

– при $D = 0$ получим абсциссы двух точек касания прямой и окружности. Итак, $D \equiv 8a^2 - 6a = 0 \Leftrightarrow 2a(4a - 3) = 0 \Rightarrow a_1 = 0;\ a_2 = \frac{3}{4} \overset{(a>0)}{\Rightarrow} a = \frac{3}{4}$. Заметим, что при $a = 0$ получаем абсциссу точки касания, лежащей в нижней полуплоскости (см. рисунок);

– при $D > 0 \Leftrightarrow 0 < a < \frac{3}{4}$ получим абсциссы двух точек пересечения прямой и окружности. Значит, в нашем случае одну точку пересечения луча и полуокружности. Кроме того, очевидно, что начало луча расположено между точками с координатами $(6;0)$ и $(12;0)$ (вторая точка может быть началом луча (см. рисунок)), т. е. $6<x\le 12$. Из того, что абсцисса начала луча находится из условия $y=0 \Leftrightarrow ax-3=0$, получаем $a=\dfrac{3}{x}$. Следовательно, при $6<x\le 12$ можем записать: $\dfrac{1}{4}\le a<\dfrac{1}{2}$. Нетрудно видеть, что $a\in\left[\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right)\subset\left(0;\dfrac{3}{4}\right)$.

Ответ: $a\in\left[\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right)\cup\left\{\dfrac{3}{4}\right\}$

Замечание.

Задачи с параметрами являются, пожалуй, самыми сложными из всех заданий школьного курса математики. На каждом этапе решения таких задач необходимо отчётливо представлять себе, что уже сделано, что ещё нужно сделать, что означают уже полученные результаты. На таких задачах проверяется и демонстрируется умение мыслить сжато, логично и аргументированно.

Имеется несколько способов решения параметрических уравнений и неравенств: алгебраический, аналитический, геометрический (графический) и различные их комбинации. А в некоторых задачах применяются методы математического анализа. То есть способы решения подобных задач могут быть различными, но при одном методе решение может быть громоздким, а при другом – более простым и наглядным. Это говорит о том, что нужно перед началом решения задания оценить его и выбрать тот путь, который проще.

Предлагаем вам самостоятельно решить данную задачу, воспользовавшись, например, алгебраическим методом.

- ***Уравнение вида***: $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$. Здесь в ОДЗ обе части уравнения неотрицательны. Возведение в квадрат даёт равносильное в ОДЗ уравнение $f(x)=g(x)$. Поэтому:

$$\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x), \\ f(x)\ge 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x)=g(x), \\ g(x)\ge 0. \end{cases}$$

При таком способе решения достаточно проверить неотрицательность одной из функций (или $f(x)$, или $g(x)$) – как правило, выбирают более простую.

Пример. Решить уравнение: $\sqrt{x^2+x-1}=\sqrt{2x^3-4x^2+x-1}$.

Решение. Воспользуемся, как и в предыдущем примере, условием равносильности:

$$\sqrt{x^2+x-1}=\sqrt{2x^3-4x^2+x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-1=2x^3-4x^2+x-1, \\ x^2+x-1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-1\ge 0, \\ 2x^3-5x^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-1\ge 0, \\ x^2(2x-5)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-1\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x_1=0, \\ x_2=\dfrac{5}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x=\frac{5}{2}.$$

Квадратное неравенство $x^2+x-1\ge 0$ в данном случае не решаем. Корень отбираем непосредственной проверкой (подстановкой).

Ответ: $x=\dfrac{5}{2}$

Замечания.

1. Если же иррациональное уравнение более сложного вида, чем приведённые выше простейшие, то нужно постараться с помощью различных алгебраических преобразований привести данное уравнение к одному из них. Обычно для этих целей используют метод «уединения» радикалов, возведение в степень и другие методы. Следует помнить, что в этом случае могут быть сделаны неравносильные преобразования. А это, в свою очередь, может привести к приобретению посторонних корней или, что совсем недопустимо, к потере корней. Поэтому в процессе решения иррациональных уравнений всегда необходимо внимательно следить за равносильностью преобразований или, если проведение равносильных преобразований затруднительно, делать проверку в конце решения, например, подставляя полученные корни в исходное уравнение. Вообще говоря, будет полезно приучить себя делать всякий раз проверку, независимо от того, равносильные или неравносильные преобразования были использованы. Важно в процессе равносильных преобразований не допустить досадных арифметических ошибок!

2. Как отмечалось выше, ещё одним методом решения иррациональных уравнений (и не только их!) является «метод замены». Метод, напомним, применяется в случае, если в уравнении неоднократно встречается некоторое определённое выражение, зависящее от неизвестной величины. Тогда имеет смысл обозначить это выражение какой-нибудь буквой и попытаться решить уравнение сначала относительно введённой неизвестной, а потом уже найти исходную неизвестную. В ряде случаев удачная замена неизвестной облегчает преобразования и упрощает решение задачи; иногда же без замены решить задачу вообще невозможно. Замена особенно полезна, если в её результате достигается новое качество, например, иррациональное уравнение превращается в квадратное или сводится к системе рациональных уравнений. Например, уравнения вида $\sqrt[m]{ax+b}\pm\sqrt[n]{cx+d}=p$ (здесь a, b, c, d, p – некоторые числа, m, n – натуральные числа, обычно не превосходящие 4) и ряд других уравнений часто удаётся решить при помощи введения двух вспомогательных неизвестных и последующего перехода к рациональной системе.

Примеры

1). Решить уравнение: $\sqrt[3]{x-2}+\sqrt{x+1}=3$.

Решение. Введём новые переменные $u=\sqrt[3]{x-2}$ и $v=\sqrt{x+1}$, причём $v\ge 0$. Тогда исходное уравнение принимает простой вид: $u+v=3,\ v\ge 0$. Полученное уравнение отражает связь между новыми переменными, существующую в силу исходного уравнения. Для того чтобы решить задачу, попытаемся найти ещё какое-либо соотношение, связывающее новые переменные. Поскольку u и v выражаются через x, выразим их друг через друга уже в силу самой произведённой замены. Нетрудно заметить, что $u^3-v^2\overset{def}{=}x-2-(x+1)=-3$. В результате получаем систему двух уравнений относительно двух неизвестных u и v:

$$\begin{cases} u+v=3, \\ u^3-v^2=-3, \\ v\ge 0. \end{cases}$$

Решая (самостоятельно) эту систему, получаем $u=1$, откуда $x=3$.

Ответ: $x=3$

2). Найти ***<u>положительные</u>*** корни уравнения: $2x+\dfrac{x-1}{x}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}-3\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=0$.

Прежде всего перепишем уравнение в виде: $\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+3\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}=2x+\dfrac{x-1}{x}$.

Найдём ОДЗ из условия:

$$\begin{cases} 1-\dfrac{1}{x}\ge 0, \\ x-\dfrac{1}{x}\ge 0, \\ 2x+\dfrac{x-1}{x}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{x}\ge 0, \\ \dfrac{x^2-1}{x}\ge 0, \\ \dfrac{2x^2+x-1}{x}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1}{x}\ge 0, \\ \dfrac{(x-1)(x+1)}{x}\ge 0, \\ \dfrac{2(x+1)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)}{x}\ge 0 \end{cases} \Rightarrow x\in[-1;0)\cup[1;+\infty).$$

Таким образом, решения исходного уравнения, согласно постановке задачи, будем искать для $\forall x\in[1;+\infty)$. Итак, рассмотрим несколько способов решения исходного уравнения для $\forall x\in[1;+\infty)$.

<u>Первый способ</u>: Обозначим $\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}=t,\ t\ge 0$. Тогда очевидно, что

$$\sqrt{x-\frac{1}{x}}=\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}=\sqrt{\frac{(x-1)(x+1)}{x}}=\sqrt{\frac{(x-1)}{x}}\cdot\sqrt{x+1}=\sqrt{1-\frac{1}{x}}\cdot\sqrt{x+1}=t\cdot\sqrt{x+1}.$$

Таким образом, исходное уравнение можно переписать в виде:

$$2x+t^2-t-3\,t\cdot\sqrt{x+1}=0 \Leftrightarrow t^2-\left(3\sqrt{x+1}+1\right)\cdot t+2x=0.$$

Как видим, последнее уравнение является квадратным уравнением относительно переменной t, для которого

$$D=\left(3\sqrt{x+1}+1\right)^2-8x=9(x+1)+6\sqrt{x+1}+1-8x=(x+1)+6\sqrt{x+1}+9=$$

$$=\left(\sqrt{x+1}+3\right)^2\Rightarrow t_{1,2}=\frac{3\sqrt{x+1}+1\pm\left(\sqrt{x+1}+3\right)}{2}\Rightarrow t_1=\sqrt{x+1}-1;\ t_2=2\sqrt{x+1}+2.$$

(Очевидно, что $t_{1,2}>0,\ \ \forall x\in[1;+\infty)$.)

В итоге, учитывая наше обозначение, получим следующую совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{ll} \sqrt{1-\dfrac{1}{x}}=\sqrt{x+1}-1, & (A) \\ \sqrt{1-\dfrac{1}{x}}=2\sqrt{x+1}+2. & (B) \end{array}\right.$$

Рассмотрим уравнение **(*A*)** полученной совокупности при условии $x\in[1;+\infty)$:

$$\left(\sqrt{1-\frac{1}{x}}=\sqrt{x+1}-1\right)\uparrow 2 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{x}=x+1-2\sqrt{x+1}+1 \Leftrightarrow \left(2\sqrt{x+1}=\frac{1}{x}+x+1\right)\uparrow 2.$$

В результате преобразований получаем уравнение:

$$x^4-2x^3-x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow \left(x^2-x-1\right)^2=0 \Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Нетрудно показать, что $x_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\notin[1;+\infty);\ \ x_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\in[1;+\infty)$.

Рассмотрим теперь уравнение **(*B*)**. Очевидно, что данное уравнение при $\forall x\in[1;+\infty)$ не имеет решения, так как $0\le\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}\le 1;\ \ 2\sqrt{x+1}+2\ge 2\sqrt{2}+2$ для $\forall x\in[1;+\infty)$.

Второй способ: Обозначим $\sqrt{1-\frac{1}{x}} = u, \sqrt{1+x} = v,\ u,v \geq 0$. Очевидно, что $u \cdot v = \sqrt{1-\frac{1}{x}} \cdot \sqrt{1+x} = \sqrt{\frac{x-1}{x}} \cdot \sqrt{1+x} = \sqrt{\frac{x^2-1}{x}} = \sqrt{x-\frac{1}{x}}$. Таким образом, исходное уравнение перепишется в виде:

$$2(v^2-1)+u^2-u-3uv=0.$$

Полученное уравнение является квадратным уравнением, например, относительно u:

$$u^2-(3v+1)u+2(v^2-1)=0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{3v+1 \pm \sqrt{(3v+1)^2-8(v^2-1)}}{2} = \frac{3v+1 \pm \sqrt{(v+3)^2}}{2} =$$

$$= \frac{3v+1 \pm (v+3)}{2} \Rightarrow u_1 = v-1,\ u_2 = 2v+2.$$

Значит:

$$\left[\begin{array}{l} u = v-1, \\ u = 2v+2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \sqrt{1-\frac{1}{x}} = \sqrt{x+1}-1, & (A) \\ \sqrt{1-\frac{1}{x}} = 2\sqrt{x+1}+2. & (B) \end{array}\right.$$

Третий способ, на наш взгляд, наиболее сложный. Исходное уравнение посредством соответствующих преобразований (дважды возводим в квадрат левую и правую части уравнения; приводим к общему знаменателю; приводим подобные) сводится к уравнению:

$$16x^8-40x^7-7x^6+68x^5-20x^4-38x^3+20x^2+16x+1=0.$$

Далее, разложив многочлен, стоящий в левой части последнего уравнения, на множители[1], перепишем уравнение в виде:

$$(x^2-x-1)^2(16x^4-8x^3-7x^2+14x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x-1=0, \\ 16x^4-8x^3-7x^2+14x+1=0. \end{array}\right.$$

Можно показать, что уравнение $16x^4-8x^3-7x^2+14x+1=0$ не имеет решений при $\forall x \in [1;+\infty)$, что, в свою очередь, является непростой задачей. Действительно, переписав уравнение в виде $(4x^2-x-1)^2+12x=0$, нетрудно видеть, что при $\forall x \in [1;+\infty)$ оно не имеет решений.

3. Среди иррациональных уравнений часто встречаются и такие, при решении которых может оказаться полезным анализ области определения функций, входящих в уравнение, а также использование таких свойств функций, как монотонность, ограниченность и т. д. В ряде случаев такой анализ позволяет

[1] О разложении многочленов на множители мы поговорим немного позднее в отдельной главе.

найти решения иррационального уравнения, не производя утомительных выкладок.

Ранее с помощью такого анализа мы уже решали уравнение $\sqrt{x+2} = x$ (см. раздел «Понятие равносильности уравнений и неравенств»). Данным методом мы воспользовались как при решении уравнения $\sqrt{1-\frac{1}{x}} = 2\sqrt{x+1}+2$ в предыдущем примере, так и при решении уравнений в контрольных работах[1]:

$$3\sqrt{x^2-9}+4\sqrt{x^2-16}+5\sqrt{x^2-25} = \frac{120}{x},\quad \sqrt{5-x}-\sqrt{7-x}+\sqrt{2x-15} = 2.$$

Примеры

1). Решить уравнение: $\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{x^2+2} = \sqrt{3x^2+2x-3}+\sqrt{x^2+3x-1}$.

Решение. Решить данное уравнение «в лоб» довольно-таки сложно (можете попытаться!). Поэтому прежде всего перепишем это уравнение в виде:

$$\sqrt{3x^2-1}-\sqrt{3x^2+2x-3} = \sqrt{x^2+3x-1}-\sqrt{x^2+2}. \qquad (*)$$

Далее, вспомним, что: $a-b = (\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}),\ \forall a>0,\ b>0$. Кроме того: $\sqrt{a}-\sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}},\ \forall a>0,\ b>0$ (выражения $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ и $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ часто называют сопряжёнными). Учитывая всё это, можем записать:

$$\frac{2-2x}{\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{3x^2+2x-3}} = \frac{3x-3}{\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2+2}}$$

или

$$(1-x)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{3x^2-1}+\sqrt{3x^2+2x-3}}+\frac{3}{\sqrt{x^2+3x-1}+\sqrt{x^2+2}}\right)=0.$$

Откуда $x=1$ – решение уравнения (т. к. второй множитель положителен). Проверку сделайте самостоятельно.

Ответ: $x=1$

2). При каких значениях параметра a существует решение следующей системы уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l} \sqrt{x+y}-\sqrt{5-x-y}=1, \\ 2(\sqrt{x-5}+\sqrt{2y+3})+\sqrt{a-2y-x}=3\sqrt{a-2} \end{array}\right. ?$$

Найдите это решение.

[1] Контрольная работа−2005, 10−11-й классы, 3-й уровень, задание № 9 и контрольная работа−2014, 10-й класс, 2-й уровень, задание № 9 соответственно.

Решение. Рассмотрим первое уравнение системы:

$$\sqrt{x+y}-\sqrt{5-x-y}=1 \Leftrightarrow \sqrt{x+y}=1+\sqrt{5-(x+y)} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=t, \\ t\ge 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{t}=1+\sqrt{5-t},\quad t\ge 0.$$

Очевидно, что $t=4$ является решением последнего уравнения (проверяется непосредственной подстановкой). Более того, так как функция $\sqrt{t}$ монотонно возрастает при $\forall\, t\ge 0$, а функция $1+\sqrt{5-t}$ монотонно убывает при $\forall\, t\ge 0$, то $t=4$ единственное решение.

Замечание. Конечно же, нетрудно найти это решение, возведя в квадрат обе части уравнения $(t\ge 0)$:

$$\left(\sqrt{t}=1+\sqrt{5-t}\right)\Big|\uparrow 2 \Rightarrow t=1+2\sqrt{5-t}+5-t \Leftrightarrow \sqrt{5-t}=t-3 \Leftrightarrow \begin{cases} 5-t=(t-3)^2 \\ t-3\ge 0 \\ 5-t\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2-5t+4=0, \\ t\in[3;5] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t^2-5t+4=0, \\ t\in[3;5] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1=1,\ t_2=4, \\ t\in[3;5] \end{cases} \Rightarrow t=4.$$

Итак, $t=4 \Rightarrow x+y=4$.

Далее, при исследовании второго уравнения исходной системы, воспользуемся элементами векторной алгебры. А именно, известным неравенством для скалярного произведения двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $|\bar{a}\cdot\bar{b}|\le|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|$. Причём равенство достигается, когда вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарные $(\bar{a}\,\|\,\bar{b})$. Введём в рассмотрение вектора:

$$\bar{a}=(2;2;1) \text{ и } \bar{b}=\left(\sqrt{x-5};\sqrt{2y+3};\sqrt{a-2y-x}\right),$$

где

$$|\bar{a}|=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3 \text{ и } |\bar{b}|=\sqrt{(x-5)+(2y+3)+(a-2y-x)}=\sqrt{a-2}.$$

Таким образом, второе уравнение системы равносильно векторному уравнению: $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|$. Значит, вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарные. Тогда из условия коллинеарности векторов следует:

$$\bar{a}\,\|\,\bar{b} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x-5}}{2}=\frac{\sqrt{2y+3}}{2}=\frac{\sqrt{a-2y-x}}{1}.$$

В результате можем записать:

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} x+y=4, \\ x-5=2y+3, \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x+y=4, \\ x-2y=8 \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{16}{3};\ y=-\dfrac{4}{3} \\ x-5=4(a-2y-x), \qquad \Rightarrow a=\dfrac{11}{4} \\ x\ge 5, \\ y\ge -\dfrac{3}{2}, \\ a-2y-x\ge 0 \,\big|\Rightarrow a\ge 2y+x \qquad \Rightarrow a\ge \dfrac{8}{3}. \end{cases}$$

Ответ: при $a=\dfrac{11}{4}$ система имеет единственное решение: $x=\dfrac{16}{3};\ y=-\dfrac{4}{3}$

4. Иногда подходящей заменой неизвестной задачу решения иррационального уравнения можно свести к задаче решения тригонометрического уравнения. При этом полезными могут оказаться следующие замены переменной:

а) Если в уравнение входит радикал $\sqrt{a^2-x^2}$, то можно сделать замену $x=a\,sin\,t$ или $x=a\,cos\,t$;

б) Если в уравнение входит радикал $\sqrt{a^2+x^2}$, то можно сделать замену $x=a\ tgt$ или $x=a\ ctgt$;

в) Если в уравнение входит радикал $\sqrt{x^2-a^2}$, то можно сделать замену $x=\dfrac{a}{sin\,t}$ или $x=\dfrac{a}{cos\,t}$.

Проиллюстрируем использование предложенных замен на следующих примерах.

Примеры

1). Решить уравнение: $\sqrt{x^2+1}-x=\dfrac{5}{2\sqrt{x^2+1}}$.

Решение. В данное уравнение входит выражение $\sqrt{x^2+1}$, поэтому, в соответствии с пунктом **б**), сделаем замену $x=tgt$, где $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ (объясните, почему). Тогда $\sqrt{x^2+1}=\sqrt{tg^2t+1}=\dfrac{1}{cos\,t}$. Значит, исходное уравнение запишется в виде: $\dfrac{1}{cos\,t}-tgt=\dfrac{5}{2}cos\,t$.

Поскольку $cos\,t\ne 0$ для всех $t\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, то полученное уравнение равносильно уравнению:

$$2-2\,sin\,t=5\left(1-sin^2 t\right),$$

решая которое, находим: $\sin t = 1$ или $\sin t = -\frac{3}{5}$. Из всех корней последних уравнений интервалу $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ принадлежит только единственное значение $t = \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)$. (Объясните, почему.)

Поэтому соответствующее значение $x = tg\left(\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right) = -\frac{3}{4}$.

(Вычислите $tg\left(\arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$ самостоятельно!)

Ответ: $x = -\frac{3}{4}$

Замечание. Как видите, для данного уравнения предложенный выше способ не совсем удобен и требует не только подробных объяснений, но, в том числе, и хороших знаний из тригонометрии. Мы же приводим это решение только лишь как иллюстрацию к описанному выше методу. Конечно же, исходное уравнение можно решить намного проще, например, если обозначить $\sqrt{x^2+1} = u \ (u > 0)$, $v = x$. Тогда исходное уравнение будет равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} u - v = \frac{5}{2u}, \\ u^2 - v^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - v = \frac{5}{2u}, \\ (u-v)(u+v) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = u - \frac{5}{2u}, \\ \frac{5}{2u}\left(2u - \frac{5}{2u}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = u - \frac{5}{2u}, \\ u^2 = \frac{25}{16} \end{cases} \overset{(u>0)}{\Rightarrow}$$

$$\overset{(u>0)}{\Rightarrow} \begin{cases} v = u - \frac{5}{2u}, \\ u = \frac{5}{4} \end{cases} \overset{(v=x)}{\Rightarrow} x = \frac{5}{4} - \frac{5}{2\cdot\frac{5}{4}} = \frac{5}{4} - 2 = -\frac{3}{4}.$$

Ответ: $x = -\frac{3}{4}$

Если же говорить о более рациональном методе решения исходного уравнении, то, очевидно, этот метод заключается в следующем: умножим обе части уравнения на $2\sqrt{x^2+1} \neq 0, \forall x \in R$. В результате чего получим:

$$2\left(x^2+1\right) - 2x\sqrt{x^2+1} = 5 \Leftrightarrow 2x^2 + 2 - 2x\sqrt{x^2+1} - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x\sqrt{x^2+1} + x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} - x = \pm 2.$$

То есть:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x^2+1} = x + 2 \\ \sqrt{x^2+1} = x - 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 + 1 = (x+2)^2 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 + 1 = (x-2)^2 \\ x - 2 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x = -3 \\ x \geq -2 \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{3}{4} \\ \begin{cases} 4x = 3 \\ x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \varnothing \end{array}\right.$$

Ответ: $x = -\frac{3}{4}$

2). В зависимости от параметра a решить уравнение: $x\sqrt{1-x^2}\left(1-2x^2\right) = a$.

Решение. При решении этого уравнения эффективна именно тригонометрическая подстановка $x = \sin t$.

Итак, очевидно, что ОДЗ уравнения имеет вид: $|x| \leq 1$. Тогда:

$$x\sqrt{1-x^2}\left(1-2x^2\right) = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x = \sin t, \\ t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right], \\ |x| \leq 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \sin t \cos t\left(1 - 2\sin^2 t\right) = a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 2t \cos 2t = a \Leftrightarrow \frac{1}{4}\sin 4t = a \Rightarrow \sin 4t = 4a \Rightarrow \left[|4a| \leq 1 \Leftrightarrow a \in \left[-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right]\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{4}\left((-1)^k \arcsin(4a) + k\pi\right), k \in Z \text{ при } a \in \left[-\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right],\ t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right].$$

Рекомендуем проверить, что:

а) если $a = 0$, то уравнение имеет пять корней. При этом $t_k = \frac{k\pi}{4}, k = 0; \pm 1; \pm 2$;

б) если $a = \frac{1}{4}$, то уравнение имеет два корня. При этом очевидно, что

$$t_k = \frac{1}{4}\left((-1)^k\frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in Z \Rightarrow \left[t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right] \Rightarrow t = \left\{\frac{\pi}{8}; -\frac{3\pi}{8}\right\};$$

в) для каждого $0 < a < \frac{1}{4}$ уравнение имеет четыре корня. При этом очевидно

$k = 0$: $\quad t_1 = \frac{1}{4}\arcsin(4a)$; $\qquad k = 1$: $\quad t_2 = \frac{1}{4}(\pi - \arcsin(4a))$;

$k = -1$: $\quad t_3 = -\frac{1}{4}(\pi + \arcsin(4a))$; $\qquad k = -2$: $\quad t_4 = -\frac{1}{4}(2\pi - \arcsin(4a))$;

г) для каждого $-\frac{1}{4} \le a < 0$, в силу нечётности синуса, получим те же корни уравнения, что и в пунктах **б)**, **в)**, но только с противоположным знаком.

Возвращаясь теперь к исходному уравнению, нетрудно записать его решение, которое определяется по формуле $x = \sin t$.

Перейдём теперь к иррациональным неравенствам. Их решение осложняется, в частности, тем обстоятельством, что здесь, как правило, исключена возможность проверки, поэтому все преобразования стараются делать равносильными.

Основным методом решения иррациональных неравенств является метод равносильных переходов от одного (исходного) иррационального неравенства к равносильной системе или к совокупности систем равносильных рациональных неравенств (не содержащим корней), а именно:

1. $\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g^2(x), \\ f(x) \ge 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

Если $g(x) \le 0$, то неравенство $\sqrt{f(x)} < g(x)$ решений не имеет.

2. $\sqrt{f(x)} \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \le g^2(x), \\ f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0. \end{cases}$

Если $g(x) < 0$, то неравенство $\sqrt{f(x)} \le g(x)$ решений не имеет.

3. $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g^2(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$

4. $\sqrt{f(x)} \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge g^2(x), \\ g(x) \ge 0. \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ g(x) < 0. \end{cases} \end{array}\right.$

5. $\sqrt{f(x)} \cdot g(x) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) \ge 0. \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) - \textit{определена}. \end{cases} \end{array}\right.$

6. $\sqrt{f(x)} \cdot g(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0. \end{cases}$

7. $\sqrt{f(x)} \cdot g(x) \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) \le 0. \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) - \textit{определена}. \end{cases} \end{array}\right.$

8. $\sqrt{f(x)} \cdot g(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) < 0. \end{cases}$

9. $\sqrt[3]{f(x)} \ge \sqrt[3]{g(x)} \Leftrightarrow f(x) \ge g(x)$.

10. $\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} \ge \sqrt[3]{f(x) + g(x)} \Leftrightarrow f(x) \cdot g(x) \cdot \left(f(x) + g(x)\right) \ge 0$.

11. Неравенство $\sqrt[3]{f(x)} \pm \sqrt[3]{g(x)} \ge \textit{либо} \le \sqrt[3]{\varphi(x)}$ решается обобщенным методом интервалов.

Примеры

1). Решить неравенство: $x^{\frac{8}{3}} + x^2 - 4x^{\frac{4}{3}} + x^{\frac{2}{3}} + 1 \ge 0$.

Решение. Очевидная замена $x^{\frac{1}{3}} = t$, $t \ge 0$ (ОДЗ: $x \ge 0$ – см. раздел «ОДЗ и тождественные преобразования») приводит к рациональному неравенству:

$$t^8 + t^6 - 4t^4 + t^2 + 1 \ge 0,\ t \ge 0.$$

Выполним следующие преобразования:

$$t^8 + t^6 - 4t^4 + t^2 + 1 \ge 0 \Leftrightarrow t^8 - 2t^4 + 1 + t^6 - 2t^4 + t^2 \ge 0 \Leftrightarrow \underbrace{\left(t^4 - 1\right)^2}_{\ge 0} + \underbrace{t^2\left(t^2 - 1\right)^2}_{\ge 0} \ge 0.$$

Поскольку слагаемые, стоящие в левой части последнего неравенства, неотрицательны, то это неравенство справедливо при всех $t \ge 0$. Следовательно, возвращаясь к прежней переменной, можем сделать вывод: исходное неравенство верно для всех x из ОДЗ, т. е. $x \ge 0$.

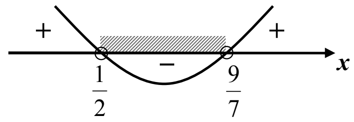
Ответ: $x \ge 0$

2). Решить неравенство: $\sqrt{\frac{x+5}{2x-1}}>2$.

Решение. Воспользуемся рекомендацией, предложенной выше:

$$\sqrt{\frac{x+5}{2x-1}}>2 \Leftrightarrow \frac{x+5}{2x-1}>4 \Leftrightarrow \frac{x+5}{2x-1}-4>0 \Leftrightarrow \frac{-7x+9}{2x-1}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-7x+9)(2x-1)>0 \Leftrightarrow -7\left(x-\frac{9}{7}\right)\cdot 2\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)>0 \Leftrightarrow \left(x-\frac{9}{7}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)<0.$$



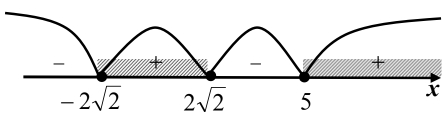
Ответ: $x\in\left(\frac{1}{2};\frac{9}{7}\right)$

3). Решить неравенство: $\left(x^2-4x-\frac{11}{4}\right)\cdot\sqrt{x^3-5x^2-8x+40}\ge 0$.

Решение. Прежде всего запишем ОДЗ:

$$x^3-5x^2-8x+40\ge 0 \Leftrightarrow x^2(x-5)-8(x-5)\ge 0 \Leftrightarrow (x-5)(x^2-8)\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})\ge 0.$$



ОДЗ: $x\in[-2\sqrt{2};2\sqrt{2}]\cup[5;+\infty)$

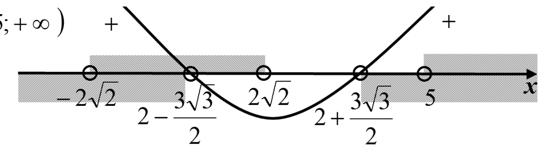
Далее, с учётом ОДЗ исходное неравенство будет равносильно следующей системе:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\left(x-\left(2+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(x-\left(2-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\right)\cdot\sqrt{(x-5)(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})}=0,\\ \left(x-\left(2+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(x-\left(2-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\right)>0,\end{array}\right.\\ x\in[-2\sqrt{2};2\sqrt{2}]\cup[5;+\infty).\end{cases}$$

Откуда:

а) $x\in\left\{\pm 2\sqrt{2};\ 2-\frac{3\sqrt{3}}{2};\ 5\right\}$ (докажите самостоятельно, что $x=2+\frac{3\sqrt{3}}{2}\notin$ ОДЗ;

б) $x\in\left(-2\sqrt{2};\ 2-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\cup(5;+\infty)$



(здесь, как и в предыдущем пункте, самостоятельно докажите, что соответствующие значения будут расположены на координатной прямой именно так, как показано на рисунке выше).

В итоге, объединяя полученные множества решений, нетрудно записать окончательный ответ.

Ответ: $x\in\left[-2\sqrt{2};\ 2-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left\{2\sqrt{2}\right\}\cup[5;+\infty)$

4). Решить неравенство: $\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2}<\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x-4}$.

Решение. Во-первых, нетрудно показать, что ОДЗ: $x\ge\frac{4}{5}$. Во-вторых, перепишем исходное неравенство в виде: $\sqrt{2x-1}-\sqrt{4x-3}<\sqrt{5x-4}-\sqrt{3x-2}$.

Далее, применим изученный ранее метод ($x\in$ОДЗ):

$$\sqrt{2x-1}-\sqrt{4x-3}<\sqrt{5x-4}-\sqrt{3x-2}\Leftrightarrow\frac{(2x-1)-(4x-3)}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{4x-3}}<\frac{(5x-4)-(3x-2)}{\sqrt{5x-4}+\sqrt{3x-2}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{-2(x-1)}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{4x-3}}<\frac{2(x-1)}{\sqrt{5x-4}+\sqrt{3x-2}}.$$

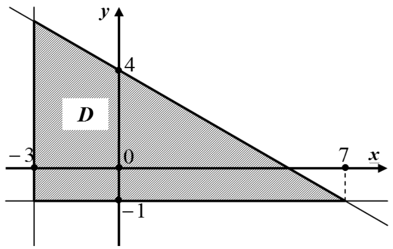
В результате можем записать:

$$\underbrace{(x-1)}_{>0}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{5x-4}+\sqrt{3x-2}}+\frac{1}{\sqrt{2x-1}+\sqrt{4x-3}}\right)}_{>0,\ \forall x\ge\frac{4}{5}}>0.$$

Следовательно, с учётом ОДЗ, $x>1$.

Ответ: $x>1$

5). Доказать, что: $\sqrt{5-x-2y}+\sqrt{x+3}+\sqrt{y+1}\le 5$. При каких x, y выполняется равенство?



Решение. Запишем ОДЗ данного неравенства (см. рисунок):

$$D=\left\{(x;y)\,\middle|\,x\ge -3,\ y\ge -1,\ x+2y\le 5\right\}.$$

Воспользуемся знакомым уже методом, основанным на применении элементов векторной алгебры.

Итак, пусть:

$$\bar a=\left(1,1,\frac{1}{\sqrt2}\right)\Rightarrow|\bar a|=\sqrt{1+1+\frac12}=\sqrt{\frac52};$$

$$\bar b=\left(\sqrt{5-x-2y};\sqrt{x+3};\sqrt{2y+2}\right)\Rightarrow|\bar b|=\sqrt{5-x-2y+x+3+2y+2}=\sqrt{10}$$

(обратите внимание на третьи координаты векторов $\bar a$ и $\bar b$).

Тогда: $\bar a\cdot\bar b=\sqrt{5-x-2y}+\sqrt{x+3}+\sqrt{y+1}$. Далее, так как для скалярного произведения двух векторов $\bar a$ и $\bar b$ справедливо неравенство $|\bar a\cdot\bar b|\le|\bar a|\cdot|\bar b|$, то можем записать:

$$|\bar a\cdot\bar b|\le|\bar a|\cdot|\bar b|\Leftrightarrow\left|\sqrt{5-x-2y}+\sqrt{x+3}+\sqrt{y+1}\right|\le\sqrt{\frac52}\cdot\sqrt{10}=\sqrt{\frac{50}{2}}=\sqrt{25}=5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{5-x-2y}+\sqrt{x+3}+\sqrt{y+1}\le 5,\ \forall(x,y)\in D.$$

Что и требовалось доказать.

Выясним теперь, при каких x, y выполняется равенство. Очевидно, что равенство достигается, когда $(\bar a\parallel\bar b)$. Таким образом, уравнение $\sqrt{5-x-2y}+\sqrt{x+3}+\sqrt{y+1}=5,\ \forall(x,y)\in D$ будет равносильно векторному уравнению: $\bar a\cdot\bar b=|\bar a|\cdot|\bar b|$. Из того, что $(\bar a\parallel\bar b)$, следует:

$$\frac{\sqrt{5-x-2y}}{1}=\frac{\sqrt{x+3}}{1}=\frac{\sqrt{2y+2}}{\frac{1}{\sqrt2}}\Leftrightarrow\sqrt{5-x-2y}=\sqrt{x+3}=\sqrt{4y+4}.$$

В результате можем записать:

$$\begin{cases}x+3=4y+4,\\x+3=5-x-2y,\\\forall(x,y)\in D\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4y+1,\\(4y+1)+3=5-(4y+1)-2y,\\\forall(x,y)\in D\end{cases}\Rightarrow x=1,\ y=0.$$

Другими словами, в точке $(1;0)$ функция $\sqrt{5-x-2y}+\sqrt{x+3}+\sqrt{y+1}$ достигает своего наибольшего значения.

Ответ: $x=1,\ y=0$

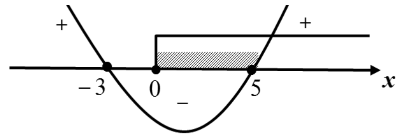
6). Решить неравенство: $4x+2\sqrt{(3x-2)(x+7)}\le 2\sqrt{x+7}+2\sqrt{3x-2}+10$.

Решение. Обозначим $\sqrt{x+7}+\sqrt{3x-2}=t,\ t\ge 0$. Тогда:

$$t^2=x+7+3x-2+2\sqrt{(x+7)(3x-2)}\Rightarrow 4x+2\sqrt{(x+7)(3x-2)}=t^2-5.$$

Следовательно, можем записать:

$$\begin{cases}t^2-5\le 2t+10,\\t\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t^2-2t-15\le 0,\\t\ge 0\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{aligned}&t^2-2t-15=0,\\&t_1=-3,\ t_2=5\end{aligned}\right]\Rightarrow\begin{cases}t\in[-3;5]\\t\ge 0\end{cases}\Rightarrow t\in[0;5]$$

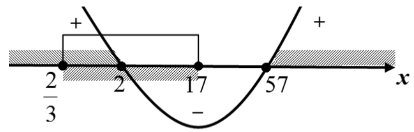


Таким образом, делая обратную замену, получаем:

$$\sqrt{x+7}+\sqrt{3x-2}\le 5\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{3x-2}\le 5-\sqrt{x+7},\\x\ge\frac23\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2\le\left(5-\sqrt{x+7}\right)^2,\\x\ge\frac23\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2\le 32-10\sqrt{x+7}+x,\\x\ge\frac23\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5\sqrt{x+7}\le 17-x,\\x\ge\frac23\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}25(x+7)\le(17-x)^2,\\17-x\ge 0,\\x\ge\frac23\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-59x+114\ge 0,\\x\in\left[\frac23;17\right]\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{aligned}&x^2-59x+114=0,\\&x_1=2,\ x_2=57\end{aligned}\right]\Rightarrow\begin{cases}x\in(-\infty;2]\cup[57;+\infty),\\x\in\left[\frac23;17\right].\end{cases}$$



В результате, нетрудно записать окончательный ответ.

Ответ: $x\in\left[\frac23;2\right]$

Вывод. Как видите, при решении иррациональных неравенств можно использовать те же идеи, что и при решении иррациональных уравнений, но так как простая проверка решений невозможна (ведь решениями неравенств являются чаще всего целые числовые промежутки), то необходимо использовать равносильность. То есть необходимо следить за тем, чтобы при преобразовании неравенств каждый раз получалось неравенство, равносильное исходному.

Некоторые сведения из теории многочленов

С элементарными понятиями теории многочленов вы, конечно же, уже знакомы из школьного курса математики – умеете складывать и перемножать многочлены. Изучение многочленов в школе, как правило, этим и ограничивается. Между тем существует интересная содержательная теория многочленов. Знакомство с началами этой теории весьма полезно, поскольку она находит самое широкое применение не только в курсе высшей математики, с которым вам ещё предстоит познакомиться в студенческие годы, но и в науке и технике в целом.

Однако не помешает лишний раз напомнить основные, на наш взгляд, понятия теории многочленов.

Многочленом[1] степени n от (относительно) переменной x будем называть выражение вида[2]

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

где n – натуральное число; $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ – любые (в частности, действительные) числа $(a_n \neq 0)$, называемые коэффициентами многочлена, при этом a_n – старший коэффициент. Выражения $a_n x^n, a_{n-1}x^{n-1}, \ldots, a_1 x, a_0$ называются членами многочлена. Соответственно, $a_n x^n$ – его старший член, a_0 – свободный член, n – степень многочлена.

Если $n = 0$, то получаем многочлен нулевой степени. Другими словами, многочлены нулевой степени отождествляются с константами.

Многочлен, у которого все коэффициенты равны нулю, называется нулевым, его степень не определена.

Многочлен от одной переменной x будем обозначать так: $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $p(x)$ и т. д. или, для удобства, как $P_n(x)$. Для обозначения степени многочлена используют аббревиатуру deg. Так, например, если $deg\, p(x) = n$, то $p(x)$ является многочленом n-й степени. Если же $deg\, p(x) = 0$, то $p(x)$ многочлен 0-й степени. Многочлен первой степени $P_1(x) = a_1 x + a_0$ называется линейным (или линейным двучленом), многочлен второй степени $P_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ – квадратным (квадратным трёхчленом), а третьей степени $P_3(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ – кубическим.

[1] Из записи многочлена видно, что он состоит из нескольких членов. Отсюда и произошёл термин «многочлен» (много членов). Иногда многочлен называют *полиномом*. Этот термин происходит от греческих слов **πολι** – много и **νομϰ** – член. Часто многочлен записывают в виде $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$, или $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, то есть по степеням возрастания.

[2] Данный вид многочлена называется каноническим. В каноническом виде многочлен полностью определяется упорядоченным набором $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

В связи с условностями в записи многочлена обращаем ваше внимание на такую деталь. Если имеется, например, многочлен $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - x + 2$, то его коэффициенты – это числа $3;\ -2;\ -1;\ 2$. Конечно, можно было бы сказать, что коэффициентами являются числа $0;\ 3;\ -2;\ -1;\ 2$, имея в виду такое представление исходного многочлена: $f(x) = 0x^4 + 3x^3 - 2x^2 - x + 2$. В дальнейшем, ***для определённости***, в записи многочлена будем указывать коэффициенты, начиная с отличного от нуля, в порядке их следования (по убыванию степеней).

Продолжим знакомство с основными понятиями теории многочленов.

I. Два многочлена $f(x)$ и $g(x)$ одинаковых степеней $(deg\, p(x) = deg\, g(x))$ называются равными, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях переменной x и свободные члены (или, короче, равны их соответствующие коэффициенты). В этом случае пишут: $f(x) = g(x)$.

Замечание. Очевидно, что многочлены $f(x)$ и $g(x)$ – это функции от x, а две функции равны тогда и только тогда, когда, во-первых, области определения этих двух функций совпадают, и, во-вторых, для любого числа x_0, принадлежащего общей области определения этих функций, значения функций в точке x_0 совпадают, т. е. верно числовое равенство $f(x_0) = g(x_0)$. Потому можно доказать, что введённое выше определение равенства двух многочленов эквивалентно определению равенства двух функций.

II. Число c называется корнем многочлена $f(x)$, если $f(c) = 0$. Из определения следует, что для нулевого многочлена каждое число является его корнем.

Замечания.

1. Поиск корней многочленов является одной из важнейших задач алгебры. Находить корни линейных двучленов и квадратных трёхчленов вас учат в школе. Что же касается многочленов более высоких степеней, то для них такая задача является весьма трудной и не всегда разрешимой. Заметим, что найти корни многочлена $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$ и решить уравнение $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ – это эквивалентные задачи. Поэтому научившись находить корни многочлена, вы научитесь решать соответствующее уравнение, и наоборот.

2. Между понятиями равенства многочленов и значения многочлена существует тесная связь. Если даны два равных многочлена $f(x)$ и $g(x)$, то их соответствующие коэффициенты равны, а значит, $f(c) = g(c)$ для каждого числа c. Верно и обратное утверждение: если $f(c) = g(c)$ для каждого числа c, то многочлены $f(x)$ и $g(x)$ равны.

III. Многочлены можно складывать, вычитать и умножать по обычным правилам раскрытия скобок и приведения подобных членов. В самом деле, пусть даны два многочлена:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n,$$
$$g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m.$$

Тогда

$$f(x)+g(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\ldots+(a_p+b_p)x^p,$$
$$f(x)-g(x)=(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+\ldots+(a_p-b_p)x^p,$$

где $p=max\{n,m\}$ (наибольшее из чисел n, m), причём считается, что $a_k=0$ при $k>n$ и $b_k=0$ при $k>m$.

Например,

$$\left(2-3x+x^3+2x^4\right)+\left(-1+3x+2x^2+x^3\right)=(2-1)+(-3+3)x+(0+2)x^2+(1+1)x^3+$$
$$+(2+0)x^4=1+2x^2+2x^3+2x^4.$$

Произведение многочленов $f(x)$ и $g(x)$ равно сумме всевозможных произведений uv, где u – любой член многочлена $f(x)$, а v – любой член многочлена $g(x)$. После приведения подобных членов получается многочлен

$$f(x)\cdot g(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_{n+m}x^{n+m},\quad deg(p(x)g(x))=deg\,p(x)+deg\,g(x),$$

где

$$c_kx^k=a_0\cdot b_kx^k+a_1x\cdot b_{k-1}x^{k-1}+a_2x^2\cdot b_{k-2}x^{k-2}+\ldots+a_kx^k\cdot b_0=$$
$$=(a_0\cdot b_k+a_1b_{k-1}+a_2b_{k-2}+\ldots+a_kb_0)x^k,$$

так что

$$c_k=a_0\cdot b_k+a_1b_{k-1}+a_2b_{k-2}+\ldots+a_kb_0.$$

(Здесь, как и выше, считается, что $a_l=0$ при $l>n$ и $b_l=0$ при $l>m$). Например,

$$\left(2-3x+x^3+2x^4\right)\left(-1+3x+2x^2\right)=-2+9x-5x^2-7x^3+x^4+8x^5+4x^6.$$

(В частности, коэффициент c_4 при x^4 может быть получен по формуле для c_k в результате следующих вычислений: $c_4\equiv a_0\cdot b_4+a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1+a_4b_0=$ $=2\cdot 0+(-3)\cdot 0+0\cdot 2+1\cdot 3+2\cdot(-1)=1$).

Отметим, что при умножении двух многочленов, один из которых многочлен нулевой степени, например, $g(x)=b\neq 0$, получим:

$$f(x)\cdot g(x)=\left[\,g(x)=b\,\right]=(a_0b)+(a_1b)x+(a_2b)x^2+\ldots+(a_nb)x^n.$$

В результате суммы, разности и произведения многочленов снова получается многочлен. Указанные операции обладают известными вам свойствами:

$$f(x)+g(x)=g(x)+f(x),$$
$$f(x)+(g(x)+h(x))=(f(x)+g(x))+h(x),$$
$$f(x)g(x)=g(x)f(x),$$
$$f(x)(g(x)h(x))=(f(x)g(x))h(x),$$
$$f(x)(g(x)+h(x))=f(x)g(x)+f(x)h(x).$$

Напомним, что степень произведения двух ненулевых многочленов равна сумме степеней сомножителей, то есть: $deg(p(x)\cdot g(x))=deg\,p(x)+deg\,g(x)$. Кроме того, старший член (коэффициент) произведения двух ненулевых многочленов равен произведению старших членов (коэффициентов) сомножителей. Свободный член произведения двух ненулевых многочленов равен произведению свободных членов сомножителей.

IV. Делимость многочленов

Для многочленов можно ввести операцию, аналогичную операции деления для целых чисел.

Говорят, что многочлен $f(x)$ делится на многочлен $g(x)$, $g(x)\neq 0$, если существует такой многочлен $s(x)$, что $f(x)=g(x)s(x)$. В этом случае $g(x)$ называют делителем многочлена $f(x)$, $s(x)$ – частным при делении $f(x)$ на $g(x)$. Например, многочлен $f(x)=x^3-1$ делится на многочлен $g(x)=x^2+x+1$, т. к. $f(x)=g(x)(x-1)$. Здесь частное $s(x)=x-1$.

Операция деления многочленов, как и операция деления целых чисел, не всегда выполнима. Например, многочлен $f(x)=x^2+2$ не делится на многочлен $g(x)=x^3+1$. В самом деле, если предположить, что $f(x)$ делится на $g(x)$, то существует такой многочлен $s(x)$, что $f(x)=g(x)s(x)$. Тогда $deg\,f(x)=deg\,g(x)+deg\,s(x)$, то есть $2=3+deg\,s(x)$. Но последнее равенство невозможно, т. к. $deg\,s(x)\geq 0$. Как легко заметить, ненулевой многочлен меньшей степени не делится на многочлен большей степени. Кстати, опять получили аналогию с целыми числами. Ведь целое число, отличное от нуля, с меньшим модулем не делится на целое число с бóльшим модулем.

В дальнейшем очень часто вместо фразы «многочлен $f(x)$ делится на многочлен $g(x)$» будем писать $f(x)\,\vdots\, g(x)$.

Укажем теперь некоторые свойства делимости многочленов:

а) каждый многочлен $f(x)$ делится на любой многочлен нулевой степени;
б) если $f(x)\,\vdots\, g(x)$, то $(h(x)f(x))\,\vdots\, g(x)$ для любого многочлена $h(x)$;
в) если $f(x)\,\vdots\, g(x)$ и $h(x)\,\vdots\, g(x)$, то $(f(x)\pm h(x))\,\vdots\, g(x)$;
г) если $f(x)\,\vdots\, g(x)$, то либо $f(x)=0$, либо $deg\,p(x)\geq deg\,g(x)$;

д) если $f(x) \vdots g(x)$, то $f(x) \vdots cg(x)$ для любого числа $c \neq 0$;
е) если $cf(x) \vdots g(x)$, где c – число, отличное от нуля, то $f(x) \vdots g(x)$.

Мы привели далеко не все свойства делимости многочленов, а лишь те, которые будут использованы в дальнейшем.

Довольно часто возникает необходимость выяснить, делится ли данный многочлен $f(x)$ на многочлен $g(x)$. Существует несколько способов решения этой задачи. Одним из них является *метод неопределённых коэффициентов*. Поясним суть этого метода на примере.

Пример. Выясним, делится ли многочлен $f(x) = 3x^4 + 15x^3 - 30x - 12$ на многочлен $g(x) = x^2 + 5x + 2$.

Решение. Пусть $f(x) \vdots g(x)$. Тогда существует такой многочлен $s(x)$, что $f(x) = g(x)s(x)$. Так как $\deg f(x) = \deg g(x) + \deg s(x)$, где $\deg f(x) = 4$, $\deg g(x) = 2$, то $\deg s(x) = 2$. Значит, $s(x) = ax^2 + bx + c$ (коэффициенты a, b, c не определены. Отсюда и происходит название рассматриваемого метода). Таким образом, имеем:

$$3x^4 + 15x^3 - 30x - 12 = (x^2 + 5x + 2)(ax^2 + bx + c).$$

Перемножим многочлены в правой части последнего равенства:

$$3x^4 + 15x^3 - 30x - 12 = ax^4 + (5a + b)x^3 + (2a + 5b + c)x^2 + (2b + 5c)x + 2c.$$

Используя далее определение равенства двух многочленов, получаем следующую систему уравнений с неизвестными a, b, c:

$$\begin{cases} a = 3, \\ 5a + b = 15, \\ 2a + 5b + c = 0, \\ 2b + 5c = -30, \\ 2c = -12. \end{cases}$$

Легко находим решение этой системы: $a = 3,\ b = 0,\ c = -6$, и значит, $s(x) = 3x^2 - 6$.

Таким образом, предположив, что $f(x) \vdots g(x)$, мы получили равенство $f(x) = g(x)(3x^2 - 6)$. Осталось непосредственным преобразованием правой части убедиться, что оно верно. А так как это равенство действительно верно, то $f(x) \vdots g(x)$.

Можно рассмотреть и несколько иную задачу, при решении которой также воспользуемся методом неопределённых коэффициентов. Пусть $f(x) = x^4 + px^2 + q$, $g(x) = x^2 + x + 1$. При каких p и q многочлен $f(x)$ делится на $g(x)$?

Здесь мы тоже не можем сразу дать ответ, но опять-таки предположим, что p и q такие, что $f(x) \vdots g(x)$. Тогда $f(x) = g(x)s(x)$ для некоторого многочлена $s(x)$. Точно так же, как и при решении предыдущего примера, устанавливаем, что $s(x) = ax^2 + bx + c$. Тогда

$$x^4 + px^2 + q = (x^2 + x + 1)(ax^2 + bx + c)$$

или

$$x^4 + px^2 + q = ax^4 + (a + b)x^3 + (a + b + c)x^2 + (b + c)x + c.$$

Отсюда получаем систему:

$$\begin{cases} a = 1, \\ a + b = 0, \\ a + b + c = p, \\ b + c = 0, \\ c = q. \end{cases} \Rightarrow a = 1,\ b = -1,\ c = 1,\ p = q = 1.$$

Таким образом, если $f(x) \vdots g(x)$, то $p = q = 1$. Нетрудно убедиться и в обратном, то есть если $p = q = 1$, то $f(x) \vdots g(x)$. Подставив $p = q = 1$ и найденные значения a, b, c, получим:

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1).$$

Перемножив многочлены в правой части этого равенства, видим, что оно верно. Значит, $f(x) \vdots g(x)$. Следовательно, $f(x)$ делится на $g(x)$ тогда и только тогда, когда $p = q = 1$.

Кстати, из школьного курса известно понятие разложения многочлена на множители[1]. Оказывается, метод неопределённых коэффициентов можно использовать и для решения задач такого типа.

Например, пусть требуется разложить многочлен $f(x) = x^3 - 4x^2 + 2x + 1$ на множители с целыми коэффициентами. Однако мы не знаем, можно это сделать или нет, но, как и ранее, предполагаем, что подобное разложение возможно. Значит, существуют многочлены, например, $g(x)$ и $h(x)$ с целыми коэффициентами, такие, что $\deg g(x) > 0$, $\deg h(x) > 0$ и $f(x) = g(x)h(x)$. Тогда $\deg f(x) = \deg g(x) + \deg h(x)$ и, так как $\deg f(x) = 3$, то возможны случаи: $\deg g(x) = 1$, $\deg h(x) = 2$ или $\deg g(x) = 2$, $\deg h(x) = 1$. Заметим, что между двумя этими случаями нет принципиальной разницы. Поэтому, без ограничения общности рассуждений, будем считать, что $\deg g(x) = 1$ и $\deg h(x) = 2$.

[1] Напомним, что разложить многочлен на множители – это значит представить его в виде произведения двух или более многочленов ненулевой степени.

Следовательно, многочлены $g(x)$ и $h(x)$ имеют вид: $g(x) = mx + n$, $h(x) = ax^2 + bx + c$, где m, n, a, b, c – целые числа. Таким образом,

$$x^3 - 4x^2 + 2x + 1 = (mx + n)(ax^2 + bx + c)$$

или

$$x^3 - 4x^2 + 2x + 1 = amx^3 + (an + bm)x^2 + (bn + cm)x + cn.$$

Отсюда следует:

$$\begin{cases} am = 1, \\ an + bm = -4, \\ bn + cm = 2, \\ cn = 1. \end{cases}$$

Решив последнюю систему в целых числах[1], можем записать:

$$x^3 - 4x^2 + 2x + 1 = (x - 1)(x^2 - 3x - 1).$$

Замечание. Так как заранее не было известно, можно ли данный многочлен $f(x)$ разложить на множители с целыми коэффициентами, то решение задачи начали с предположения. Теперь, для того чтобы убедиться в том, что последнее равенство верно, нужно перемножить многочлены в правой его части и посмотреть, равно ли полученное произведение $f(x)$.

V. Деление многочленов с остатком

Понятие делимости одного многочлена на другой мы ввели аналогично понятию делимости целых чисел. Более того, если вы внимательно проанализируете свойства этой операции для многочленов и для чисел, то заметите, что они одинаковы. В частности, и в том, и в другом случае операция деления не всегда выполнима. Но для целых чисел возможно деление с остатком, то есть для $\left(\forall a, b\, (b \neq 0) \in Z\right)\left(\exists s, r \in Z\right) \Rightarrow \left(a = bs + r,\ 0 \le r < |b|\right)$. Оказывается, что аналогичное понятие можно ввести и для многочленов.

Разделить с остатком многочлен $f(x)$ на ненулевой многочлен $g(x)$ – это значит найти два таких многочлена $s(x)$ и $r(x)$, что $f(x) = g(x)s(x) + r(x)$ (или, что то же самое, представить $f(x)$ в виде $g(x)s(x) + r(x)$), где либо $r(x) = 0$, либо $deg\, r(x) < deg\, g(x)$.

Так же, как и для целых чисел, $s(x)$ называется *неполным частным*, а $r(x)$ – *остатком* при делении $f(x)$ на $g(x)$. Если $r(x) = 0$, то говорят, что $f(x)$ делится на $g(x)$ или $g(x)$ является делителем $f(x)$.

[1] Например, из первого уравнения последней системы следует, что $a = m = 1$ или $a = m = -1$.

Например, если $f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = x^2 + 3x + 1$, то, как легко проверить, верно равенство $f(x) = g(x)(x - 3) + (8x + 2)$. Так как $deg(8x + 2) < deg\, g(x)$, то последнее равенство означает, что мы разделили $f(x)$ на $g(x)$ с остатком. При этом $s(x) = x - 3$ – неполное частное, $r(x) = 8x + 2$ – остаток.

Возникает вопрос: всегда ли возможно деление многочленов с остатком? Другими словами, для любых ли многочленов $f(x)$ и $g(x)$, $g(x) \neq 0$ можно найти такие многочлены $s(x)$ и $r(x)$, которые удовлетворяют условиям нашего определения? Если да, то однозначно ли они определяются? То есть, могут ли для $f(x)$ и $g(x)$, $g(x) \neq 0$ существовать другие многочлены $s_1(x)$ и $r_1(x)$, удовлетворяющие условиям определения? Ответы на эти вопросы даёт следующее утверждение: ***для любой пары многочленов $f(x)$ и $g(x)$, $g(x) \neq 0$, деление $f(x)$ на $g(x)$ с остатком возможно, причём однозначно***.

Укажем способ (алгоритм) нахождения неполного частного и остатка при делении $f(x)$ на $g(x)$, то есть алгоритм деления с остатком:

Шаг 1. Разделить старший член многочлена $f(x)$ на старший член многочлена $g(x)$ (результат записать, так как это член неполного частного);

Шаг 2. Умножить $g(x)$ на результат шага 1;

Шаг 3. Вычесть из $f(x)$ результат шага 2;

Шаг 4. Проверить, имеет ли результат шага 3 степень, меньшую, чем степень многочлена $g(x)$, или он нулевой. Тогда: **а)** если «**ДА**», то он является остатком, и вычисления прекращаются; **б)** если «**НЕТ**», то перейти к шагу 1, рассматривая результат шага 3 как новый многочлен $f(x)$.

Деление многочленов с остатком обычно выполняют по схеме деления «уголком». Рассмотрим пример деления по этой схеме для многочленов $f(x) = 2x^4 + 3x^2 + 2$ и $g(x) = x^2 - x + 1$:

$$\begin{array}{lrl|l}
f(x) \to & 2x^4 \qquad\quad + 3x^2 \qquad + 2 & & x^2 - x + 1 \leftarrow g(x) \\
h_1(x)g(x) \to & -\ \underline{2x^4 - 2x^3 + 2x^2 \qquad\quad} & & \overline{2x^2 + 2x + 3} \leftarrow s(x) \\
f_1(x) \to & 2x^3 + x^2 \qquad + 2 & & \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\
 & & & h_1(x)\, h_2(x)\, h_3(x) \\
h_2(x)g(x) \to & -\ \underline{2x^3 - 2x^2 + 2x} & & \\
f_2(x) \to & 3x^2 - 2x + 2 & & \\
h_3(x)g(x) \to & -\ \underline{3x^2 - 3x + 3} & & \\
f_3(x) \to & x - 1 & & \leftarrow r(x)
\end{array}$$

Получили неполное частное $s(x) = 2x^2 + 2x + 3$ и остаток $r(x) = x - 1$, то есть $f(x) = g(x)(2x^2 + 2x + 3) + x - 1$.

При делении «уголком» многочлена $f(x)$ на многочлен $g(x)$ желательно придерживаться следующих рекомендаций:

а) В записи многочлена $f(x)$ оставлять место для членов с нулевыми коэффициентами. Так, в примере, рассмотренном выше, при записи $f(x)$ мы оставили место для членов $0 \cdot x^3$, $0 \cdot x$;

б) При записи многочлена $h_{k+1}(x)g(x)$ под многочленом $f_k(x)$ подобные члены записывать друг под другом.

Выполнение этих рекомендаций несколько облегчит вычисления.

Нетрудно заметить взаимосвязь между делимостью многочленов и делением их с остатком. Очевидно, что многочлен $f(x)$ делится на многочлен $g(x)$ тогда и только тогда, когда остаток при делении $f(x)$ на $g(x)$ равен нулю. Теперь, если нужно выяснить, делится ли многочлен $f(x)$ на $g(x)$, то достаточно разделить $f(x)$ на $g(x)$ «уголком» и посмотреть, каким будет остаток.

Сделаем ещё несколько важных замечаний.

– если $f(x)$ и $g(x)$, $g(x) \neq 0$ – многочлены с рациональными коэффициентами, то неполное частное и остаток при делении $f(x)$ на $g(x)$ – тоже многочлены с рациональными коэффициентами;

– если $f(x)$ и $g(x)$ – многочлены с целыми коэффициентами и старший коэффициент многочлена $g(x)$ равен 1, то неполное частное и остаток при делении $f(x)$ на $g(x)$ – тоже многочлены с целыми коэффициентами;

– если $\deg f(x) < \deg g(x)$ или $f(x) = 0$, то неполное частное при делении $f(x)$ на $g(x)$ равно 0. Если же $\deg f(x) \geq \deg g(x)$, то старший член неполного частного равен $\dfrac{a_n}{b_m} x^{n-m}$, где a_n, b_m – старшие коэффициенты, n, m – степени многочленов $f(x)$ и $g(x)$ соответственно[1].

VI. Теорема Безу

Пусть $f(x)$ – произвольный многочлен. Разделим его с остатком на линейный двучлен $(x-c)$. Так как степень этого двучлена равна 1, то остаток либо будет равен нулю, либо имеет степень 0. И в том, и в другом случае остаток – это число, которое мы обозначим через r. Следовательно, имеем

$$f(x) = (x-c)s(x) + r.$$

Так как многочлены, стоящие в левой и правой частях последнего равенства, равны, то они принимают равные значения при одних и тех же значениях переменной x, в частности при $x = c$. Тогда

$$f(c) = (c-c)s(c) + r \Rightarrow f(c) = r.$$

[1] Степень неполного частного при делении $f(x)$ на $g(x)$ равна $\deg f(x) - \deg g(x)$.

Итак, доказано важное утверждение, которое называется теоремой Безу: *остаток при делении многочлена $f(x)$ на линейный двучлен $(x-c)$ равен $f(c)$.*

Например, остаток r при делении многочлена $f(x) = x^{2013} - 2x^{985} + 5$ на $(x-1)$, по теореме Безу, равен $r = f(1) = 4$, а при делении этого же многочлена $f(x)$ на $(x+1) = (x-(-1))$ равен $r = f(-1) = 6$.

Из теоремы Безу следует: *число c является корнем многочлена $f(x)$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ делится на $(x-c)$.*

Теорема Безу и следствие из неё играют важную роль и в самой теории многочленов, и при решении разнообразных задач.

Пример.

Пусть требуется решить уравнение $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$. Эта задача, очевидно, равносильна задаче нахождения корней многочлена $f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$. Проверкой нетрудно установить, что $x = 1$ является корнем этого многочлена. Значит, $f(x)$ делится на $(x-1)$, то есть $f(x) = (x-1)(2x^2 - 5x + 2)$, и исходное уравнение принимает вид $(x-1)(2x^2 - 5x + 2) = 0$. Следовательно: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1/2$.

Ответ: $x = \{1, 2, 1/2\}$

Заметим, что если известен один из корней уравнения n-й степени, то с помощью теоремы Безу решение этого уравнения можно свести к той же задаче, но уже для уравнения $(n-1)$-й степени.

VII. Схема Горнера

Теорема Безу позволяет довольно просто находить остаток при делении многочлена $f(x)$ на линейный двучлен $(x-c)$. Неполное частное, как вы видели, можно найти, выполнив деление «уголком». Оказывается, неполное частное при делении на $(x-c)$ можно найти и с помощью более простого правила, называемого схемой Горнера[1].

Пусть $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ – многочлен n-й степени. При делении его на $(x-c)$ мы получим неполное частное $s(x)$ и остаток r, т. е. $f(x) = (x-c)s(x) + r$. Так как $\deg f(x) = n$, а $\deg(x-c) = 1$, то $\deg s(x) = n-1$. Значит:

$$s(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0, \; b_{n-1} \neq 0.$$

Таким образом, можем записать следующее равенство:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = (x-c)(b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \ldots + b_1 x + b_0) + r.$$

[1] Схема Горнера является частным случаем метода неопределённых коэффициентов и, кроме того, позволяет также найти остаток при делении.

Многочлены, стоящие в левой и правой частях последнего равенства, равны, а значит, равны и их соответствующие коэффициенты. Приравняем их, раскрыв предварительно скобки и приведя подобные члены в правой части данного равенства. Получим:

$$\begin{cases} a_n = b_{n-1}, \\ a_{n-1} = b_{n-2} - cb_{n-1}, \\ a_{n-2} = b_{n-3} - cb_{n-2}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_2 = b_1 - cb_2, \\ a_1 = b_0 - cb_1, \\ a_0 = r - cb_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_{n-1} = a_n, \\ b_{n-2} = cb_{n-1} + a_{n-1}, \\ b_{n-3} = cb_{n-2} + a_{n-2}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_1 = cb_2 + a_2, \\ b_0 = cb_1 + a_1, \\ r = cb_0 + a_0. \end{cases}$$

Мы нашли формулы, по которым можно вычислять коэффициенты неполного частного $s(x)$ и остаток r. При этом вычисления оформляются в виде следующей таблицы[1]:

коэффициенты $f(x)$

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_1	a_0
c	b_{n-1}	$b_{n-2} = cb_{n-1} + a_{n-1}$	$b_{n-3} = cb_{n-2} + a_{n-2}$		$b_0 = cb_1 + a_1$	$r = cb_0 + a_0$

коэффициенты $s(x)$ остаток r

Как видите:

- ***в первую строку*** этой таблицы записываем подряд все коэффициенты многочлена $f(x)$, оставляя первую клеточку этой (первой) строки свободной;
- ***во второй строке в первой клеточке*** записываем число c;
- ***во второй клеточке второй строки*** записываем коэффициент b_{n-1}, который, как мы установили, равен a_n;
- ***коэффициенты, стоящие в каждой последующей клеточке второй строки***[2], вычисляем по такому правилу: *число* c *умножается на число, стоящее в предыдущей клеточке этой (второй) строки, и к полученному результату прибавляется число, стоящее над заполняемой клеточкой*. Так, чтобы заполнить, например, пятую клеточку второй строки, нужно число c умножить на число, находящееся в четвёртой клеточке этой (второй) строки и к полученному результату прибавить число, стоящее над пятой клеточкой, то есть число, стоящее в первой строке в пятой клеточке.

[1] Эта таблица и называется схемой Горнера.
[2] Коэффициенты неполного частного $s(x)$ и остаток r.

Примеры

1). Разделим многочлен $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 3x - 1$ на $x - 2$ с остатком, используя схему Горнера. При заполнении первой строки таблицы нельзя забывать о нулевых коэффициентах исходного многочлена. Так, коэффициенты многочлена $f(x)$ – это числа 3, 0, -5, 3, -1. Не забывайте также, что степень неполного частного, как мы не раз отмечали, на единицу меньше степени многочлена $f(x)$. Итак, выполняем деление по схеме Горнера:

коэффициенты $f(x)$

	3	0	-5	3	-1
2	3	6	7	17	33

коэффициенты $s(x)$ остаток r

Получили неполное частное $s(x) = 3x^3 + 6x^2 + 7x + 17$ и остаток $r = 33$. Значит, $f(x) = (x-2)(3x^3 + 6x^2 + 7x + 17) + 33$.

Заметим, что одновременно мы вычислили значение многочлена $f(2) = 33$.

2). Найдём значение многочлена $f(x) = x^4 + 0{,}39x^3 - 0{,}61x^2 + 2x - 0{,}22$ при $x = 0{,}61$.

Если исходный многочлен переписать в виде

$$f(x) = (((x + 0{,}39)x - 0{,}61)x + 2)x - 0{,}22,$$

то процесс вычисления его значения при $x = 0{,}61$ можно провести устно. Причём, этот способ вычисления значения многочлена как раз и будет ничем иным, как схемой Горнера: $f(x) = (x - 0{,}61)s(x) + r \Rightarrow [x = 0{,}61] \Rightarrow f(0{,}61) = r$. То есть:

коэффициенты $f(x)$

	1	0,39	$-0{,}61$	2	$-0{,}22$
0,61	1	1	0	2	1

коэффициенты $s(x)$ остаток r

Ответ: $f(0{,}61) = 1$

VIII. Наибольший общий делитель

Как уже не раз отмечалось, множество многочленов напоминает множество целых чисел в том смысле, что над многочленами можно производить операции, аналогичные операциям над целыми числами, и свойства этих операций одинаковы. По указанной аналогии, как и для целых чисел, так и для многочленов, существует понятие общего делителя.

Общим делителем многочленов $f(x)$ *и* $g(x)$ *называется такой многочлен* $h(x)$, *что* $f(x) \vdots h(x)$ *и* $g(x) \vdots h(x)$.

Нетрудно убедится в том, что, например, многочлен $h(x)=x-1$ является общим делителем многочленов $f(x)=x^2-1$ и $g(x)=x^3-1$.

Далее, для целых чисел существует понятие наибольшего общего делителя, а именно, наибольший общий делитель двух целых чисел – это их самый большой по величине общий делитель. Для многочленов же такое определение не годится, так как сравнивать их по величине не имеет смысла (для них не существует понятия «больше», «меньше»). Можем лишь сравнивать степени многочленов. Поэтому для многочленов справедливо следующее определение: *наибольшим общим делителем* (НОД) *двух многочленов называется их общий делитель самой большой степени*[1].

Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ называются взаимно простыми, если их НОД имеет нулевую степень.

Отметим, что если $f(x)$ и $g(x)$ – нулевые многочлены, то для них НОД не существует. Действительно, если $f(x)$ и $g(x)$ – нулевые многочлены, то они делятся на любой многочлен, т. е. все многочлены являются их общими делителями. А среди всех многочленов выбрать многочлен наибольшей степени невозможно.

Если же $f(x)$ и $g(x)$ – ненулевые многочлены (хотя бы один из них), то НОД в этом случае существует и определяется с точностью до ненулевого множителя, т. е. если $d(x)$ – НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$, то $cd(x)$, $\forall c = const \neq 0$ тоже НОД этих многочленов. В самом деле, если $d(x)$ – НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$, то $2d(x)$, $3d(x)$, $4d(x)$, … также является НОД этих многочленов. Следовательно, когда требуется найти НОД многочленов, то подразумевается, что необходимо найти хотя бы один из них.

В случае взаимно простых многочленов принято считать, что $\text{НОД}(f(x), g(x)) = 1$.

Итак, вы познакомились с понятием НОД двух многочленов, выяснили, когда он существует. Однако для практики важен способ его нахождения.

[1] Есть и другое определение НОД многочленов: *общий делитель* $h(x)$ *многочленов* $f(x)$ *и* $g(x)$ *называется наибольшим общим делителем, если любой общий делитель многочленов* $f(x)$ *и* $g(x)$ *является также и делителем многочлена* $h(x)$.

Мы уже не раз подчёркивали сходство многочленов и целых чисел. Оказывается, что это сходство распространяется и на задачу нахождения НОД. Из школьного курса математики вам известен алгоритм, который позволяет найти НОД любых заданных целых числе, – это алгоритм Евклида (или Эвклида).

Немного истории:

Алгоритм – это всякая система вычислений, выполняемых по строго определённым правилам, которая после какого-либо числа шагов заведомо приводит к решению поставленной задачи (А. Н. Колмогоров).

Слово «алгоритм» происходит от имени великого среднеазиатского учёного VIII–IX вв. Аль-Хорезми. Из математических работ Аль-Хорезми до нас дошли только две – алгебраическая (от названия этой книги родилось слово «алгебра») и арифметическая. Вторая книга долгое время считалась потерянной, но в 1857 г. в библиотеке Кембриджского университета был найден её перевод на латинский язык. В ней описаны четыре правила арифметических действий, практически те же, что используются и сейчас. Первые строки этой книги были переведены так: «Сказал Алгоритми. Воздадим должную хвалу Богу, нашему вождю и защитнику». Так имя Аль-Хорезми перешло в Алгоритми, откуда и появилось слово «алгоритм». Термин алгоритм употреблялся для обозначения четырёх арифметических операций, именно в таком значении он и вошёл в некоторые европейские языки. Например, в авторитетном словаре английского языка *Webster's New World Dictionary*, изданном в 1957 г., слово «алгоритм» снабжено пометкой «устаревшее» и объясняется как выполнение арифметических действий с помощью арабских цифр.

Слово «алгоритм» вновь стало употребительным с появлением электронных вычислительных машин для обозначения совокупности действий, составляющих некоторый процесс. Здесь подразумевается не только процесс решения некоторой математической задачи, но и кулинарный рецепт, и инструкция, например, по использованию стиральной машины, и многие другие последовательные правила, не имеющие отношения к математике, – все эти правила являются алгоритмами. Слово «алгоритм» в наши дни известно каждому, оно настолько уверенно шагнуло в разговорную речь, что сейчас нередко на страницах газет, в выступлениях политиков встречаются выражения «алгоритм поведения», «алгоритм успеха» и т. д.

Алгоритм Евклида – это алгоритм нахождения наибольшего общего делителя (НОД) пары целых чисел. Данный алгоритм является одним из первых алгоритмов в истории (первое его описание встречается в «Началах» Евклида около 300 лет до н. э.) и использовался ещё в Древней Греции. В изначальном виде он был предложен только для натуральных чисел и назывался "взаимным вычитанием", так как заключался в поочерёдном вычитании меньшего числа из большего, пока одно из них не станет равным нулю. Однако в XIX веке он был обобщён на другие типы чисел, такие как целые числа Гаусса и полиномы от одной переменной. Это привело к появлению в современной общей алгебре такого понятия, как евклидово кольцо. Позже алгоритм Евклида также был обобщён на другие математические структуры, такие как узлы и многомерные полиномы.

Напомним этот алгоритм. Но прежде всего вспомним понятие остатка (r) от деления целого числа (a) на целое число (b).

Итак, пусть a и b – натуральные числа. Тогда существует единственная пара натуральных чисел q и r таких, что $a = qb + r,\ 0 \le r < b$. При этом q называют частным, r – остатком от деления a на b. Слово «единственная» означает, что каким бы алгоритмом при делении a на b мы ни пользовались, числа q и r будут одними и теми же.

Заметим, что если a и b – целые числа $(b \ne 0)$[1], то принято всегда считать остаток r положительным или нулём.

Например:
– если $a = -5,\ b = 3 \Rightarrow -5 = -2 \cdot 3 + 1$, то есть $q = -2,\ r = 1$;
– если $a = 5,\ b = -3 \Rightarrow 5 = -1 \cdot (-3) + 2$, то есть $q = -1,\ r = 2$.

Если $r = 0$, то говорят, что число a нацело делится на число b (или делится без остатка, или a кратно b). Таким образом, деление целых чисел без остатка является частным случаем деления целых чисел с остатком. Число b в этом случае называют делителем числа a. *Тривиальными делителями* целого числа $a \ne 0$ называются числа (± 1) и $(\pm a)$. Положительный делитель числа a, отличный от a, называется *собственным делителем* a.

Пусть теперь a и b – целые числа, из которых хотя бы одно отлично от нуля. Тогда *наибольшим общим делителем чисел* a и b (НОД$(a;b)$) называется наибольшее натуральное число d, являющееся делителем как числа a, так и числа b (a и b кратны d).

Например, нетрудно убедиться в том, что НОД(6;15)=3, НОД(−6;15)=3, НОД(−6; 0)=6.

Отметим, если НОД$(a;b)=1$, то числа a и b называются взаимно простыми.

Понятие НОД обобщается на произвольный конечный набор целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$:

$$d = \text{НОД}(a_1, a_2, \ldots, a_k) \overset{def}{=} \max\left\{ d_i \in N \mid a_i \text{ делится на } d_i,\ i = 1, 2, \ldots, k \right\}.$$

Например, НОД(6;10;15)=1, т. е. числа 6, 10, 15 взаимно простые.

Наименьшим общим кратным двух целых, отличных от нуля, чисел a и b (НОК$(a;b)$), называется наименьшее натуральное число, кратное a и b. Как и в случае НОД, понятие НОК можно обобщить на произвольный конечный набор целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$:

$$\text{НОК}(a_1, a_2, \ldots, a_k) \overset{def}{=} \min\left\{ d_i \in N \mid d_i \text{ делится на } a_i,\ i = 1, 2, \ldots, k \right\}.$$

[1] Для $b = 0$ деление с остатком не определяют, так же как и не определяют деление целого числа на нуль без остатка.

Например, очевидно, НОК(6;15)=30.

Заметим, что уже само определение НОД$(a;b), \forall a, b \in N$ подсказывает следующий алгоритм его нахождения:
– находим все положительные делители числа a и все положительные делители числа b;
– выбираем все числа, входящие одновременно в оба множества делителей;
– среди выбранных чисел находим наибольшее, которое и будет НОД$(a;b)$.

Например:

$$\text{НОД}(6;15) = ?\left|\begin{array}{l} \text{делители числа } 6: \{1, 2, 3, 6\} \\ \text{делители числа } 15: \{1, 3, 5, 15\} \end{array}\right| \begin{array}{c} \text{общие делители} \\ \{1, 3\} \end{array} \Bigg| \Rightarrow \text{НОД}(6;15) = 3.$$

Эта схема достаточно проста при небольших a и b, но чрезвычайно неэффективна при больших a и b. К сожалению, неизвестно ни одного простого алгоритма разложения чисел на множители.

К счастью, НОД можно подсчитать эффективным способом, не используя процедуру разложения. И таким способом как раз и является алгоритм Евклида.

Алгоритм Евклида требует выполнения нескольких делений с остатком и состоит, например при вычислении НОД$(a;b), \forall a, b \in N, a > b$, в следующем:

Шаг 1. Разделим a на b и обозначим остаток от деления через r_1. Тогда либо $r_1 = 0$, либо $r_1 \ne 0$. Если $r_1 = 0$, то НОД$(a;b) = b$. Если же $r_1 \ne 0$, то переходим к шагу 2;

Шаг 2. Разделим b на r_1 и обозначим остаток от деления через r_2. Тогда либо $r_2 = 0$, либо $r_2 \ne 0$. Если $r_2 = 0$, то НОД$(a;b) = r_1$. Если же $r_2 \ne 0$, то переходим к шагу 3;

Шаг 3. Разделим r_1 на r_2 и обозначим остаток от деления через r_3. Тогда либо $r_3 = 0$, либо $r_3 \ne 0$. Если $r_3 = 0$, НОД$(a;b) = r_2$. Если же $r_3 \ne 0$, то переходим к шагу 4;

Шаг 4. Разделим r_2 на r_3 с остатком и т. д. – последовательно делим предыдущий остаток на последующий.

Процесс такого деления продолжается до тех пор, пока не получим остаток, равный нулю. Например, при делении r_{k-2} на r_{k-1} получили, что $r_k = 0$. Тогда выполнение алгоритма прекращается (так как делить с остатком на нуль нельзя) и r_{k-1} – искомое значение, т. е. НОД$(a;b) = r_{k-1}$.

Пример. Найти НОД$(267;213)$.

Решение. Выполним деление с остатком, то есть, согласно алгоритму Евклида, последовательно выполним следующие действия:

Шаг 1 ***Шаг 2*** ***Шаг 3*** ***Шаг 4***

$$\begin{array}{r|l} 267 & 213 \\ \cline{2-2} -213 & 1 \\ \hline 54 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 213 & 54 \\ \cline{2-2} -162 & 3 \\ \hline 51 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 54 & 51 \\ \cline{2-2} -51 & 1 \\ \hline 3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 51 & 3 \\ \cline{2-2} -3 & 17 \\ \hline 21 & \\ -21 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\underbrace{(267:213 \Rightarrow r_1 = 54 \neq 0)}_{Шаг\,1} \to \underbrace{(213:54 \Rightarrow r_2 = 51 \neq 0)}_{Шаг\,2} \to \underbrace{(54:51 \Rightarrow r_3 = 3 \neq 0)}_{Шаг\,3} \to$$
$$\to \underbrace{(51:3 \Rightarrow r_4 = 0)}_{Шаг\,4} \Rightarrow \text{НОД}(267;213) = 3$$

(Как видим, во-первых, делитель каждый раз делим на получившийся остаток до тех пор, пока остаток в результате этого действия не станет равным нулю. Во-вторых, наименьший остаток, не равный нулю, и будет искомым НОД.)

Кроме того, нетрудно записать цепочку следующих равенств:

$$\text{НОД}(267;213) = \text{НОД}(213;54) = \text{НОД}(54;51) = \text{НОД}(51;3) = \text{НОД}(3;0) = 3.$$

Итак, алгоритм Евклида позволил нам быстро найти НОД.

Ответ: НОД$(267;213) = 3$

В более современной интерпретации алготитм Евклида выглядит следующим образом:

Ввод: натуральные числа a и b, $a \geq b$;

Вывод: наибольший общий делитель чисел a и b;

Шаг 1. Положить $A = a$ и $R = B = b$;

Шаг 2. Заменить значение R остатком от деления A на B и перейти к шагу 3;

Шаг 3. Если $R = 0$, то сообщить: «наибольший общий делитель чисел a и b равен B», и остановиться; в противном случае перейти к шагу 4;

Шаг 4. Заменить значение A на значение B, значение B на значение R и возвратиться к шагу 2.

Для удобства всю необходимую информацию рекомендуем свести в следующую таблицу:

остатки	частные
a	*
b	*
r_1	q_1
r_2	q_2
r_3	q_3
⋮	⋮
r_{n-2}	q_{n-2}
r_{n-1}	q_{n-1}

НОД$(267;213) = ?$

остатки	частные
267	*
213	*
54	1
51	3
3	1
0	17

НОД$(267;213) = 3$

Отметим, что таблица начинается с двух строчек, которых в ней не следовало бы быть. Действительно, стоящие в первом столбце этих строк числа не являются остатками в каких-либо операциях деления. Как правило, этим строчкам присваивают номера (-1) и (0), подчёркивая тем самым их «незаконность». Но, в то же время, их наличие обусловлено их необходимостью.

Применим теперь данный алгоритм при нахождении наибольшего общего делителя двух многочленов $f(x)$ и $g(x)$ (хотя бы один из этих многочленов ненулевой). Без ограничения общности рассуждений будем считать, что НОД$(f(x), g(x))$ – это приведённый многочлен, т. е. многочлен со старшим коэффициентом, равным единице.

Рассмотрим примеры.

Примеры

1). Найти НОД$(f(x), g(x))$, где $f(x) = x^3 - 1$ и $g(x) = x^2 - 1$

Решение. Как и с числами, прежде всего делим многочлены с остатком, затем делитель – на получившийся остаток, и т. д., пока не получится остаток, равный нулю:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 1 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2} -\,x^3 - x & x \\ \hline x - 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} x^2 \quad -1 & x - 1 \\ \cline{2-2} -\,x^2 - x & x + 1 \\ \hline x - 1 & \\ -\,x - 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Теперь записываем цепочку равенств:

$$\text{НОД}(x^3 - 1; x^2 - 1) = \text{НОД}(x^2 - 1; x - 1) = \text{НОД}(x - 1; 0) = x - 1.$$

Ответ: НОД$(x^3 - 1; x^2 - 1) = x - 1$

2). Найти НОД$\left(f(x), g(x)\right)$, где $f(x) = x^3 + 1$ и $g(x) = x^2 + 1$.

Решение. Как и в предыдущем примере, выполняем деление с остатком:

$$
\begin{array}{r|l} x^3 \quad +1 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -\;x^3+x \quad & x \\ \hline -x+1 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} x^2 \quad +1 & -x+1 \\ \cline{2-2} -\;x^2-x \quad & -x \\ \hline x+1 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} -x+1 & x+1 \\ \cline{2-2} -\;-x-1 & -1 \\ \hline 2 & \end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l} x+1 & 2 \\ \cline{2-2} -\;x+1 & \frac{x}{2}+\frac{1}{2} \\ \hline 0 & \end{array}
$$

Цепочка равенств выглядит теперь так:

$$\text{НОД}\left(x^3+1; x^2+1\right) = \text{НОД}\left(x^2+1; -x+1\right) = \text{НОД}\left(-x+1; x+1\right) = \text{НОД}\left(x+1;\ 2\right).$$

Ясно. что НОД$(x+1;\ 2)$ – это некоторое число (т. е. многочлен нулевой степени). Согласно предположению, сделанному выше, НОД должен иметь в качестве старшего коэффициента единицу. Поэтому НОД$\left(x^3+1; x^2+1\right) = 1$. Другими словами, многочлены x^3+1 и x^2+1 – взаимно простые.

Ответ: НОД$\left(x^3+1; x^2+1\right) = 1$

Опишем теперь этот алгоритм в общем виде. Итак, пусть $f(x)$ и $g(x)$ $(g(x) \neq 0)$ – многочлены, НОД которых нужно найти. Алгоритм Евклида состоит из последовательных шагов, на каждом из которых следует выполнять определённые действия.

Шаг 1. Разделить $f(x)$ на $g(x)$ с остатком. Получим $f(x) = g(x)s_1(x) + r_1(x)$, и либо $r_1(x) = 0$, либо $r_1(x) \neq 0$, $\deg r_1(x) < \deg g(x)$. Тогда если $r_1(x) = 0$, то $f(x) \vdots g(x)$, и в этом случае $g(x)$ – НОД. Если же $r_1(x) \neq 0$, то переходим к шагу 2;

Шаг 2. Разделить $g(x)$ на $r_1(x)$ с остатком. Получим $g(x) = r_1(x)s_2(x) + r_2(x)$, и либо $r_2(x) = 0$, либо $r_2(x) \neq 0$, $\deg r_2(x) < \deg r_1(x)$. Тогда если $r_2(x) = 0$, то $g(x) \vdots r_1(x)$, и в этом случае $r_1(x)$ – НОД. Если же $r_2(x) \neq 0$, то переходим к шагу 3;

Шаг 3. Разделить $r_1(x)$ на $r_2(x)$ с остатком. Получим $r_1(x) = r_2(x)s_3(x) + r_3(x)$, и либо $r_3(x) = 0$, либо $r_3(x) \neq 0$, $\deg r_3(x) < \deg r_2(x)$. Тогда если $r_3(x) = 0$, то $r_1(x) \vdots r_2(x)$, и в этом случае $r_2(x)$ – НОД. Если же $r_3(x) \neq 0$, то переходим к шагу 4;

Шаг 4. Разделить $r_2(x)$ на $r_3(x)$ с остатком и т. д. – последовательно делим предыдущий остаток на последующий.

Процесс такого деления продолжаем до тех пор, пока не получим на каком-то шаге остаток, равный нулю[1]. После этого останавливаем процесс деления, так как делить с остатком на нуль нельзя.

---

[1] Нетрудно показать, что на некотором шаге обязательно получим остаток, равный нулю.

Таким образом, можно сформулировать теорему, позволяющую найти НОД многочленов $f(x)$ и $g(x)$: *НОД многочленов* $f(x)$ *и* $g(x)$ *равен последнему отличному от нуля остатку в последовательности алгоритма Евклида для этих многочленов.*

Замечание. Если $f(x)$ *и* $g(x)$ – многочлены с рациональными коэффициентами, то их НОД, найденный с помощью алгоритма Евклида, также имеет рациональные коэффициенты.

IX. Корни многочленов

Ранее мы установили, что если число c является корнем многочлена $f(x)$, то $f(x)$ делится на $(x-c)$ и в этом случае $f(x) = (x-c)s(x)$, где $\deg s(x) = \deg f(x) - 1$.

Обобщим это утверждение.

Если число $c_1, c_2, \ldots, c_m$ различные корни многочлена $f(x)$, то $f(x)$ делится на многочлен $(x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_m)$ и в этом случае можем записать

$$f(x) = (x-c_1)(x-c_2)\ldots(x-c_m)s_m(x).$$

Далее, как мы уже отмечали, одной из важнейших задач в теории многочленов является задача отыскания корней многочлена. В связи с этим существенным представляется вопрос об их числе. При решении этого вопроса нам будет полезна следующая теорема: ***число различных корней ненулевого многочлена*** $f(x)$ ***не больше, чем его степень***[1]. Другими словами, всякий многочлен n-й степени имеет не более, чем n корней.

Может случиться, что $f(x)$ делится и на какую-то степень многочлена $(x-c)$, т. е. на $(x-c)^k$, $k > 1$, $k \in N$. В этом случае c называют ***кратным корнем***. Или, более чётко:

число c *называется корнем кратности* k *(*k*-кратным корнем) многочлена* $f(x)$, *если этот многочлен делится на* $(x-c)^k$, $k \geq 1$ *(*k *– натуральное число), но не делится на* $(x-c)^{k+1}$. *Если* $k = 1$, *то* c *называют простым корнем, а если* $k > 1$ *– кратным корнем многочлена* $f(x)$.

При определении кратности корней будет полезно следующее утверждение: если многочлен $f(x)$ представим в виде $f(x) = (x-c)^m g(x)$, m – натуральное число, то он делится на $(x-c)^{m+1}$ тогда и только тогда, когда $g(x)$ делится на $(x-c)$.

---

[1] У нулевого многочлена бесконечно много корней.

Пример. Выясним, является ли число 2 корнем многочлена $f(x)$, и если да, найдём его кратность: $f(x)=x^5-5x^4+3x^3+22x^2-44x+24$. Чтобы ответить на эти вопросы, воспользуемся схемой Горнера, причём проверку на кратность будем выполнять в одной таблице. Имеем:

	1	– 5	3	22	– 44	24
2	1	– 3	– 3	16	– 12	0
2	1	– 1	– 5	6	0	
2	1	1	– 3	0		
2	1	3	3			

Выполнив по схеме Горнера деление многочлена $f(x)$ на $(x-2)$, во второй строке таблицы мы получим коэффициенты многочлена $g(x)$. Затем эту вторую строку считаем первой строкой новой схемы Горнера и выполняем деление $g(x)$ на $(x-2)$, и т. д. Продолжаем вычисления до тех пор, пока не получим остаток, отличный от нуля. А именно, многочлен $s(x)=x^2+x-3$ (четвёртая строка таблицы) не делится на $(x-2)$: $s(x)=(x-2)(x+3)+3$. Таким образом $f(x)$ делится на $(x-2)^3$, но не делится на $(x-2)^4$. Следовательно, по определению, число 2 является корнем кратности 3 многочлена $f(x)$. Как видим кратность корня равна числу полученных нулевых остатков. В строке, содержащей последний нулевой остаток, находятся и коэффициенты частного при делении $f(x)$ на $(x-2)^3$, то есть $f(x)=(x-2)^3(x^2+x-3)$.

Как мы уже отмечали, одной из важнейших задач в теории многочленов является задача отыскания их корней. Для решения этой задачи можно использовать метод подбора, т. е. брать наугад число и проверять, является ли оно корнем данного многочлена. При этом можно довольно быстро «наткнуться» на корень, а можно и никогда его не найти. Ведь проверить все числа невозможно. Другое дело, если бы нам удалось сузить область поиска, например, знать, что искомые корни находятся, скажем, среди тридцати указанных чисел. А для тридцати чисел можно сделать и проверку. В этой связи важными являются следующие теоремы:

1. *Если несократимая дробь* $\frac{l}{m}$ $(l,m\in Z)$ *является корнем многочлена* $f(x)$ *с целыми коэффициентами, то старший коэффициент этого многочлена делится на* m*, а свободный член – на* l*. То есть если дан многочлен* $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\ldots+a_1x+a_0,\quad a_i\in Z,\quad i=\overline{0,\,n},\quad a_n\neq 0$ *и* $f\left(\frac{l}{m}\right)=0$*, то* $a_n\,\vdots\,m$, $a_0\,\vdots\,l$;

2. *Если несократимая дробь* $\frac{l}{m}$ $(l,m\in Z)$ *является корнем многочлена* $f(x)$ *с целыми коэффициентами, то* $f(k)$ *делится на* $(l-km)$ *для любого целого числа* k *при условии, что* $(l-km)\neq 0$.

3. *Всякий целый корень приведённого многочлена* $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ *с целыми коэффициентами* $(a_i\in Z,\ i=\overline{0,n-1})$ *является делителем свободного члена* a_0.

Пример. Найти рациональные корни $\frac{l}{m}$ $(l,m\in Z)$ многочлена $f(x)=6x^4+13x^3-24x^2-8x+8$.

Решение. Согласно первой теореме, рациональные корни этого многочлена находятся среди несократимых дробей вида $\frac{l}{m}$, где l – делитель свободного члена $a_0=8$, где m – делитель старшего коэффициента $a_4=6$. Таким образом, рациональные корни рассматриваемого многочлена находятся среди чисел: $\left\{\pm1,\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{3},\pm\frac{1}{6},\pm2,\pm\frac{2}{3},\pm4,\pm\frac{4}{3},\pm8,\pm\frac{8}{3}\right\}$[1]. Таким образом, мы имеем двадцать чисел – «кандидатов» в корни. Осталось только проверить каждое из них и отобрать те, которые действительно являются корнями. Но опять-таки придётся сделать довольно много проверок.

Воспользуемся теперь второй теоремой, что позволит нам ещё больше сузить круг поисков рациональных корней. Применим указанную теорему, например, при $k=\pm1$. Другими словами, если несократимая дробь $\frac{l}{m}$ является корнем многочлена $f(x)$, то $f(1)\,\vdots\,(l-m)$, а $f(-1)\,\vdots\,(l+m)$. Легко находим, что в нашем случае $f(1)=-5$, а $f(-1)=-15$. Заметим, что мы сразу же исключаем из рассмотрения значения $\{\pm1\}$, так как $f(\pm1)\neq0$. Итак, рациональные корни нашего многочлена следует искать среди чисел $\left\{\pm\frac{1}{2},\pm\frac{1}{3},\pm\frac{1}{6},\pm2,\pm\frac{2}{3},\pm4,\pm\frac{4}{3},\pm8,\pm\frac{8}{3}\right\}$.

Рассмотрим $\frac{l}{m}=\frac{1}{2}$. Тогда $l-m=-1$, и $f(1)=-5$ делится на это число. Далее, $l+m=3$, и $f(-1)=-15$ делится на число 3. Значит, дробь $\frac{1}{2}$ остаётся в числе «кандидатов» в корни.

[1] Напомним, что мы выписали лишь несократимые дроби.

Пусть теперь $\frac{l}{m}=-\frac{1}{2}=\frac{-1}{2}$. В этом случае $l-m=-3$, и $f(1)=-5$ не делится на (-3). Значит, дробь $-\frac{1}{2}$ не может быть корнем данного многочлена, и мы исключаем её из дальнейшего рассмотрения. Выполнив проверку для каждой из выписанных выше дробей, получим, что искомые корни находятся среди чисел $\left\{\frac{1}{2}, \pm\frac{2}{3}, 2, -4\right\}$.

Таким образом, довольно-таки простым приёмом мы значительно сузили область поиска рациональных корней рассматриваемого многочлена. Ну а для проверки оставшихся уже чисел можем воспользоваться методом подстановки или применить схему Горнера.

X. Основная теорема алгебры. Разложение многочленов на множители

Будем рассматривать только ***многочлены с действительными коэффициентами и только действительные корни этих многочленов***[1]. В этом случае может оказаться, что не всякий многочлен имеет действительные корни. Например, многочлен $f(x)=x^2+1$ не имеет действительных корней.

При отыскании корней многочлена будем пользоваться следующим утверждением[2]: *всякий многочлен степени $n\geq 1$ имеет, по крайней мере, один корень*[3].

Из этого утверждения вытекает ряд интересных следствий. Укажем лишь некоторые из них:

1. *Пусть $f(x)$ – многочлен степени $n\geq 1$, и пусть $c_1, c_2, \ldots, c_m$ – **<u>все</u>** его различные корни кратностей $k_1, k_2, \ldots, k_m$ соответственно. Тогда $f(x)=a_n(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\ldots(x-c_m)^{k_m}$, где a_n – старший коэффициент многочлена $f(x)$ и $k_1+k_2+\ldots+k_m=n$.*

2. *Всякий многочлен $f(x)$ степени $n\geq 1$ имеет ровно n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.*

Действительно, всякий многочлен степени $n\geq 1$ представим в виде $f(x)=a_n(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\ldots(x-c_m)^{k_m}$. Если в этом представлении мы каждую степень запишем в виде произведения, т. е., например,

$$(x-c_1)^{k_1}=\underbrace{(x-c_1)(x-c_1)\ldots(x-c_1)}_{k_1-раз},$$

то и получим утверждение, сформулированное выше.

[1] Мы предполагаем, что вы недостаточно хорошо знакомы с комплексными числами и их алгебраической формой записи. Хотя, вероятно, это и не так!
[2] Данное утверждение – переформулированная основная теорема алгебры (теорема Гаусса, в честь великого немецкого математика XIX в. Карла-Фридриха Гаусса).
[3] Один корень – действительный или комплексный!

3. *Всякий многочлен степени $n\geq 1$ раскладывается в произведение n линейных сомножителей*[1].

Ненулевой многочлен $f(x)$ называется *разложимым* (или *приводимым*), если существуют многочлены $g(x)$ и $h(x)$ ненулевой степени такие, что $f(x)=g(x)h(x)$. В противном случае многочлен $f(x)$ называется *неразложимым* (или *неприводимым*). Так, многочлен $f(x)=x^2+1$, $x\in R$ является неразложимым над R[2].

Так как мы рассматриваем вопрос разложения многочлена с действительными коэффициентами на множители с действительными же коэффициентами, то всё вышесказанное можно сформулировать в виде следующей теоремы:

всякий многочлен $f(x)$, $deg\, f(x)=n\geq 1$, $x\in R$ с действительными коэффициентами раскладывается в произведение линейных двучленов и квадратных трёхчленов с отрицательным дискриминантом, имеющих действительные коэффициенты.

Таким образом, многочлен с действительными коэффициентами разлагается на множители вида

$$f(x)=a_n(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\ldots(x-c_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\ldots(x^2+p_mx+q_m)^{s_m},$$

при этом $k_1+k_2+\ldots+k_r+2s_1+\ldots+2s_m=n$ и все квадратные трёхчлены не имеют действительных корней (дискриминант отрицательный). Записанное выше разложение называется каноническим разложением многочлена.

В качестве иллюстрации можем привести пример, рассмотренный ранее. А именно, разложим многочлен $f(x)=x^5-5x^4+3x^3+22x^2-44x+24$ на множители.

Как уже отмечалось, $f(x)=(x-2)^3(x^2+x-3)$. То есть число 2 является корнем кратности 3 многочлена $f(x)$, а квадратный трёхчлен x^2+x-3 не имеет действительных корней (дискриминант этого трёхчлена отрицательный).

Разложение многочленов на множители успешно используется при решении соответствующих уравнений.

[1] В произведение n линейных сомножителей с комплексными коэффициентами. Кроме того, мы здесь не упомянули о сомножителе a_n, так как рассматриваем $a_n(x-c_1)$ как один сомножитель первой степени.
[2] Если рассматривать случай, когда x – комплексная переменная, то $x^2+1=(x-i)(x+i)$, где $i^2=-1$. То есть, многочлен $f(x)=x^2+1$ разложим.

Пример. Найти сумму **<u>всех</u>** корней уравнения $x^4-12x^2+16\sqrt{2}x-12=0$. Прежде всего для удобства введём параметр $b=\sqrt{2}$. Тогда, т. к. $12=3\cdot4=3b^4$, $16\sqrt{2}=8b^3$, $12=6\cdot2=6b^2$, исходное уравнение перепишется в виде:

$$x^4-6b^2x^2+8b^3x-3b^4=0.$$

Выполним следующие преобразования:

$$x^4-6b^2x^2+8b^3x-3b^4=0\,\Big|\,:b^4,$$

$$\left(\frac{x}{b}\right)^4-6\left(\frac{x}{b}\right)^2+8\left(\frac{x}{b}\right)-3=0.$$

Сделав замену $t=\dfrac{x}{b}$, получим уравнение: $t^4-6t^2+8t-3=0$. Воспользуемся схемой Горнера и разложим многочлен, стоящий в левой части уравнения, на множители. Имеем:

	1	0	– 6	8	– 3
1	1	1	– 5	3	0
1	1	2	– 3	0	
1	1	3	0		

В результате получим уравнение: $(t-1)^3(t+3)=0$. Следовательно, $t=1$ – корень третей кратности (то есть $t_1=t_2=t_3=1$) и $t=-3$. Значит:

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{b}=1,\\[2mm] \dfrac{x}{b}=-3\end{array}\right.\Rightarrow\left[b=\sqrt{2}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{2},\\ x=-3\sqrt{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\text{с учётом}\\ \text{кратности}\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=x_2=x_3=\sqrt{2},\\ x_4=-3\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

Таким образом, сумма $x_1+x_2+x_3+x_4$ **<u>всех</u>** корней уравнения равна нулю.

Ответ: 0

<u>Разложение дробно-рациональных функций на сумму простейших рациональных дробей с действительными коэффициентами</u>

Дробно-рациональной функцией (или рациональной дробью) называется функция, равная отношению двух целых многочленов, т. е. функция $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – целые многочлены от x степени m и n соответственно.

Рациональная дробь называется *правильной*, если степень многочлена, стоящего в числителе, меньше степени многочлена, стоящего в знаменателе, т. е. $m<n$; в противном случае (если $m\ge n$) рациональная дробь называется *неправильной*.

Всякую неправильную рациональную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ можно, путём деления числителя на знаменатель, представить в виде суммы целого многочлена $L(x)$ и правильной рациональной дроби $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$, т. е. $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=L(x)+\dfrac{R(x)}{Q(x)}$.

Пример. $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{x^4-5x+9}{x-2}$ – неправильная рациональная дробь. Разделим «уголком» многочлен $P(x)=x^4-5x+9$, стоящий в числителе, на многочлен $Q(x)=x-2$, стоящий в знаменателе:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
-\,x^4 & & & -5x & +9 & x-2\\ \cline{6-6}
x^4 & -2x^3 & & & & x^3+2x^2+4x+3\\ \cline{1-2}
 & -\,2x^3 & & -5x & +9 & \\
 & 2x^3 & -4x^2 & & & \\ \cline{2-3}
 & & -\,4x^2 & -5x & +9 & \\
 & & 4x^2 & -8x & & \\ \cline{3-4}
 & & & -\,3x & +9 & \\
 & & & 3x & -6 & \\ \cline{4-5}
 & & & & 15. &
\end{array}
$$

Получили частное $L(x)=x^3+2x^2+4x+3$, которое называется целой частью, и остаток $R(x)=15$. Следовательно,

$$\frac{x^4-5x+9}{x-2}=x^3+2x^2+4x+3+\frac{15}{x-2}.$$

Правильные рациональные дроби вида

(I). $\dfrac{A}{x-a}$; **(II).** $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $k\ge2,\ k\in N$;

(III). $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$ (квадратный трёхчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, т. е. $p^2-4q<0$);

(IV). $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$ ($k\ge2,\ k\in N$ и $p^2-4q<0$),

называются *простейшими рациональными дробями* **I, II, III** *и* **IV** *типов* $(A,\ a,\ M,\ N,\ p,\ q\in R)$.

Рассмотрим теперь какой-нибудь множитель $(x-a)$ кратности k, входящий в разложение знаменателя $Q_n(x)=(x-a)^k Q_1(x)$ дроби $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ $(n>m)$, где $Q_1(x)$ уже на $(x-a)$ не делится. Тогда данная правильная дробь $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\dfrac{P_m(x)}{(x-a)^k Q_1(x)}$ может быть представлена в виде суммы правильных дробей $\dfrac{A_k}{(x-a)^k}+\dfrac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$. Для доказательства этого факта достаточно подобрать число A_k и многочлен $P_1(x)$ так, чтобы выполнялось тождество

$$P_m(x)-A_k\cdot Q_1(x)=(x-a)\cdot P_1(x).$$

Очевидно, что в этом случае левая часть этого равенства имеет корень, равный $x=a$, и поэтому

$$A_k=\frac{P_m(a)}{Q_1(a)}.$$

Далее, по аналогии, из оставшейся части $\dfrac{P_1(x)}{(x-a)^{k-1}Q_1(x)}$ выделим простую дробь $\dfrac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}}$ и т. д., пока множитель $(x-a)$ вовсе не исчезнет из разложения знаменателя.

Таким образом, в рассматриваемом случае множителю $(x-a)^k$ будет отвечать группа из k простейших дробей

$$\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}.$$

Такие же рассуждения поочерёдно применяются и к каждому из оставшихся линейных множителей знаменателя $Q_n(x)$, пока в знаменателе не останется линейных множителей или же в его разложении останутся лишь квадратичные множители.

Пусть теперь знаменатель $Q_n(x)$ правильной рациональной дроби $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ $(n>m)$ представим в виде $Q_n(x)=(x^2+px+q)^k Q_1(x)$, где квадратный трёхчлен x^2+px+q не имеет действительных корней, т. е. $p^2-4q<0$[1] и $Q_1(x)$ уже не делится на x^2+px+q. Тогда исходная правильная дробь

[1] Знаменатель $Q_n(x)$ имеет пару комплексно-сопряжённых корней кратности k.

$\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\dfrac{P_m(x)}{(x^2+px+q)^k Q_1(x)}$ может быть представлена в виде следующей суммы правильных дробей: $\dfrac{M_k x+N_k}{(x^2+px+q)^k}+\dfrac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{k-1}Q_1(x)}$.

Как и в предыдущем случае, для доказательства достаточно подобрать числа M_k, N_k и многочлен $P_1(x)$ так, чтобы имело место тождество

$$P_m(x)-(M_k x+N_k)\cdot Q_1(x)=(x^2+px+q)\cdot P_1(x).$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы $P_m(x)-(M_k x+N_k)\cdot Q_1(x)=0$.

Далее, степень многочлена $P_1(x)$ меньше степени знаменателя, поэтому можно продолжить дальнейшее разложение. Применяя к правильной рациональной дроби аналогичные рассуждения, можно выделить последовательно все простейшие дроби, соответствующие всем корням знаменателя.

Теорема: Всякую *правильную* рациональную дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, знаменатель $Q(x)$ которой разложен на множители

$$Q(x)=(x-x_1)^{k_1}\cdot(x-x_2)^{k_2}\ldots(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}\ldots(x^2+p_mx+q_m)^{s_m},$$

можно представить (и притом единственным образом) в виде следующей суммы простейших рациональных дробей:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+\ldots+\frac{A_{k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}+\frac{B_1}{x-x_2}+\frac{B_2}{(x-x_2)^2}+\ldots+\frac{A_{k_2}}{(x-x_2)^{k_2}}+$$
$$+\ldots+\frac{C_1x+D_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2}+\ldots+\frac{C_{s_1}x+D_{s_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{s_1}}+\ldots+$$
$$+\ldots+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_mx+q_m}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_mx+q_m)^2}+\ldots+\frac{M_{s_m}x+N_{s_m}}{(x^2+p_mx+q_m)^{s_m}},$$

где $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, C_1, D_1, \ldots, M_1, N_1, \ldots$ – некоторые действительные коэффициенты.

Поясним формулировку теоремы на следующих примерах:

1. $\dfrac{x^2+4}{(x-2)(x-3)^3}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{B}{x-3}+\dfrac{C}{(x-3)^2}+\dfrac{D}{(x-3)^3}$;

2. $\dfrac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$;

3.

$$\frac{7x^2+8x+9}{(x-1)(x-2)(x+3)^3(x^2+x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}+\frac{D}{(x+3)^2}+\frac{E}{(x+3)^3}+$$
$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+x+1}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+x+1)^2}.$$

Для нахождения в полученных разложениях неопределённых коэффициентов $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, M_1, N_1, \ldots$ применяют различные методы – *метод сравнения коэффициентов (метод неопределённых коэффициентов)* или *метод отдельных (частичных) значений аргумента*.

Например, суть метода сравнения коэффициентов такова:

1. Правую часть полученного разложения приводим к общему знаменателю $Q(x)$; в результате получим тождество $\frac{P(x)}{Q(x)}\equiv\frac{S(x)}{Q(x)}$, где $S(x)$ – многочлен с неопределёнными коэффициентами.
2. Так как в полученном тождестве знаменатели равны, то, следовательно, тождественно равны и числители, т. е. $P(x)\equiv S(x)$.
3. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x (по свойству о тождестве многочленов) в обеих частях тождества $P(x)\equiv S(x)$, получим систему линейных уравнений, из которой и определим искомые коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots, M_1, N_1, \ldots$

Пример. Представить дробь $\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}$ в виде суммы простейших рациональных дробей.

Решение. Согласно сформулированной выше теореме можем записать:

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2-2x+5}=\frac{A(x^2-2x+5)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2-2x+5)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2x^2-3x-3\equiv A(x^2-2x+5)+(Bx+C)(x-1),$$
$$2x^2-3x-3\equiv Ax^2-2Ax+5A+Bx^2-Bx+Cx-C,$$

то есть

$$2x^2-3x-3\equiv(A+B)x^2+(-2A-B+C)x+(5A-C).$$

Получили тождественные многочлены. Приравнивая теперь коэффициенты при одинаковых степенях x, т. е. при x^2, x^1, x^0, получаем следующую систему уравнений для определения этих неизвестных коэффициентов:

$$\begin{cases}2=A+B,\\-3=-2A-B+C,\\-3=5A-C.\end{cases}$$

Решая полученную систему, находим, что $A=-1, B=3, C=-2$. Следовательно,

$$\frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}=\frac{-1}{x-1}+\frac{3x-2}{x^2-2x+5}.$$

Для нахождения неопределённых коэффициентов, как отмечалось выше, можно применить также метод отдельных значений аргумента. Здесь, как и в методе неопределённых коэффициентов, прежде всего правую часть полученного разложения приводим к общему знаменателю $Q(x)$; в результате получим тождество $\frac{P(x)}{Q(x)}\equiv\frac{S(x)}{Q(x)}$, где $S(x)$ – многочлен с неопределёнными коэффициентами. Следовательно, $P(x)\equiv S(x)$. После этого в полученном тождестве аргументу x придают конкретные значения столько раз, сколько неопределённых коэффициентов (обычно полагают вместо x значения действительных корней многочлена $Q(x)$).

Пример. Представить дробь $\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)}$ в виде суммы простейших рациональных дробей.

Решение. Имеем: $\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}$. Отсюда следует, что

$$3x-4\equiv A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2).$$

Положим теперь:

$$x=0:\quad -4=-2A\ \Rightarrow\ A=2;$$
$$x=2:\quad 2=6B\ \Rightarrow\ B=\frac{1}{3};$$
$$x=-1:\quad -7=3C\ \Rightarrow\ C=-\frac{7}{3}.$$

Следовательно, $\frac{3x-4}{x(x-2)(x+1)}=\frac{2}{x}+\frac{\frac{1}{3}}{x-2}+\frac{-\frac{7}{3}}{x+1}$.

Замечание. На практике рекомендуется комбинировать рассмотренные выше два способа определения коэффициентов.

Уравнения и неравенства, содержащие модуль

Большое количество ошибок при решении задач с модулем вызвано тем, что многие конкурсанты либо не знают, как избавиться от модуля, либо, освобождаясь от модуля, забывают учесть условия, при которых модуль был раскрыт с тем или иным знаком.

Для того чтобы решить уравнение (неравенство), содержащее переменную под знаком модуля, необходимо, во-первых, знать определение модуля:

$$|a| = \left[\begin{array}{l} a, \text{ если } a \ge 0, \\ -a, \text{ если } a < 0, \end{array}\right.$$

и во-вторых, надо освободиться от знака модуля, используя определение.

На практике это делается так[1]:

– находят значения переменной, при которых выражения, стоящие под знаком модуля, обращаются в нуль[2]. Другими словами, находят точки, в которых каждое выражение, стоящее под знаком модуля, может менять свой знак;
– полученными точками разбивают ОДЗ переменной на интервалы (точки выставляют на числовой оси), на каждом из которых выражения, стоящие под знаком модуля, сохраняют знак;
– на каждом из получившихся интервалов модули выражений раскрываются с соответствующими знаками. Затем на каждом из найденных интервалов, решают уравнение уже без знака модуля.

Исходное уравнение будет равносильно совокупности систем, в каждой из которых первое условие – неравенство, задающее интервал, а второе – получающееся уравнение.

Данную задачу можно решить, проведя равносильные преобразования. Рассмотрим следующие случаи:

- ***Уравнение вида*** $|f(x)| = g(x)$ можно решать двумя способами.

Первый способ – применяется в том случае, когда функция $f(x)$ проще, чем $g(x)$. В этом случае записывают

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) = g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ f(x) = -g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

При этом не надо решать неравенства, а надо только подставить в них полученные решения соответствующих уравнений.

---

[1] Метод последовательного раскрытия модулей, или метод интервалов.

[2] Так называемые критические точки модуля.

Можно, конечно же, поступить и так: решить совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x), \end{array}\right.$$

а затем просто сделать проверку.

Второй способ – применяется обычно, если функция $g(x)$ проще, чем $f(x)$. В этом случае записывают

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right. \end{cases}$$

Заметим, что уравнение $|f(x)| = g(x)$ не имеет решений, если $g(x) < 0$.

Третий способ: Так как $g(x) \ge 0$, то $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f^2(x) = g^2(x). \end{cases}$

Примеры

1). Решим уравнение $|\sin x| = \sin x \cdot \cos x$. Тогда:

$$|\sin x| = \sin x \cdot \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \cdot \cos x \ge 0, \\ \sin^2 x = \sin^2 x \cdot \cos^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \cdot \cos x \ge 0, \\ \sin^2 x \cdot (1 - \cos^2 x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \cdot \cos x \ge 0, \\ \sin^4 x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin^4 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = n\pi, \ n \in Z.$$

Ответ: $x = n\pi, \ n \in Z$

2). Решить уравнение: $\left|3x + \sqrt{16 - 9x^2}\right| = 16 - 18x^2$.

Решение.

Конечно же, при решении этого уравнения можно воспользоваться одним из предложенных выше способов. Тогда, проведя равносильные преобразования, получим совокупность двух иррациональных уравнений, которые, в свою очередь, решаются совсем непросто. Кроме того, можно было бы потратить время на отыскание ОДЗ уравнения в надежде на то, что это позволит (а может, и нет!) однозначно раскрыть модуль. Другими словами, в обоих случаях имеем довольно-таки трудоёмкий процесс.

Можно ли упростить решение данного уравнения и сделать его более рациональным? Оказывается – можно. Рассмотрим правую часть исходного уравнения. Очевидно:

$$16 - 18x^2 \ge 0 \Leftrightarrow 16 - 9x^2 - 9x^2 \ge 0 \Leftrightarrow \left(16 - 9x^2 \ge 9x^2\right)\Big|\sqrt{\ } \Rightarrow \sqrt{16 - 9x^2} \ge \sqrt{9x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{16 - 9x^2} \ge |3x|\right)\Big|(+3x) \Leftrightarrow 3x + \sqrt{16 - 9x^2} \ge 3x + |3x| \ge 0.$$

То есть выражение под знаком модуля является неотрицательным при всех $x \in R$. Следовательно, исходное уравнение будет равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} 3x + \sqrt{16 - 9x^2} = 16 - 18x^2, \\ 16 - 18x^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(16 - 9x^2\right) - \sqrt{16 - 9x^2} - \left(9x^2 + 3x\right) = 0, \\ x \in \left[-\frac{4}{3\sqrt{2}}; \frac{4}{3\sqrt{2}}\right]. \end{cases}$$

Обратите внимание на то, как записано уравнение последней системы. Это сделано для того, чтобы более наглядной была следующая замена: $\sqrt{16 - 9x^2} = t, t \ge 0$. Получим квадратное уравнение относительно t: $t^2 - t - \left(9x^2 + 3x\right) = 0,\ \ t \ge 0$. Очевидно, что

$$D = 1 + 4 \cdot \left(9x^2 + 3x\right) = 36x^2 + 12x + 1 = (6x + 1)^2 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{1 \pm (6x + 1)}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 3x + 1, \\ t_2 = -3x. \end{array}\right.$$

Значит, с учётом того, что $x \in \left[-\frac{4}{3\sqrt{2}}; \frac{4}{3\sqrt{2}}\right]$, можем записать:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{16 - 9x^2} = 3x + 1, \\ 3x - 1 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{16 - 9x^2} = -3x, \\ -3x \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 18x^2 + 6x - 15 = 0, \\ x \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{4}{3\sqrt{2}}\right] \end{cases} \Rightarrow \left[x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{31}}{6}\right] \Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{31}}{6}, \\ \begin{cases} 18x^2 = 16, \\ x \in \left[-\frac{4}{3\sqrt{2}}; 0\right] \end{cases} \Rightarrow x = -\frac{4}{3\sqrt{2}}. \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \left\{-\frac{4}{3\sqrt{2}}; \frac{-1 + \sqrt{31}}{6}\right\}$

- ***Уравнение вида***: $|f(x)| = |g(x)|$. Так же, как и в третьем способе предыдущего уравнения, воспользуемся тем, что обе части уравнения $|f(x)| = |g(x)|$ неотрицательны. Тогда, можем записать:

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x) \Leftrightarrow f^2(x) - g^2(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(x) - g(x)) \cdot (f(x) + g(x)) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$$

Из этого следует, что возможны два способа.

<u>Первый способ</u>: $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x)$.

<u>Второй способ</u>: $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right.$

Решение неравенств, содержащих модули, в большинстве случаев строится аналогично решению соответствующих уравнений. Основное отличие состоит в том, что после освобождения от модулей требуется решить, естественно, не уравнение, а неравенство. Есть и ещё одно отличие. Если при решении уравнений можно пользоваться проверкой полученных решений, то для случая неравенств отбросить посторонние решения проверкой может быть затруднительно.

Во многих случаях для решения таких неравенств целесообразно разбить числовую ось на интервалы так, чтобы функции, стоящие под знаком модуля, на каждом из интервалов сохраняли знак. Тогда на каждом таком интервале неравенство можно записать без модуля. В этом случае говорят, что раскрыли модуль.

При решении неравенств, содержащих модули, также стараются использовать равносильные переходы.

Рассмотрим следующие случаи:

- ***Неравенство вида*** $|f(x)| < g(x)$ решается следующим образом:
  - если $g(x) \le 0$, то решений нет;
  - если $g(x) > 0 \Rightarrow |f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ -g(x) < f(x) < g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x). \end{cases}$
- ***Неравенство вида*** $|f(x)| \le g(x)$ решается следующим образом:
  - если $g(x) < 0$, то решений нет;
  - если $g(x) = 0 \Rightarrow |f(x)| \le g(x) \Leftrightarrow f(x) = 0$;
  - если $g(x) > 0 \Rightarrow |f(x)| \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ -g(x) \le f(x) \le g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) \le g(x), \\ f(x) \ge -g(x). \end{cases}$

- ***Неравенство вида*** $|f(x)| > g(x)$ решается следующим образом:
  - если $g(x) < 0$, то неравенство $|f(x)| > g(x)$ верно для любых значений x из области определения функций $f(x)$ и $g(x)$, т. е. $\forall x \in D(f) \cap D(g)$;
  - если $g(x) = 0 \Rightarrow |f(x)| > g(x) \Leftrightarrow |f(x)| > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \neq 0, \\ x \in D(f), \\ x \in D(g). \end{cases}$
  - если $g(x) > 0 \Rightarrow |f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{array} \right. \end{cases}$
- ***Неравенство вида*** $|f(x)| \geq g(x)$ решается следующим образом:
  - если $g(x) \leq 0$, то неравенство $|f(x)| \geq g(x)$ верно для любых значений x из области определения функций $f(x)$ и $g(x)$, т. е. $\forall x \in D(f) \cap D(g)$;
  - если $g(x) > 0 \Rightarrow |f(x)| \geq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq -g(x). \end{array} \right. \end{cases}$
- ***Неравенства вида*** $|f(x)| \geq |g(x)|$ и $|f(x)| \leq |g(x)|$ решаются следующим образом:

  $$|f(x)| \geq |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) \geq g^2(x); \quad |f(x)| \leq |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) \leq g^2(x)$$

  (либо общим способом).

Условия контрольных работ

2005 год

8 – 9 классы

1-й уровень

1. В школьной газете сообщается, что процент учеников некоторого класса, повысивших во втором полугодии успеваемость, заключён в пределах от 2,9% до 3,1%. Определить минимально возможное число учеников в таком классе.
2. Уравнение $x^2 - 2y^2 = 1$ решить в простых числах.
3. В треугольнике ABC величина угла BAC равна $\frac{\pi}{3}$, длина высоты, опущенной из вершины C на сторону AB, равна $\sqrt{3}$ см, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 5 см. Найти длины сторон треугольника ABC.

2-й уровень

4. Сумма первых четырёх членов арифметической прогрессии равна 124, сумма последних четырёх членов равна 156. Сумма всех членов данной прогрессии составляет 210. Найти эту прогрессию.
5. Решить уравнение: $(x^2 - 4x + 3) \cdot (x^2 + 14x + 48) = 360$.
6. Известно, что для некоторой квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$ выполнены неравенства $f(-1) < 1$, $f(1) > -1$, $f(3) < -4$. Определить знак коэффициента a.

3-й уровень

7. Решить уравнение: $x^3 + 2\sqrt{3}x^2 + 3x + \sqrt{3} - 1 = 0$.
8. В два различных сосуда налили растворы соли, причём в 1-й сосуд налили 5 кг, а во 2-й – налили 20 кг. При испарении воды процентное содержание соли в 1-м сосуде увеличилось в p раз, а во 2-м сосуде – в q раз. О числах p и q известно только, что $pq = 9$. Какое наибольшее количество воды могло при этом испариться из обоих сосудов вместе?
9. В прямоугольный треугольник, периметр которого равен 36 см, вписана окружность. Гипотенуза делится точкой касания в отношении 2:3. Найти длины сторон треугольника.

10 – 11 классы

1-й уровень

1. Пусть m и n – натуральные числа, причём $\dfrac{m}{n}$ – правильная несократимая дробь. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\dfrac{3n-m}{5n+2m}$, если известно, что она сократима?
2. Вычислить определённый интеграл: $\int\limits_1^2 \sqrt{2x-x^2}\,dx$.
3. На координатной плоскости рассматриваются всевозможные треугольники ABC, у каждого из которых $\angle ACB = 90^\circ$, вершина A имеет координаты $(1;0)$, вершина C лежит на отрезке $[0;1]$ оси OX, а вершина B лежит на параболе $y = x - x^2$. Какие координаты должна иметь вершина B, чтобы площадь треугольника ABC была наибольшей?

2-й уровень

4. Найти все целые корни уравнения $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\left(3x-\sqrt{9x^2+160x+800}\right)\right)=1$.
5. Доказать, что если расстояния от вершин треугольника до двух данных взаимно перпендикулярных прямых выражаются целыми числами, то этот треугольник ***не может*** быть правильным.
6. Рота солдат прибыла на парад в полном составе прямоугольным строем по 24 человека в ряд. По прибытии оказалось, что не все солдаты могут участвовать в параде. Оставшийся для парада состав роты перестроили так, что число рядов стало на 2 меньше прежнего, а число солдат в каждом ряду стало на 26 больше числа новых рядов. Известно, что если бы все солдаты участвовали в параде, то роту можно было бы выстроить так, чтобы число солдат в каждом ряду равнялось числу рядов. Сколько солдат было в роте?

3-й уровень

7. Решить неравенство: $\dfrac{6}{2x+1} > \dfrac{1+\log_2(2+x)}{x}$.
8. Доказать, что для функции $f(x) = \cos x \cdot \sin 2x$ справедливо неравенство $\min\limits_{x\in[-\pi,\pi]} f(x) > -\dfrac{7}{9}$.
9. Решить уравнение: $3\sqrt{x^2-9} + 4\sqrt{x^2-16} + 5\sqrt{x^2-25} = \dfrac{120}{x}$.

2006 год

8 – 9 классы

1-й уровень

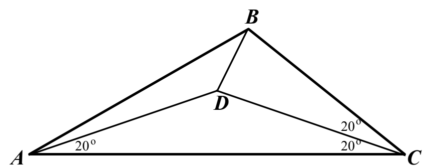
1. Как изменится величина дроби $\dfrac{2a^2b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, если a и b уменьшить в два раза?
2. Извлечь без помощи таблиц и калькулятора кубический корень из числа $7+5\sqrt{2}$.
3. Найти значение числа a, при котором уравнения $x^3 + a x + 1 = 0$ и $x^4 + a x^2 + 1 = 0$ имеют общий корень. Какой это корень?

2-й уровень

4. Найти площадь фигуры, которая задаётся на координатной плоскости системой неравенств:
$$\begin{cases} y \le 6 - 2|x|, \\ y \ge 2 + 2|x|. \end{cases}$$
5. Какая из двух дробей $A = \dfrac{5678901234}{6789012345}$ и $B = \dfrac{5678901235}{6789012347}$ больше? Ответ обосновать.
6. Решить в целых положительных числах уравнение: $x^2 - y^2 = 105$.

3-й уровень

7. В треугольнике ABC (см. рис.) угол C равен 40°, на его биссектрисе отмечена точка D так, что треугольник BDC – равнобедренный ($BC = DC$), угол DAC равен 20°. Найти величину угла ABD.



8. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 - 3x + A = 0$, а x_3 и x_4 – корни уравнения $x^2 - 12x + B = 0$. Известно, что последовательность x_1, x_2, x_3, x_4 является возрастающей геометрической прогрессией. Найти A и B.
9. Два бегуна стартовали один за другим с интервалом в две минуты. Второй бегун догнал первого на расстоянии 1 км от точки старта. Пробежав от точки старта 5 км, второй бегун повернул обратно и встретился с первым бегуном. Эта встреча произошла через 20 минут после старта первого бегуна. Найти скорость второго бегуна.

10 – 11 классы

1-й уровень

1. Найти отрицательные члены последовательности

$$x_n = \frac{A_{n+4}^4}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_n} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

где A_{n+4}^4 – число размещений, а P_{n+2} и P_n – числа перестановок.

2. Решить (в зависимости от a) уравнение: $x^3 - (a+2)x + \sqrt{a+1} = 0$.

3. Упростить: $\dfrac{lg\left(7 - 4\sqrt{3}\right)}{lg\left(2 - \sqrt{3}\right)}$.

2-й уровень

4. Плоскость прямоугольного треугольника, длины катетов которого равны 3 см и 4 см, образует с плоскостью P угол, величина которого равна α. Гипотенуза данного треугольника лежит в плоскости P. Найти величину угла, образованного меньшим катетом с плоскостью P.

5. Построить график функции: $y = 2^{log_4(\sin x + \cos x)^2}$.

6. Найти все решения неравенства $cos\dfrac{3}{2} - 4x - x^2 \geq 0$, лежащие в интервале $x \in \left(-\dfrac{21}{5}; 0\right)$.

3-й уровень

7. Имеется три сплава. Первый сплав содержит 30% никеля и 70% меди, второй – 10% меди и 90% марганца, третий – 15% никеля, 25% меди и 60% марганца. Из них необходимо приготовить новый сплав, содержащий 40% марганца. Какое наименьшее и какое наибольшее процентное содержание меди может быть в этом новом сплаве?

8. Решить уравнение: $log_2\left(1 + x^2\right) = log_2 x + 2x - x^2$.

9. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 y^2 - 2x + y^2 = 0, \\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0. \end{cases}$$

2007 год

8 – 9 классы

1-й уровень

1. Инженер ежедневно приезжает поездом на вокзал в 8 часов утра. Точно в 8 часов утра к вокзалу подъезжает заводской автомобиль и отвозит инженера на завод. Однажды инженер приехал на вокзал в 7 часов утра и пошёл навстречу автомобилю. Встретив машину, он сел в неё и приехал на завод на 20 минут раньше, чем обычно. Определить показания часов в момент встречи инженера с автомобилем.

2. Какое из двух чисел больше: $2 \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{18}$ или 4? (Доказать.)

3. Как от ленты длиной $\dfrac{2}{3}$ м отрезать $\dfrac{1}{2}$ м, не пользуясь никакими измерительными приспособлениями?

2-й уровень

4. Собрано 100 кг грибов. Анализ показал 99% их влажности. После подсушки влажность стала равной 98%. Сколько весят грибы после подсушки?

5. Решить уравнение: $|\,x - 4{,}2\,| \cdot (\,x - 4{,}2\,) = -1$.

6. Определить границы, в которых должно заключаться m, чтобы корни уравнения $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ находились между (-2) и 4.

3-й уровень

7. При каких действительных x и y имеет место равенство:

$$x^2 + 5y^2 + 4xy + 2y + 1 = 0.$$

8. Найти площадь прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна m, а сумма синусов острых его углов представляет собой $sin\alpha + sin\beta = n$.

9. Могут ли числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ быть членами одной арифметической прогрессии? (Ответ обосновать.)

10 класс

1-й уровень

1. Могут ли тангенс и котангенс одного и того же угла быть соответственно равными $2+\sqrt{3}$ и $2-\sqrt{3}$? (Доказать.)

2. Решить неравенство: $(x+1)\cdot\sqrt{(x+4)\cdot(x+7)} \le 0$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины B прямого угла опущена высота BD на гипотенузу AC. Известно, что $|AB|=13$, $|BD|=12$. Найти площадь треугольника ABC.

2-й уровень

4. Упростить выражение: $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$.

5. Числа x, 3, y являются последовательными членами геометрической прогрессии. Найти числа x, y, если $x^4 = y\cdot\sqrt{3}$.

6. Построить график функции: $y=\cos(2\arccos x)$.

3-й уровень

7. Две моторные лодки, имеющие одинаковые скорости в стоячей воде, проходят по двум рекам одинаковое расстояние по течению и возвращаются обратно. В какой реке на это всё движение потребуется больше времени: в реке с быстрым или в реке с медленным течением? (Ответ обосновать математически.)

8. При каких значениях параметра a уравнение

$$\left(a+2x-x^2\right)\cdot\left(a+|\,x-1\,|-1\right)=0$$

имеет ровно три решения? Найти эти решения.

9. Решить уравнение: $\dfrac{\cos x}{\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2}=|\cos x|$.

11 класс

1-й уровень

1. Сторона AB треугольника ABC разделена на шесть равных частей с помощью пяти параллельных к стороне AC отрезков. Найти сумму длин этих отрезков, если длина стороны AC равна 10 см.

2. Найти все решения уравнения $|\,x^2-2\,|=1-x$, удовлетворяющие неравенству $|\,x\,|<1$.

3. Решить уравнение: $x^3-x^2-x=\dfrac{1}{3}$.

2-й уровень

4. Известно, что $d>c$, $a+b=c+d$, $a+d<b+c$. Запишите числа a, b, c, d в порядке их возрастания.

5. Решить уравнение: $2\cdot\log_9^2 x = \log_3 x\cdot\log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right)$.

6. Найти все числа A, при каждом из которых уравнение $5\sin x+2\cos x=A$ имеет решение.

3-й уровень

7. Двум бригадам общей численностью 18 человек было поручено в течение трёх суток организовать непрерывное дежурство по одному человеку. Первые двое суток дежурили рабочие первой бригады, распределив между собой время поровну. Известно, что во второй бригаде 3 девушки, остальные – юноши. Причём девушки второй бригады дежурили по 1 часу, а юноши распределили остаток времени поровну. Оказалось, что сумма продолжительности дежурств каждого юноши второй бригады и любого члена первой бригады меньше 9 часов. Сколько человек в первой бригаде?

8. Доказать, что при всех $x>0$ выполняется неравенство:

$$\operatorname{arctg} x < x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}.$$

9. При каком a графики функций $y=a\cdot\dfrac{x-|\,x\,|}{2}$ и $y=2x^2$ ограничивают фигуру с площадью $\dfrac{1}{3}$?

2008 год

8 – 9 классы

1-й уровень

1. Какова длина хорды, перпендикулярной диаметру, если она делит диаметр на отрезки длиной 2 см и 8 см?
2. Некто за две минуты сообщил новость двум жителям одного посёлка. Те двое, каждый через две минуты, сообщили новость ещё двоим жителям посёлка, а те через две минуты каждый ещё двоим и т. д. Через сколько времени новость узнают все 4094 жителя посёлка?
3. Упростить выражение: $\sqrt{a^2}\cdot\sqrt[3]{-a^3}+a\cdot\sqrt[5]{a^5}$.

2-й уровень

4. Найти сумму целых решений неравенства: $\dfrac{(x-1)^2(x-2)}{x-7}\le 0$.
5. Решить неравенство: $\sqrt{x+3}>x+1$.
6. Докажите, что сумму квадратов двух различных натуральных чисел, умноженную на сумму квадратов двух других различных натуральных чисел, можно представить в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

3-й уровень

7. Найти все a, при которых уравнение $x^2+2\left(a^2+1\right)\cdot|x|+a=0$ имеет два различных решения.
8. Докажите, что $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{99}-\dfrac{1}{100}=\dfrac{1}{51}+\dfrac{1}{52}+\ldots+\dfrac{1}{100}$.
9. Постройте график функции $y=tgx\cdot ctgx$.

10 класс

1-й уровень

1. Найти сумму всех корней уравнения: $\sqrt{2x^2-12x+17}=3-x$.
2. Решить уравнение: $(x-7)^2-|x-7|=30$.
3. Человек, находясь в стороне от дороги, заметил автобус. В какую точку дороги ему необходимо идти, чтобы успеть на автобус, двигаясь с как можно меньшей скоростью?

2-й уровень

4. Доказать неравенство: $\sqrt[5]{2}+7<8\cdot\sqrt[10]{2}$.
5. Найти все значения параметра a, при которых уравнение
$$cos2y+4a\,cos\,y+2a^2+1=0$$
не имеет решений.
6. Сколько решений имеет уравнение: $\sqrt{2-x^2}=|x|-1$?

3-й уровень

7. Найдите первый член геометрической прогрессии, если её третий член равен (-10), а его квадрат в сумме с седьмым членом даёт утроенный пятый член данной прогрессии.
8. Решить уравнение: $lg^2(x+1)=lg(x+1)lg(x-1)+2lg^2(x-1)$.
9. Укажите количество решений уравнения
$$cos5x+cos3x=2,$$
принадлежащих отрезку $[0;2005\pi]$.

11 класс

1-й уровень

1. Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если её средняя линия равна 5.

2. Тело движется по прямой так, что расстояние S (в метрах) от него до точки M этой прямой изменяется по закону $S(t)=t^2+t+2$ (t – время движения в секундах). Через сколько секунд после начала движения мгновенная скорость тела будет равна 5 м/с?

3. Найти утроенную площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=x^2$ и $y=2x-x^2$.

2-й уровень

4. Найти: $tg\left(arcsin\frac{1}{7}\right)$.

5. Решить уравнение: $log_2(3x+1)^4=16$.

6. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} A_y^x : P_{x-1}+C_y^{y-x}=126, \\ P_{x+1}=720. \end{cases}$$

3-й уровень

7. Найдите наибольшее значение выражения: $-3\cos x-4\sin x$.

8. Решить уравнение: $\sqrt{6x-x^2-5}+\sqrt{6x-x^2-8}=3+\sqrt{4x-x^2-3}$.

9. Сколько целых решений имеет неравенство: $x-1<log_6(x+3)$?

2009 год

8 – 9 классы

1-й уровень

1. Найти область определения функции: $y=\frac{5}{\sqrt{7x+3}}-\frac{1}{|x|-2}$.

2. Построить график функции $y=x^2+2x-8$. Используя построенный график, найти:
   а) множество значений функции;
   б) при каких значениях x функция принимает отрицательные значения.

3. Существует ли треугольник, у которого две стороны, одна – 6 м, другая – 12 м, образуют тупой угол, а периметр этого треугольника 26 м? Ответ обосновать.

2-й уровень

4. Вкладчик положил в банк на два разных счёта деньги на общую сумму 1500 грн. По первому из них банк выплачивает вкладчику 7% годовых, а по второму – 10% годовых. Через год вкладчик получил 120 грн процентных денег. Сколько гривен вкладчик положил на каждый из счетов?

5. Геометрическая прогрессия содержит числа $3-2\sqrt{2}$ и $\sqrt{2}+1$. Может ли число 1 принадлежать данной прогрессии? Ответ обосновать.

6. Высоты треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что $OC=AB$. Найти угол при вершине C.

3-й уровень

7. Упростить выражение: $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\alpha}}$, где $2\pi\le\alpha\le3\pi$.

8. Решить уравнение: $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1$.

9. Построить график функции: $y=\left|1-\sqrt{|x|-1}\right|$.

10 класс

1-й уровень

1. Сравнить числа: $\sin 10^{\circ}\cdot\cos 20^{\circ}$ и $\sin 40^{\circ}$. Ответ обосновать.

2. Построить на координатной плоскости множество точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют равенству $\sqrt{4-x^2}\cdot\left(y-x^2\right)=0$.

3. Найти первый член и знаменатель геометрической прогрессии $\{b_n\}$, $n\in N$, если $b_4-b_1=-9$ и $b_2+b_3+b_4=-6$.

2-й уровень

4. На прямой поставили несколько точек. Затем между каждыми двумя соседними точками поставили ещё по точке, и так несколько раз. Может ли после нескольких таких операций на прямой оказаться 2000 точек? Ответ обосновать.

5. Длины сторон AB и BC треугольника ABC равны 1 и 2 соответственно, $\angle ABC=120^{\circ}$. Докажите, что медиана BD треугольника перпендикулярна стороне AB.

6. Решить уравнение: $\log_3 x+\log_x 9=3$.

3-й уровень

7. Решить неравенство: $\sqrt{x^3-x^2-x+1}\geq 1-x$.

8. Сумма трёх векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ равна нулю. Рассмотрим три угла $(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$, $(\widehat{\bar{b},\bar{c}})$ и $(\widehat{\bar{a},\bar{c}})$. Доказать, что хотя бы два из этих углов тупые.

9. Решить уравнение: $\sin x=\dfrac{\sqrt{1+tg^2 x}}{4}$.

11 класс

1-й уровень

1. Сравнить числа: $2^{\sqrt{5}}$ и $3^{\sqrt{3}}$.

2. Вычислить: $\arccos\left(\sin\left(-\dfrac{\pi}{7}\right)\right)$.

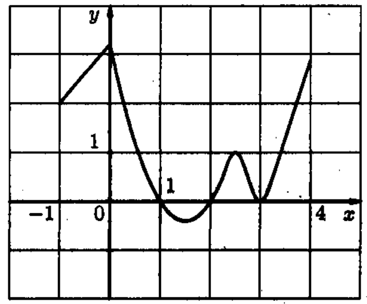
3. Найти множество значений функции $y(x)=\log_2(x-1)(5-x)$.

2-й уровень

4. На боковой стороне BC равнобедренного треугольника ABC, как на диаметре, построена окружность, пересекающая основание этого треугольника в точке D. Найдите квадрат расстояния от вершины A до центра данной окружности, если $AD=\sqrt{3}$ см, а угол $\angle ABC=120^{\circ}$.

5. Решить уравнение $3x^2+5y^2=345$ в целых числах.

6. График производной функции $y=f(x)$ изображён на рисунке. Укажите точку максимума этой функции.



3-й уровень

7. Решить уравнение: $\log_2\left(2x^2-4x+3\right)+\log_3\left(1+\sin^2\pi x\right)=0$.

8. Построить на координатной плоскости множество точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют равенству $\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^3=\dfrac{x^3+y^3}{2}$.

9. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=1-x^2$, $y=\sqrt{x}+1$, $x=1$.

2010 год[1]

8 – 9 классы

1-й уровень

1. Из чисел $\{-9; -8; -7; 3; 4; 5\}$ выбрали два числа и перемножили их. ***Наименьший*** возможный результат равен…:

А	Б	В	Г	Д
12	–72	–21	–36	–45

2. Какое из приведенных ниже чисел является рациональным?

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{17}$	$\sqrt{1{,}6}$	$\sqrt{81}$	$\sqrt{\dfrac{2}{9}}$	$-\sqrt{8}$

3. Вычислить значение выражения: $(\sqrt{2}+1)\cdot(1-\sqrt{2})$.

А	Б	В	Г	Д
$3-2\sqrt{2}$	$3+2\sqrt{2}$	–1	1	2

4. Найти интервалы, на которых функция $y = 2x + 3 - x^2$ убывает.

А	Б	В	Г	Д
$(1; +\infty)$	$(-1; 1)$	$(-\infty; -1)$	$(-1; 3)$	другой ответ

5. Решить неравенство: $|x-1| \geq -2$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3] \cup [1; +\infty)$	$[-3; 1]$	$\{\varnothing\}$	$(-\infty; +\infty)$	$[-1; +\infty)$

[1] Начиная с этого года контрольная работа содержит как тестовые задания, так и задания, требующие короткого или развёрнутого (полного) решения. Так, в заданиях 1-го уровня требуется выбрать правильный ответ и отметить его в таблице ответов. **Исправления в таблице запрещены!** На каждое задание 2-го уровня необходимо дать ответ и записать короткое решение. И наконец, 3-й уровень состоит из заданий с развёрнутым ответом.

6. Найти разность $N - M$, если $N = \dfrac{2}{9} + \dfrac{5}{6}$; $M = \dfrac{7}{15} + \dfrac{3}{10}$.

А	Б	В	Г	Д
$\dfrac{13}{45}$	$-\dfrac{1}{90}$	$-\dfrac{87}{90}$	$-\dfrac{2}{15}$	$\dfrac{1}{3}$

7. Катеты прямоугольного треугольника равны 5 см и 12 см соответственно. Найти радиус описанной около этого треугольника окружности.

А	Б	В	Г	Д
13 см	6,5 см	6 см	2,5 см	другой ответ

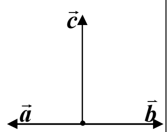
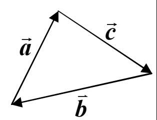
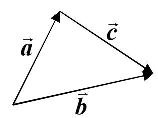
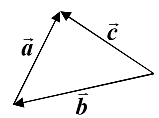
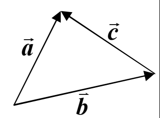
8. Дана геометрическая прогрессия $\ldots; (-8);\ b_k;\ (-1); \ldots$ Найти b_k.

А	Б	В	Г	Д
$-3{,}5$	$-4{,}5$	$\pm 2\sqrt{2}$	$\sqrt{8}$	$-\sqrt{8}$

9. Даны четыре числа: $\cos(-6\pi)$; $tg\dfrac{\pi}{6}$; $\sin 2\pi$; $ctg\dfrac{\pi}{2}$. Сколько из них больше, чем $\dfrac{1}{2}$?

А	Б	В	Г	Д
ни одного	одно	два	три	четыре

10. Указать рисунок, на котором изображены векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ такие, что $\bar{b} - \bar{a} = \bar{c}$.

А	Б	В	Г	Д
				

2-й уровень

11. В треугольнике $\boldsymbol{ABC}$ высота $\boldsymbol{BD}$ равна 11,2 см, а высота $\boldsymbol{AE}$ равна 12 см. Точка $\boldsymbol{E}$ лежит на стороне $\boldsymbol{BC}$ и $\boldsymbol{BE}:\boldsymbol{EC}=5:9$. Найти длину стороны $\boldsymbol{AC}$.

12. Разность $\sqrt{\left|40\sqrt{2}-57\right|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}$ является целым числом. Найти это целое число.

13. Найти координаты точки $\boldsymbol{D}$, лежащей на оси $\boldsymbol{OY}$ и равноудалённой от точек $\boldsymbol{E}(-1, 2, 1)$ и $\boldsymbol{F}(2, -3, 1)$.

14. Решить неравенство: $(\boldsymbol{x}-1)\sqrt{\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{x}-2}\geq 0$.

3-й уровень

15. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} |\boldsymbol{x}-1|+|\boldsymbol{y}-5|=1, \\ \boldsymbol{y}=5+|\boldsymbol{x}-1|. \end{cases}$$

16. Найти все значения параметра $\boldsymbol{a}$, при которых уравнение $(3\boldsymbol{a}-1)\boldsymbol{x}^2+2\boldsymbol{ax}+3\boldsymbol{a}-2=0$ имеет два различных корня.

17. Длины сторон некоторого треугольника представляют собой три последовательных члена возрастающей геометрической прогрессии. Сравните знаменатель этой прогрессии с числом 2.

18. Исключить угол α из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \boldsymbol{sin}\,\alpha+\boldsymbol{cos}\,\alpha=\boldsymbol{x}, \\ \boldsymbol{sin}^3\alpha+\boldsymbol{cos}^3\alpha=\boldsymbol{y}. \end{cases}$$

10 класс

1-й уровень

1. Какому промежутку принадлежит число $3+\boldsymbol{cos}\,3$?

А	Б	В	Г	Д
$[0;\ 2)$	$[2;\ 2{,}5)$	$[2{,}5;\ 3)$	$[3;\ 3{,}5)$	$[3{,}5;\ 9)$

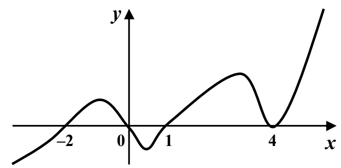
2. Заданы три числа $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{ln}\,6$; $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{lg}\,6$; $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{log}_2\,6$. Расположить эти числа в порядке возрастания.

А	Б	В	Г	Д
$b<a<c$	$b<c<a$	$a<c<b$	$a<b<c$	$c<a<b$

3. Дан правильный четырехугольник $\boldsymbol{ABCD}$. Среди приведенных ниже векторов укажите тот, который имеет ***наибольшую*** длину.

А	Б	В	Г	Д
$\overline{AB}+\overline{BC}$	$\overline{AB}+\overline{AC}$	$\overline{AB}+\overline{AD}$	$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}$	$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}$

4. На рисунке изображён график функции $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$. Сколько корней имеет уравнение $4^{f(x)}=0$?



А	Б	В	Г	Д
ни одного	один	два	три	больше трёх

5. Решить уравнение: $(\boldsymbol{x}+1)^2+|\boldsymbol{x}-1|=0$.

А	Б	В	Г	Д
0	1	-1	± 1	$\{\varnothing\}$

6. Решить неравенство: $\dfrac{\boldsymbol{x}-2}{\boldsymbol{x}}>\dfrac{1}{\boldsymbol{x}}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;0)\cup(0;3)$	$(1;+\infty)$	$(0;3)$	$(3;+\infty)$	$(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$

7. Какое геометрическое место точек определяют на координатной плоскости решения уравнения $(\boldsymbol{x}+3)\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}+3$?

А	Б	В	Г	Д
две прямые	одну точку	одну прямую	две точки	другой ответ

8. Если k – это количество корней уравнения $tgx = 1000$, то …

А	Б	В	Г	Д
$k = 0$	$0 < k \le 10$	$10 < k \le 100$	$100 < k \le 1000$	$k > 1000$

9. Какой из указанных ниже промежутков ***полностью*** принадлежит множеству решений неравенства $\sqrt{4-x} < 3$?

А	Б	В	Г	Д
$[-5; -1]$	$[-6; 0]$	$[4; 9]$	$[3; 5]$	$[1; 4]$

10. Дана геометрическая прогрессия: $\ldots; (-1);\ b_k;\ (-8); \ldots$. Найти b_k.

А	Б	В	Г	Д
$-3{,}5$	$-4{,}5$	$\pm 2\sqrt{2}$	$\sqrt{8}$	$-\sqrt{8}$

2-й уровень

11. Известно, что $f(x)$ линейная функция, отличная от постоянной, причём $f(0) = 1$. Известно также, что и функция $f^2(x) - 2f(x^2)$ линейна. Найти $f(2)$.

12. Доказать неравенство $log_c\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 1\right) \ge 0$, где $ab > 0, c > 1$.

13. Найти координаты точки C, лежащей на оси OX и равноудалённой от точек $A(1,2,3)$ и $B(2,3,4)$.

14. Решить уравнение: $|x-2|^{x^2-2x} = |x-2|^{2-x}$.

3-й уровень

15. Курс гривны по отношению к доллару падает на $28\frac{4}{7}\%$ в квартал.

Что выгоднее: а) сделать валютный вклад на год с начислением 60% годовых или б) конвертировать доллары в гривны и сделать вклад в гривнах с начислением 510% годовых? Ответ обосновать математически.

16. Изобразить на плоскости XOY геометрическое место точек, удовлетворяющих условию $\sqrt{2x^2 + 2y^2 - 2xy - 1} = y - x$.

17. Решить уравнение: $x = \frac{1}{5} arcctg(ctg5x + cos8x)$.

18. Центр O окружности радиуса 3 лежит на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC. Катеты треугольника касаются окружности. Найти площадь треугольника ABC, если известно, что длина отрезка OC равна 5.

11 класс

1-й уровень

1. Вычислить: $3^{log_3 14 - log_3 7}$.

А	Б	В	Г	Д
7	2	21	9	другой ответ

2. Найти наибольшее целое решение неравенства $|x-5| < 4$.

А	Б	В	Г	Д
7	8	9	10	11

3. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найти сумму первых 11 членов этой прогрессии.

А	Б	В	Г	Д
44	88	24	48	другой ответ

4. Определить количество корней уравнения $(x^2-9)(x-5)\sqrt{2-x} = 0$.

А	Б	В	Г	Д
4	3	2	1	действительных корней нет

5. Решить неравенство: $3^{log_3(1-x)} > log_3\frac{1}{27}$.

А	Б	В	Г	Д
$(1; 4)$	$(-\infty; 1)$	$(4; +\infty)$	$(-\infty; 4)$	$\{\varnothing\}$

6. Найти значение выражения $\frac{3}{5} sin 2\alpha$, если $tg\alpha = 0{,}2$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{6}{25}$	$-\frac{5}{13}$	$\frac{5}{13}$	$-\frac{3}{13}$	$\frac{3}{13}$

7. Скорость движения тела задана уравнением $\vartheta = 3t^2 + 2t$. Найти путь, пройденный телом за 10 с с момента начала движения.

А	Б	В	Г	Д
3200	320	900	1100	другой ответ

8. Найти множество, на котором функция $f(x) = x - 4\cdot\sqrt{x}$ возрастает.

А	Б	В	Г	Д
$[0; +\infty)$	$(0; +\infty)$	$(4; +\infty)$	$[0; 4]$	$(0; 4)$

9. Сколько различных стартовых пятёрок может создать тренер, если на тренировке присутствуют 10 баскетболистов?

А	Б	В	Г	Д
2	10	5	252	144

10. Найти значение m, при котором векторы $\vec{a}(2;-4;m)\perp\vec{b}(3;-1;5)$.

А	Б	В	Г	Д
0	–1	1	2	–2

2-й уровень

11. Показать, что уравнение $\sqrt{3x^2+5x-8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$ не имеет решений.

12. В какой точке графика функции $y=1-\ln x$ касательная к нему образует с осью абсцисс угол 135°?

13. Решить уравнение: $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x=10$.

14. В двух ящиках находится более 29 одинаковых деталей. Число деталей в первом ящике, уменьшенное на 2, более чем в 3 раза превышает число деталей во втором ящике. Утроенное число деталей в первом ящике превышает удвоенное число деталей во втором ящике, но менее чем на 60. Сколько деталей в каждом ящике?

3-й уровень

15. Известно, что $f(x)$ периодическая функция с периодом $T=\sqrt{2}$. Найти значение $f(\sqrt{8})$, если для данной функции выполняются условия: $3f^2(0)+7f(\sqrt{72})+4=0$ и $f^2(-\sqrt{2})+3f(\sqrt{8})+\frac{20}{9}=0$.

16. Решить неравенство: $\log_{\sin^2 x}(\cos x)\le\frac{1}{2}$.

17. В прямоугольном треугольнике ABC расположен прямоугольник $EKMP$ так, что сторона EK лежит на гипотенузе BC, а вершины M и P – на катетах AC и AB соответственно. Длина катета AC равна 3 см, а длина катета AB – 4 см. Найти длины сторон прямоугольника $EKMP$, если его площадь равна $\frac{5}{3}$ см^2, а периметр меньше 9 см.

18. Найти множество значений функции $y=\sin^2 x+\sin^2 2x$ и её первообразную.

2011 год

8 – 9 классы

1-й уровень

1. Для транспортировки 40 тонн груза на 1000 км можно воспользоваться услугами одного из трёх перевозчиков. Стоимость перевозки и грузоподъёмность автомобилей для каждого перевозчика указаны в таблице:

Перевозчик	Стоимость перевозки одним автомобилем (грн на 100 км)	Грузоподъёмность автомобилей (тонн)
I	**320**	**3,5**
II	**410**	**5**
III	**950**	**12**

Сколько гривен придётся заплатить за самую дешевую перевозку?

А	Б	В	Г	Д
38000	32800	19200	9500	другой ответ

2. Каждой числовой последовательности, заданной формулой n-го члена (левый столбец), поставьте в соответствие верное утверждение (правый столбец).

I) $x_n=n^2$	1) последовательность – арифметическая прогрессия
II) $y_n=2n$	2) последовательность – геометрическая прогрессия
III) $z_n=2^n$	3) последовательность не является прогрессией

А	Б	В	Г	Д
I-**3**; II-**1**; III-**2**	I-**2**; II-**1**; III-**3**	I-**1**; II-**3**; III-**2**	I-**2**; II-**3**; III-**1**	другой ответ

3. Внешний угол при основании равнобедренного треугольника равен 140°. Найти угол между боковыми сторонами этого треугольника.

А	Б	В	Г	Д
40°	70°	80°	100°	другой ответ

4. Через точку A окружности с центром O проведена касательная AB. Найдите радиус окружности, если $OB=8$, $\angle AOB=60^\circ$.

А	Б	В	Г	Д
$4\sqrt{3}$	8	$4\sqrt{2}$	4	другой ответ

5. Рост самого высокого ученика в классе составляет 104% от среднего роста учеников в классе, а рост самого маленького – 92% от среднего роста учеников в классе. Определите, сколько сантиметров составляет рост самого высокого ученика, если рост самого маленького равен 115 см.

А	Б	В	Г	Д
130	104	92	135	другой ответ

6. Найти целые корни уравнения $\sqrt{5x+1} = x - 1$.

А	Б	В	Г	Д
$\{0,7\}$	3	7	$\{\varnothing\}$	другой ответ

7. Решив пример: $\left(1\frac{1}{3}+2\frac{5}{6}\right):\left(0{,}75-1\frac{1}{6}\right)-15{,}6$, ученик получил следующие ответы по действиям:

1	2	3	4
$4\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{12}$	3,6	–25,6

В каком действии учеником была допущена ошибка?

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	ошибок нет

8. Сравните значения выражений $b = \frac{a+1}{\sqrt{a^2-1}}$ и $c = \frac{1}{a-1}$, если $1 < a < 1{,}4$.

А	Б	В	Г	Д
$b < c$	$b > c$	$b = c$	для сравнения не хватает данных	другой ответ

2-й уровень

9. Найти значение выражения: $\left(\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{27}\right)^2+7\right)\cdot\left(\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{27}\right)^2-7\right)$.

10. Решить неравенство: $\frac{\sqrt{x^2+5x-84}}{x-7} \geq 0$.

11. В городе N за последний год численность населения уменьшилась на 4%, а число безработных увеличилось на 5%. Сколько процентов от общего числа жителей составляют безработные, если год назад их было 8%?

12. В равнобедренном треугольнике с основанием AC проведена биссектриса угла C, которая пересекает боковую сторону AB в точке D. Точка E лежит на основании AC так, что $DE \perp DC$. Найти длину AD, если $CE = 2$.

3-й уровень

13. Найдите все значения k, при которых прямая $y = kx$ пересекает в трёх различных точках ломаную, заданную условием:

$$y = \begin{cases} 2x+4, \text{ если } x < -3 \\ -2, \text{ если } -3 \leq x \leq 3 \\ 2x-8, \text{ если } x > 3. \end{cases}$$

10 класс

1-й уровень

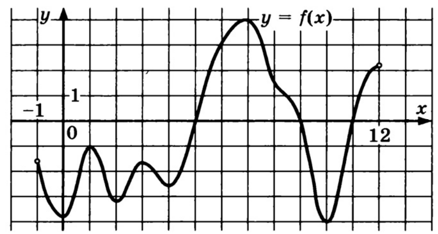
1. Чётной, среди приведённых ниже функций, является функция:

1. $y = -x - \sqrt{x}$; 2. $y = 1 - x \cdot |x|$; 3. $y = x^3 + x^2$;

4. $y = \frac{|x|}{x} - x^3$; 5. $y = \sqrt{x^2+2x+1} + \sqrt{x^2-2x+1}$.

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

2. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$, определённой на интервале $(-1;12)$. Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой $y = 18$.



А	Б	В	Г	Д
2	4	7	9	другой ответ

3. В арифметической прогрессии известны $a_1 = sin30^{\circ}$ и $a_2 = cos120^{\circ}$. Десятый член этой прогрессии равен:

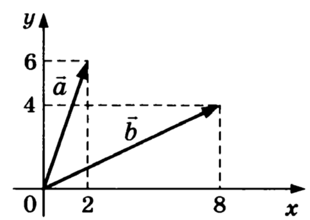
А	Б	В	Г	Д
– 8,5	– 0,5	0,5	8,5	другой ответ

4. Решением неравенства $\frac{\sqrt{2}-1,(4)}{x^2-4} < 0$ является множество:

А	Б	В	Г	Д
$x > \pm 2$	$x < -2,\ x > 2$	$-2 < x < 2$	$x < \pm 2$	другой ответ

5. Найдите сумму координат вектора $\bar{a} + \bar{b}$.

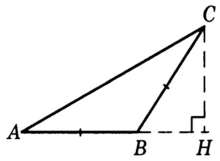
А	Б	В	Г	Д
2	8	14	20	другой ответ



6. Найдите площадь квадрата $ABCD$, вершины которого заданы координатами в прямоугольной декартовой системе координат $A(-4;-4)$, $B(-3;-1)$, $C(0;-2)$, $D(-1;-5)$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{6}$	$\sqrt{8}$	6	8	другой ответ

7. В треугольнике ABC: $AB = BC$, $AC = 10$, $\cos C = 0{,}8$, CH – высота. Найдите AH.



А	Б	В	Г	Д
0,08	0,04	4	8	другой ответ

8. Выражение $\dfrac{\sqrt{-a}-a}{\sqrt{a^2}}$, где $a \neq 0$, равно:

А	Б	В	Г	Д
$1-\dfrac{1}{\sqrt{-a}}$	$1-\dfrac{1}{\sqrt{a}}$	$1+\dfrac{1}{\sqrt{a}}$	$1+\dfrac{1}{\sqrt{-a}}$	не существует

2-й уровень

9. Для одного из предприятий-монополистов зависимость объёма спроса на продукцию q (единиц в месяц) от её цены p (тыс. грн) задаётся формулой: $q = 210 - 20p$. Определите максимальный уровень цены p (тыс. грн), при котором значение выручки предприятия за месяц $r = q \cdot p$ составит не менее 550 тыс. грн.

10. Решите уравнение: $\sqrt{16-(4x+5)^2} = 4 + \cos^2\dfrac{2\pi x}{5}$.

11. Пусть $(x_0; y_0)$ – решение системы $\begin{cases} \sqrt{x^2-8x+16} - y = 0, \\ y - |x+3| = 0. \end{cases}$ Найдите значение выражения $x_0 + y_0$.

12. В прямоугольный треугольник с катетами 2 и 6 вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найдите периметр квадрата.

3-й уровень

13. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых расстояние между корнями уравнения $ax^2 + (2a+2)x + (a+3) = 0$ больше 1.

14. Решите уравнение: $\dfrac{2\sin^2 x - 7\sin x - 4}{\sqrt{-3tgx}} = 0$.

11 класс

1-й уровень

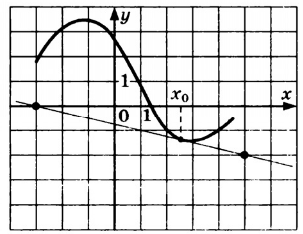
1. Во фруктовом отделе магазина находится 1000 фруктов, причём 76% из них не цитрусовые. Известно, что 65% цитрусовых составляют не апельсины. Сколько апельсинов в отделе?

А	Б	В	Г	Д
56	35	84	100	другой ответ

2. Вычислить: $\sqrt[6]{2\sqrt{7}+8} \cdot \sqrt[6]{8-2\sqrt{7}} \cdot \sqrt[3]{36}$.

А	Б	В	Г	Д
2	49	8	6	другой ответ

3. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной данной функции $f(x)$ в точке x_0.

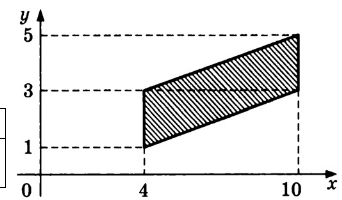


А	Б	В	Г	Д
–0,25	–1	0,25	0,5	другой ответ

4. Чётная функция $f(x)$ определена на всей числовой оси. Для функции $g(x) = x + (x-7) \cdot f(x-7) + 7$ вычислите сумму $g(5) + g(7) + g(9)$.

А	Б	В	Г	Д
–7	115	42	21	другой ответ

5. Найдите площадь четырёхугольника, изображенного на рисунке.

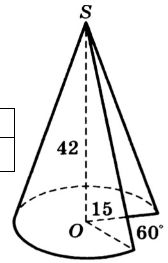


А	Б	В	Г	Д
24	12	18	30	другой ответ

6. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик имеет три окрашенных грани.

А	Б	В	Г	Д
0,001	0,008	0,02	0,5	другой ответ

7. Найдите объём V части конуса, изображённого на рисунке. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.



А	Б	В	Г	Д
2625	1000	3220	2420	другой ответ

8. Найдите точку максимума функции $y = t^3 - 6t^2 + 4$.

А	Б	В	Г	Д
–1	0	1	2	другой ответ

2-й уровень

9. Решить уравнение: $\frac{1}{2} - x^2 = \sqrt{\frac{1}{2} - x}$.

10. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна $2\sqrt{3}$, а двугранный угол при основании равен 60°. Найдите объём пирамиды.

11. Решить систему уравнений: $\begin{cases} y - \cos x = 0, \\ \left(6\sqrt{\cos x} - 1\right)\left(5y + 4\right) = 0. \end{cases}$

12. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = \frac{1}{x} - 1$, $x = \frac{1}{4}$, $x = 4$, $y = 0$.

3-й уровень

13. При каких значениях x следующие числа: $\log_2\left(2x^2 + 4x\right)$, $\log_2\left(8 - x^2 - 19x\right)$ и $\log_2\left(x^2 - 15x + 7\frac{1}{2}\right)$ являются длинами сторон некоторого равнобедренного треугольника?

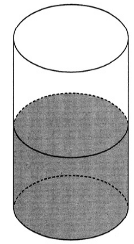
14. Имеет ли уравнение $12\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \left|4 - 5\cos x\right|$ хотя бы одну пару корней, расстояние между которыми не превосходит $\frac{\pi}{2}$?

2012 год

8 – 9 классы

1-й уровень

1. В цилиндрический сосуд налили 1700 см^3 воды. Уровень воды при этом достиг высоты 10 см. В жидкость полностью погрузили деталь. При этом уровень жидкости в сосуде поднялся на 5 см. Чему равен объём детали? Ответ выразите в см^3.



А	Б	В	Г	Д
340	1000	850	2550	другой ответ

2. Сколько решений имеет система $\begin{cases} y = x^2, \\ y = \sqrt{|x|} \end{cases}$?

А	Б	В	Г	Д
одно	два	три	четыре или больше	решений нет

3. Укажите приведённое квадратное уравнение, один из корней которого равен сумме, а второй равен произведению корней уравнения $x^2 + 3x - 10 = 0$.

А	$x^2 + 13x + 30 = 0$
Б	$x^2 + 7x - 30 = 0$
В	$x^2 + 7x + 3 = 0$
Г	$x^2 - 10x - 3 = 0$
Д	$x^2 - 10x - 30 = 0$

4. Разность d арифметической прогрессии равна 3. Какой формулой может быть задана эта арифметическая прогрессия?

А	Б	В	Г	Д
$a_n = 5n - 3$	$a_n = 5n + 3$	$a_n = 3n - 5$	$a_n = 5 - 3n$	$a_n = 3n$

5. Число $27^5 - 9^6$ делится на:

А	Б	В	Г	Д
4	5	7	11	13

6. Вычислить: $\sqrt{29 - 12\sqrt{5}} - \sqrt{29 + 12\sqrt{5}}$.

А	Б	В	Г	Д
– 6	– 4	1	4	6

7. Прямая $y = kx - 7{,}7$, параллельная прямой $y = 80x + 79$, проходит через точку:

А	Б	В	Г	Д
$(0{,}125;\ 2{,}2)$	$(1;\ 3)$	$(0{,}3;\ 0{,}1)$	$(0;\ 7)$	$(0{,}1;\ 0{,}3)$

8. Стороны первого четырёхугольника относятся как 2:4:3:6. Периметр второго, подобного ему, четырёхугольника составляет 150. Меньшая из сторон второго четырёхугольника равна:

А	Б	В	Г	Д
10	15	18	25	20

<u>2-й уровень</u>

9. Могут ли увидеть друг друга космонавты, летящие над поверхностью Земли на высоте 230 км, если расстояние между ними по прямой равно 2200 км? Радиус Земли 6370 км. Ответ обосновать (доказать).

10. Решить уравнение: $\dfrac{x-1}{2x+1} + \dfrac{x+1}{2x-1} = \dfrac{8x-1}{4x^2-1}$.

11. В треугольнике ABC: $AB = 15$ см, $AC = 10$ см. Может ли $\sin\angle B = \dfrac{3}{4}$? Ответ обосновать.

12. Ротвейлеры, составляющие 25% числа всех собак в вольере, получают 52% корма, остальное получают таксы. На сколько процентов больше получает корма один ротвейлер, чем одна такса?

<u>3-й уровень</u>

13. Постройте график функции $y = \dfrac{(x^2+7x+12)\cdot(x^2+3x+2)}{x^2+6x+8}$.

14. Известны координаты двух вершин равностороннего треугольника ABC: $A(0;\ 0)$, $B(1;\ 1)$. Найти координаты третьей вершины C.

10 класс

<u>1-й уровень</u>

1. Величина площади треугольника, образованного отрезком прямой $3x + 4y = 12$ и отрезками координатных осей, – натуральное число, остаток от деления которого на 5 равен:

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	0

2. Если разность корней уравнения $|x - 3p| = 4p$ равна 144, то значение параметра p равно:

А	Б	В	Г	Д
–12	12	18	0	–18

3. Укажите уравнение, корни которого $3+\sqrt{2}$ и $3-\sqrt{2}$.

А	$x^2+6x+7=0$
Б	$x^2-6x-7=0$
В	$x^2-6x+7=0$
Г	$x^2+6x-7=0$
Д	$x^2-7x+6=0$

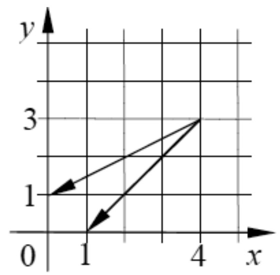
4. Если Билл богаче Джека на 25%, то Джек беднее Билла на…

А	Б	В	Г	Д
25%	40%	22,5%	22%	20%

5. Все корни уравнения $\sqrt{\sin x} = \sqrt{\cos x}$ образуют множество (при $n \in Z$):

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{\pi}{4}+\pi n$	$\frac{\pi}{4}+\pi n$	$\frac{3\pi}{4}+2\pi n$	$\frac{\pi}{4}+2\pi n$	$\frac{5\pi}{4}+2\pi n$

6. Вычислить скалярное произведение векторов, изображённых на рисунке.



А	Б	В	Г	Д
$6\sqrt{10}$	18	$-4\sqrt{3}$	–14	16

7. Выражение $\left(a^{-\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}:\left(a^{-1}-b^{-1}\right)^{-1}$ тождественно равно:

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{\sqrt{b}}$	$\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}$	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$\sqrt{b}-\sqrt{a}$	$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$

8. Обратной к функции $y=\frac{x}{x+1}$ является функция:

А	Б	В	Г	Д
$y=\frac{x+1}{x}$	$y=\frac{x}{1-x}$	$y=\frac{1}{x}$	$y=\frac{x-1}{x+1}$	$y=-\frac{1}{x}$

<u>2-й уровень</u>

9. В треугольнике длина основания равна 6, а величины углов, прилежащих к основанию, равны 60° и 45°. Найдите длину меньшей стороны данного треугольника.

10. Изобразить на координатной плоскости геометрическое место точек, удовлетворяющих условию: $9x^2-24xy+16y^2=1$.

11. Найти все значения x, для которых график функции $f(x)=|2x+14|$ расположен не ниже графика функции $g(x)=|3x+10|$.

12. Решить уравнение: $x^2-\cos 2x^2+1=0$.

<u>3-й уровень</u>

13. Три положительных числа являются последовательными членами возрастающей геометрической прогрессии. Если среднее из них увеличить в 2 раза, то они станут последовательными членами арифметической прогрессии. Найти число q, равное знаменателю исходной геометрической прогрессии.

14. Сколько целых чисел содержится во множестве всех решений неравенства $5-\frac{28}{x}<\sqrt{\frac{7}{x}}$?

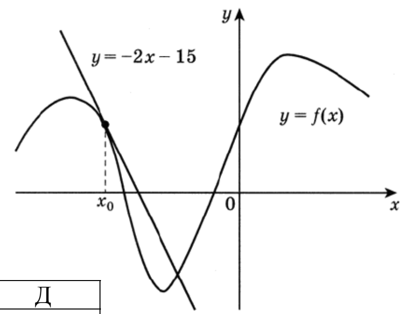
11 класс

<u>1-й уровень</u>

1. Значение выражения $6\cdot\left(\log_7\sqrt[13]{\sqrt[9]{\sqrt[3]{49}}}\right)^{-1}$ равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен:

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	0

2. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к этому графику, проведённая в точке с абсциссой x_0. Уравнение касательной показано на рисунке. Найдите значение производной функции $y=-\frac{1}{4}f(x)+5$ в точке x_0.



А	Б	В	Г	Д
–2	–0,25	0,5	5	7

3. Длина отрезка, на котором определена данная функция $y=\sqrt{\left(tg60^{\circ}-x\right)\cdot\left(x-\cos 30^{\circ}\right)}$, равна:

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5\sqrt{3}}{6}$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$	2

4. Если из 50 т железной руды выплавляют 20 т стали, содержащей 5% примесей, то процент примесей в руде составляет:

А	Б	В	Г	Д
62%	64,75%	70%	72,4%	75%

5. Оба корня уравнения $x^2-ax+4+2x=a^2$ равны нулю при a, равном:

А	Б	В	Г	Д
±1	1	±2	2	–1

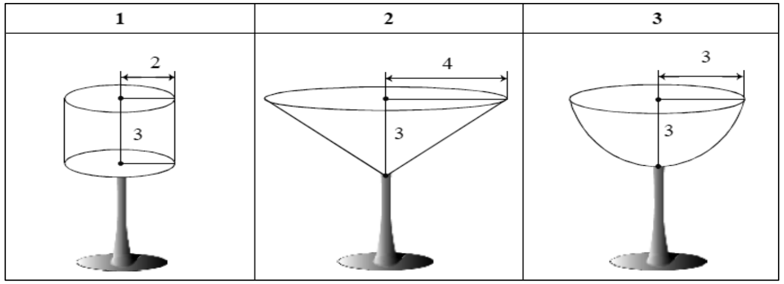
6. Область определения функции $y=\sqrt{8-(0,5)^x}$ совпадает с множеством:

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;-3]$	$[-3;+\infty)$	$(-\infty;3]$	$[3;+\infty)$	$[-3;3]$

7. В равнобедренной трапеции, описанной около окружности, основания равны 20 см и 5 см. Радиус данной окружности составляет:

А	Б	В	Г	Д
8 см	6 см	7,5 см	4 см	5 см

8. Укажите номер фужера, в который можно налить больше всего жидкости.



А	Б	В	Г	Д
1	2	3	1 и 2	2 и 3

2-й уровень

9. Длина каждого из трёх векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ равна 3. Вектор $\bar{a}$ перпендикулярен вектору $\bar{b}$, вектор $\bar{b}$ перпендикулярен вектору $\bar{c}$, длина вектора $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ равна $\sqrt{18}$. Найдите угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{c}$.

10. Производная функции $f(x)=4\cdot\left(x-x^3+x^9-x^{27}+\ldots+x^{\left(3^8\right)}-x^{\left(3^9\right)}+x^{\left(3^{10}\right)}\right)$ в точке $x=1$ равна натуральному числу. Найдите остаток от деления этого числа на 5.

11. Найти сумму целых корней уравнения $(2x-11)^{\log_7(49-6x)}=(49-6x)^{\log_7(2x-11)}$.

12. Сколько различных корней имеет уравнение $\sin 3x=\sin 7x$ на интервале $x\in(0;2\pi)$?

3-й уровень

13. При каком значении параметра b прямая $x=b$ делит область $D=\left\{(x,y)\mid -1\le y\le\sqrt{-x^2+6x-5}\right\}$ плоскости XOY на две области равной площади?

14. Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит точка C, а на другой – точки A и B, причём треугольник ABC – равнобедренный и его боковая сторона равна 13. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

2013 год

9 класс

1-й уровень

1. Упростите выражение: $b\cdot\sin 45^{\circ}+b\cdot\cos 135^{\circ}+b\cdot\sin 180^{\circ}$.

А	Б	В	Г	Д
0	b	$b\sqrt{2}$	$b\left(\sqrt{2}+1\right)$	другой ответ

2. Из данных уравнений подберите второе уравнение системы $\begin{cases} y=\dfrac{1}{x} \\ \ldots \end{cases}$ так, чтобы она имела два решения.

А	Б	В	Г	Д
$y=-x$	$y=x$	$y=x^2$	$y=-x^2$	другой ответ

3. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника в два раза меньше суммы внешних углов, взятых по одному при каждой вершине. Определите, сколько вершин имеет этот многоугольник.

А	Б	В	Г	Д
3	4	6	8	другой ответ

4. Результаты районной контрольной работы по математике в 9-х классах представили в виде диаграммы. Сколько учащихся получили отметку «2», если всего работу писали 320 девятиклассников?

А	Б	В	Г	Д
5 уч.	16 уч.	32 уч.	64 уч.	160 уч.

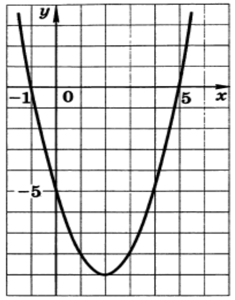
5. Упростите выражение: $\dfrac{\sqrt{\left(3\sqrt{2}-4\right)^2}+\sqrt{\left(3\sqrt{2}-5\right)^2}}{\sqrt{\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt{\sqrt{2}-1}}$.

А	Б	В	Г	Д
0,5	$\sqrt{2}/2$	1	$3\sqrt{2}$	2

6. Сократите дробь: $\dfrac{6a^2-a-1}{8a+b-2ab-4}$.

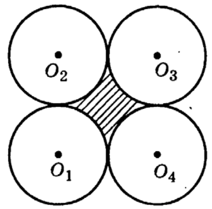
А	Б	В	Г	Д
$a+1$	$\dfrac{3a-1}{4-b}$	$\dfrac{3a+1}{4-b}$	$\dfrac{6a-1}{4+b}$	$\dfrac{6a+1}{b-4}$

7. На рисунке изображён график квадратичной функции. Какая из перечисленных ниже формул задаёт эту функцию?



А	$y = x^2 + 2x - 8$
Б	$y = x^2 - 4x - 5$
В	$y = x^2 - 2x - 8$
Г	$y = x^2 + 4x - 5$
Д	другой ответ

8. Четыре равные окружности попарно касаются внешним образом (см. рис.). Найдите площадь заштрихованной фигуры, если радиус каждой из окружностей равен 4 см.

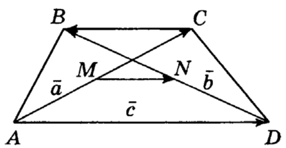


А	Б	В	Г	Д
16π см^2	64π см^2	$(1-\pi)$ см^2	$16(4-\pi)$ см^2	другой ответ

2-й уровень

9. В геометрической прогрессии $b_8 = 2^{-12}$ и $b_{10} = 2^{-14}$. Найдите b_1.

10. В трапеции $ABCD$: $\overline{AC} = \overline{a}$, $\overline{DB} = \overline{b}$ и $\overline{AD} = \overline{c}$. Точки M и N – середины диагоналей AC и BD соответственно (см. рис.). Выразите вектор $\overline{MN}$ через векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$.



11. Площадь прямоугольного треугольника равна 24 см^2, а его периметр – 24 см. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

12. Вчера число учеников, присутствовавших на уроках, было в 8 раз больше числа отсутствовавших. Сегодня не пришли ещё 2 ученика, и оказалось, что число отсутствующих составляет 20% от числа присутствующих. Сколько всего учеников в классе?

3-й уровень

13. Прямая проходит через точку $(0;3)$ и касается гиперболы $y = \dfrac{3}{x}$. В какой точке эта прямая пересекает ось абсцисс?

14. Решите неравенство: $(x^2+3x+12)\cdot(x^2+3x-10) < -120$.

10 класс

1-й уровень

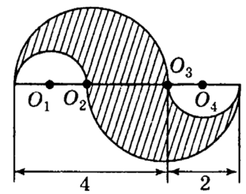
1. Если $\dfrac{x^3 - 3x^2p + 3xp^2 - p^3}{x^3 + 3x^2p + 3xp^2 + p^3} = \dfrac{8}{27}$ и $x = 35$, то значение величины p равно натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен:

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	0

2. Какое из чисел $\sin 1$, $\sin 3$, $\sin 5$, $\sin 7$, $\sin\dfrac{\pi}{2}$ является наименьшим?

А	Б	В	Г	Д
$\sin 1$	$\sin 3$	$\sin 5$	$\sin 7$	$\sin\dfrac{\pi}{2}$

3. Найдите длину границы заштрихованной фигуры, изображённой на рисунке.



А	Б	В	Г	Д
2π	4π	6π	8π	10π

4. В треугольнике ABC дано, что $\angle A = 73^\circ$, $\angle B = 85^\circ$. Чему равен угол между биссектрисой угла A и высотой, опущенной на сторону BC?

А	Б	В	Г	Д
$41{,}5^\circ$	22°	$31{,}5^\circ$	11°	$1{,}5^\circ$

5. Сколько решений имеет уравнение $(x+1)\cdot \sin x - \sqrt{3}\cdot x = \sqrt{3}$?

А	Б	В	Г	Д
одно	два	больше двух	нет решений	другой ответ

6. Укажите уравнение прямой, перпендикулярной прямой $7x + 9y = 0$.

А	Б	В	Г	Д
$7x+9y=0$	$9x-7y=0$	$7x-9y=0$	$9x+7y=0$	$49x-81y=0$

7. Сумма целочисленных решений неравенства $(-x^2-4x-3)\cdot\sqrt{x+4} \ge 0$ равна:

А	Б	В	Г	Д
−10	−9	−8	−7	−6

8. Нечётной среди приведённых ниже функций является:

А	$y=\left(\lvert x\rvert-x\right)\left(\lvert x\rvert+1\right)$
Б	$y=\lvert 1-2x\rvert+\lvert 1+2x\rvert$
В	$y=\dfrac{1-x}{1+x}$
Г	$y=\dfrac{\lvert x\rvert}{x}-x\cdot\lvert x\rvert$
Д	$y=(x-1)(x+1)$

2-й уровень

9. Решите уравнение: $\sqrt{x^3+3x^2-16x+\sqrt{2}-1}=-1-2x^2$.

10. Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют общее начало в вершине равнобедренного треугольника, а их концы находятся в вершинах при основаниях этого треугольника. Найдите угол между векторами $\dfrac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$ и $\dfrac{\bar{a}-\bar{b}}{2}$.

11. Найдите значение a, при котором расстояние между точками пересечения параболы $y=1-x^2$ с прямой $y=a$ составляет $\sqrt{5}$.

12. Решите уравнение: $\left(4\cos^2 x+4\cos x-3\right)\cdot\sqrt{5\sin x}=0$.

3-й уровень

13. Постройте график функции $y=\dfrac{\sqrt{-x}+\left|4-\sqrt{-x}\right|}{2}$.

14. Известно, что внутренние углы некоторого выпуклого многоугольника, наименьший угол которого равен 120°, образуют арифметическую прогрессию с разностью 5°. Определите число сторон этого многоугольника.

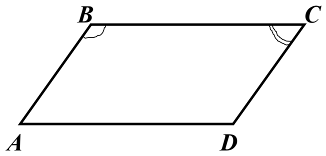
11 класс

1-й уровень

1. Производная функции $y=\cos\dfrac{\pi}{4}$ равна:

А	Б	В	Г	Д
-1	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	1

2. Если в параллелограмме $ABCD$ $\sin C=\dfrac{\sqrt{51}}{10}$, то $\cos B$ равен:



А	Б	В	Г	Д
–0,75	–0,7	–0,2	0,7	0,8

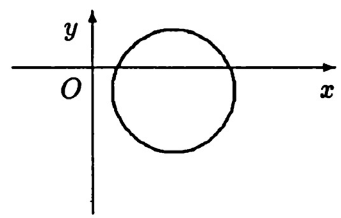
3. Известно, что для любого $x>0$ справедливо $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x+1}$. Тогда $f(x)=\ldots$:

А	Б	В	Г	Д
$x+1$	$\dfrac{1}{x+1}$	$\dfrac{x}{x+1}$	$\dfrac{1}{x-1}$	$\dfrac{x}{x-1}$

4. Множество значений функции $f(x)=7^{-x}$ на промежутке $x\in[-3;-2]$ совпадает с промежутком, длина которого равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен:

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	0

5. Выберите уравнение, которое задаёт множество точек, наиболее точно соответствующее рисунку.



А	$x^2+8x+y^2-6y-12=0$
Б	$x^2-8x+y^2+6y+15=0$
В	$x^2+8x+y^2-6y+7=0$
Г	$x^2-8x+y^2+6y+7=0$
Д	$x^2+8x+y^2-6y+15=0$

6. Катеты треугольника равны $\log_4 9$ и $\log_3 16$. Тогда площадь данного треугольника равна:

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

7. Известно, что $3/4$ работающих в учреждении – экономисты, остальные программисты. Доля кандидатов наук среди программистов равна $1/3$, а среди всех работников – $2/3$. Тогда доля кандидатов наук среди экономистов равна:

А	Б	В	Г	Д
$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{9}$

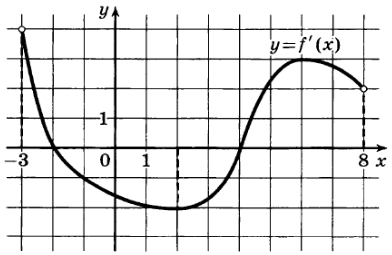
8. При повороте вокруг начала координат точка $A(6;8)$ отобразилась на точку $A_1(8;6)$. Тогда косинус угла поворота равен:

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{24}{25}$

2-й уровень

9. Треугольник $\boldsymbol{ABC}$ вписан в окружность радиуса $\sqrt{2}$. Его вершины делят эту окружность на три части в отношении $1:2:3$. Найдите сторону правильного треугольника, площадь которого равна площади данного треугольника $\boldsymbol{ABC}$.

10. На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3;8)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$.



11. Сколько различных действительных корней имеет уравнение $\sqrt{x}\cdot\left(x^4-\sqrt{5}+\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)=0$? Ответ обосновать.

12. Решить уравнение: $ctg\frac{6\pi}{x}\cdot\sqrt{x^2-9}=0$.

3-й уровень

13. Найти площадь области, ограниченной линиями $y=\left|x^2-4\right|$, $x=-1$ и отрезком $[-1;2]$ оси абсцисс.

14. Решить неравенство: $10\cdot 3^{\log_3^2 x}\le x^3+x^{\log_3 x}$.

2014 год

9 класс

1-й уровень

1. В арифметической прогрессии известны $a_1 = \sin 30^{\circ}$ и $a_2 = \cos 120^{\circ}$. Десятый член этой прогрессии равен:

А	Б	В	Г	Д
$-9{,}5$	$-8{,}5$	$0{,}5$	$-0{,}5$	$8{,}5$

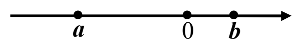
2. Все значения a, при которых парабола $y = a - 2x - x^2$ полностью расположена ниже оси абсцисс, определяются неравенством:

А	Б	В	Г	Д
$a<-1$	$a>-2$	$a>-3$	$a>-4$	$a>-1$

3. Из прямых $A)$ $x-2y=3$; $B)$ $2x+2y=5$; $C)$ $-2x+4y=\pi$; $D)$ $2x+4y=6$ параллельны следующие прямые:

А	Б	В	Г	Д
A и B	A и C	A и D	B и D	C и D

4. На координатной прямой точками изображены числа a и b (см. рис.). Определите, какое из чисел является наибольшим: $2a$, $2b$, $b+a$ или $b-a$.



А	Б	В	Г	Д
$b+a$	$2a$	$b-a$	$2b$	для ответа не хватает данных

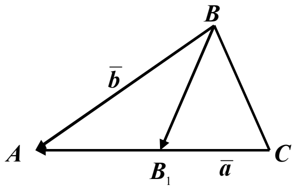
5. Найдите значение выражения $3x^2-2x-1$ при $x=\frac{1-\sqrt{2}}{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$-0{,}5$	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\frac{1}{2}$

6. Сократите дробь: $\frac{6x^2+2}{(x+1)^3-(x-1)^3}$.

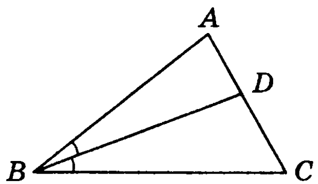
А	Б	В	Г	Д
$x+1$	$3x^2+1$	1	$\frac{2}{3}$	другой ответ

7. В треугольнике ABC: $\overline{BA}=\overline{b}$ и $\overline{CA}=\overline{a}$. Отрезок BB_1 – медиана треугольника ABC. Выразите вектор $\overline{BB_1}$ через векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$.



А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{2}\overline{a}-\frac{1}{2}\overline{b}$	$\frac{1}{2}\overline{b}-\overline{a}$	$\frac{1}{2}\overline{a}+\frac{1}{2}\overline{b}$	$\overline{b}-\frac{1}{2}\overline{a}$	другой ответ

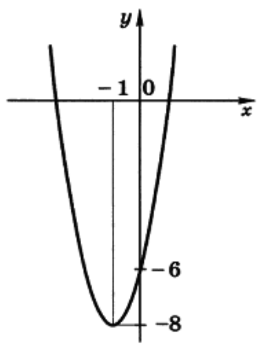
8. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Точка D делит сторону AC на отрезки AD и DC, соответственно равные 3 см и 5 см. Найдите сторону AB, если сторона BC равна 10 см.



А	Б	В	Г	Д
3 см	5 см	10 см	6 см	другой ответ

2-й уровень

9. В прошлом году на два самых популярных факультета университета было подано 1100 заявлений. В этом году число заявлений на один из этих факультетов уменьшилось на 20%, а на другой увеличилось на 30% и стало равным 1130. Сколько заявлений подано на каждый из двух факультетов в этом году?



10. Найдите координаты точек, в которых парабола, изображённая на рисунке, пересекает ось абсцисс.

11. Решите уравнение:

$$(x+1)+(x+5)+(x+9)+\ldots+(x+157)=3200.$$

3-й уровень

12. Решите неравенство: $\left(\frac{\sqrt{15}+\sqrt{17}}{8}-1\right)\cdot(4x-13)<0$.

10 класс

1-й уровень

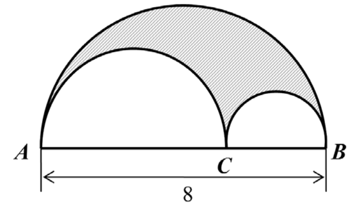
1. Если $|a|\geq 1$, то выражение $\sqrt{1-\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}}-\sqrt{1+\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}}$ равно:

А	Б	В	Г	Д
-2	2	$\frac{2}{a}$	$-\frac{2}{a}$	0

2. Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha=0{,}6$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

А	Б	В	Г	Д
0,6	0,8	1	– 0,6	– 0,8

3. На отрезке AB, равном 8, отмечена точка C и на отрезках AB, AC и BC, как на диаметрах, построены полуокружности. Определите длину границы заштрихованной фигуры, изображённой на рисунке.

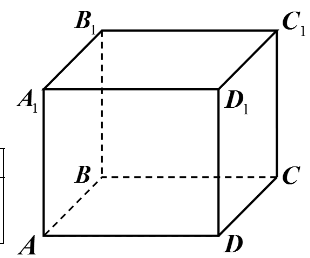


А	Б	В	Г	Д
4π	8π	16π	24π	другой ответ

4. Укажите множество всех решений неравенства $\frac{1}{x-1}<\frac{1}{x+1}$.

А	Б	В	Г	Д
$(-1;1)$	$(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$	$(-\infty;-1)$	$\{\varnothing\}$	$(-\infty;+\infty)$

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Расположите по возрастанию следующие скалярные произведения: $a=\overline{AD}\cdot\overline{C_1D_1}$, $b=\overline{BC}\cdot\overline{D_1A_1}$ и $c=\overline{AA_1}\cdot\overline{BB_1}$.



А	Б	В	Г	Д
$a<b<c$	$b<a<c$	$b<c<a$	$c<b<a$	$c<a<b$

6. Наибольший член числовой последовательности, заданной формулой $a_n = 20 + 18n - 2n^2$, $n \in N$, равен:

А	Б	В	Г	Д
20	30	50	60	80

7. Сумма всех корней уравнения $(x-2)\cdot\left(x^2 + (\sqrt{x})^2 - 2\right) = 0$ равна:

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	-1	-2

8. Графики функций $y = \dfrac{x+2}{|x+2|}$ и $y = |x - a|$ не имеют общих точек при всех a из множества:

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty; -3]$	$(-\infty; 3)$	$(-3; +\infty)$	$(-3; 3)$	$[3; +\infty)$

2-й уровень

9. Решите уравнение: $\sqrt{5-x} - \sqrt{7-x} + \sqrt{2x-15} = 2$.

10. Две окружности касаются друг друга и сторон прямого угла. Найдите отношение радиусов этих окружностей.

11. В трапеции $PQRS$ длина основания QR равна 10, длина диагонали QS равна 19, а величина угла QSP равна 30°. Определите (и докажите), что больше: длина основания QR или длина стороны RS?

3-й уровень

12. Найдите целочисленные решения неравенства $\dfrac{x^2 + 4x - 5}{1 + tg^2 \dfrac{\pi x}{2}} \le 0$.

11 класс

1-й уровень

1. Дробь $\dfrac{arcctg(-1)}{arcsin\left(cos\dfrac{7}{4}\pi\right)}$ равна:

А	Б	В	Г	Д
0,5	1	3	-3	$-0{,}5$

2. Какой из приведённых наборов отрезков и углов может определять некоторый треугольник ABC?

А	Б	В	Г	Д
$AB = 3$, $BC = 5$, $\angle ACB = 105^\circ$	$AB = 5$, $BC = 7$, $AC = 14$	$AB = 10$, $\angle ABC = 88^\circ$, $\angle CAB = 95^\circ$	$\angle BAC = 63^\circ$, $\angle ABC = 31^\circ$, $\angle ACB = 58^\circ$	$AB = 2$, $BC = 1$, $\angle ABC = 1^\circ$

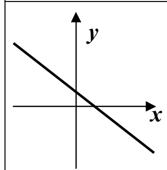
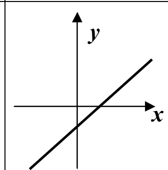
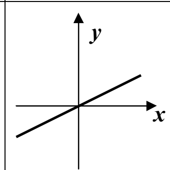
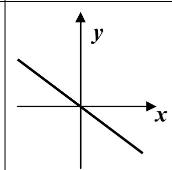
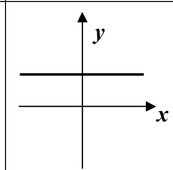
3. Укажите функцию, которая является обратной к функции $y = 2^x + 1$ на интервале $(-\infty; +\infty)$.

А	Б	В	Г	Д
$y = log_2(x-1)$	$y = \sqrt{x-1}$	$y = -\left(2^x + 1\right)$	$y = \dfrac{1}{2^x + 1}$	такой функции не существует

4. Подберите функцию $y = f(x)$ таким образом, чтобы выполнялось равенство $xe^x = f'(x)$.

А	Б	В	Г	Д
$f(x) = x\left(e^x + 1\right)$	$f(x) = e^x(x-1)$	$f(x) = e^x + x$	$f(x) = x\left(e^x - 1\right)$	$f(x) = e^x(x+1)$

5. Среди приведенных графиков укажите эскиз графика функции $y = (lg 3)\cdot x + cos\dfrac{\pi}{2}$.

А	Б	В	Г	Д
				

6. Найдите значение выражения: $log_3\left(3^2+3^3\right)$.

А	Б	В	Г	Д
$2+log_3 4$	3	5	6	$3+log_3 12$

7. На окружности произвольным образом отметили 12 точек. Чему равно наибольшее количество хорд с концами в этих точках?

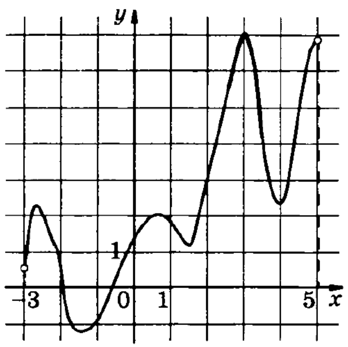
А	Б	В	Г	Д
132	66	33	24	12

8. Пусть заданы точки $A(-1;1)$, $B(-1;3)$, $C(5;b)$. Найдите площадь треугольника ABC.

А	Б	В	Г	Д
ответ зависит от значения параметра b	4	5	6	8

2-й уровень

9. Функция $y=f(x)$ определена на интервале $(-3;5)$. На рисунке изображён график её производной. Определите, сколько существует касательных к графику функции $y=f(x)$, которые параллельны прямой $y=3x-5$ или совпадают с ней. Ответ обосновать.



10. Найдите наименьшее целое значение функции $y=\sqrt{16-13\cdot 3^{-|x|}}$. Ответ обосновать.

11. Решите уравнение: $\sqrt{1-cos\,x}=sin\,x$.

3-й уровень

12. Решите неравенство: $x\,log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}-x\right)\geq |x|$.

2015 год

9 класс

1-й уровень

1. В магазине проходит рекламная акция: при покупке пяти шоколадок «Milka» – шестая в подарок. Стоимость одной шоколадки 24 гривны. Какое наибольшее количество шоколадок «Milka» может приобрести и получить по акции покупатель, который готов потратить на них не более 400 гривен? В ответе укажите общее количество шоколадок.

А	Б	В	Г	Д
16	18	20	22	другой ответ

2. Уравнение $-x^2+ax-2=0$ не имеет решений при

А	$a<\pm 2\sqrt{2}$
Б	$a\in\left(-2\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)$
В	$a>\pm 2\sqrt{2}$
Г	$a\in\{\varnothing\}$, то есть уравнение всегда имеет два корня
Д	$a\in\left(-\infty;-2\sqrt{2}\right)\cup\left(2\sqrt{2};+\infty\right)$

3. Выражение $\sqrt{a^2-7a+13-\sqrt{9-6a+a^2}}$ при $a=3{,}5$ равно

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\sqrt{5}}{2}$	не существует	1,5	– 0,5	0,5

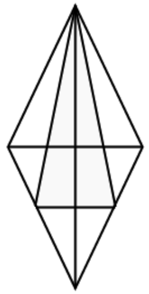
4. Выражение $b\cdot sin120^o+b\cdot cos150^o+b\cdot sin90^o$ равно

А	Б	В	Г	Д
b	$b\left(\sqrt{2}-1\right)$	$b\left(\sqrt{3}+1\right)$	$b\sqrt{3}$	0

5. Если число A равно 663% от 665, а число B равно 664% от 664, то $A-B$ равно

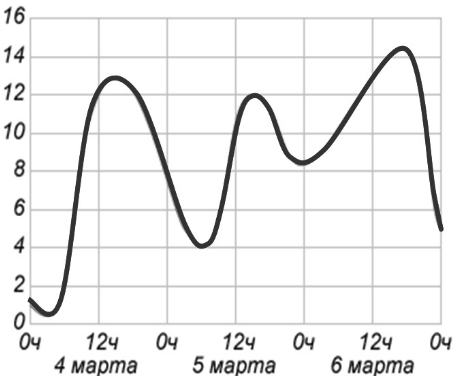
А	Б	В	Г	Д
0,001	0,1	– 0,01	– 0,1	0

6. Одна вершина треугольника совпадает с вершиной ромба, а две другие – с серединами сторон ромба, не проходящих через эту вершину (см. рис.). Площадь закрашенного треугольника относится к площади ромба как:



А	Б	В	Г	Д
$\frac{5}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{9}$

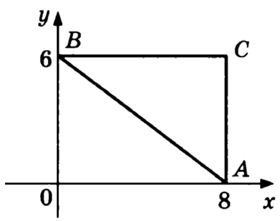
7. На рисунке изображён график изменения температуры воздуха на протяжении трёх дней. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали – значение температуры в градусах Цельсия.



Определите по рисунку, какой была наибольшая температура воздуха 5 марта. Ответ дайте в градусах Цельсия.

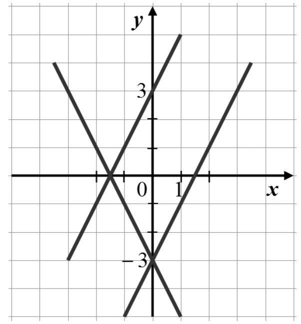
А	Б	В	Г	Д
8	9	10	11	12

8. Найдите абсциссу центра окружности, описанной около треугольника, вершины которого имеют координаты $(8;0)$, $(0;6)$, $(8;6)$.



А	Б	В	Г	Д
3	3,5	4	4,5	другой ответ

9. Какие из следующих прямых отсутствуют на рисунке?
   I. $y = 2x + 3$
   II. $y = 2x - 3$
   III. $y = -2x + 3$
   IV. $y = -2x - 3$



А	Б	В	Г	Д
I	II	III	IV	на рисунке отсутствуют две из указанных прямых

<u>2-й уровень</u>

10. Решить неравенство $\left(2\sqrt{6} - 5\right)\left(3x - 7\right) < 0$.

11. Найдите острый угол между диагоналями параллелограмма, если его большая сторона равна $\frac{\sqrt{7}}{2}$ см, а диагонали равны $\sqrt{3}$ см и 1 см.

<u>3-й уровень</u>

12. Найти сумму корней уравнения $x^3 - 3x + 2 = 0$.

10 класс

1-й уровень

1. Выражение $\dfrac{\sqrt{a^2 - a\sqrt{8}+2}}{\sqrt{2}-a}$ при $a<1$ равно

А	Б	В	Г	Д
-1	1	$\sqrt{2}+a$	$a-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$

2. Выражение $\dfrac{1}{1-2\cos 30^{\circ}}+\dfrac{1}{1+2\sin 60^{\circ}}$ равно

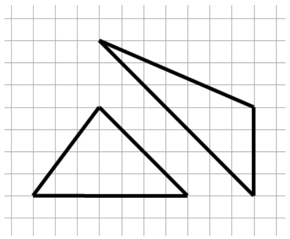
А	Б	В	Г	Д
1	-1	не определено	2	-2

3. Площадь треугольника, у которого длины катетов совпадают с корнями уравнения $x^2-2\sqrt{5}x+3=0$, равна

А	Б	В	Г	Д
3	1,5	2	1	$(\sqrt{5}+\sqrt{2})/2$

4. Изображенные на рисунке треугольники

А	подобны
Б	имеют равные периметры
В	равновелики
Г	имеют разные площади
Д	один из треугольников прямоугольный



5. В геометрической прогрессии $b_5 \cdot b_{11}=8$ величина b_8 равна

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	$-2\sqrt{2}$	$\pm 2\sqrt{2}$	$-3\sqrt{2}$

6. Сумма целых решений неравенства $\left(\dfrac{1}{|x-1|}+2\right)(x^2-4)\le 0$ равна

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	-1	другой ответ

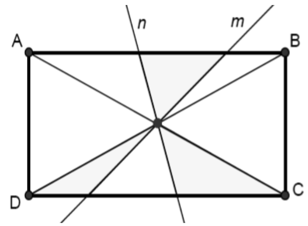
7. Графический способ решения неравенства $|x+2|>|x|$ дает ответ

А	Б	В	Г	Д
$x>-1$	$-1<x<0$	$x>-2$	$x<0$	$-2<x<0$

8. В параллелограмме $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке E, $\overline{CD}=\bar{a}$, $\overline{AD}=\bar{b}$, $\overline{BE}=\bar{c}$. Укажите верное утверждение.

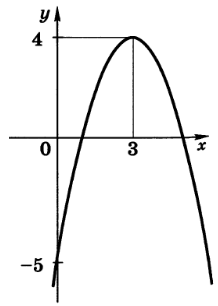
А	Б	В	Г	Д
$\bar{c}=\dfrac{\bar{a}-\bar{b}}{2}$	$\bar{c}=\dfrac{\bar{b}-\bar{a}}{2}$	$\bar{c}=\dfrac{2\bar{a}+\bar{b}}{2}$	$\bar{c}=\dfrac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$	$\bar{c}=-\dfrac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$

9. В прямоугольнике $ABCD$ прямые m и n проходят через точку пересечения диагоналей (см. рис.). Площадь фигуры, состоящей из трех закрашенных треугольников, равна 12 см^2. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна



А	Б	В	Г	Д
24 см^2	30 см^2	36 см^2	42 см^2	48 см^2

2-й уровень



10. Найти координаты точек, в которых парабола, изображенная на рисунке, пересекает ось абсцисс.

11. На сколько процентов следует увеличить радиус круга, чтобы его площадь увеличилась на 44% ?

3-й уровень

12. Решить неравенство $(x^2+2x)^2+3(x+1)^2>3$.

11 класс

1-й уровень

1. Дробь $\dfrac{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[5]{x^3}}{x^{-4/15}}$ равна 64, если

А	Б	В	Г	Д
$x=\dfrac{1}{32}$	$x=16$	$x=32$	$x=64$	$x=128$

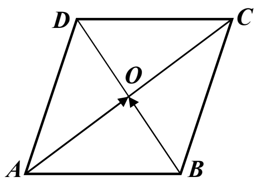
2. Прямые $y+ax+1=0$ и $y=2x+2$ не имеют общих точек, если

А	Б	В	Г	Д
$a=1$	$a=-2$	$a=-1$	$a=2$	таких a нет

3. Сумма $1+\sin^2\dfrac{\pi}{8}+\sin^4\dfrac{\pi}{8}+\sin^6\dfrac{\pi}{8}+\dots$ равна

А	Б	В	Г	Д
$4-2\sqrt{2}$	$4+2\sqrt{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$	$2\sqrt{2}-2$

4. Диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O и равны 4 и 11 (см. рис.). Найдите скалярное произведение векторов $\overline{AO}$ и $\overline{BO}$.



А	Б	В	Г	Д
44	22	15	7	0

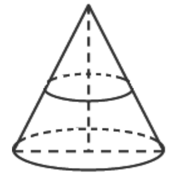
5. Произведение корней уравнения $x^2+\sqrt{x^2}-12=0$ равно

А	Б	В	Г	Д
-16	-12	-9	12	1

6. Область определения функции $y=\sqrt{\dfrac{\cos 3}{5-2x}}$ совпадает с множеством

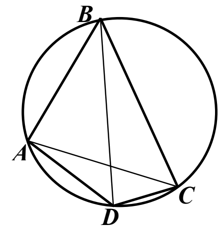
А	Б	В	Г	Д
$\left(\dfrac{5}{2};+\infty\right)$	$\left(-\infty;\dfrac{5}{2}\right)$	$\left(\dfrac{2}{5};+\infty\right)$	$\left(-\infty;\dfrac{2}{5}\right)$	$\left(-\dfrac{2}{5};\dfrac{5}{2}\right)$

7. Объем конуса равен 20. Через середину его высоты провели плоскость, параллельную основанию. Найдите объём конуса, отсекаемого этой плоскостью.



А	Б	В	Г	Д
8	4	3,5	2,5	другой ответ

8. Вокруг четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность (см. рис.). Найдите угол $\angle CAD$, если $\angle ABC=50^\circ$ и $\angle ABD=33^\circ$. Ответ дайте в градусах.



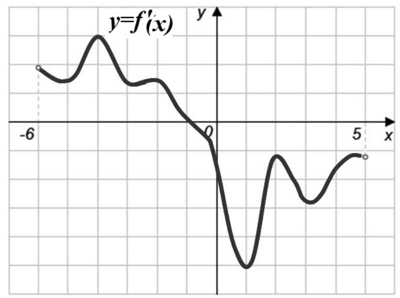
А	Б	В	Г	Д
30°	25°	17°	15°	10°

9. Тело движется прямолинейно, и его скорость изменяется по закону $V(t)=\left(3t^2-6t\right)$ м/с. В момент времени $t=2$ с тело находится на расстоянии $S=1$ м от начала отсчета. Укажите формулу, которой задается зависимость расстояния от времени.

А	$S(t)=t^3-3t^2+4$
Б	$S(t)=t^3-3t^2+5$
В	$S(t)=3t^3-3t^2+1$
Г	$S(t)=t^3+3t^2-20$
Д	другая формула

2-й уровень

10. На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-6;5)$, то есть график $y=f'(x)$. В какой точке отрезка $[-5;-1]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение? Ответ обосновать.



11. Решить уравнение $\cos 3x+\cos\dfrac{5}{2}x=2$.

3-й уровень

12. Решить неравенство $\dfrac{6-\lg x^4}{3+2\lg x^2}<2$.

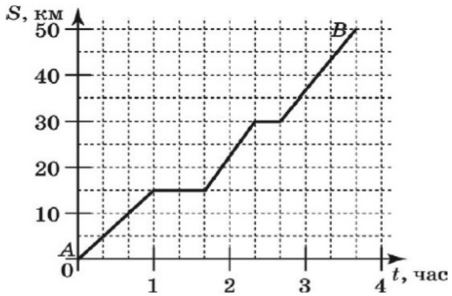
2016 год

9 класс

1-й уровень

Задание 1

1.а. На рисунке изображён график, описывающий прямолинейное движение автомобиля от пункта $\boldsymbol{A}$ до пункта $\boldsymbol{B}$. По горизонтальной оси отложено время (*в часах*), по вертикальной – расстояние от пункту $\boldsymbol{A}$ (*в километрах*). В пути автомобиль дважды останавливался. Определите в минутах суммарную продолжительность остановок.



А	Б	В	Г	Д
20	30	45	60	другой ответ

1.б. Велосипедист проезжает 60 км со скоростью 12 км/ч. Если он увеличит скорость на 25%, то время на этот путь сократится на:

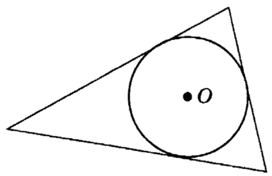
А	Б	В	Г	Д
30%	25%	20%	24%	35%

Задание 2

2.а. Площадь треугольника, у которого длины катетов совпадают с корнями уравнения $\boldsymbol{x}^2 - 2\sqrt{5}\cdot\boldsymbol{x} + 3 = 0$, равна …

А	Б	В	Г	Д
3	1,5	2	$\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)/2$	другой ответ

2.б. Два угла треугольника равны 80° и 70°. Определите, под каким углом видна его бóльшая сторона из центра вписанной в него окружности.



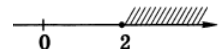
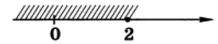
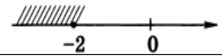
А	Б	В	Г	Д
55°	75°	130°	20°	другой ответ

Задание 3

3.а. Числовая последовательность задана формулой $\boldsymbol{c_n} = \boldsymbol{n}^2 - 1$. Какое из указанных чисел является членом этой последовательности?

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

3.б. Дано неравенство $3\boldsymbol{x} + 5 \le 7\boldsymbol{x} - 3$. Укажите, на каком рисунке изображено множество его решений.

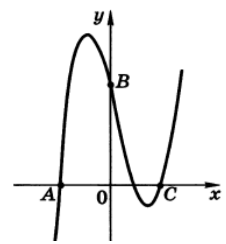
А	
Б	
В	
Г	
Д	такого рисунка нет

2-й уровень

Задание 4

Найдите значения переменных $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, при которых выражение $\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 - 10\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y}$ принимает ***наименьшее*** значение. Укажите это наименьшее значение.

Задание 5



На рисунке изображён график функции $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^3 - \boldsymbol{x}^2 - 4\boldsymbol{x} + 4$. Найдите координаты точек $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$.

3-й уровень

Задание 6

Между какими соседними целыми числами заключено значение выражения:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{21}+\sqrt{19}}.$$

Задание 7

Решите уравнение: $\left(\boldsymbol{x}^2 - 7\boldsymbol{x} + 13\right)^2 - (\boldsymbol{x} - 3)(\boldsymbol{x} - 4) = 1.$

10 класс

1-й уровень

Задание 1

1.а. Если $a-\dfrac{1}{a}=\dfrac{5}{6}$, то выражение $a^2+\dfrac{1}{a^2}$ равно:

А	Б	В	Г	Д
$\dfrac{97}{36}$	2,5	$\dfrac{61}{36}$	$-\dfrac{47}{36}$	$\dfrac{25}{36}$

1.б. Наибольшее значение функции $y=2\sin^2 x+3\cos^2 x$ равно:

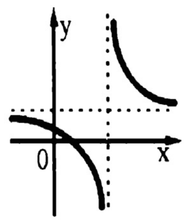
А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	5

Задание 2

2.а. Число действительных корней уравнения $\sqrt{x}\left(x^3+8\right)=0$ равно:

А	Б	В	Г	Д
1	2	3	4	другой ответ

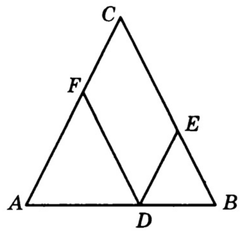
2.б. Параметры функции $y=b+\dfrac{k}{x-a}$, график которой изображён на рисунке, удовлетворяют условиям:



А	Б	В	Г	Д
$a>0$ $b>0$ $k<0$	$a<0$ $b>0$ $k>0$	$a>0$ $b>0$ $k>0$	$a<0$ $b=0$ $k>0$	$a<0$ $b>0$ $k<0$

Задание 3

3.а. Боковая сторона равнобедренного треугольника ABC равна 10. Из точки D, взятой произвольным образом на основании AB, проведены две прямые, параллельные боковым сторонам (см. рис.). Периметр параллелограмма $DFCE$ равен:



А	Б	В	Г	Д
10 см	15 см	20 см	30 см	другой ответ

3.б. В параллелограмме $ABCD$ вектор $\overline{AB}=(1;3)$, вектор $\overline{BC}=(3;1)$. Длина диагонали BD данного параллелограмма равна:

А	Б	В	Г	Д
8	4	$\sqrt{8}$	3	$4\sqrt{2}$

2-й уровень

Задание 4

При каких значениях параметра k число 0 находится между корнями уравнения $x^2+3x+(k-4)(1-k)=0$?

Задание 5

Если третий член геометрической прогрессии равен 2, а восьмой её член равен (-64), то чему равен пятый член этой прогрессии?

3-й уровень

Задание 6

Постройте график функции $y=\dfrac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}{x-1}$.

Задание 7

Окружности радиусов 2 и 4 касаются друг друга в точке A. Прямая, проходящая через точку A, пересекает меньшую окружность в точке B, а большую – в точке C. Найдите AC, если $BC=3\sqrt{2}$. Рассмотреть все возможные случаи.

11 класс

1-й уровень

Задание 1

1.а. Уравнение $|x+1| = -3x$ имеет решения:

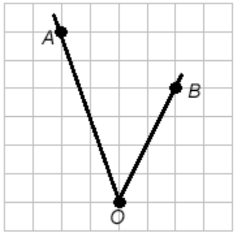
А	Б	В	Г	Д
$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	другой ответ

1.б. Произведение всех корней уравнения $(x+2)(x-2)^2 = 0$ равно:

А	Б	В	Г	Д
4	8	–8	–4	другой ответ

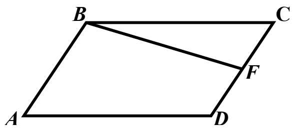
Задание 2

2.а. Найдите косинус угла ***AOB***. Значение данного косинуса, умноженное на $\sqrt{8}$, равно:



А	Б	В	Г	Д
0,5	1	$2\cdot\sqrt{2}$	2	$2\cdot\sqrt{3}$

2.б. Площадь параллелограмма ***ABCD*** равна 92. Точка ***F*** – середина стороны ***CD***. Найдите площадь трапеции ***ADFB***.



А	Б	В	Г	Д
58	69	72	80	другой ответ

Задание 3

3.а. Корень уравнения $2^{x-1} + 2^{x-2} + 2^{x-4} = 6{,}5 + 3{,}25 + 1{,}625 + \ldots$ равен:

А	Б	В	Г	Д
2	4	6	8	16

3.б. Определите, под каким углом график функции $y = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin 3x$ пересекает ось абсцисс в начале координат.

А	Б	В	Г	Д
15°	30°	45°	60°	90°

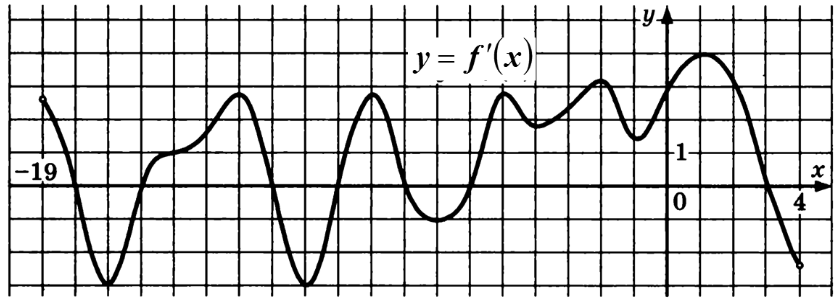
2-й уровень

Задание 4

Найдите ***множество значений*** функции $f(x) = \sin^2 x + \sin x + 1$.

Задание 5

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-19; 4)$, т. е. график $y = f'(x)$ (см. рис.). Найдите ***количество точек минимума*** функции $f(x)$ на отрезке $[-17; 1]$. Ответ обосновать.



3-й уровень

Задание 6

Решите уравнение $\sqrt{-24\cos x + 25} = 4\cos x - 3$.

Задание 7

Решите неравенство $\log_{x+3}(9 - x^2) - \frac{1}{16}\log^2_{x+3}(x-3)^2 \ge 2$.

2017 год

9 класс

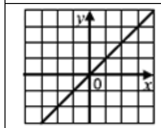
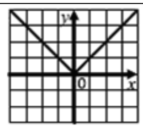
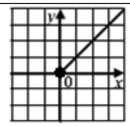
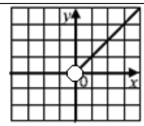
1-й уровень

Задание 1

1.а. Решите уравнение: $\frac{x^2-16}{7x+28}=0$.

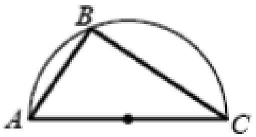
А	Б	В	Г	Д
$\{-4;\ 4\}$	16	4	$\{\varnothing\}$	другой ответ

1.б. На каком рисунке изображён график функции $y=\left(\sqrt{x}\right)^2$?

А	Б	В	Г	Д
				такого рисунка нет

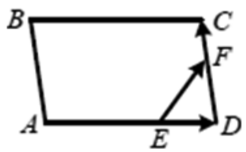
Задание 2

2.а. На рисунке изображён треугольник ABC, вписанный в полуокружность радиуса R. Если $AB=R$, то величина угла ACB равна:



А	Б	В	Г	Д
90^o	60^o	45^o	30^o	другой ответ

2.б. На стороне AD параллелограмма $ABCD$, изображённого на рисунке, выбрали точку E, а на стороне CD – точку F так, что $AE:ED=3:1$, $DF:CF=2:1$. Выразите вектор $\overline{EF}$ через вектора $\overline{AD}=\overline{m}$ и $\overline{DC}=\overline{n}$.



А	Б	В	Г	Д
$\overline{EF}=\frac{1}{4}\overline{m}+\frac{1}{2}\overline{n}$	$\overline{EF}=\frac{3}{4}\overline{m}+\frac{2}{3}\overline{n}$	$\overline{EF}=\frac{1}{4}\overline{m}+\frac{2}{3}\overline{n}$	$\overline{EF}=\frac{1}{3}\overline{m}+\frac{1}{2}\overline{n}$	другой ответ

Задание 3

3.а. Парабола $y=x^2+ax+x+4$ не пересекает и не касается оси Ox при всех a из множества:

А	Б	В	Г	Д
$(-3;5)$	$(-5;3)$	$(-\infty;3)$	$(3;+\infty)$	$(-\infty;-5)\cup(3;+\infty)$

3.б. Вследствие инфляции цены выросли на 150%. Для того, чтобы вернуть цены к прежнему уровню, правительство должно их уменьшить на:

А	Б	В	Г	Д
60%	66%	122%	150%	другой ответ

2-й уровень

Задание 4

Найдите сумму (если она существует) ***всех*** членов следующей последовательности: $\sin 60^o$, $\sin^2 60^o$, $\sin^3 60^o, \ldots$, $\sin^n 60^o, \ldots$.

Задание 5

Одна из сторон треугольника равна 35 см, а две другие относятся как 3:8 и образуют угол 60^o. Найдите бóльшую сторону этого треугольника.

3-й уровень

Задание 6

Найдите ***наименьшее целое*** решение неравенства $x<\sqrt{5}(x+1)+1$.

Задание 7

Решите уравнение: $\left(x^2+3x-11\right)\cdot\left(2x^2+6x-19\right)+1=0$.

10 класс

1-й уровень

Задание 1

1.б. Выражение $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^3\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^3$ равно:

А	Б	В	Г	Д
2,7	$5\sqrt{5}-2\sqrt{2}$	$5\sqrt{5}-2\sqrt{2}+\sqrt{10}$	9	другой ответ

1.б. Решением неравенства $(\boldsymbol{sin}\,5-\boldsymbol{sin}\,3)(\boldsymbol{x}-3)(\boldsymbol{x}-5)<0$ является множество:

А	Б	В	Г	Д
$(-\infty;3)\cup(5;+\infty)$	$(3;5)$	$(-\infty;\boldsymbol{sin}\,3)\cup(5;+\infty)$	$(-\infty;3)\cup(\boldsymbol{sin}\,5;+\infty)$	$(\boldsymbol{sin}\,3;\boldsymbol{sin}\,5)$

Задание 2

2.а. Уравнение $2+\sqrt{\boldsymbol{x}-2}=-\sqrt{\boldsymbol{x}}$ имеет ро́вно:

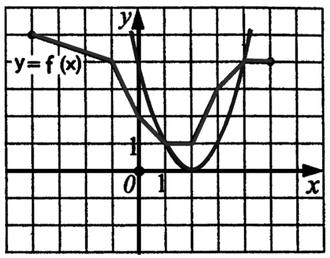
А	Б	В	Г	Д
один корень	два корня	не имеет корней	бесконечное множество корней	другой ответ

2.б. Найдите наибольшее значение параметра $\boldsymbol{b}$, при котором все решения неравенства $|\boldsymbol{x}+3|\le\boldsymbol{b}$ являются также решениями неравенства $|\boldsymbol{x}|\le 7$.

А	Б	В	Г	Д
10	1,5	3,5	4	5

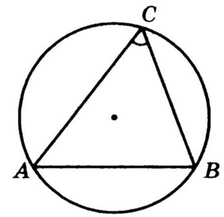
Задание 3

3.а. На рисунке изображён график функции $\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{x}-2)^2$ и график функции $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, определённой на промежутке $[-4;5]$. Укажите все значения $\boldsymbol{x}$, для которых выполняется неравенство $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-4\ge\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}-4)$.



А	Б	В	Г	Д
$\boldsymbol{x}=-4$	$\boldsymbol{x}=\{1;4\}$	$[-5;1]\cup[4;5]$	$[1;4]$	другой ответ

3.б. Длина хорды $\boldsymbol{AB}$, на которую опирается $\angle\boldsymbol{ACB}=60^{\circ}$, вписанный в окружность радиуса $\sqrt{3}$, равна:



А	Б	В	Г	Д
1,5	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	3	$2\sqrt{3}$	другой ответ

2-й уровень

Задание 4

Решите уравнение: $\sqrt{-\boldsymbol{cos}\,\boldsymbol{x}}=\sqrt{-\boldsymbol{sin}\,\boldsymbol{x}}$.

Задание 5

Найдите значение наименьшего из трёх последовательных членов арифметической прогрессии $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3$, если известно, что $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3=21$ и $\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}_3=231$.

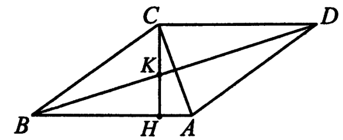
3-й уровень

Задание 6

Найдите значение выражения $\boldsymbol{x}_1+3\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_2$, где $\boldsymbol{x}_{1,2}$ – корни квадратного трёхчлена $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=2\boldsymbol{x}^2+\left(1-3\sqrt{2}\right)\boldsymbol{x}-\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

Задание 7

Дан ромб $\boldsymbol{ABCD}$ с острым углом $\boldsymbol{B}$, косинус которого равен $\dfrac{12}{13}$. Высота $\boldsymbol{CH}$ ромба пересекает диагональ $\boldsymbol{BD}$ в точке $\boldsymbol{K}$. Найдите площадь данного ромба, если известно, что $\boldsymbol{CK}=2{,}6$.



11 класс

1-й уровень

Задание 1

1.а. Область значений функции $y=\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[4]{x^4}$ при $x\le 0$ совпадает с множеством:

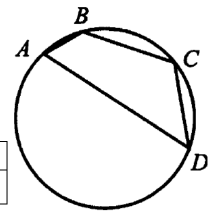
А	Б	В	Г	Д
$\{0\}$	$[0;+\infty)$	$(-\infty;0]$	$\{\varnothing\}$	$(-\infty;+\infty)$

1.б. Прямые $2x+y-1=0$ и $y-x+a=0$ пересекаются во второй четверти координатной плоскости, если:

А	Б	В	Г	Д
$a>-1$	$a<-1$	$0<a<1$	$a>1$	такое невозможно

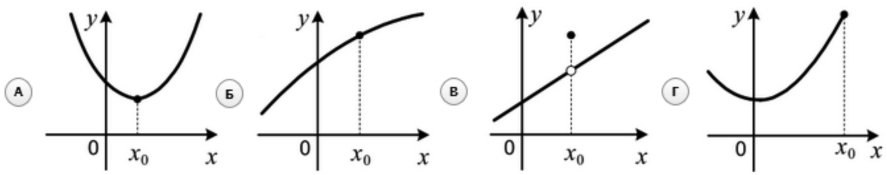
Задание 2

2.а. Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 29^o и 43^o. Бóльший из оставшихся углов (см. рис.) равен:



А	Б	В	Г	Д
108^o	137^o	151^o	162^o	другой ответ

2.б. На каком рисунке точка x_0 является точкой максимума функции, график которой изображен ниже?



А	Б	В	Г	Д (такого рисунка нет)

Задание 3

3.а. Числом, большим 1, из приведённых ниже степеней является:

А	Б	В	Г	Д
$(0{,}75)^{\pi}$	$\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\cos 100^o}$	$\left(\frac{\pi}{3}\right)^{-\sqrt{2}}$	$2^{tg 100^o}$	$2^{-\pi}$

3.б. Дана функция $f(x)=\sin x+\sin 7x+\sin 13x+\sin 19x+\ldots+\sin 43x+\sin 49x$. Её производная в точке $x=0$ равна натуральному числу, остаток от деления которого на 5 равен:

А	Б	В	Г	Д
0	1	2	3	4

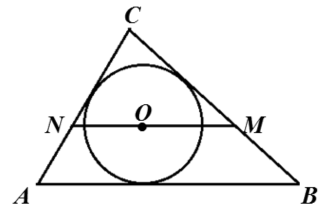
2-й уровень

Задание 4

Найдите сумму корней уравнения: $\sqrt{\cos\pi x-1}=(x-1)(x-2)$.

Задание 5

Через центр O окружности, вписанной в треугольник ABC, параллельно основанию AB провели прямую MN (точка M лежит на стороне BC, точка N лежит на AC). Найдите длину отрезка MN, если известны $P=14$ – периметр четырёхугольника $ABMN$ и длина основания $AB=6$ исходного треугольника.



3-й уровень

Задание 6

Найти координаты точек пересечения с осью Ox тех касательных к графику функции $f(x)=\dfrac{x+1}{x-3}$, которые образуют с осью Ox угол $\dfrac{3\pi}{4}$.

Задание 7

Решите уравнение: $(x-2)^{\log_2(x+31)}=(x-2)^3$.

Решения, указания, ответы

2005 год

8 – 9 классы

1-й уровень

Задание № 1

Пусть $\boldsymbol{n}$ – число учеников в классе, $\boldsymbol{m}$ – число учеников, повысивших успеваемость ($\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{m} \in \boldsymbol{N}$). Тогда $\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}} \cdot 100$ – процент учеников, повысивших успеваемость. Следовательно, согласно условию задачи, можем записать двойное неравенство

$$2{,}9 \le \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}} \cdot 100 \le 3{,}1. \qquad (*)$$

Очевидно, что $\boldsymbol{m} \ge 1$. Значит, из последнего неравенства, можем записать:

$$\boldsymbol{n} \ge \frac{1000}{31} \cdot \boldsymbol{m} \ge \frac{1000}{31} > 32, \text{ то есть } \boldsymbol{n} \ge 33.$$

Итак, в классе не меньше чем 33 ученика. Выясним теперь вопрос, какое минимальное число учеников всё-таки может быть в таком классе.

Легко видеть, что если в классе 33 ученика ($\boldsymbol{n} = 33$) и один из них ($\boldsymbol{m} = 1$) повысил успеваемость, данная пара чисел $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}) = (33, 1)$ удовлетворяет неравенству (*). Следовательно, в классе, о котором идёт речь, минимально возможное число учеников 33.

Ответ: 33 ученика в классе

Задание № 2

По условию, $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}$ – простые числа. Очевидно, что $2\boldsymbol{y}^2$ – чётное число. Значит, из того, что $\boldsymbol{x}^2 - 2\boldsymbol{y}^2 = 1$, следует, что $\boldsymbol{x}$ – нечётное число.

Перепишем исходное уравнение в виде

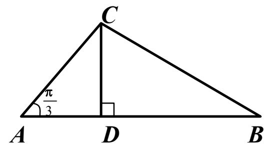
$$\boldsymbol{x}^2 - 2\boldsymbol{y}^2 = 1 \Rightarrow 2\boldsymbol{y}^2 = \boldsymbol{x}^2 - 1 \Leftrightarrow 2\boldsymbol{y}^2 = (\boldsymbol{x}-1)(\boldsymbol{x}+1).$$

Далее, так как $\boldsymbol{x}$ – нечётное число, то есть его можно представить, например, в виде $\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{k} - 1,\ \forall \boldsymbol{k} \in \boldsymbol{Z}$, то $(\boldsymbol{x}-1)(\boldsymbol{x}+1) = (2\boldsymbol{k}-2)2\boldsymbol{k} = 4\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}-1)$ делится на 4. Это означает, что $2\boldsymbol{y}^2$ делится на 4. Следовательно, $\boldsymbol{y}$ – чётное число. Но, по условию, $\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}$ – простые числа, значит $\boldsymbol{x} = 3,\ \boldsymbol{y} = 2$.

Ответ: $\boldsymbol{x} = 3,\ \boldsymbol{y} = 2$

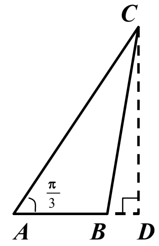
Задание № 3

$\boldsymbol{CD}$ – высота $\Delta\boldsymbol{ABC}$, опущенная из вершины $\boldsymbol{C}$ на сторону $\boldsymbol{AB}$ ($\boldsymbol{D}$ – основание данной высоты). В этом случае возможны три различных случая (рис. 1−3):



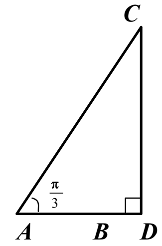
Основание $\boldsymbol{D}$ высоты $\boldsymbol{CD}$ попадает на отрезок $\boldsymbol{AB}$.

(1)



Основание $\boldsymbol{D}$ высоты $\boldsymbol{CD}$ попадает на продолжение отрезка $\boldsymbol{AB}$.

(2)



Основание $\boldsymbol{D}$ высоты $\boldsymbol{CD}$ попадает в точку $\boldsymbol{B}$.

(3)

По условию, радиус окружности, описанной около треугольника $\boldsymbol{ABC}$, равен 5 см, то есть $\boldsymbol{R} = 5$. Тогда для всех трёх случаев справедливо:

$$|\boldsymbol{BC}| = 2\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{sin}(\angle\boldsymbol{BAC}) = 10\,\boldsymbol{sin}\frac{\pi}{3} = 5\sqrt{3} \text{ (см)},$$

$$|\boldsymbol{AC}| = \frac{|\boldsymbol{CD}|}{\boldsymbol{sin}(\angle\boldsymbol{BAC})} = \frac{\sqrt{3}}{\boldsymbol{sin}\frac{\pi}{3}} = 2 \text{ (см)}.$$

Как видим, ($|\boldsymbol{BC}| = 5\sqrt{3}$ см) ≠ ($|\boldsymbol{CD}| = \sqrt{3}$ см). Следовательно, точки $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{D}$ не совпадают. То есть 3-й случай невозможен (рис. 3).

Далее, из того что $\Delta\,\boldsymbol{ADC}$ и $\Delta\,\boldsymbol{BDC}$ прямоугольные, по теореме Пифагора можем записать:

$$|\boldsymbol{AD}| = \sqrt{|\boldsymbol{AC}|^2 - |\boldsymbol{CD}|^2} = \sqrt{4-3} = 1 \text{ (см)}.$$

$$|\boldsymbol{BD}| = \sqrt{|\boldsymbol{BC}|^2 - |\boldsymbol{CD}|^2} = \sqrt{75-3} = 6\sqrt{2} \text{ (см)}.$$

Это означает, что 2-й случай также невозможен, так как в этом случае (рис. 2) $|\boldsymbol{AD}| > |\boldsymbol{BD}|$.

Таким образом, остается только лишь 1-й случай (рис. 1), то есть точка $\boldsymbol{D}$ лежит между точками $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Следовательно, $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{AD}| + |\boldsymbol{BD}| = 1 + 6\sqrt{2}$ (см).

Ответ: $|\boldsymbol{AB}| = 6\sqrt{2} + 1$ см, $|\boldsymbol{BC}| = 5\sqrt{3}$ см, $|\boldsymbol{AC}| = 2$ см

2-й уровень

Задание № 4

По определению и условию можем:

$$S_n \overset{def}{\equiv} \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n = 210 \Rightarrow (2a_1 + d(n-1)) \cdot n = 420;$$

$$S_4 \overset{def}{\equiv} 2(2a_1 + 3d) = 124 \Rightarrow 2a_1 + 3d = 62.$$

Далее

$$\begin{cases} a_n \ = a_1 + d(n-1), \\ a_{n-1} = a_1 + d(n-2), \\ a_{n-2} = a_1 + d(n-3), \\ a_{n-3} = a_1 + d(n-4) \end{cases} \overset{(+)}{\Rightarrow} \begin{array}{c} a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} = 4a_1 + 4dn - 10d = 156 \,|:2; \\ \\ 2a_1 + 2dn - 5d = 78. \end{array}$$

Таким образом, можем записать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2a_1 + 3d = 62, \\ 2a_1 + 2dn - 5d = 78, \\ (2a_1 + d(n-1))n = 420 \end{cases} \overset{(2)-(1)}{\Rightarrow} \begin{cases} 2a_1 + 3d = 62, \\ 2dn - 8d = 16, \\ (2a_1 + d(n-1))n = 420 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 = 62 - 3d, \\ n = \dfrac{8}{d} + 4, \\ (2a_1 + d(n-1))n = 420. \end{cases}$$

Тогда, в результате подстановок первого и второго уравнений в третье, получим:

$$\left(62 - 3d + d\left(\frac{8}{d} + 4 - 1\right)\right) \cdot \frac{8 + 4d}{d} = 420,$$
$$(62 - 3d + 8 + 3d) \cdot (8 + 4d) = 420d,$$
$$70 \cdot (8 + 4d) = 420d,$$
$$8 + 4d = 6d,$$
$$2d = 8 \ \Rightarrow \ d = 4 \ \Rightarrow \left[n = \frac{8}{d} + 4 \right] \ \Rightarrow \ n = 6.$$

Итак, $d = 4,\ n = 6$. Следовательно: $a_1 = 25, a_2 = 29, a_3 = 33, a_4 = 37, a_5 = 41, a_6 = 45$.

Ответ: $a_1 = 25, a_2 = 29, a_3 = 33, a_4 = 37, a_5 = 41, a_6 = 45$

Задание № 5

$$(x^2 - 4x + 3) \cdot (x^2 + 14x + 48) = 360 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 4x + 3 = 0 \ \ \Rightarrow x_1 = 1, \ x_2 = 3 \\ x^2 + 14x + 48 = 0 \Rightarrow x_3 = -6, x_4 = -8 \end{array} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (x-1)(x-3)(x+6)(x+8) = 360 \ \Leftrightarrow \ ((x-1)(x+6)) \cdot ((x-3)(x+8)) = 360 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2 + 5x - 6) \cdot (x^2 + 5x - 24) = 360.$$

Сделаем, например, следующую замену: $x^2 + 5x - 15 = t$. Тогда последнее уравнение перепишется в виде:

$$(t+9)(t-9) = 360,$$
$$t^2 - 81 = 360,$$
$$t^2 = 441 \ \Rightarrow \ t_{1,2} = \pm 21.$$

Итак, если:

$\underline{t = 21}$, то $x^2 + 5x - 15 = 21 \ \Rightarrow \ x^2 + 5x - 36 = 0 \ \Rightarrow \ x_1 = -9, \ x_2 = 4$;

$\underline{t = -21}$, то $x^2 + 5x - 15 = -21 \ \Rightarrow \ x^2 + 5x + 6 = 0 \ \Rightarrow \ x_3 = -3, \ x_4 = -2$.

Ответ: $\{-9; \ -3; \ -2; \ 4\}$

Задание № 6

$f(x) = ax^2 + bx + c$; $f(-1) < 1, \ \ f(1) > -1, \ \ f(3) < -4$. Тогда

$$\begin{cases} f(-1) \equiv a - b + c < 1, \\ f(1) \ \equiv \ a + b + c > -1, \\ f(3) \ \equiv \ 9a + 3b + c < -4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ a - b + c \ < \ 1, \\ -a - b - c \ < \ 1, \\ 9a + 3b + c < -4. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ a - b + c \ < \ 1, \\ -2a - 2b - 2c \ < \ 2, \\ \ 9a + 3b + c < -4. \end{cases} \overset{(1)+(2)+(3)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \ 8a < -1 \ \Rightarrow \ a < -\frac{1}{8}.$$

Таким образом, как видим, коэффициент a имеет отрицательный знак.

Ответ: $a < 0$

3-й уровень

Задание № 7

Перепишем исходное уравнение $x^3 + 2\sqrt{3}x^2 + 3x + \sqrt{3} - 1 = 0$ в виде:

$$x \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 + \left(2x^2 + 1\right) \cdot \sqrt{3} + \left(x^3 - 1\right) = 0 .$$

Последнее уравнение является квадратным уравнением относительно ($\sqrt{3}$), то есть уравнением вида $x \cdot z^2 + \left(2x^2 + 1\right) \cdot z + \left(x^3 - 1\right) = 0$. Причём очевидно, что $x \neq 0$ (проверяется непосредственной подстановкой $x = 0$ в исходное уравнение) и число $\sqrt{3}$ является корнем данного уравнения. Тогда

$$\sqrt{3} = \frac{-\left(2x^2 + 1\right) \pm \sqrt{\left(2x^2 + 1\right)^2 - 4x\left(x^3 - 1\right)}}{2x} = \frac{-\left(2x^2 + 1\right) \pm \left(2x + 1\right)}{2x}.$$

Следовательно,

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{3} = \dfrac{-\left(2x^2 + 1\right) + \left(2x + 1\right)}{2x}, \\ \sqrt{3} = \dfrac{-\left(2x^2 + 1\right) - \left(2x + 1\right)}{2x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{3} = 1 - x, \\ -x^2 - x - 1 = \sqrt{3} \cdot x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - x = \sqrt{3}, \\ x^2 + \left(\sqrt{3} + 1\right)x + 1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 - \sqrt{3}, \\ x_{2,3} = \dfrac{-\left(\sqrt{3} + 1\right) \pm \sqrt{\left(\sqrt{3} + 1\right)^2 - 4}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 1 - \sqrt{3}, \\ x_{2,3} = \dfrac{-\left(\sqrt{3} + 1\right) \pm \sqrt[4]{12}}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{ 1 - \sqrt{3};\ \dfrac{-\left(\sqrt{3} + 1\right) \pm \sqrt[4]{12}}{2} \right\}$

Задание № 8

Пусть U кг соли содержит раствор в первом сосуде; V кг соли содержит раствор во втором сосуде; x кг, y кг – количество испарившейся воды из первого и второго сосуда соответственно. Тогда, по условию задачи, можем записать:

$$\frac{U}{5 - x} = p \cdot \frac{U}{5} \Rightarrow p = \frac{5}{5 - x}; \qquad (1)$$

$$\frac{V}{20 - y} = q \cdot \frac{V}{20} \Rightarrow q = \frac{20}{20 - y}. \qquad (2)$$

Из (1): $x = 5 - \dfrac{5}{p}$; из (2): $y = 20 - \dfrac{20}{q}$. Следовательно, общее количество испарившейся воды равно:

$$x + y = 25 - \frac{5}{p} - \frac{20}{q} = 25 - \left(\frac{5}{p} + \frac{20}{q}\right) = \left[\text{т. к. } pq = 9 \Rightarrow q = \frac{9}{p}\right] = 25 - \left(\frac{5}{p} + \frac{20}{9}p\right).$$

Итак, $x + y = 25 - \left(\dfrac{5}{p} + \dfrac{20}{9}p\right)$, $p > 0$. Значит, сумма ($x + y$) принимает наибольшее значение, если $\left(\dfrac{5}{p} + \dfrac{20}{9}p\right)$ принимает наименьшее значение.

Воспользуемся неравенством о среднем арифметическом и среднем геометрическом:

$$\frac{5}{p} + \frac{20}{9}p \geq 2\sqrt{\frac{5}{p} \cdot \frac{20}{9}} = 2\sqrt{\frac{100}{9}} = \frac{20}{3}.$$

Следовательно, $x + y \leq 25 - \dfrac{20}{9} \Rightarrow x + y \leq 18\dfrac{1}{3}$. Другими словами, из обоих сосудов вместе не может испариться более $18\dfrac{1}{3}$ (кг) воды.

Если $\dfrac{5}{p} = \dfrac{20}{9}p$, то есть $p = \dfrac{3}{2}$, то неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим обращается в равенство. Тогда:

– из 1-го сосуда испарится $x = 5 - \dfrac{5}{\frac{3}{2}} = \dfrac{5}{3}$ (кг);

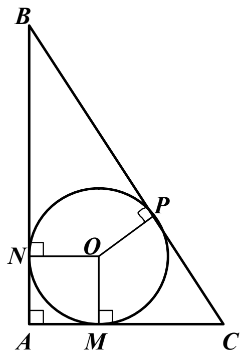
– из 2-го сосуда испарится $y = 20 - \dfrac{20}{9} \cdot \dfrac{3}{2} = \dfrac{50}{3}$ (кг).

Таким образом, наибольшее количество воды, которое может испариться из обоих сосудов вместе, равно $x + y = \dfrac{5}{3} + \dfrac{50}{3} = \dfrac{55}{3} = 18\dfrac{1}{3}$ (кг)

Ответ: $18\dfrac{1}{3}$ кг

Задание № 9

Пусть ΔABC – данный прямоугольный треугольник: $\angle CAB = 90^{\circ}$, AB, AC – катеты (для определённости будем считать, что $|AB| \geq |AC|$).



Точка O – центр вписанной окружности; r – радиус этой окружности; M, N, P – точки касания ($N \in [AB]$, $P \in [BC]$, $M \in [AC]$).

Тогда $|BN| = |BP|$, $|CM| = |CP|$, $|AN| = |AM|$ – как длины отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки.

Далее, так как $|AB| \geq |AC|$, то $|BP| \geq |CP|$. Следовательно, $|CP| : |BP| = 2:3$.

Пусть $|CP| = 2x \ (x > 0) \Rightarrow |BP| = 3x$, $|BC| = 5x$. Кроме того $OM \perp AC$, $ON \perp AB \Rightarrow ANOM$ – квадрат: $|AM| = |ON| = |AN| = |OM| = r$.

Значит:

$$|AB| = |AN| + |BN| = \left[\, |BN| = |BP| \,\right] = r + 3x;$$

$$|AC| = |AM| + |CM| = \left[\, |CM| = |CP| \,\right] = r + 2x.$$

Таким образом:

$$\begin{cases} P_{\Delta ABC} \equiv |AC| + |AB| + |BC| = 36, \\ |BC|^2 = |AC|^2 + |AB|^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + (r + 2x) + (r + 3x) = 36, \Rightarrow r = 18 - 5x \\ (r + 2x)^2 + (r + 3x)^2 = 25x^2 \end{cases}$$

Тогда, в результате подстановки, получим уравнение:

$$x^2 + 15x - 54 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{441}}{2} = \frac{-15 \pm 21}{2} \Rightarrow [\, x > 0 \,] \Rightarrow \quad x = 3 (\text{см}), \quad r = 3 (\text{см}).$$

Окончательно можем записать: $|AB| = 12$ см, $|AC| = 9$ см, $|BC| = 15$ см.

Ответ: $|AB| = 12$ см, $|AC| = 9$ см, $|BC| = 15$ см

10 – 11 классы

<u>1-й уровень</u>

Задание № 1

По условию $m, n \in N$; $\dfrac{m}{n}$ – правильная дробь, следовательно, $m < n \Rightarrow 3n - m \in N$.

Пусть p $(p > 1, p \in N)$ число, на которое можно сократить дробь $\dfrac{3n - m}{5n + 2m}$. Тогда можем записать:

$$\begin{cases} 3n - m = pK, \\ 5n + 2m = pM \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11n = p(2K + M), \\ 11m = p(3M - 5K). \end{cases}$$

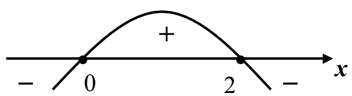
Итак, $11n = p(2K + M)$ и $11m = p(3M - 5K)$, то есть числа $11n$ и $11m$ делятся на p. Далее, так как $\dfrac{m}{n}$ несократимая дробь, то n и m не имеют общих делителей. Следовательно, число 11 делится на p. Значит, учитывая то, что $p > 1$, $p \in N$ и 11 простое число, нетрудно сделать вывод: $p = 11$.

Ответ: 11

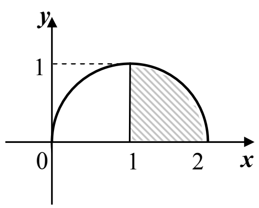
Задание № 2

Требуется вычислить определённый интеграл: $\int_1^2 \sqrt{2x - x^2}\, dx$. Для этого воспользуемся геометрическим смыслом определённого интеграла.

Заметим, во-первых, что функция $f(x) = \sqrt{2x - x^2} \geq 0$ и непрерывна для $\forall x$: $2x - x^2 \geq 0$, то есть для $\forall\, x \in [\,0; 2\,]$. Во-вторых, $f(x) = \sqrt{2x - x^2} = \sqrt{1 - (x - 1)^2}$.



Учитывая теперь пределы интегрирования $x \in [\,1; 2\,]$, можем сделать вывод, что исходный определённый интеграл равен площади четверти круга (см. рис.):

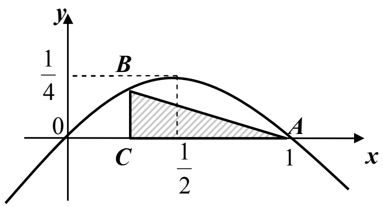


$$\int_1^2 \sqrt{2x - x^2}\, dx = \frac{1}{4}\pi R^2 \Big|_{R=1} = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}$

Задание № 3

Сделаем рисунок. Графиком функции $y = x - x^2$ является парабола, ветви которой направлены вниз. Координаты (x_B, y_B) вершины этой параболы равны $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$.



Далее, рассмотрим всевозможные треугольники ABC, у каждого из которых $\angle ACB = 90^\circ$, вершина A имеет координаты $(1; 0)$, вершина C лежит на отрезке $[0,1]$ оси OX, а вершина B лежит на параболе $y = x - x^2$. Очевидно, что $C(x; 0)$, $0 \le x \le 1 \Rightarrow B(x; x - x^2)$. Следовательно, $|BC| = x - x^2$, $|AC| = 1 - x$. Таким образом:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |AC| = \frac{1}{2}(x - x^2)(1 - x) = \frac{1}{2}(x - 2x^2 + x^3).$$

Как видим, $S_{\Delta ABC} = S(x)$, $x \in [0;1]$. Тогда: $S'(x) = \frac{1}{2}(1 - 4x + 3x^2) = 0$.

Таким образом:

$$3x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} \Rightarrow x_1 = 1 \in [0;1]; \; x_2 = \frac{1}{3} \in [0;1].$$

Значит:

$$S(0) = S(1) = 0;$$

$$S\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}(x - x^2)(1 - x)\Big|_{x=\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}x(1 - x)^2\Big|_{x=\frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{27}.$$

Вывод: $\max\limits_{x \in [0;1]} S(x) = \frac{2}{27}$ при $x = \frac{1}{3} \Rightarrow y\left(\frac{1}{3}\right) = x(1 - x)\big|_{x=\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$.

Ответ: $B\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{9}\right)$

<u>2-й уровень</u>

Задание № 4

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\left(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800}\right)\right) = 1, \quad x \in Z;$$

$$\frac{\pi}{8}\left(3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800}\right) = 2\pi n, \quad x, n \in Z;$$

$$3x - \sqrt{9x^2 + 160x + 800} = 16n, \quad x, n \in Z;$$

$$\sqrt{9x^2 + 160x + 800} = 3x - 16n, \quad x, n \in Z;$$

$$\begin{cases} 9x^2 + 160x + 800 = 9x^2 - 96xn + 256n^2, \\ 3x - 16n \ge 0, \\ x, n \in Z. \end{cases}$$

Рассмотрим отдельно уравнение:

$$9x^2 + 160x + 800 = 9x^2 - 96xn + 256n^2,$$
$$5x + 25 = -3xn + 8n^2,$$
$$x(3n + 5) = 8n^2 - 25,$$
$$x(3n + 5) = \frac{8}{9}(3n + 5)(3n - 5) - \frac{25}{9},$$
$$8(3n + 5)(3n - 5) - 9x(3n + 5) = 25,$$
$$(3n + 5) \cdot (8(3n - 5) - 9x) = 25.$$

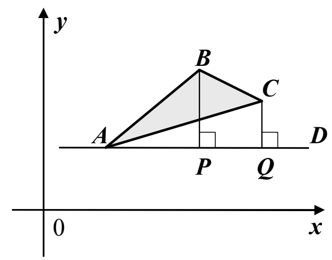
Так как $n, x \in Z$, то число $3n + 5$ является делителем числа 25, то есть, в этом случае, $3n + 5 = \{\pm 1; \pm 5; \pm 25\} \Rightarrow n = \{-10; -2; 0\} \Rightarrow x = \{-31; -7; -5\}$.

Итак, все целые корни исходного уравнения содержатся среди чисел: $\{-31; -7; -5\}$. Подставив эти числовые значения в исходное уравнение, окончательно определим: $x_1 = -31$; $x_2 = -7$.

Ответ: $\{-31; -7\}$

Задание № 5

Пусть ΔABC данный треугольник; $Ox \perp Oy$ две взаимно-перпендикулярные прямые (см. рис.). Предположим, что расстояния от вершин ΔABC до прямых Ox и Oy выражаются целыми числами.



Пусть, для определённости, $y_A < y_B$ и $y_A < y_C$.

Проведём через точку A прямую AD параллельно оси Ox (не пересекающую ΔABC); $BP \perp AD$; $CQ \perp AD$. Тогда, по условию, $|AP| \in Z$; $|AQ| \in Z$; $|BP| \in Z$; $|CQ| \in Z$.

Следовательно, значения $tg(\angle BAP) = \frac{|BP|}{|AP|}$ и $tg(\angle CAQ) = \frac{|CQ|}{|AQ|}$ должны быть рациональными числами.

Кроме того,

$$tg(\angle BAC)=tg(\angle BAQ-\angle CAQ)=\frac{tg(\angle BAQ)-tg(\angle CAQ)}{1+tg(\angle BAQ)\cdot tg(\angle CAQ)}=\frac{\frac{|BP|}{|AP|}-\frac{|CQ|}{|AQ|}}{1+\frac{|BP|}{|AP|}\cdot\frac{|CQ|}{|AQ|}}\ -$$

также рациональное число.

Если теперь предположить, что $\Delta\, ABC$ правильный, то $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$.

Значит, $tg(\angle BAC)=tg\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$ – иррациональное число. То есть получаем противоречие с вышедоказанным. Значит, $\Delta\, ABC$ не может быть правильным, что и требовалось доказать.

Задание № 6

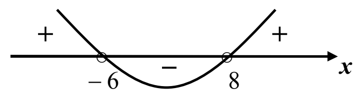
Пусть x – число рядов в роте при прибытии, тогда $24x$ – численность солдат.

После перестроения роты, рядов стало $x-2$. Следовательно, после этого число солдат в новом ряду будет $26+(x-2)$. Таким образом, для участия в параде осталось $(x-2)(x+24)$ солдат. Значит, число солдат, не участвующих в параде:

$$24x-(x-2)(24+x)=-x^2+2x+48>0,$$

или

$$x^2-2x-48<0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-2x-48=0,\\ x_1=-6;\ x_2=8\end{array}\right.\Rightarrow$$



$x\in(-6;8)$

Но так как x – число рядов в роте, то есть $x\in N$, то $x\in\{1;2;3;4;5;6;7\}$.

Далее, по условию, число солдат в каждом ряду равно числу рядов. Другими словами, число солдат является полным квадратом некоторого числа, то есть $24x=a^2$. А это возможно лишь при $x=6$ $(24\cdot 6=144=12^2)$. Значит, рядов было 6, а солдат, соответственно, 144.

Ответ: 144

3-й уровень

Задание № 7

$$\frac{6}{2x+1}>\frac{1+log_2(2+x)}{x}.$$

ОДЗ: $\begin{cases}2+x>0,\\ x\neq 0,\\ 2x+1\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>-2,\\ x\neq 0,\\ x\neq-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow x\in\left(-2;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup(0;+\infty).$

Рассмотрим теперь исходное неравенство на каждом из указанных интервалов в отдельности.

а) $x\in\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$, то есть x – отрицательно.

Тогда:

$$\frac{6}{2x+1}>\frac{1+log_2(2+x)}{x}\ \Rightarrow\ \frac{6x}{2x+1}<1+log_2(2+x)\Rightarrow\ log_2(2+x)>\frac{4x-1}{2x+1}. \qquad (1)$$

Нетрудно видеть, что функция $y=log_2(2+x)$ монотонно возрастает для всех $x\in\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$. Следовательно, $log_2(2+x)<log_2\frac{3}{2}<1$.

С другой стороны, $\frac{4x-1}{2x+1}=\frac{4x+2-3}{2x+1}=2-\frac{3}{2x+1}>2$. Таким образом, неравенство (1) не имеет решений на интервале $\left(-2;-\frac{1}{2}\right)$.

б) $x\in\left(-\frac{1}{2};0\right)$.

Тогда:

$$1+log_2(2+x)>0\Rightarrow\begin{cases}\frac{1+log_2(2+x)}{x}<0,\\ \frac{6}{2x+1}>0\end{cases}\Rightarrow\frac{6}{2x+1}>\frac{1+log_2(2+x)}{x},\forall x\in\left(-\frac{1}{2};0\right).$$

в) $x\in(0;+\infty)$. Тогда: $\frac{6}{2x+1}>\frac{1+log_2(2+x)}{x}\Leftrightarrow log_2(2+x)<\frac{4x-1}{2x+1}. \qquad (2)$

Ясно, что для данных x, справедливы неравенства:

$$\frac{4x-1}{2x+1}=2-\frac{3}{2x+1}<2,\quad log_2(2+x)>1.\text{ То есть: } 1<log_2(2+x)<\frac{4x-1}{2x+1}<2.$$

Следовательно:

1) Неравенство (2) не имеет решений на том множестве, где $log_2(2+x)\ge 2$, то есть при $2+x\ge 4\Rightarrow x\ge 2$.
2) Неравенство (2) не имеет решений на том множестве, где $\frac{4x-1}{2x+1}\le 1$, то есть,

$$\begin{cases} x\in(0;+\infty), \\ 4x-1\le 2x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\in(0;+\infty), \\ 2x\le 2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\in(0;+\infty), \\ x\le 1\end{cases}\Rightarrow x\in(0;1].$$

Итак, неравенство (2) не имеет решений при $x\in(0;1]\cup[2;+\infty)$.

3) Рассмотрим оставшийся случай, когда $x\in(1;2)$. Тогда:

$$log_2(2+x)>log_2 3,\qquad \frac{4x-1}{2x+1}=2-\frac{3}{2x+1}<2-\frac{3}{5}=\frac{7}{5}.$$

Но

$$log_2(2+x)>log_2 3>\left[\begin{matrix}3^5>2^7\\ \Downarrow\\ 3>2^{\frac{7}{5}}\end{matrix}\right]>log_2 2^{\frac{7}{5}}=\frac{7}{5}>\frac{4x-1}{2x+1},$$

то есть $log_2(2+x)>\frac{4x-1}{2x+1}$, $\forall x\in(1;2)$, что противоречит неравенству (2). Следовательно, неравенство (2) не имеет решений и при $x\in(1;2)$.

Таким образом, при $x\in(0;+\infty)$ исходное неравенство решений не имеет.

Ответ: $x\in\left(-\frac{1}{2};0\right)$

Задание № 8

Докажем, что для функции $f(x)=cos\,x\cdot sin\,2x$ справедливо неравенство $\min\limits_{x\in[-\pi,\pi]} f(x)>-\frac{7}{9}$.

Итак,

$$f(x)=cos\,x\cdot sin\,2x=2\,sin\,x\cdot cos^2 x=2\,sin\,x\cdot\left(1-sin^2 x\right)=2\,sin\,x-2\,sin^3 x.$$

Тогда

$$f'(x)=\left(2\,sin\,x-2\,sin^3 x\right)'=2\,cos\,x-6\,sin^2 x\cdot cos\,x=2\,cos\,x\cdot\left(1-3\,sin^2 x\right),$$
$$f'(x)=0\ \Rightarrow\ cos\,x\cdot\left(1-3\,sin^2 x\right)=0.$$

Последнее уравнение равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{matrix}cos\,x=0,\\ 1-3\,sin^2 x=0\end{matrix}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{matrix}cos\,x=0,\\ sin^2 x=\frac{1}{3}\end{matrix}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{matrix}cos\,x=0,\\ sin\,x=\frac{1}{\sqrt{3}},\\ sin\,x=-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{matrix}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{matrix}x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z,\\ x=(-1)^k arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi k,\ k\in Z,\\ x=(-1)^l arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\pi l,\ l\in Z\end{matrix}\right.\Rightarrow\left[\begin{matrix}x_{1,2}=\pm\frac{\pi}{2},\\ x_3=arcsin\frac{1}{\sqrt{3}},\quad x_4=\pi-arcsin\frac{1}{\sqrt{3}},\\ x_5=-arcsin\frac{1}{\sqrt{3}},\quad x_6=-\pi+arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}.\end{matrix}\right.$$

Заметим, что в последней совокупности решений x_i, $i=\overline{1,5}$ учтено условие, что $x\in[-\pi;\pi]$.

Вычислим $f(x_i)=2\left(sin\,x_i-sin^3 x_i\right)$, $x_i=\overline{1,5}$, а также значения данной функции в граничных точках промежутка $[-\pi;\pi]$:

$$f(-\pi)=f(\pi)=0,$$
$$f(x_{1,2})=f\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)=0,$$
$$f(x_3)=f(x_4)=2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3\right)=2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)=\frac{4}{3\sqrt{3}},$$
$$f(x_5)=f(x_6)=2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3\right)=-2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)=-\frac{4}{3\sqrt{3}}.$$

Таким образом: $\min\limits_{x\in[-\pi,\pi]} f(x) = -\frac{4}{3\sqrt{3}}$. Теперь нетрудно доказать, что $-\frac{4}{3\sqrt{3}} > -\frac{7}{9}$.

Действительно:

$$-\frac{4}{3\sqrt{3}} + \frac{7}{9} = -\frac{4\sqrt{3}}{9} + \frac{7}{9} = \frac{7-4\sqrt{3}}{9} = \frac{\sqrt{49}-\sqrt{48}}{9} > 0 \Rightarrow -\frac{4}{3\sqrt{3}} > -\frac{7}{9}.$$

Значит, $\min\limits_{x\in[-\pi,\pi]} f(x) > -\frac{7}{9}$, что и требовалось доказать.

Задание № 9

Решим уравнение: $3\sqrt{x^2-9} + 4\sqrt{x^2-16} + 5\sqrt{x^2-25} = \frac{120}{x}$.

Учитывая ОДЗ, можем записать:

$$\begin{cases} x^2-9\ge 0, \\ x^2-16\ge 0, \\ x^2-25\ge 0, \\ x>0 \end{cases} \Rightarrow \quad x\ge 5 \quad \Rightarrow \begin{cases} 3\sqrt{x^2-9} \ge 3\sqrt{25-9} = 3\sqrt{16} = 12, \\ 4\sqrt{x^2-16} \ge 4\sqrt{25-16} = 4\sqrt{9} = 12, \\ 5\sqrt{x^2-25} \ge 5\sqrt{25-25} = 0, \\ \frac{120}{x} \le \frac{120}{5} = 24. \end{cases}$$

Таким образом:

$$\begin{cases} 3\sqrt{x^2-9} + 4\sqrt{x^2-16} + 5\sqrt{x^2-25} \ge 24, \\ \frac{120}{x} \le 24 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3\sqrt{x^2-9} + 4\sqrt{x^2-16} + 5\sqrt{x^2-25} = 24, \\ \frac{120}{x} = 24 \end{cases} \Rightarrow x = 5.$$

Ответ: $x = 5$

2006 год

8 – 9 классы

1-й уровень

Задание № 1

Рассмотрим дробь $\frac{2a^2b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и уменьшим в два раза a и b, то есть подставим в исходную дробь $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}$. Тогда:

$$\frac{2\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 \frac{b}{2}}{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}} = \frac{2\cdot\frac{a^2}{4}\cdot\frac{b}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{1}{4}\frac{2a^2b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Как видим, если a и b уменьшить в два раза, то исходная дробь $\frac{2a^2b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ уменьшится в четыре раза.

Ответ: дробь уменьшится в четыре раза

Задание № 2

$$7+5\sqrt{2} = 1+3\sqrt{2}+3\cdot 2+2\sqrt{2} = \left(1+\sqrt{2}\right)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\left(1+\sqrt{2}\right)^3} = 1+\sqrt{2}.$$

Ответ: $1+\sqrt{2}$

Задание № 3

Рассмотрим исходные уравнения: $x^3 + a\,x + 1 = 0$ и $x^4 + a\,x^2 + 1 = 0$. Обозначим через α общий корень данных уравнений. Тогда

$$\begin{cases} x^3 + a\,x + 1 = 0, & \Big| \cdot x \ne 0 \\ x^4 + a\,x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + a\,x^2 + x = 0, \\ x^4 + a\,x^2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \Big[\ \alpha - \text{корень}\ \Big] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha^4 + a\,\alpha^2 + \alpha = 0, \\ \alpha^4 + a\,\alpha^2 + 1 = 0 \end{cases} \Bigg| (1)-(2) \Rightarrow \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 1.$$

Таким образом, оба уравнения имеют общий корень $x = 1$. При данном корне справедливо равенство:

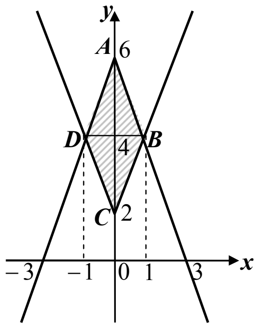
$$1 + a + 1 = 0 \;\Rightarrow\; a = -2.$$

Ответ: $a = -2, \quad x = 1$

<u>2-й уровень</u>

Задание № 4

Найти площадь фигуры, которая задаётся на координатной плоскости системой неравенств:



$$\begin{cases} y \le 6 - 2|x|, \\ y \ge 2 + 2|x|. \end{cases}$$

Для этого, прежде всего, изобразим на координатной плоскости область, ограниченную графиками функций $y = 6 - 2|x|$ и $y = 2 + 2|x|$.

Как видим, $ABCD$ – ромб (доказать самостоятельно).

Очевидно, $A(0;6)$; $B(1;4)$; $C(0;2)$; $D(-1;4)$, AC, BD – диагонали ромба ($AC \perp BD$).

Тогда:

$$S_{ABCD} \overset{def}{=} \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4 \text{ (кв. ед.)}$$

Ответ: $S = 4$ кв. ед.

Задание № 5

Рассмотрим дроби $A = \dfrac{5678901234}{6789012345}$ и $B = \dfrac{5678901235}{6789012347}$. Введём обозначения: $A = \dfrac{x}{y}$; $B = \dfrac{x+1}{y+2}$. Очевидно, что $0 < x < y < 2x$. Тогда:

$$A - B = \frac{x}{y} - \frac{x+1}{y+2} = \frac{xy + 2x - xy - y}{y(y+2)} = \frac{2x - y}{y(y+2)} > 0 \;\Leftrightarrow\; A - B > 0 \;\Rightarrow\; A > B.$$

Таким образом, мы доказали, что $\left(A = \dfrac{5678901234}{6789012345}\right) > \left(B = \dfrac{5678901235}{6789012347}\right)$.

Задание № 6

Перепишем уравнение $x^2 - y^2 = 105$ в виде:

$$(x - y)(x + y) = 105,\; 0 < x, y \in Z \;\Rightarrow\; x - y > 0 \;\Rightarrow\; x > y$$

и, кроме того, $x - y < x + y$. Следовательно, число 105 надо разложить на два множителя так, чтобы меньший из них, то есть $x - y$, был меньше чем $\sqrt{105}$. Это равносильно тому, что $0 < x - y < 10 \Rightarrow x - y = \{1; 3; 5; 7\}$ (из всех делителей числа 105). Таким образом, можем записать следующие четыре системы уравнений:

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 105 \end{cases}; \quad \begin{cases} x - y = 3, \\ x + y = 35 \end{cases}; \quad \begin{cases} x - y = 5, \\ x + y = 21 \end{cases}; \quad \begin{cases} x - y = 7, \\ x + y = 15 \end{cases}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

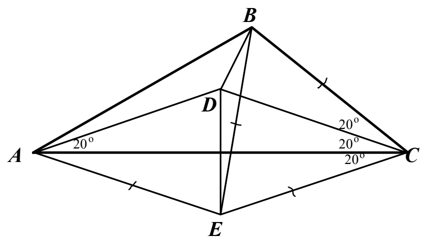
$$\begin{cases} x_1 = 53, \\ y_1 = 52 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_2 = 19, \\ y_2 = 16 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_3 = 13, \\ y_3 = 8 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_4 = 11, \\ y_4 = 4 \end{cases}$$

Ответ: $(53; 52)$; $(19; 16)$; $(13; 8)$; $(11; 4)$

<u>3-й уровень</u>

Задание № 7

Треугольник ΔADC равнобедренный. Достроим этот треугольник (см. рис.) до ромба $ADCE$. Далее, соединяем точки B и E отрезком прямой BE.



Рассмотрим:

1) ΔBEC – равносторонний, так как $BC = CE$ – по построению; угол $\angle BCE = 60^\circ$;
2) ΔABE – равнобедренный, так как $AE = BE$.

Тогда:

$$\angle BEA = 140^\circ - 60^\circ = 80^\circ \Rightarrow \angle BAE = \frac{180^\circ - 80^\circ}{2} = 50^\circ;\; \angle BAD = 50^\circ - 2 \cdot 20^\circ = 10^\circ.$$

Кроме того, учитывая, что

$$DC = EC = BC \;\Rightarrow\; \Delta BCD \text{ – равнобедренный } \;\Rightarrow\; \angle CBD = \angle CDB = 80^\circ,$$

можем записать:

$$\angle \boldsymbol{ADB} = 360^\circ - \angle \boldsymbol{ADC} - \angle \boldsymbol{CDB} = 360^\circ - \left(180^\circ - 2\cdot 20^\circ\right) - 80^\circ = 140^\circ.$$

Таким образом:

$$\angle \boldsymbol{ABD} = 180^\circ - \angle \boldsymbol{ADB} - \angle \boldsymbol{BAD} = 180^\circ - 140^\circ - 10^\circ = 30^\circ.$$

Ответ: $\angle \boldsymbol{ABD} = 30^\circ$

Задание № 8

Обозначим через $\boldsymbol{q}$ знаменатель данной геометрической прогрессии. Тогда:

1) $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ – корни уравнения $\boldsymbol{x}^2 - 3\boldsymbol{x} + \boldsymbol{A} = 0 \Rightarrow$ по теореме Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 \cdot x_2 = A \end{cases} \Rightarrow \left[\, x_2 = x_1 q \,\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_1 q = 3, \\ x_1 x_1 q = A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(1+q) = 3, \\ x_1^2 q = A. \end{cases}$$

2) $\boldsymbol{x}_3$ и $\boldsymbol{x}_4$ – корни уравнения $\boldsymbol{x}^2 - 12\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B} = 0 \Rightarrow$ по теореме Виета:

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 12, \\ x_3 \cdot x_4 = B \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_3 = x_1 q^2 \\ x_4 = x_1 q^3 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 q^2 + x_1 q^3 = 12, \\ x_1 q^2 x_1 q^3 = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 q^2 (1+q) = 12, \\ x_1^2 q^5 = B. \end{cases}$$

Таким образом, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1(1+q) = 3, \\ x_1 q^2 (1+q) = 12, \\ x_1^2 q = A, \\ x_1^2 q^5 = B. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} q^2 = 4 \Rightarrow q = 2, \\ \text{так как последовательность} \\ \text{возрастающая} \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} q = 2, \\ x_1 = 1, \\ A = 2, \\ B = 32. \end{cases}$$

Ответ: $\boldsymbol{A} = 2,\ \boldsymbol{B} = 32$

Задание № 9

Пусть $\boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{x}$ (км/ч) – скорость первого бегуна; $\boldsymbol{V}_2 = \boldsymbol{y}$ (км/ч) – скорость второго бегуна.

Тогда $\dfrac{1}{\boldsymbol{x}}$ (ч) и $\dfrac{1}{\boldsymbol{y}}$ (ч) – время, за которое пробежит 1 (км) каждый из бегунов соответственно.

По условию задачи, два бегуна стартовали один за другим с интервалом в две минуты, причём второй бегун догнал первого на расстоянии 1 (км) от точки старта. Следовательно, второй бегун затратил на 1 (км) на две минуты меньше, чем первый. Значит, можем записать уравнение:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{30}.$$

Далее, к моменту второй встречи первый бегун находился в пути 20 минут, следовательно, он пробежал $\dfrac{1}{3}\boldsymbol{x}$ (км). Второй бегун к этому моменту пробежал $\left(5 + \left(5 - \dfrac{1}{3}\boldsymbol{x}\right)\right) = \left(10 - \dfrac{\boldsymbol{x}}{3}\right)$ (км), на что затратил 18 минут. То есть:

$$10 - \frac{x}{3} = \frac{18}{60} y.$$

В результате вышесказанного можем записать систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{30}, \\ 10 - \dfrac{x}{3} = \dfrac{18}{60} y \ \Rightarrow x = 3\left(10 - \dfrac{3}{10} y\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{30 - \dfrac{9}{10} y} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{30}, & (1) \\ x = 3\left(10 - \dfrac{3}{10} y\right). & (2) \end{cases}$$

В результате преобразований, уравнение (1) перепишется в виде:

$$y^2 + 30y - 1000 = 0 \Rightarrow y_1 = 20,\ y_2 = -50 \Rightarrow \left[\, y > 0 \,\right] \Rightarrow y = 20.$$

Ответ: скорость второго бегуна равна 20 км/ч

10 – 11 классы

1-й уровень

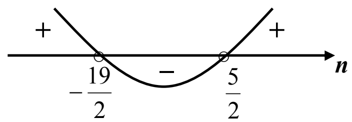
Задание № 1

$$x_n = \frac{A_{n+4}^4}{P_{n+2}} - \frac{143}{4P_n} \overset{def}{=} \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{(n+2)!} - \frac{143}{4n!} = \frac{(n+4)(n+3)}{n!} - \frac{143}{4n!} =$$

$$= \frac{4(n+4)(n+3)-143}{4n!} = \frac{4n^2+28n-95}{4n!} < 0 \ \Rightarrow\ 4n^2+28n-95<0.$$

Решив вспомогательное уравнение $4n^2+28n-95=0$, получим корни $n_1 = -\frac{19}{2}; n_2 = \frac{5}{2}$.

Тогда



$$4n^2+28n-95<0,$$
$$-\frac{19}{2} < n < \frac{5}{2}.$$

Учитывая, что $n \in N$, получим: $n = \{1; 2\} \Rightarrow x_1 = -\frac{63}{4};\ x_2 = -\frac{23}{8}$.

Ответ: $x_1 = -\frac{63}{4};\ x_2 = -\frac{23}{8}$

Задание № 2

Решение.

$$x^3-(a+2)x+\sqrt{a+1}=0,$$
$$x^3-(a+1)x-x+\sqrt{a+1}=0,$$
$$x\left(x^2-(a+1)\right)-\left(x-\sqrt{a+1}\right)=0,$$
$$x\left(x-\sqrt{a+1}\right)\left(x+\sqrt{a+1}\right)-\left(x-\sqrt{a+1}\right)=0,$$
$$\left(x-\sqrt{a+1}\right)\left(x^2+x\sqrt{a+1}-1\right)=0,$$
$$x-\sqrt{a+1}=0 \qquad \text{или} \qquad x^2+x\sqrt{a+1}-1=0$$
$$x_1=\sqrt{a+1} \qquad\qquad x_{2,3}=\frac{-\sqrt{a+1}+\sqrt{a+5}}{2}$$

Таким образом, если $a \geq -1$, то исходное уравнение имеет три различных действительных корня.

Задание № 3

Решение.

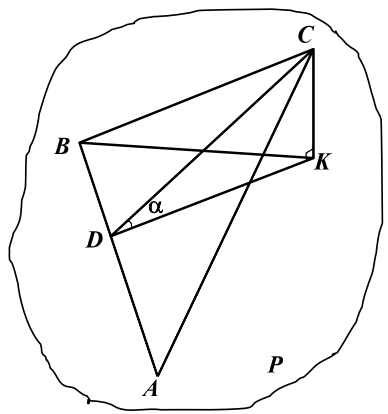
$$\frac{lg\left(7-4\sqrt{3}\right)}{lg\left(2-\sqrt{3}\right)} = \frac{lg\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{lg\left(2-\sqrt{3}\right)} = \frac{2\,lg\left|\,2-\sqrt{3}\,\right|}{lg\left(2-\sqrt{3}\right)} = \left[\,2-\sqrt{3}>0\,\right] = \frac{2\,lg\left(2-\sqrt{3}\right)}{lg\left(2-\sqrt{3}\right)} = 2.$$

Ответ: 2

2-й уровень

Задание № 4

Пусть ΔABC данный прямоугольный треугольник: $\angle ACB = 90^\circ$; CB – меньший катет. Проведём через точку C плоскость, перпендикулярную прямой AB. Обозначим через D точку пересечения этой плоскости с прямой AB; K – основание перпендикуляра, опущенного из точки C на плоскость P. Следовательно ΔCKD – прямоугольный. Далее: $CD \perp AB$; $DK \perp AB \Rightarrow \angle CDK$ – угол между плоскостью P и плоскостью $\Delta ABC \Rightarrow \angle CDK = \alpha$.



Найдём теперь угол $\angle CBK$. Так как $CD \perp AB \Rightarrow \Delta CDA \sim \Delta ABC$ (треугольники являются прямоугольными и имеют общий острый угол). Следовательно:

$$\frac{|CD|}{|CA|} = \frac{|BC|}{|AB|} \Rightarrow |CD| = \frac{|CA|\cdot|BC|}{|AB|} = \frac{3\cdot 4}{5} = 12.$$

Далее, из того, что:

1) ΔCDK – прямоугольный $\Rightarrow |CK| = |CD|\,sin\,\alpha = \frac{12}{5}sin\,\alpha$;

2) ΔCBK – прямоугольный $\Rightarrow \frac{|CK|}{3} = sin(\angle CBK) \Rightarrow sin(\angle CBK) = \frac{4}{5}sin\,\alpha$.

Следовательно: $\angle CBK = arcsin\left(\frac{4}{5}sin\,\alpha\right)$.

Ответ: $\angle CBK = arcsin\left(\frac{4}{5}sin\,\alpha\right)$

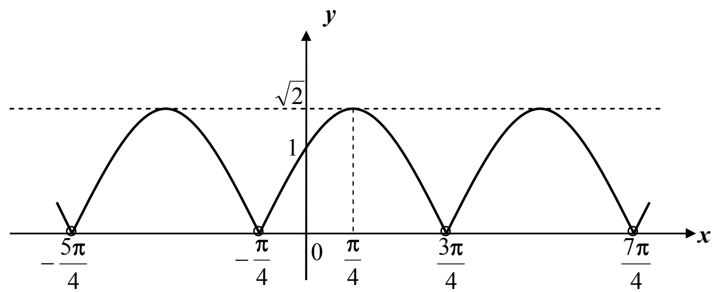
Задание № 5

$$y = 2^{\log_4(\sin x+\cos x)^2} = 2^{2\log_{2^2}|\sin x+\cos x|} = 2^{\log_2|\sin x+\cos x|} = |\sin x + \cos x| = 2\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|$$

при условии, что $x \neq -\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

Итак, график функции $y = 2^{\log_4(\sin x+\cos x)^2} = 2\left|\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|,\ x \neq -\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$

имеет вид:



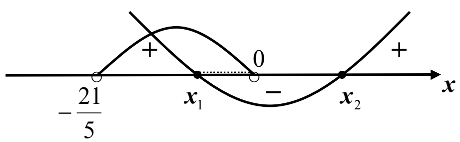
Задание № 6

Решение.

$$\cos\frac{3}{2} - 4x - x^2 \geq 0, \quad x \in \left(-\frac{21}{5}; 0\right),$$

$$x^2 + 4x - \cos\frac{3}{2} \leq 0.$$

Вспомогательное уравнение $x^2 + 4x - \cos\dfrac{3}{2} = 0$ имеет решения: $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 + \cos\dfrac{3}{2}}$. Тогда



для неравенства: $x \in \left[-2 - \sqrt{4 + \cos\dfrac{3}{2}};\ 0\right)$.

Действительно,

$$0 < \frac{3}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{3}{2} > 0 \Rightarrow \begin{cases} -2 - \sqrt{4 + \cos\dfrac{3}{2}} < 0, \\ -2 + \sqrt{4 + \cos\dfrac{3}{2}} > 0. \end{cases}$$

Кроме того:

1) $\dfrac{\pi}{3} < \dfrac{3}{2} < \dfrac{\pi}{2} \ \Rightarrow\ \cos\dfrac{3}{2} < \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} \ \Rightarrow\ -2 - \sqrt{4 + \cos\dfrac{3}{2}} > -2 - \sqrt{4 + \dfrac{1}{2}} = -2 - \dfrac{3}{2}\sqrt{2}$.

2) $\left(-2 - \dfrac{3}{2}\sqrt{2} > -\dfrac{21}{5}\right) \Leftrightarrow \left(\sqrt{2} < \dfrac{22}{15}\right)$ – справедливо, так как $\left(\dfrac{22}{15}\right)^2 = \dfrac{484}{225} > 2$.

Значит: $-\dfrac{21}{5} < -2 - \sqrt{4 + \cos\dfrac{3}{2}} < 0 \Rightarrow x \in \left[-2 - \sqrt{4 + \cos\dfrac{3}{2}};\ 0\right)$.

Ответ: $x \in \left[-2 - \sqrt{4 + \cos\dfrac{3}{2}};\ 0\right)$

<u>3-й уровень</u>

Задание № 7

Пусть для приготовления сплава, содержащего 40% марганца, взяли x(кг) – первого, y(кг) – второго и z(кг) – третьего сплава соответственно. Получили, тем самым, $(x + y + z)$ (кг) нового сплава, в котором будет $(0{,}9y + 0{,}6z)$ (кг) марганца. Заметим, что $x \geq 0;\ y \geq 0;\ z \geq 0;\ x^2 + y^2 + z^2 \neq 0$ (то есть x, y, z одновременно в ноль не обращаются). Следовательно:

$$0{,}9y + 0{,}6z = 0{,}4(x + y + z) \ \Leftrightarrow\ 4x = 5y + 2z. \qquad (*)$$

Далее, в новом сплаве $(0{,}7x + 0{,}1y + 0{,}25z)$(кг) меди. Значит, в одном килограмме нового сплава меди будет:

$$M = \frac{0{,}7x + 0{,}1y + 0{,}25z}{x + y + z} = \left[x \overset{(*)}{=} \frac{5y + 2z}{4} \right] = \frac{13y + 8z}{30y + 20z}\ (\text{кг}).$$

Так как $x \ge 0;\ y \ge 0;\ z \ge 0;\ x^2 + y^2 + z^2 \ne 0$, то:

1) если $y = 0;\ z \ne 0 \Rightarrow M = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ (кг);

2) если $y \ne 0;\ z = 0 \Rightarrow M = \frac{13}{30}$ (кг);

3) если $y \ne 0;\ z \ne 0 \Rightarrow M = \dfrac{13 + 8\frac{z}{y}}{30 + 20\frac{z}{y}} = \frac{2}{5} + \dfrac{1}{30 + 20\frac{z}{y}} \Rightarrow \left[\ \frac{z}{y} > 0\ \right] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{2}{5} < \frac{2}{5} + \frac{1}{30 + 20\frac{z}{y}} < \frac{2}{5} + \frac{1}{30} = \frac{13}{30} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{5} < M < \frac{13}{30}.$$

Таким образом:

– ***наименьшее*** процентное содержание меди в новом сплаве равно $\frac{2}{5} \cdot 100\% = 40\%$;

– ***наибольшее*** процентное содержание меди в новом сплаве равно $\frac{13}{30} \cdot 100\% = 43\frac{1}{3}\%$.

Ответ: $\boldsymbol{min} = 40\%;\ \ \boldsymbol{max} = 43\frac{1}{3}\%$

Задание № 8

Решение.

$$\log_2\left(1 + x^2\right) = \log_2 x + 2x - x^2 \Leftrightarrow \left[\ x > 0\ \right] \Leftrightarrow \log_2 \frac{1 + x^2}{x} = 2x - x^2.$$

Заметим, что функция $f(x) = \log_2 \frac{1 + x^2}{x}$ монотонно возрастает для $\forall\, x > 0$. Причём, так как

$$\frac{1 + x^2}{x} = \frac{x^2 - 2x + 1 + 2x}{x} = \frac{(x-1)^2 + 2x}{x} = 2 + \frac{(x-1)^2}{x} \ge \left[\begin{array}{c} \text{ОДЗ:} \\ x > 0 \end{array}\right] \ge 2,$$

то $\log_2 \frac{1 + x^2}{x} \ge \log_2 2 = 1$.

Далее, $2x - x^2 = -\left(x^2 - 2x + 1 - 1\right) = -\left((x-1)^2 - 1\right) = 1 - (x-1)^2 \le 1$.

Таким образом:

$$\log_2 \frac{1 + x^2}{x} = 2x - x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} \log_2 \frac{1 + x^2}{x} \ge 1, \\ 2x - x^2 \le 1 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - x^2 = 1, \\ \log_2 \frac{1 + x^2}{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 0, \\ \frac{1 + x^2}{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 0, \\ \frac{1 + x^2}{x} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \in \text{ОДЗ}, \\ \frac{1+1}{1} = 2 - \text{верное равенство} \end{cases} \Rightarrow x = 1.$$

Ответ: $x = 1$

Задание № 9

Решение.

$$\begin{cases} x^2 y^2 - 2x + y^2 = 0, \\ 2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \dfrac{2x}{x^2 + 1}, & (1) \\ 2(x-1)^2 + \left(1 + y^3\right) = 0. & (2) \end{cases}$$

Так как

$$0 \le (1 - x)^2 = 1 - 2x + x^2 \Rightarrow 1 + x^2 \ge 2x \Rightarrow \frac{2x}{x^2 + 1} \le 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} y^2 \le 1 \Leftrightarrow (-1 \le y \le 1),$$

то для уравнения (2) можем записать:

$$2(x-1)^2 + \left(1 + y^3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} 2(x-1)^2 \ge 0, \\ \left(1 + y^3\right) \ge 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 0, \\ 1 + y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = -1. \end{cases}$$

Ответ: $(1; -1)$

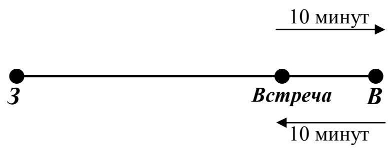
2007 год

8 – 9 классы

1-й уровень

Задание № 1

Инженер приехал на завод на 20 минут раньше, чем обычно. Следовательно, машина находилась в пути на 20 минут меньше, чем обычно.



Это означает, что при следовании к вокзалу машина была в пути на 10 минут меньше и, значит, на 10 минут меньше при движении к заводу.

Таким образом, в момент встречи часы показывали 7 часов 50 минут.

Ответ: 7 часов 50 минут

Задание № 2

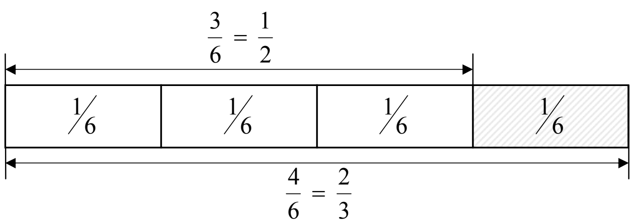
$$2\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{18}=2\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2\cdot 9}=2\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{9}=\sqrt[3]{2}\cdot\left(2+\sqrt[3]{9}\right)>\sqrt[3]{2}\cdot\left(2+\sqrt[3]{8}\right)=$$

$$=\sqrt[3]{2}\cdot(2+2)=4\cdot\sqrt[3]{2}>4\cdot\sqrt[3]{1}=4.$$

Ответ: $2\cdot\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{18}>4$

Задание № 3

Сложим ленту вдвое. Затем еще раз вдвое. После чего отрежем получившуюся четвёртую часть. Длина оставшейся части ленты как раз и будет равна полметра.



$$\frac{2}{3}-\frac{2}{3}:4=\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{4-1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\ (\text{м})$$

2-й уровень

Задание № 4

Собрано 100кг (100%) грибов, 99% влажности	
1 кг сухого вещества (1%)	99 кг воды (99%)

⇩

После подсушки (100%)	
1 кг сухого вещества (2%)	98% воды

⇩

$$\left.\begin{array}{l}1\text{ кг сухого вещества}-2\%\\ \boldsymbol{x}\text{ кг грибов}-100\%\end{array}\right\}\Rightarrow \boldsymbol{x}=\frac{100}{2}=50\ (\text{кг})$$

Ответ: 50 кг грибов

Задание № 5

Решение.

$$|\boldsymbol{x}-4{,}2|\cdot(\boldsymbol{x}-4{,}2)=-1\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}(\boldsymbol{x}-4{,}2)<0,\qquad (*)\\ |\boldsymbol{x}-4{,}2|=-(\boldsymbol{x}-4{,}2)\end{array}\right.\ \Leftrightarrow\ -(\boldsymbol{x}-4{,}2)^2=-1\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ (\boldsymbol{x}-4{,}2)^2=1\,\Big|\sqrt{\ }\ \Leftrightarrow\ |\boldsymbol{x}-4{,}2|=1\ \overset{(*)}{\Leftrightarrow}\ -(\boldsymbol{x}-4{,}2)=1\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{x}-4{,}2=-1\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \boldsymbol{x}=3{,}2.$$

После получения ответа <u>необходимо сделать проверку</u>.

Ответ: $\boldsymbol{x}=3{,}2$

Задание № 6

Определим границы, в которых должно заключаться m, чтобы корни $x_{1,2}$ уравнения $x^2-2mx+m^2-1=0$ находились между (-2) и 4, то есть: $-2<x_{1,2}<4$.

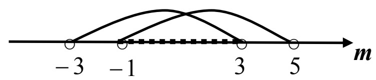
Так как:

$$x_{1,2}=m\pm\sqrt{m^2-(m^2-1)}=m\pm\sqrt{m^2-m^2+1}=m\pm 1;$$

$$x_1=m-1;\quad m_2=m+1.$$

По условию: $-2<x_{1,2}<4$. Следовательно,

$$\begin{cases}-2<m-1<4,\\ -2<m+1<4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<m<5,\\ -3<m<3\end{cases}$$



$-1<m<3$

Ответ: $-1<m<3$

<u>3-й уровень</u>

Задание № 7

Решение. $x^2+5y^2+4xy+2y+1=0,\quad \forall x,y\in R$.

<u>1-й способ:</u>

$$x^2+5y^2+4xy+2y+1=0,\quad \forall x,y\in R,$$
$$(x^2+4xy+4y^2)+(y^2+2y+1)=0,$$
$$(x+2y)^2+(y+1)^2=0.$$

Последнее уравнение равносильно следующей системе уравнений:

$$\begin{cases}x+2y=0,\\ y+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+2y=0,\\ y=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2,\\ y=-1.\end{cases}$$

Ответ: $(2;-1)$

<u>2-й способ:</u>

Данное уравнение можно решить, как квадратным уравнением относительно y. Действительно:

$$x^2+5y^2+4xy+2y+1=0,\quad \forall x,y\in R,$$
$$5y^2+2(2x+1)y+(x^2+1)=0.$$

Итак, как видим, полученное уравнение является квадратным уравнением относительно y.

Тогда:

$$y_{1,2}=\frac{-(2x+1)\pm\sqrt{(2x+1)^2-5(x^2+1)}}{5}=\frac{-(2x+1)\pm\sqrt{4x^2+4x+1-5x^2-5}}{5}=$$

$$=\frac{-(2x+1)\pm\sqrt{-x^2+4x-4}}{5}=\frac{-(2x+1)\pm\sqrt{-(x-2)^2}}{5}.$$

Так как $y_{1,2}\in R$ и, очевидно, $D=-(x-2)^2\le 0, \forall x\in R$, то $x-2=0\Rightarrow x=2$.

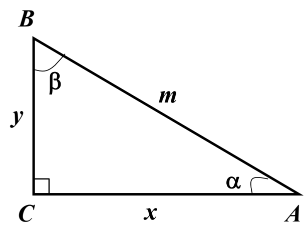
Значит: $y=\dfrac{-(2\cdot 2+1)}{5}=\dfrac{-5}{5}=-1$.

Ответ: $(2;-1)$

Задание № 8

Решение.

Пусть ΔABC – данный прямоугольный треугольник: $\angle C=90^\circ$, $|AB|=m$.



Обозначим:

$$\angle A=\alpha,\ \angle B=\beta,\quad \sin\alpha+\sin\beta=n,$$
$$|AC|=x,\ |BC|=y.$$

Тогда:

$$\sin\alpha=\frac{y}{m}\ \Rightarrow\ y=m\cdot\sin\alpha,$$
$$\sin\beta=\frac{x}{m}\ \Rightarrow\ x=m\cdot\sin\beta.$$

По теореме Пифагора: $x^2+y^2=m^2$. Следовательно, можем записать:

$$m^2\sin^2\beta+m^2\sin^2\alpha=m^2\ \Big|:m^2\neq 0,$$
$$\sin^2\beta+\sin^2\alpha=1. \qquad (*)$$

По условию

$$\sin\alpha+\sin\beta=n\ \Big|\uparrow 2,$$

$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta=n^2\overset{(*)}{\Rightarrow}1+2\sin\alpha\sin\beta=n^2\ \Rightarrow\ \sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{n^2-1}{2}.$$

Таким образом,

$$S_{\Delta ABC} \overset{def}{=} \frac{xy}{2} = \frac{m^2 \sin\alpha \sin\beta}{2} = \frac{m^2(n^2-1)}{4} \text{ (кв. ед.).}$$

Ответ: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{m^2(n^2-1)}{4}$ кв. ед.

Задание № 9

Не могут.

Доказательство проведём методом «от противного». Предположим, что числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ являются членами одной арифметической прогрессии. Обозначим, например, $a_k = \sqrt{2}$; $a_m = \sqrt{3}$; $a_p = \sqrt{5}$; $k,\ m,\ p \in N$. Тогда:

$$\begin{cases} a_k \overset{def}{\equiv} a_1 + (k-1)d = \sqrt{2}, \\ a_m \overset{def}{\equiv} a_1 + (m-1)d = \sqrt{3}, \\ a_p \overset{def}{\equiv} a_1 + (p-1)d = \sqrt{5}. \end{cases}$$

Рассмотрим

$$\left.\begin{cases} a_m - a_k = d(m-k), \\ a_p - a_m = d(p-m) \end{cases}\right| (:) \Rightarrow \frac{a_m - a_k}{a_p - a_m} = \frac{d(m-k)}{d(p-m)} \Leftrightarrow \frac{a_m - a_k}{a_p - a_m} = \frac{(m-k)}{(p-m)}.$$

Так как $k,\ m,\ p \in N$, то $\dfrac{(m-k)}{(p-m)} \in Q$, то есть $\dfrac{(m-k)}{(p-m)}$ – рациональное число.

Но, с другой стороны,

$$\frac{(m-k)}{(p-m)} = \frac{a_m - a_k}{a_p - a_m} \overset{def}{=} \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{5}+\sqrt{3}) \text{ – число иррациональное.}$$

Как видим, мы получили, что рациональное число равно числу иррациональному. То есть получили противоречие. Значит, наше предположение о том, что числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ являются членами одной арифметической прогрессии, неверно.

Тем самым мы показали, что ***числа*** $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ***и*** $\sqrt{5}$ ***<u>не могут</u> являться членами одной арифметической прогрессии***.

Ответ: не могут

10 класс

<u>1-й уровень</u>

Задание № 1

Да, могут.

Пусть

$$\exists\alpha \Rightarrow tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = 2+\sqrt{3}, \\ ctg\alpha = 2-\sqrt{3} \end{array}\right] \Rightarrow (2+\sqrt{3})\cdot(2-\sqrt{3}) = 4-3 = 1.$$

То есть, $1 \equiv 1$.

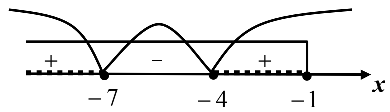
Ответ: могут

Задание №2

Решение.

$$(x+1)\cdot\sqrt{(x+4)\cdot(x+7)} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{(x+4)\cdot(x+7)} \ge 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \le 0, \\ (x+4)\cdot(x+7) \ge 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \le -1, \\ (x+4)(x+7) \ge 0. \end{cases}$$

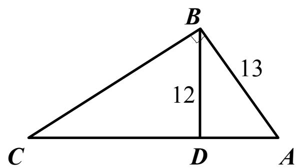


$$x \in (-\infty; -7\,] \cup [-4; -1\,]$$

Ответ: $x \in (-\infty; -7\,] \cup [-4; -1\,]$

Задание № 3

Пусть ΔABC – данный прямоугольный треугольник: $\angle B = 90^{\circ}$, BD – высота ($D \in AC$), $|AB| = 13$, $|BD| = 12$. Тогда, например, $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}|AB|\cdot|BC|$. Найдем $|BC|$.



Прежде всего, заметим:

$$|AD| = \sqrt{|AB|^2 - |BD|^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5.$$

Кроме того, $\Delta ABD \sim \Delta ABC$ (треугольники прямоугольные и имеют общий острый угол).

Следовательно:

$$\frac{|BD|}{|AD|}=\frac{|BC|}{|AB|}\Rightarrow |BC|=\frac{|BD|\cdot|AB|}{|AD|}=\frac{12\cdot 13}{5}=\frac{156}{5}.$$

Таким образом:

$$S_{\Delta ABC}\overset{def}{=}\frac{1}{2}|AB|\cdot|BC|=\frac{1}{2}\cdot 13\cdot\frac{156}{5}=202{,}8 \text{ (кв. ед.)}$$

Ответ: 202, 8 кв. ед.

2-й уровень

Задание № 4

Решение.

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=\sqrt{(x-1)+2\sqrt{x-1}+1}+\sqrt{(x-1)-2\sqrt{x-1}+1}=$$

$$=\sqrt{\left(\sqrt{x-1}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{x-1}-1\right)^2}=\left|\sqrt{x-1}+1\right|+\left|\sqrt{x-1}-1\right|=\left[\ \forall x\ge 1\ \right]=$$

$$=\sqrt{x-1}+1+\left|\sqrt{x-1}-1\right|=\left[\begin{array}{ll}\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1, & \sqrt{x-1}-1\ge 0,\\ \sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}+1, & \sqrt{x-1}-1<0\end{array}\right.=$$

$$=\left[\begin{array}{ll}2\sqrt{x-1}, & \sqrt{x-1}\ge 1,\\ 2, & \sqrt{x-1}<1\end{array}\right.=\left[\begin{array}{ll}2\sqrt{x-1}, & x\ge 2,\\ 2, & 1\le x<2.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{ll}2\sqrt{x-1}, & x\ge 2,\\ 2, & 1\le x<2\end{array}\right.$

Задание № 5

Числа x, 3, y являются последовательными членами геометрической прогрессии. Тогда, согласно основному характеристическому свойству геометрической прогрессии, $3^2=xy$. Таким образом, можем записать:

$$\begin{cases}x^4=y\cdot\sqrt{3},\\ xy=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{x^4}{\sqrt{3}},\\ \dfrac{x^5}{\sqrt{3}}=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{x^4}{\sqrt{3}},\\ x^5=\left(\sqrt{3}\right)^5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{3},\\ y=\dfrac{9}{\sqrt{3}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{3},\\ y=3\sqrt{3}.\end{cases}$$

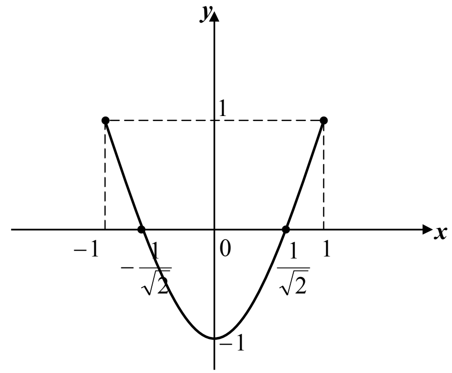
Ответ: $\left(\sqrt{3};\ 3\sqrt{3}\right)$

Задание № 6

Построим график функции: $y=cos(2\,arccos\,x)$. Очевидно, $D(y)=[-1;1]$. Тогда:

$$y=cos(2\,arccos\,x)=2\,cos^2(arccos\,x)-1=2x^2-1,\quad \forall x\in[-1;1].$$

Следовательно,



3-й уровень

Задание № 7

Пусть:
x (км/ч) – собственная скорость лодки;
y (км/ч) – скорость течения быстрой реки;
z (км/ч) – скорость течения медленной реки;
S (км) – расстояние, пройденное каждой лодкой по течению;
T (ч) – время, затраченное каждой лодкой на весь путь по реке с быстрым течением;
t (ч) – время, затраченное каждой лодкой на весь путь по реке с медленным течением.

Тогда

$$T=\frac{S}{x+y}+\frac{S}{x-y}=\frac{2Sx}{x^2-y^2};\qquad t=\frac{S}{x+z}+\frac{S}{x-z}=\frac{2Sx}{x^2-z^2}.$$

Рассмотрим

$$T-t=\frac{2Sx}{x^2-y^2}-\frac{2Sx}{x^2-z^2}=2Sx\left(\frac{1}{x^2-y^2}-\frac{1}{x^2-z^2}\right).$$

Так как

$$x > y > z > 0 \Rightarrow x^2 > y^2 > z^2 \Rightarrow \left(x^2 - y^2\right) < \left(x^2 - z^2\right) \Rightarrow \frac{1}{x^2 - y^2} > \frac{1}{x^2 - z^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T - t = 2Sx\left(\frac{1}{x^2 - y^2} - \frac{1}{x^2 - z^2}\right) > 0 \Rightarrow T > t.$$

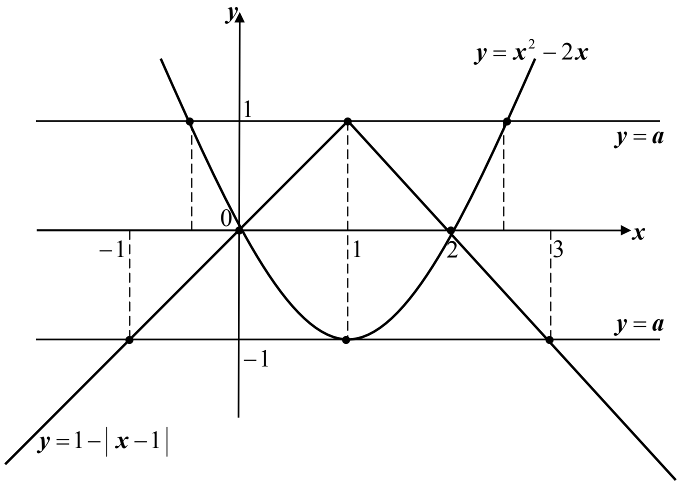
Таким образом, мы показали, что время движения лодки по реке с быстрым течением больше, чем по реке с медленным течением.

Задание № 8

Для ответа на поставленный вопрос воспользуемся геометрическим способом решения исходного уравнения.

Итак,

$$\left(a + 2x - x^2\right)\cdot\left(a + |x - 1| - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - 2x = a, \\ 1 - |x - 1| = a. \end{array}\right.$$



Нетрудно видеть, что исходное уравнение имеет ровно три решения:

– при $a = -1$ $\left(x_1 = -1;\ x_2 = 1;\ x_3 = 3\right)$;

– при $a = 1$ $\left(\left[\begin{array}{l} x^2 - 2x - 1 = 0, \\ x = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}, \\ x_3 = 1 \end{array}\right. \right).$

Задание № 9

Решение.

Так как правая часть данного уравнения неотрицательна, то левая часть также является неотрицательной. То есть: $\cos x \geq 0$.

Следовательно,

$$|\cos x| = \cos x,\ \forall x \in R, \text{ таких что } \cos x \geq 0.$$

Таким образом, для $\forall\, x \in R \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$, таких что $\cos x \geq 0$, можем записать:

$$\frac{\cos x}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2} = |\cos x| \ \Leftrightarrow\ \frac{\cos x}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2} = \cos x \ \Leftrightarrow\ \cos x\left(\frac{1}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2} - 1\right) = 0.$$

Значит:

$$\left[\begin{array}{ll} \cos x = 0, & (1) \\ \dfrac{1}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2} = 1 & (2) \end{array}\right.$$

Из (1) следует, что $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$ (удовлетворяют условиям $x \in R \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$, таких что $\cos x \geq 0$).

Из (2) следует, что $x + \frac{3}{2} = \pm 1 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2};\ x_2 = -\frac{5}{2}$ (заметим, что $x_{1,2} \neq -\frac{3}{2}$).

Проверим теперь условие $\cos x \geq 0$. Итак:

а) $x_1 = -\frac{1}{2}$: $\cos\left(-\frac{1}{2}\right) = \cos\frac{1}{2}$. Так как $0 < \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$, то $\cos\frac{1}{2} > 0$. Это означает, что $x_1 = -\frac{1}{2}$ является корнем исходного уравнения;

б) $x_2 = -\frac{5}{2}$. Так как $-\pi < -\frac{5}{2} < -\frac{\pi}{2}$, то $\cos\left(-\frac{5}{2}\right) < 0$. Это означает, что $x_2 = -\frac{5}{2}$ не является корнем исходного уравнения.

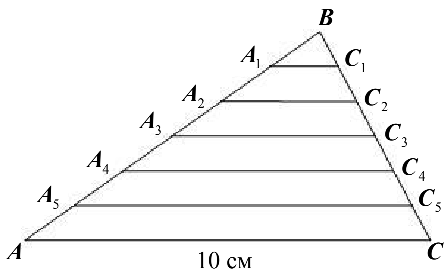
Ответ: $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ -\frac{1}{2}\right\},\ k \in Z$

11 класс

1-й уровень

Задание № 1

Разделим сторону AB треугольника ΔABC на шесть равных частей с помощью пяти параллельных к стороне AC отрезков (см. рис.). Очевидно, что $\Delta A_1BC_1 \sim \Delta A_2BC_2 \sim \Delta A_3BC_3 \sim \Delta A_4BC_4 \sim \Delta A_5BC_5 \sim \Delta ABC$, например, по двум углам (основания параллельны). Тогда коэффициенты подобия, соответственно, равны:



$$k_i = \frac{i}{6}, \quad i = \overline{1,5}.$$

Следовательно, сумма длин отрезков A_iC_i, $i = \overline{1,5}$ равна:

$$10\cdot\frac{1}{6} + 10\cdot\frac{2}{6} + 10\cdot\frac{3}{6} + 10\cdot\frac{4}{6} + 10\cdot\frac{5}{6} = \frac{10}{6}\cdot(1+2+3+4+5) = \frac{150}{6} = 25 \text{ (см).}$$

Ответ: 25 см

Задание № 2

Нетрудно показать, что $(-1;1) \subset$ ОДЗ исходного уравнения. Далее,

$$\left|x^2 - 2\right| = 1 - x \Leftrightarrow \left[\, -1 < x < 1 \,\right] \Leftrightarrow -x^2 + 2 = 1 - x \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Заметим, что:

1) $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > \frac{1+\sqrt{4}}{2} = \frac{1+2}{2} = 1{,}5 > 1 \Rightarrow x_1 \notin (-1;1)$;

2) $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} > \frac{1-\sqrt{9}}{2} = \frac{1-3}{2} = -1$; $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < \frac{1-\sqrt{4}}{2} = \frac{1-2}{2} = -0{,}5 < 1$. То есть, мы получили, что $(-1 < x_2 < 1) \Leftrightarrow x_2 \in (-1;1)$.

Ответ: $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Задание № 3

Решение. Очевидно, что ОДЗ данного уравнения: $\forall x \in \boldsymbol{R}$. Тогда

$$x^3 - x^2 - x = \frac{1}{3},$$
$$3x^3 - 3x^2 - 3x = 1,$$
$$4x^3 - x^3 - 3x^2 - 3x = 1,$$
$$4x^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1,$$
$$4x^3 = (x+1)^3, \ \left|\ \sqrt[3]{\ }\right.$$
$$x\cdot\sqrt[3]{4} = x + 1,$$
$$x\left(\sqrt[3]{4} - 1\right) = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{4} - 1} \in \text{ОДЗ}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[3]{4}-1}$

2-й уровень

Задание № 4

По условию:

$$\begin{cases} d > c \\ (a+b = c+d) \Rightarrow c - a = b - d \\ (a+d < b+c) \Rightarrow d - b < c - a \end{cases} \Rightarrow (d - b < b - d) \Leftrightarrow 2d < 2b \ |:2 \Rightarrow d < b.$$

Итак, мы получили, что: $c < d < b$. Далее:

$$\begin{cases} d < b, \\ c - a = b - d \end{cases} \Rightarrow \left[\, b - d > 0 \,\right] \Rightarrow c - a > 0 \Leftrightarrow c > a.$$

Таким образом, окончательно можем записать: $a < c < d < b$.

Ответ: $a < c < d < b$

Задание №5

ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0, \\ \sqrt{2x+1} - 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \sqrt{2x+1} > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 2x+1 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ 2x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0.$$

Таким образом, для $\forall x>0$ справедливо:

$$2\cdot \log_9^2 x = \log_3 x\cdot \log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right),$$

$$2\cdot\left(\frac{1}{2}\log_3 x\right)^2 - \log_3 x\cdot\log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right)=0,$$

$$\frac{1}{2}(\log_3 x)^2-\log_3 x\cdot \log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right)=0,$$

$$\log_3 x\cdot\left(\frac{1}{2}\log_3 x-\log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right)\right)=0.$$

Последнее уравнение равносильно следующей совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{ll}\log_3 x=0, & (1)\\ \log_3 x = 2\log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right). & (2)\end{array}\right.$$

Каждое из полученных уравнений решим отдельно.

(1): $\log_3 x=0 \Rightarrow x=1\in$ ОДЗ;

(2): для $\forall x>0$ имеем

$$\log_3 x = 2\log_3\left(\sqrt{2x+1}-1\right) \Leftrightarrow x=2x+1-2\sqrt{2x+1}+1 \Leftrightarrow x+2=2\sqrt{2x+1}\ \Big|\uparrow 2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+2)^2=4(2x+1)\Leftrightarrow x^2+4x+4=8x+4 \Leftrightarrow x^2-4x=0\Leftrightarrow x(x-4)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1=0\notin \text{ОДЗ};\quad x_2=4\in \text{ОДЗ}.$$

Ответ: $\{1; 4\}$

Задание № 6

Так как $\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{29}$, то $\exists\varphi \mid \cos\varphi=\frac{5}{\sqrt{29}};\ \sin\varphi=\frac{2}{\sqrt{29}}$ (выполняется основное тригонометрическое тождество). Например, $\varphi=\arccos\frac{5}{\sqrt{29}}$.

Тогда:

$$5\sin x+2\cos x=\sqrt{29}(\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x)=\sqrt{29}\sin(x+\varphi)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{29}\sin(x+\varphi)=A\Rightarrow \sin(x+\varphi)=\frac{A}{\sqrt{29}}\Rightarrow\left|\frac{A}{\sqrt{29}}\right|\le 1\Rightarrow\left(-\sqrt{29}\le A\le\sqrt{29}\right).$$

Ответ: $-\sqrt{29}\le A\le\sqrt{29}$

<u>3-й уровень</u>

Задание № 7

Пусть:

1. x – человек в первой бригаде. Тогда $\frac{48}{x}$ (час) дежурил каждый член первой бригады;
2. $(18-x)$ – человек во второй бригаде. Тогда $\frac{24-3}{(18-x)-3}$ (час) дежурил каждый <u>юноша</u> второй бригады.

Значит, согласно условию, можем записать неравенство:

$$\frac{48}{x}+\frac{21}{15-x}<9,$$

$$\frac{16}{x}+\frac{7}{15-x}-3<0,$$

$$\frac{16(15-x)+7x-3x(15-x)}{x(15-x)}<0,$$

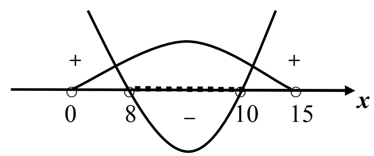
$$\frac{240-16x+7x-45x+3x^2}{x(15-x)}<0,$$

$$\frac{3x^2-54x+240}{x(15-x)}<0.$$

Так как $x>0$ и $(18-x)-3=15-x>0\Leftrightarrow x<15$, то есть $0<x<15$, получаем:

$$\begin{cases}3x^2-54x+240<0,\\ 0<x<15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-18x+80<0,\\ 0<x<15\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-18x+80=0\\ x_1=8,\ x_2=10\end{array}\right]\Rightarrow$$

$\Rightarrow$



$$\Rightarrow\begin{cases}8<x<10,\\ x\in N\end{cases}\Rightarrow x=9.$$

Ответ: в первой бригаде 9 человек

Задание № 8

Обозначим: $f(x) = arctgx - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}$, $x > 0$. Тогда:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 + x^2 - x^4 = \frac{1 - 1 - x^2 + x^2 + x^4 - x^4 - x^6}{1+x^2} = -\frac{x^6}{1+x^2} < 0,\ \forall x > 0.$$

Это означает, что функция $f(x)$ монотонно убывает при $\forall x > 0$. Следовательно, для $\forall x > 0$: $f(0) > f(x)$, где

$$f(0) = \left(arctgx - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_{x=0} = 0.$$

Таким образом: $0 > arctgx - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \Rightarrow arctgx < x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5},\ \forall x > 0,$

что и требовалось доказать.

Задание № 9

Графики функций $y = a \cdot \frac{x - |x|}{2}$ и $y = 2x^2$ ограничивают фигуру с площадью $S = \frac{1}{3}$.

Так как $|x| \overset{def}{=} \left[\begin{array}{l} x,\ \ x \ge 0; \\ -x,\ \ x < 0 \end{array}\right. \Rightarrow y \overset{def}{=} a \cdot \frac{x - |x|}{2} = \left[\begin{array}{l} 0,\ \ x \ge 0; \\ ax,\ x < 0. \end{array}\right.$

Найдём теперь абсциссы точек пересечения графиков указанных функций, то есть:

$$\left\{\begin{array}{l} y = \left[\begin{array}{l} 0,\ \ x \ge 0; \\ ax,\ x < 0, \end{array}\right. \\ y = 2x^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} y = 0, \\ y = 2x^2, \\ x \ge 0 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} y = ax, \\ y = 2x^2, \\ x < 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 0 \text{ при } x \ge 0, & (1) \\ 2x^2 = ax \text{ при } x < 0 & (2) \end{array}\right.$$

Рассмотрим отдельно условие (2) последней совокупности.

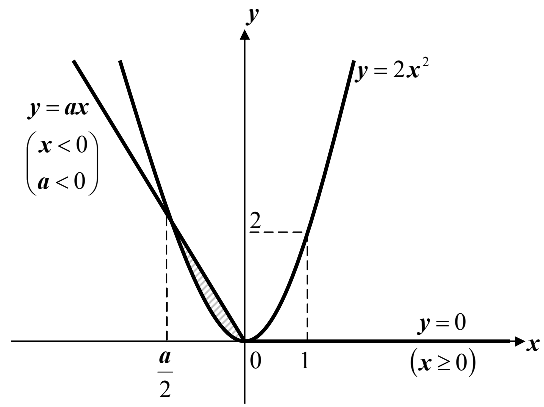
Итак, $2x^2 > 0$ для $\forall x < 0$. Следовательно, правая часть равенства (2) также положительна, то есть $ax > 0, \forall x < 0 \Rightarrow$ [так как $x < 0$] $\Rightarrow a < 0$.

Значит:

$$2x^2 = ax \Leftrightarrow x(2x - a) = 0 \Rightarrow x_1 = 0;\ \ x_2 = \frac{a}{2},\ a < 0.$$

Таким образом, абсциссы точек пересечения графиков указанных функций соответственно равны: $x_1 = 0$; $x_2 = \frac{a}{2}$, $a < 0$.

Сделаем рисунок.



Найдём теперь площадь заштрихованной области, воспользовавшись геометрическим смыслом определённого интеграла:

$$S = \int_{\frac{a}{2}}^{0} (ax - 2x^2)dx = \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_{\frac{a}{2}}^{0} = -\frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{a}{2}\right)^3 = -\frac{a^3}{8} + \frac{a^3}{12} = -\frac{a^3}{24}.$$

По условию $S = \frac{1}{3}$. Следовательно:

$$-\frac{a^3}{24} = \frac{1}{3} \Rightarrow a^3 = -8 \Rightarrow a = -2\ (a < 0).$$

***Ответ*: $a = -2$**

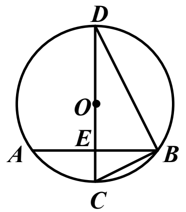
2008 год

8 – 9 классы

1-й уровень

Задание № 1

Пусть: $\boldsymbol{AB}$ – хорда; $\boldsymbol{CD}$ – диаметр данной окружности; $\boldsymbol{AB} \perp \boldsymbol{CD}$; $\boldsymbol{AB} \cap \boldsymbol{CD} = \boldsymbol{E}$; $|\boldsymbol{CE}| = 2$ см, $|\boldsymbol{ED}| = 8$ см (см. рис.). Найдём $|\boldsymbol{AB}|$.



Очевидно, что треугольники $\Delta \boldsymbol{CBD}, \Delta \boldsymbol{BED}, \Delta \boldsymbol{CEB}$ – прямоугольные и $\Delta \boldsymbol{CEB} \sim \Delta \boldsymbol{CBD} \sim \Delta \boldsymbol{BED}$ (докажите эти факты самостоятельно).

Следовательно:

$$\Delta \boldsymbol{CEB} \sim \Delta \boldsymbol{BED} \Rightarrow \frac{|\boldsymbol{BE}|}{2} = \frac{8}{|\boldsymbol{BE}|} \Rightarrow |\boldsymbol{BE}|^2 = 16 \Rightarrow |\boldsymbol{BE}| = 4\,(\text{см}).$$

Таким образом, $|\boldsymbol{AB}| = 2|\boldsymbol{BE}| = 8\,(\text{см})$.

Ответ: 8 см

Задание № 2

Воспользуемся формулой суммы первых $\boldsymbol{n}$ членов геометрической прогрессии:

$$\boldsymbol{S_n} = \frac{\boldsymbol{u}_1(1-\boldsymbol{q}^{\boldsymbol{n}})}{1-\boldsymbol{q}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \boldsymbol{S_n} = 4094, \\ \boldsymbol{u}_1 = 2,\ \boldsymbol{q} = 2 \end{array}\right] \Rightarrow 4094 = \frac{2(1-2^{\boldsymbol{n}})}{1-2} \Rightarrow 2^{\boldsymbol{n}} - 1 = 2047 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{\boldsymbol{n}} = 2048 \Leftrightarrow 2^{\boldsymbol{n}} = 2^{11} \Rightarrow \boldsymbol{n} = 11.$$

Но так как новость сообщилась через две минуты, то все 4094 жителя посёлка узнают её через $2 \cdot \boldsymbol{n}\,|_{\boldsymbol{n}=11} = 2 \cdot 11 = 22\,(\text{мин})$.

Ответ: через 22 минуты

Задание № 3

Упростим исходное выражение:

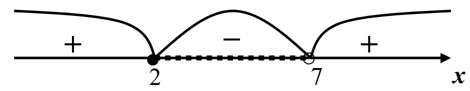
$$\sqrt{\boldsymbol{a}^2} \cdot \sqrt[3]{-\boldsymbol{a}^3} + \boldsymbol{a}\,\sqrt[5]{\boldsymbol{a}^5} = |\,\boldsymbol{a}\,| \cdot (-\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \cdot (\,\boldsymbol{a} - |\,\boldsymbol{a}\,|\,) = \left[\begin{array}{l} 0,\ \boldsymbol{a} \ge 0, \\ 2\boldsymbol{a}^2,\ \boldsymbol{a} < 0. \end{array}\right.$$

2-й уровень

Задание № 4

Решим данное неравенство:

$$\frac{(\boldsymbol{x}-1)^2(\boldsymbol{x}-2)}{\boldsymbol{x}-7} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \boldsymbol{x} - 1 = 0, \\ \dfrac{\boldsymbol{x}-2}{\boldsymbol{x}-7} \le 0 \end{array}\right.$$



$$\boldsymbol{x} \in \{\,1\,\} \cup [\,2;7\,)$$

Тогда сумма целых решений исходного неравенства равна:

$$1+2+3+4+5+6 = 21.$$

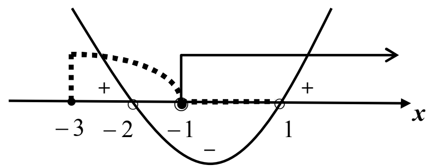
Ответ: 21

Задание № 5

Решение.

$$\sqrt{\boldsymbol{x}+3} > \boldsymbol{x}+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \boldsymbol{x}+1 < 0, \\ \boldsymbol{x}+3 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \boldsymbol{x}+3 > (\boldsymbol{x}+1)^2, \\ \boldsymbol{x}+1 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \boldsymbol{x} < -1, \\ \boldsymbol{x} \ge -3 \end{cases} \\ \begin{cases} \boldsymbol{x}+3 > \boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{x} + 1, \\ \boldsymbol{x} \ge -1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 \le \boldsymbol{x} < -1, \\ \begin{cases} \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{x} - 2 < 0, \\ \boldsymbol{x} \ge -1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{x} - 2 = 0, \\ \boldsymbol{x}_1 = -2,\ \ \boldsymbol{x}_2 = 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$



$$\boldsymbol{x} \in [-3;-1\,) \cup [-1;1\,) = [-3;1\,)$$

Ответ: $\boldsymbol{x} \in [-3;1\,)$

Задание № 6

Обозначим через $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ различные натуральные числа. Докажем теперь, что $(\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2)(\boldsymbol{c}^2 + \boldsymbol{d}^2) = \boldsymbol{n}^2 + \boldsymbol{m}^2$, где $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{m}$ некоторые натуральные числа. Действительно:

$$(\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2)(\boldsymbol{c}^2 + \boldsymbol{d}^2) = \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{c}^2 + \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{d}^2 + \boldsymbol{b}^2\boldsymbol{c}^2 + \boldsymbol{b}^2\boldsymbol{d}^2 = (\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{c}^2 + 2\boldsymbol{abcd} + \boldsymbol{b}^2\boldsymbol{d}^2) +$$

$$+ (\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{d}^2 - 2\boldsymbol{abcd} + \boldsymbol{b}^2\boldsymbol{c}^2) = (\boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bd})^2 + (\boldsymbol{ad} - \boldsymbol{bc})^2 = \left[\begin{array}{l} \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bd} = \boldsymbol{n}, \\ \boldsymbol{ad} - \boldsymbol{bc} = \boldsymbol{m}, \\ \boldsymbol{n}, \boldsymbol{m} \in \boldsymbol{N} \end{array}\right] = \boldsymbol{n}^2 + \boldsymbol{m}^2.$$

3-й уровень

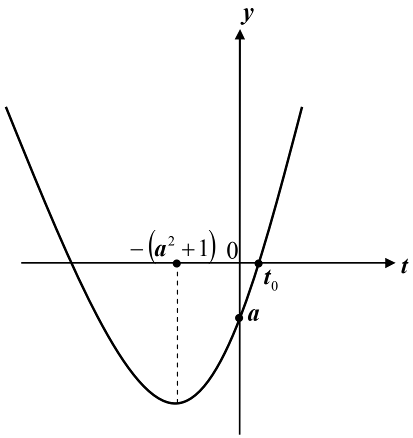
Задание № 7

Так как $x^2 = |x|^2,\ \forall x \in R$, то, обозначив через $t = |x|;\ t \geq 0$, исходное уравнение перепишем в виде:

$$t^2 + 2(a^2+1)t + a = 0. \qquad (1)$$

Таким образом, исходная задача сводится к нахождению всех значений a, при которых квадратное уравнение (1) имеет ***одно положительное*** решение $t = t_0 > 0$. То есть в этом случае исходное уравнение будет иметь два различных решения $x_{1,2} = \pm t_0$.

Заметим, что графиком функции $y = t^2 + 2(a^2+1)t + a$ является парабола в плоскости tOy. Причём очевидно, что вершина данной параболы находится в левой полуплоскости (см. рис.). Тогда квадратное уравнение (1) имеет



одно положительное решение $t = t_0 > 0$ тогда и только тогда, когда $y(0) = a < 0$.

Ответ: $a \in (-\infty; 0)$

Задание № 8

Докажем, что

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \ldots + \frac{1}{100}.$$

Для этого преобразуем левую часть данного равенства:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{99} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{100}\right) +$$

$$+\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{100}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{100}\right)\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} -$$

$$-2\cdot\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{100}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{50}\right) =$$

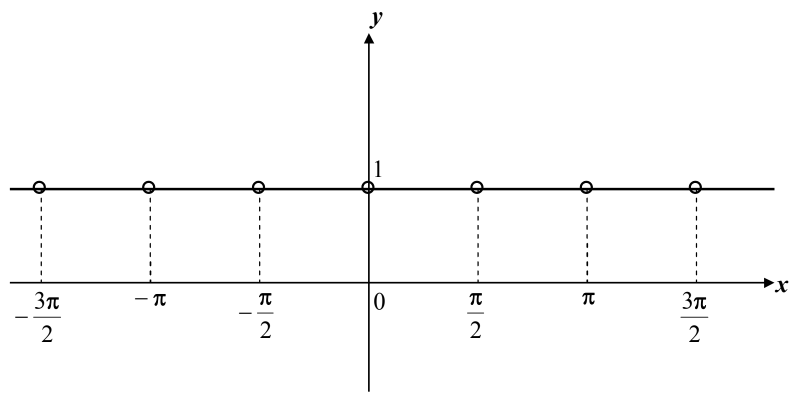
$$= \frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \ldots + \frac{1}{100}.$$

Что и требовалось доказать.

Задание № 9

Построим график функции $y = tgx \cdot ctgx$. Заметим, что

$$tgx \cdot ctgx = tgx \cdot \frac{1}{tgx} = 1,\ \forall x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in Z \ \Rightarrow\ y = 1,\ \forall x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in Z.$$



Итак, графиком функции $y = tgx \cdot ctgx$ является прямая $y = 1$ с выколотыми на ней точками $\left(\frac{k\pi}{2}; 1\right),\ k \in Z$.

10 класс

1-й уровень

Задание № 1

Исходное уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases}2x^2-12x+17=(3-x)^2,\\ 3-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-12x+17=9-6x+x^2,\\ x\le 3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-6x+8=0,\\ x\le 3\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=2,\ x_2=4,\\ x\le 3\end{cases}\Rightarrow\ x=2.$$

Таким образом, нетрудно сделать вывод, что сумма всех корней исходного уравнения равна 2.

Ответ: 2

Задание № 2

Решение.

$$(x-7)^2-|x-7|=30\Leftrightarrow\left[(x-7)^2=|x-7|^2\right]\Leftrightarrow|x-7|^2-|x-7|-30=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}|x-7|=t,\\ t\ge 0\end{array}\right]\Rightarrow t^2-t-30=0\Rightarrow\left[\begin{array}{c}\text{по обратной}\\ \text{теореме Виета}\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t_1=-5<0,\\ t_2=6>0.\end{array}\right.$$

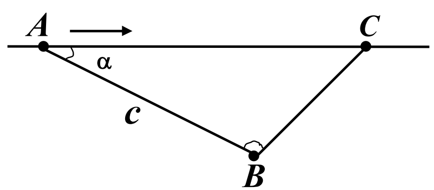
Итак, $t\overset{def}{=}|x-7|=6\Rightarrow x-7=\pm 6\Rightarrow x_1=13;\ x_2=1.$

Ответ: $\{1;\ 13\}$

Задание № 3

При решении данной задачи воспользуемся её геометрической интерпретацией.

Прямая AC – дорога. Автобус находится в точке A и движется вправо. Пешеход находится в точке B и должен направляться в точку встречи – в некоторую точку C так,



чтобы отношение отрезков AC и BC было максимальным. Отметим, что угол $\angle BAC=\alpha$ и длина отрезка $AB=c$ фиксированы. Значит, результат зависит от величины угла $\angle ABC$. По теореме синусов, можем записать:

$$\frac{BC}{\sin\alpha}=\frac{AC}{\sin\angle ABC}\Rightarrow\frac{AC}{BC}=\frac{\sin\angle ABC}{\sin\alpha}.$$

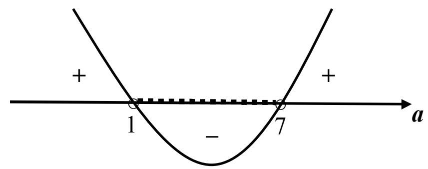
Так как $|\sin\angle ABC|\le 1$, то отношение $\frac{\sin\angle ABC}{\sin\alpha}$, а значит, и отношение $\frac{AC}{BC}$, будет принимать максимальное значение, если $\sin\angle ABC=1$, то есть если $\angle ABC=90^{\circ}$. Другими словами, нужно двигаться под прямым углом по отношению к исходному направлению на автобус.

Заметим, что решение существует лишь для острого угла между дорогой и направлением на автобус.

2 – й уровень

Задание №4

Докажем неравенство $\sqrt[5]{2}+7<8\cdot\sqrt[10]{2}$. Обозначим $\sqrt[10]{2}=a$. Тогда доказательство исходного неравенства будет равносильно доказательству следующего неравенства: $a^2-8a+7<0,\ a=\sqrt[10]{2}$. Решив вспомогательное уравнение $a^2-8a+7=0$, найдём его корни: $a_1=1,\ a_2=7$. Следовательно, для неравенства будет иметь место:



Но так как: $1<\left(\sqrt[10]{2}=a\right)<7$, то $a^2-8a+7<0$. Что и требовалось доказать.

Задание № 5

Решение.

$$\cos 2y+4a\cos y+2a^2+1=0,$$
$$2\cos^2 y-1+4a\cos y+2a^2+1=0,$$
$$2\cos^2 y+4a\cos y+2a^2=0,$$
$$2(\cos y+a)^2=0,$$
$$\cos y=-a.$$

Очевидно, что исходное уравнение не имеет решений, если $|a|>1$.

Ответ: $a\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

Задание № 6

Решение.

<u>1-й способ:</u>

$$\sqrt{2-x^2}=|\,x\,|-1 \Leftrightarrow \begin{cases}|\,x\,|-1\ge 0,\\ 2-|\,x\,|^2=|\,x\,|^2-2|\,x\,|+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|\,x\,|\ge 1,\\ 2|\,x\,|^2-2|\,x\,|-1=0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}|\,x\,|\ge 1,\\ |\,x\,|=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}\end{cases} \Rightarrow |\,x\,|=\frac{1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_{1,2}=\pm\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: уравнение имеет два решения

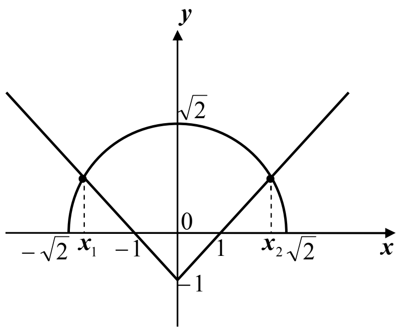
<u>2-й способ:</u>

Воспользуемся геометрическим способом.

Решениями уравнения будут абсциссы точек пересечения графиков соответствующих функций.

Таким образом:

$$\sqrt{2-x^2}=|\,x\,|-1 \Leftrightarrow \begin{cases}y=\sqrt{2-x^2},\\ y=|\,x\,|-1\end{cases}$$



Ответ: два решения

<u>3-й уровень</u>

Задание № 7

Пусть b_1 – первый член, q – знаменатель данной геометрической прогрессии. Тогда, по определению: $b_3=b_1q^2$, $b_5=b_1q^4$, $b_7=b_1q^6$. Значит, по условию:

$$\begin{cases}b_3=-10,\\ b_3^2+b_7=3b_5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b_1q^2=-10,\\ b_1^2q^4+b_1q^6=3b_1q^4\end{cases} \Leftrightarrow \left[\, b_1\ne 0 \,\right] \Leftrightarrow \begin{cases}q^2=-\dfrac{10}{b_1},\\ b_1^2q^4+b_1q^6=3b_1q^4\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}q^2=-\dfrac{10}{b_1},\\ 100-\dfrac{1000}{b_1^2}-3\dfrac{100}{b_1}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}q^2=-\dfrac{10}{b_1},\\ b_1^2-3b_1-10=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}q^2=-\dfrac{10}{b_1},\\ b_1^{(1,2)}=\dfrac{3\pm 7}{2}\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{c}\text{очевидно:}\\ b_1<0\end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; b_1=-2.$$

Ответ: $b_1=-2$

Задание № 8

Исходное уравнение является однородным относительно $lg(x+1)$ и $lg(x-1)$. Тогда, исходное уравнение равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}lg(x-1)=0,\\ lg(x+1)=0\end{cases} \Rightarrow x\in\{\varnothing\}\\ \left(\dfrac{lg(x+1)}{lg(x-1)}\right)^2-\dfrac{lg(x+1)}{lg(x-1)}-2=0 \;\Rightarrow \left[\,t^2-t-2=0 \Rightarrow t_1=-1;\; t_2=2\,\right]\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{lg(x+1)}{lg(x-1)}=2,\\ \dfrac{lg(x+1)}{lg(x-1)}=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}\begin{cases}x-1>0,\\ x-1\ne 1\end{cases}\\ \left[\begin{array}{l}x+1=(x-1)^2,\\ x+1=\dfrac{1}{x-1}\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in(1;2)\cup(2;+\infty),\\ \left[\begin{array}{l}x^2-3x=0,\\ x^2=2\end{array}\right.\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}x\in(1;2)\cup(2;+\infty),\\ x_1=0,\; x_2=3,\; x_{3,4}=\pm\sqrt{2}\end{cases} \Rightarrow x\in\left\{\sqrt{2};\; 3\right\}.$$

Ответ: $x\in\left\{\sqrt{2};\; 3\right\}$

Задание № 9

Решение.

$$cos\,5x+cos\,3x=2 \Leftrightarrow \begin{cases}cos\,5x=1,\\ cos\,3x=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\dfrac{2\pi k}{5},\; k\in Z,\\ cos\left(3\cdot\dfrac{2k\pi}{5}\right)=1 \Rightarrow k=5n,\; n\in Z\end{cases} \Rightarrow$$

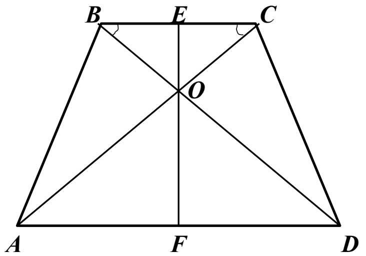
$$\Rightarrow\; x=2\pi n,\; n\in Z \Rightarrow 2\pi n\in\left[\,0;2005\pi\,\right],\; n\in Z \Rightarrow n\in\{\,0;1;2;\ldots;1002\,\}.$$

Ответ: всего 1003 решения

11 класс

1-й уровень

Задание № 1



Пусть $ABCD$ – данная равнобедренная трапеция. По условию $AC \perp BD$, $AC \cap BD = O$ (см. рис.).

Проведём через точку O высоту EF трапеции $ABCD$.

Тогда:

$$\angle CBO = \angle BCO = \angle BOE =$$
$$= \angle OAF = \angle ODF = \angle AOF = 45^{\circ}.$$

Таким образом,

$$|BE| = |EO|,\ |AF| = |FO|,\ |BE| = |EC| = \frac{1}{2}|BC|,\ |AF| = |FD| = \frac{1}{2}|AD|.$$

Следовательно:

$$|EF| \equiv |EO| + |FO| = \frac{1}{2}\left(|BC| + |AD|\right) = 5 \ \Rightarrow\ S_{ABCD} = \frac{1}{2}\left(|BC| + |AD|\right)\cdot|EF| = 25.$$

Замечание: рассуждения, приведённые выше, предлагаем обосновать самостоятельно.

Ответ: 25 кв. ед.

Задание № 2

Согласно физическому смыслу производной функции в точке, скорость $\boldsymbol{v}$ движения точки определяется как производная от пути S по времени t. Таким образом, с одной стороны, по условию $\boldsymbol{v}(t)$= 5 м/с, с другой стороны,

$$\boldsymbol{v}(t) \overset{def}{=} S'(t) = \left(t^2 + t + 2\right)' = 2t + 1.$$

Следовательно, $2t + 1 = 5 \ \Rightarrow\ t = 2$ (c)

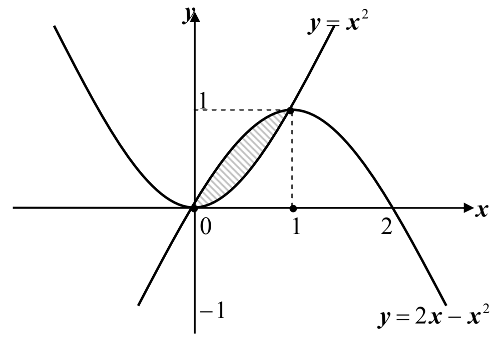
Ответ: через 2 с

Задание № 3

Найдём, воспользовавшись геометрическим смыслом определённого интеграла, утроенную площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2$ и $y = 2x - x^2$. Для этого найдём, прежде всего, абсциссы точек пересечения данных кривых:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2x - x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2x - x^2 \ \Leftrightarrow\ 2x(x-1) = 0 \ \Rightarrow\ x_1 = 0,\ x_2 = 1.$$

Сделаем рисунок.



Следовательно:

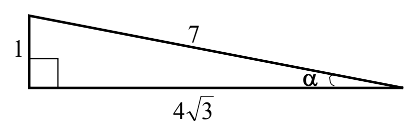
$$S = \int_0^1 \left(2x - x^2 - x^2\right)dx = \int_0^1 \left(2x - 2x^2\right)dx = \left(x^2 - \frac{2}{3}x^3\right)\Bigg|_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \text{ (кв. ед.)}$$

Ответ: $\frac{1}{3}$ кв. ед.

2-й уровень

Задание № 4

Изобразим, по заданному $\arcsin\frac{1}{7}$, прямоугольный треугольник:



Тогда: $\sin\alpha = \frac{1}{7} \ \Rightarrow\ \arcsin\frac{1}{7} = \alpha \ \Rightarrow\ \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{1}{4\sqrt{3}}$.

Ответ: $\frac{1}{4\sqrt{3}}$

Задание № 5

***Решение*.**

1-й способ:

$$\log_2(3x+1)^4=16 \Leftrightarrow 4\log_2|3x+1|=16 \Leftrightarrow \log_2|3x+1|=4 \overset{def}{\Rightarrow} |3x+1|=16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x+1=\pm16 \Rightarrow x_1=5,\ x_2=-\frac{17}{3}.$$

2-й способ:

$$\log_2(3x+1)^4=16 \overset{def}{\Rightarrow} (3x+1)^4=2^{16} \Leftrightarrow (3x+1)^4=\left(2^4\right)^4 \Leftrightarrow |3x+1|=2^4 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow |3x+1|=16 \Rightarrow 3x+1=\pm16 \Rightarrow x_1=5,\ x_2=-\frac{17}{3}.$$

Ответ: $\left\{5;\ -\dfrac{17}{3}\right\}$

Задание № 6

Так как

$$P_{x+1}=720 \overset{def}{\Leftrightarrow} 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(x+1)=720 \overset{def}{\Leftrightarrow} (x+1)!=6! \Rightarrow x+1=6 \Rightarrow x=5,$$

то

$$A_y^x : P_{x-1}+C_y^{y-x}=126 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} C_y^{y-x}=C_y^x, \\ C_y^x=\dfrac{A_y^x}{P_x} \end{array}\right] \Leftrightarrow \frac{A_y^x}{P_{x-1}}+\frac{A_y^x}{P_x}=126 \Rightarrow \left[\ x=5\ \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A_y^5}{P_4}+\frac{A_y^5}{P_5}=126 \Rightarrow \frac{6}{5!}\cdot A_y^5=126 \Rightarrow A_y^5=21\cdot5!.$$

То есть, можем записать:

$$y(y-1)(y-2)(y-3)(y-4)=\frac{3\cdot7\cdot5!\cdot6}{6} \Leftrightarrow 1\cdot2\cdot(y-4)(y-3)(y-2)(y-1)y=7! \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y!=7! \Rightarrow y=7.$$

Ответ: $(5;7)$

<u>3-й уровень</u>

Задание № 7

Прежде всего преобразуем исходное выражение:

$$-3\cos x-4\sin x=-5\left(\frac{3}{5}\cos x+\frac{4}{5}\sin x\right)=\left[\begin{array}{l} \exists\alpha:\ \sin\alpha=\dfrac{3}{5},\ \cos\alpha=\dfrac{4}{5}, \\ \text{так как:} \\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\dfrac{9}{25}+\dfrac{16}{25}\equiv1 \end{array}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{l} \text{например,} \\ \alpha=\arcsin\dfrac{3}{5} \end{array}\right]=-5(\sin\alpha\cos x+\cos\alpha\sin x)=-5\sin\left(x+\arcsin\frac{3}{5}\right).$$

Так как $(-1\le\sin\gamma\le1)$, то полученное выше выражение принимает все значения из отрезка $[-5;5]$.

Ответ: $[-5;5]$

Задание № 8

Во-первых:

$$\sqrt{6x-x^2-5}+\sqrt{6x-x^2-8}=\sqrt{4-\left(x^2-6x+9\right)}+\sqrt{1-\left(x^2-6x+9\right)}=$$

$$=\sqrt{4-(x-3)^2}+\sqrt{1-(x-3)^2}\le2+1=3.$$

Итак, $\sqrt{6x-x^2-5}+\sqrt{6x-x^2-8}\le3.$

Во-вторых:

$$3+\sqrt{4x-x^2-3}=3+\sqrt{1-(x-2)^2}\ge3.$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{6x-x^2-5}+\sqrt{6x-x^2-8}=3, \\ 3+\sqrt{1-(x-2)^2}=3. \end{cases}$$

Таким образом,

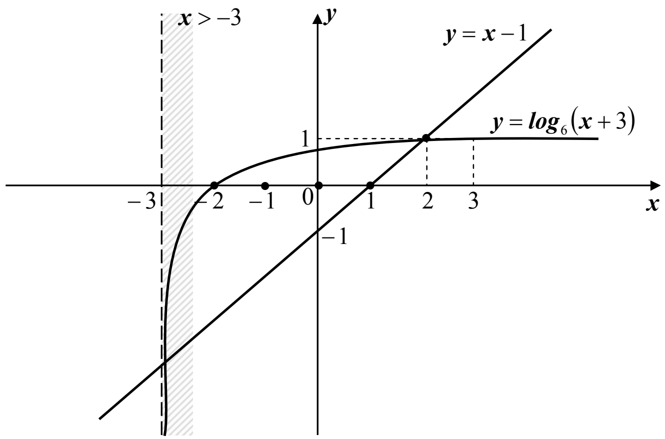
$$\begin{cases} \sqrt{6x-x^2-5}+\sqrt{6x-x^2-8}=3, \\ 3+\sqrt{1-(x-2)^2}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4-(x-3)^2}+\sqrt{1-(x-3)^2}=3, \\ \sqrt{1-(x-2)^2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{4-(x-3)^2}=2, \\ \sqrt{1-(x-3)^2}=1, \\ \sqrt{1-(x-2)^2}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3=0, \\ (x-2)^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3, \\ \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=1 \end{array} \right. \end{cases} \Rightarrow \ x=3.$$

Ответ: 3

Задание № 9

Для ответа на вопрос: сколько целых решений имеет неравенство $x-1<\log_6(x+3)$, воспользуемся геометрическим способом. Построим на координатной плоскости xOy графики функций $y=x-1$ и $y=\log_6(x+3)$ с учётом того, что $x>-3$, $x\in Z$.



Нетрудно видеть, что при $x>-3$, $x\in Z$ график функции $y=x-1$ лежит ниже графика функции $y=\log_6(x+3)$ для $\forall x\in\{-2;-1;0;1\}$. Следовательно, целых решений – четыре.

Ответ: неравенство имеет четыре целых решения

2009 год

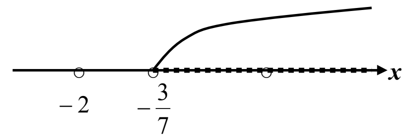
8 – 9 классы

1-й уровень

Задание № 1

Решение.

$$D(y):\ \begin{cases} 7x+3>0, \\ |x|\neq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{3}{7}, \\ x\neq \pm 2 \end{cases}$$



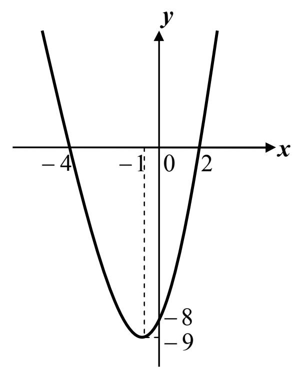
$$x\in\left(-\frac{3}{7};2\right)\cup(2;+\infty)$$

Ответ: $x\in\left(-\dfrac{3}{7};2\right)\cup(2;+\infty)$

Задание № 2

Прежде всего построим график функции $y=x^2+2x-8$. Очевидно, что графиком данной функции является парабола. Для этого можем воспользоваться методом преобразования исходного графика, то есть переписать: $y\equiv x^2+2x-8=(x+1)^2-9$. После чего преобразовать график функции $y=x^2$ (параллельным переносом сместить его на одну единицу влево и на девять единиц вниз). Или же можем найти абсциссы точек пересечения исходной параболы с осью Ox (другими словами, найти нули функции $y=x^2+2x-8$), а также найти координаты ее вершины:

$$y=0 \Rightarrow x^2+2x-8=0 \Rightarrow x_1=-4;\ x_2=2 \quad \text{и} \quad x_{\text{В}}\equiv\frac{-2}{2}=-1;\ y_{\text{В}}\equiv y(x_{\text{В}})=-9.$$



Таким образом, нетрудно сделать вывод:

а) $E(y)=[-9;+\infty)$;

б) $y<0$ при $x\in(-4;2)$.

Задание № 3

Очевидно, что длина третьей стороны данного треугольника равна 8 м. Следовательно, треугольника, у которого две стороны, одна – 6 м, другая – 12 м, образуют тупой угол, а периметр этого треугольника 26 м, ***не существует***. Так как третья сторона, лежащая против данного тупого угла, в этом треугольнике не наибольшая.

Ответ: такого треугольника ***не существует***

2-й уровень

Задание № 4

Пусть вкладчик положил в банк на первый счёт x грн, тогда на второй счёт он положил $(1500-x)$ грн соответственно.

Через год вкладчик получил 120 грн процентных денег. Так как по первому счёту банк выплачивает вкладчику 7% годовых, а по второму – 10%, то можем составить уравнение:

$$0{,}07x+0{,}1\cdot(1500-x)=120,$$
$$7x+10\cdot(1500-x)=1200,$$
$$3x=3000,$$
$$x=1000.$$

Таким образом, вкладчик положил на первый счёт 1000 грн, а на второй счёт – 500 грн.

Ответ: на первый счёт – 1000 грн, на второй счёт – 500 грн

Задание № 5

Число 1 ***может*** принадлежать данной геометрической прогрессии. Так как:

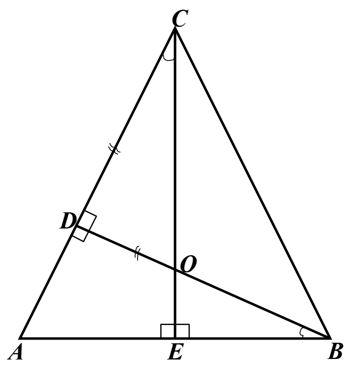
$$(\sqrt{2}+1)\cdot(\sqrt{2}-1)^3=(\sqrt{2}+1)\cdot(\sqrt{2}-1)\cdot(\sqrt{2}-1)^2=(2-1)\cdot(\sqrt{2}-1)^2=1\cdot(\sqrt{2}-1)^2=$$

$$=2-2\sqrt{2}+1=3-2\sqrt{2}.$$

Другими словами, если обозначить через $u_1=\sqrt{2}+1$, $q=\sqrt{2}-1$, то, согласно определению: $u_2\overset{def}{=}u_1q=1$; $u_4\overset{def}{=}u_1q^3=3-2\sqrt{2}$.

Задание № 6

Дан треугольник ABC. Известно, что его высоты, например, CE и BD, пересекаются в точке O, то есть $CE\perp AB$; $BD\perp AC$; $CE\cap BD=O$. Кроме того, по условию, $OC=AB$.



Найдём $\angle ACB$.

Очевидно, что $\Delta ADB=\Delta ODC$ – как прямоугольные треугольники, имеющие равные гипотенузы: $OC=AB$. Тогда $\angle ABD=\angle DCO$. Действительно:

$$\angle ABD\overset{\Delta ADB}{=}90^\circ-\angle DAB=90^\circ-\angle CAE\overset{\Delta AEC}{=}$$

$$\overset{\Delta AEC}{=}\angle ACE\overset{\Delta ODC}{=}\angle DCO.$$

Следовательно, $|BD|=|DC|$. Таким образом, ΔBDC является прямоугольным и равнобедренным. Значит, $\angle ACB=\angle DCB=45^\circ$.

Ответ: 45°

3-й уровень

Задание № 7

Решение.

$$\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\alpha}}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)}}=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|}=\left[2\pi\le\alpha\le3\pi\right]=\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\cos\frac{\alpha}{2}\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)}=\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{4}}=\left|\sin\frac{\alpha}{4}\right|=\left[2\pi\le\alpha\le3\pi\right]=\sin\frac{\alpha}{4}.$$

Ответ: $\sin\frac{\alpha}{4}$

Задание № 8

Обозначим: $u=\sqrt[3]{2-x};\ v=\sqrt{x-1}\ (v\ge 0)\Rightarrow u^3=2-x;\ v^2=x-1$. Тогда:

$$\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=1,\\u^3+v^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=1-u,\\u^3+(1-u)^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=1-u,\\u^3+1-2u+u^2=1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}v=1-u,\\u^3+u^2-2u=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=1-u,\\u(u^2+u-2)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v=1-u,\\u_1=0;u_2=1;u_3=-2\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}u_1=0;\ v_1=1,\\u_2=1;\ v_2=0,\\u_3=-2;\ v_3=3.\end{array}\right.$$

Важно заметить, что $\forall\, v_i\ge 0,\ i=1,2,3$. Воспользовавшись теперь обратной заменой $x_i=2-u_i^3,\ i=1,2,3$, получим: $x_1=2;\ x_2=1;\ x_3=10$.

Ответ: $\{1;2;10\}$

Задание № 9

Воспользуемся методом преобразования графиков. Отметим, что:

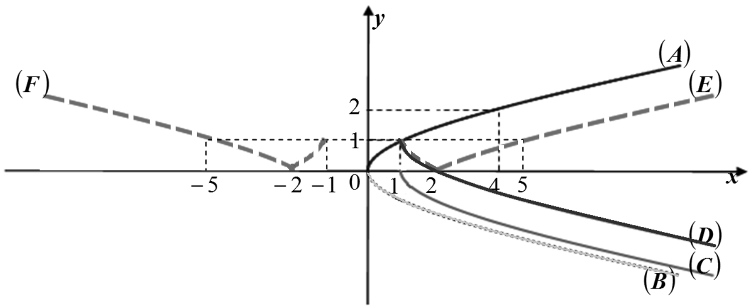
1) $D(y)$: $|x|-1\ge 0\Rightarrow|x|\ge 1\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$;

2) функция $y=\left|1-\sqrt{|x|-1}\right|$ чётная. Следовательно, её график симметричен относительно оси Oy. Значит, можем построить график исходной функции для случая, когда $x\in[1;+\infty)$, и затем симметрично отобразим его относительно оси Oy.

Итак, строим следующие графики:

(A): $y=\sqrt{x}\Rightarrow(B)$: $y=-\sqrt{x}\Rightarrow(C)$: $y=-\sqrt{x-1}\Rightarrow(D)$: $y=-\sqrt{x-1}+1\Rightarrow$

$\Rightarrow(E)$: $y=\left|1-\sqrt{x-1}\right|\Rightarrow(F)$: общий график.



Ответ: график исходной функции изображён пунктирной линией

10 класс

<u>1-й уровень</u>

Задание № 1

Решение.

$$\begin{cases}0<\sin 10^\circ<\sin 40^\circ,\\0<\cos 20^\circ<1\end{cases}\Bigg|(\cdot)\ \Rightarrow\ 0<\sin 10^\circ\cos 20^\circ<\sin 40^\circ.$$

Ответ: $\sin 10^\circ\cdot\cos 20^\circ<\sin 40^\circ$

Задание № 2

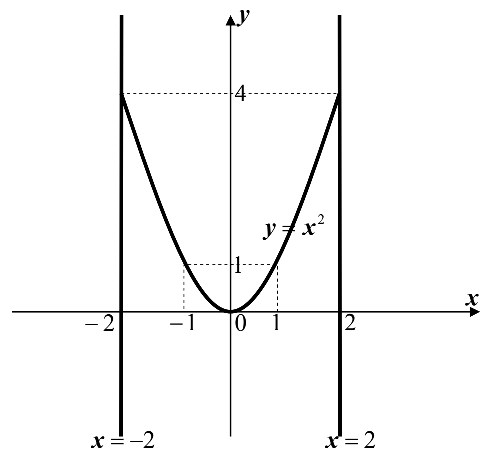
Построить на координатной плоскости множество точек, координаты (x,y) которых удовлетворяют равенству $\sqrt{4-x^2}\,(y-x^2)=0$.

Прежде всего заметим, что

$$4-x^2\ge 0\Rightarrow x^2\le 4\Leftrightarrow|x|\le 2\Leftrightarrow -2\le x\le 2.$$

Кроме того, $\sqrt{4-x^2}\,(y-x^2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=4,\\y=x^2\end{array}\right.\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\pm 2,\\y=x^2\end{array}\right.\\-2\le x\le 2.\end{cases}$

Тогда геометрическое место точек, координаты (x,y) которых удовлетворяют исходному равенству, на координатной плоскости имеет вид:



Задание № 3

По условию:

$$\begin{cases} b_4 - b_1 = -9, \\ b_2 + b_3 + b_4 = -6 \end{cases} \overset{def}{\Rightarrow} \begin{cases} b_1 q^3 - b_1 = -9, \\ b_1 q + b_1 q^2 + b_1 q^3 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1\left(q^3 - 1\right) = -9, \\ b_1\left(q^3 + q^2 + q\right) = -6 \end{cases} \Bigg| (:) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{q^3 - 1}{q^3 + q^2 + q} = \frac{9}{6} \Leftrightarrow \frac{(q-1)\left(q^2 + q + 1\right)}{q\left(q^2 + q + 1\right)} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{q-1}{q} = \frac{3}{2} \Rightarrow q = -2.$$

Итак, $q = -2$. Значит: $b_1\left(q^3 - 1\right)\big|_{q=-2} = -9 \Rightarrow -9b_1 = -9 \Rightarrow b_1 = 1$.

Ответ: $b_1 = 1;\ q = -2$

<u>2-й уровень</u>

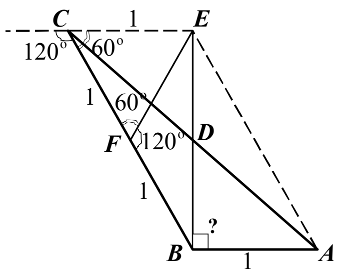
Задание № 4

Нет, не может.

Если на прямой было, например, n точек, то после первой операции к ним прибавится еще $(n-1)$ точек. В результате чего на прямой уже будет $(2n-1)$ точек. То есть – нечётное число. Другими словами, если проведена хотя бы одна подобная операция, то на прямой будет обязательно нечётное число точек. А в нашем случае, по условию, 2000 точек, то есть чётное число точек.

Задание № 5

Дано: ΔABC, $|AB| = 1$; $|BC| = 2$; $\angle ABC = 120^\circ$, BD – медиана, то есть $|AD| = |DC|$ (см. рис.). Докажем, что $BD \perp AB$. Для этого достроим ΔABC до параллелограмма $ABCE$. Тогда:



$$\angle BCE = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ.$$

Следовательно, $|CE| = |AB| = |CF| = 1$, где F – середина стороны BC. Значит, ΔCEF равносторонний: $\angle FCE = 60^\circ, |CF| = |CE| = 1$. То есть $|CE| = |CF| = |EF| = 1 \Rightarrow |EF| = |FB| = 1$. Таким образом, ΔBFE равнобедренный и $\angle EFB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$. Тем самым очевидно, $\angle EBF = \angle EBC = 30^\circ \Rightarrow \angle ABD = \angle ABC - \angle EBC = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

Задание № 6

ОДЗ: $x \in (0;1) \cup (1;+\infty)$. Тогда для всех x из ОДЗ можем записать:

$$\log_3 x + \log_x 9 = 3 \Leftrightarrow \log_3 x + \frac{2}{\log_3 x} = 3 \Rightarrow \log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \log_3 x, \\ t^2 - 3t + 2 = 0, \\ t_1 = 1,\ t_2 = 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x_1 = 1, \\ \log_3 x_2 = 2 \end{array}\right. \overset{\text{def}}{\Rightarrow} x_1 = 3,\ x_2 = 9 \quad \left(x_{1,2} \in \text{ОДЗ}\right).$$

Ответ: $\{3;9\}$

<u>3-й уровень</u>

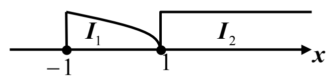
Задание № 7

Преобразуем левую часть исходного неравенства:

$$\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1} = \sqrt{x^2(x-1) - (x-1)} = \sqrt{\left(x^2 - 1\right)(x-1)} = \sqrt{(x-1)(x+1)(x-1)} =$$

$$= \sqrt{(x-1)^2(x+1)} = |x-1|\sqrt{x+1}.$$

Следовательно, $\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1} \ge 1 - x \Leftrightarrow |x-1|\sqrt{x+1} \ge 1 - x,\ \forall x \ge -1.$



Рассмотрим отдельно случаи:

1) $I_1: x \in [-1;1)$. Тогда исходное неравенство перепишется в виде:

$$-(x-1)\sqrt{x+1} \ge 1 - x,$$

$$(1-x)\sqrt{x+1} \ge 1 - x \,\big|\, :(1-x) > 0,$$

$$\sqrt{x+1} \ge 1 \Rightarrow x + 1 \ge 1 \Rightarrow x \ge 0 \Rightarrow x \in [-1;1) \cap [0;+\infty) = [0;1).$$

2) $I_2: x \in [1;+\infty)$. Тогда исходное неравенство имеет вид:

$$(x-1)\sqrt{x+1} \ge 1 - x,$$

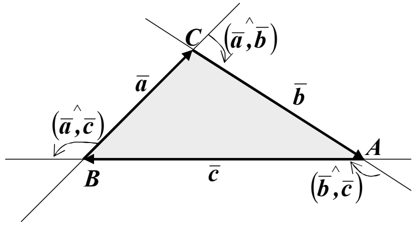
$$(x-1)\sqrt{x+1} \ge -(x-1),$$

$$(x-1)\left(\sqrt{x+1} + 1\right) \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \ge 0, \text{ т.к. } x \in I_2, \\ \sqrt{x+1} + 1 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow x \in [1;+\infty).$$

Значит, окончательно можем записать: $x \in [0;1) \cup [1;+\infty) = [0;+\infty)$.

Ответ: $x \in [0;+\infty)$

Задание № 8



По условию, $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=0$. Это означает, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ составляют ΔABC (см. рис.). Тогда указанные углы $(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$, $(\widehat{\bar{b},\bar{c}})$ и $(\widehat{\bar{a},\bar{c}})$ являются внешними углами этого треугольника. А так как в ΔABC хотя бы два внутренних угла острые, то соответствующие им внешние углы тупые. Что и требовалось доказать.

Задание № 9

Решение.

$$\sin x=\frac{\sqrt{1+tg^2x}}{4}\Leftrightarrow 4\sin x=\frac{1}{|\cos x|}\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\ge 0,\\ 4\sin x|\cos x|=1,\\ \cos x\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\ge 0,\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4\sin x\cos x=1,\\ \cos x>0\end{cases}\\ \begin{cases}4\sin x\cos x=-1,\\ \cos x<0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x\ge 0,\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sin 2x=\frac{1}{2},\\ \cos x>0\end{cases}\\ \begin{cases}\sin 2x=-\frac{1}{2},\\ \cos x<0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x\ge 0,\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z,\\ \cos x>0\end{cases}\\ \begin{cases}x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},\ k\in Z,\\ \cos x<0\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x\ge 0,\\ \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{12}+2\pi n,\ n\in Z,\\ x=\frac{5\pi}{12}+2\pi l,\ l\in Z,\\ x=\frac{7\pi}{12}+2\pi k,\ k\in Z,\\ x=\frac{11\pi}{12}+2\pi m,\ m\in Z\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\in\left\{\frac{\pi}{12}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{12}+2\pi l;\ \frac{7\pi}{12}+2\pi k;\ \frac{11\pi}{12}+2\pi m\right\},\quad n,k,l,m\in Z.$$

Ответ: $x\in\left\{\frac{\pi}{12}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{12}+2\pi l;\ \frac{7\pi}{12}+2\pi k;\ \frac{11\pi}{12}+2\pi m\right\},\ n,k,l,m\in Z$.

11 класс

<u>1-й уровень</u>

Задание № 1

Для того чтобы сравнить числа $2^{\sqrt{5}}$ и $3^{\sqrt{3}}$, возведём их в одну и ту же степень, например, в $\sqrt{3}$. Тогда:

$$\left(2^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{3}}=2^{\sqrt{15}};\left(3^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}=3^3\Rightarrow 2^{\sqrt{15}}<2^{\sqrt{16}}=2^4=16<27=3^3\ \Rightarrow\ \left(2^{\sqrt{5}}\right)^{\sqrt{3}}<\left(3^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}.$$

Следовательно, $2^{\sqrt{5}}<3^{\sqrt{3}}$.

Ответ: $2^{\sqrt{5}}<3^{\sqrt{3}}$

Задание № 2

Решение.

$$\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)=\arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{7}\right)\right)=\arccos\left(\cos\frac{9\pi}{14}\right)=\left[0<\frac{9\pi}{14}<\pi\right]=\frac{9\pi}{14}.$$

Ответ: $\frac{9\pi}{14}$

Задание № 3

Найдём $E(y)$ – множество значений функции $y(x)=\log_2(x-1)(5-x)$. Для этого, прежде всего, заметим:

$$f(x)=(x-1)(5-x)=-x^2+6x-5=-(x-3)^2+4\ \Rightarrow\ \begin{cases}-\infty<f(x)\le 4,\\ f(x)>0\ (\text{ОДЗ}).\end{cases}$$

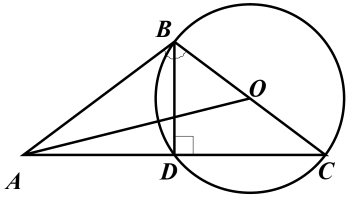
То есть $0<f(x)\le 4\Rightarrow E(y)=(-\infty;\log_2 4\,]=(-\infty;2\,]$.

Ответ: $(-\infty;2\,]$

<u>2-й уровень</u>

Задание № 4

Пусть ΔABC – данный равнобедренный треугольник. На его боковой стороне BC, как на диаметре, построена окружность с центром в точке O, пересекающая основание этого треугольника в точке D (см. рис.). Известно, что $|AD| = \sqrt{3}$ см, а угол $\angle ABC = 120^{\circ}$. Найдём $|AO|^2$.



Решение.

Так как угол $\angle BDC$ опирается на диаметр, то $\angle BDC = 90^{\circ}$. Значит, BD – высота ΔABC.

Далее, так как $\angle ABC = 120^{\circ}$, то $\angle ABD = \angle DBC = 60^{\circ}$ (в равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, совпадает с высотой).

Рассмотрим ΔABD – прямоугольный:

$$\angle ADB = 90^{\circ};\ \angle ABD = 60^{\circ};\ \angle DAB = 30^{\circ} \ \Rightarrow\ |AB| = \frac{|AD|}{\sin 60^{\circ}} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 \text{ (см).}$$

По условию: $|AB| = |BC| \Rightarrow |BO| = |OC| = 1$(см). Тогда, по теореме косинусов для ΔABO, можем записать:

$$|AO|^2 \overset{\text{теор}}{=} |AB|^2 + |BO|^2 - 2\cdot|AB|\cdot|BO|\cdot\cos(\angle ABO) = 2^2 + 1^2 - 2\cdot 2\cdot 1\cdot\cos\left(120^{\circ}\right) =$$

$$= 4 + 1 - 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 7\,(\text{см}).$$

Ответ: 7 см

Задание № 5

Очевидно: $5y^2 \le 345 \Rightarrow y^2 \le 69 \Rightarrow \left[\, y \in Z \,\right] \Rightarrow y \in \{\, 0; \pm 1; \pm 2; \ldots; \pm 8 \,\}$.

Заметим, что $(3x^2)\,\vdots\,3$; $345\,\vdots\,3$[1]. Тогда $y\,\vdots\,3 \Rightarrow y \in \{\, 0; \pm 3; \pm 6 \,\}$. Таким образом, окончательно можем записать:

$$y = 0:\quad 3x^2 = 345 \Rightarrow x^2 = 115 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{115} \notin Z;$$
$$y = \pm 3:\quad 3x^2 = 300 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 10 \in Z;$$
$$y = \pm 6:\quad 3x^2 = 165 \Rightarrow x^2 = 55 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{55} \notin Z.$$

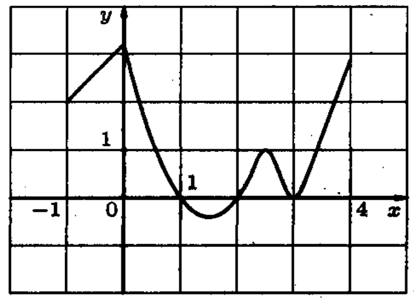
Итак, $x_{1,2} = \pm 10$; $y_{1,2} = \pm 3$.

Ответ: $(\,10\,;3\,)$; $(\,10\,;-3\,)$; $(\,-10\,;3\,)$; $(\,-10\,;-3\,)$

[1] Запись $a\,\vdots\,b$ означает, что a делится нацело на b, или a кратно b.

Задание № 6

График производной функции $y = f(x)$ изображён на рисунке. Как видно из графика, $f'(x)$ существует на $(\,-1; 4\,)$, значит, функция непрерывна на этом интервале. На графике имеются три критические точки $x = \{\, 1; 2; 3 \,\}$, в которых $f'(x) = 0$.



Видно, что:

– в точке $x = 1$ производная меняет свой знак с «+» на «–» (слева от точки производная положительна, а справа отрицательна);
– в точке $x = 2$ производная меняет свой знак с «–» на «+» (слева от точки производная отрицательна, а справа положительна);
– в точке $x = 3$ производная не меняет свой знак.

Итак, можно сделать ***вывод***: производная обращается в нуль в трёх точках, но меняет знак с «+» на «–» в единственной точке $x = 1$. Следовательно, $x = 1$ – точка максимума функции.

Ответ: 1

3-й уровень

Задание № 7

Решение. Заметим, что:

1). $2x^2 - 4x + 3 = 2(x-1)^2 + 1 \ge 1 \Rightarrow \log_2\left(2x^2 - 4x + 3\right) \ge 0$;

2). $1 + \sin^2 \pi x \ge 1 \Rightarrow \log_3\left(1 + \sin^2 \pi x\right) \ge 0$.

Таким образом:

$$\log_2\left(2x^2 - 4x + 3\right) + \log_3\left(1 + \sin^2 \pi x\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2\left(2x^2 - 4x + 3\right) = 0, \\ \log_3\left(1 + \sin^2 \pi x\right) = 0 \end{cases} \overset{def}{\Rightarrow}$$

$$\overset{def}{\Rightarrow} \begin{cases} 2(x-1)^2 + 1 = 1, \\ 1 + \sin^2 \pi x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(x-1)^2 = 0, \\ \sin^2 \pi x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1.$$

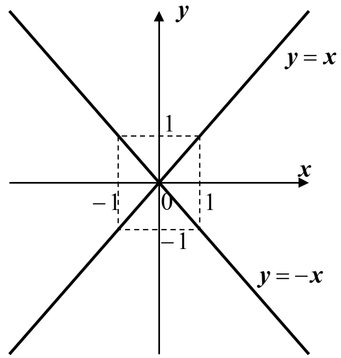
Ответ: 1

Задание № 8

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^3=\frac{x^3+y^3}{2}\Leftrightarrow\left(\frac{x+y}{2}\right)^3-\frac{x^3+y^3}{2}=0\Leftrightarrow\frac{(x+y)^3-4\left(x^3+y^3\right)}{8}=0\Leftrightarrow$$

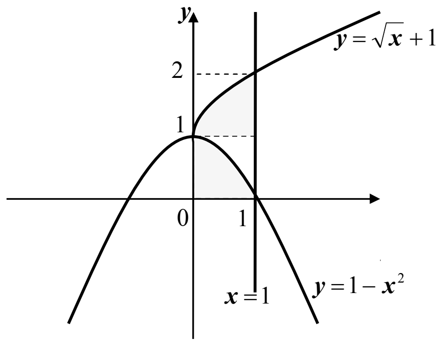
$$\Leftrightarrow-\frac{3}{8}\left(x^3+y^3-x^2y-xy^2\right)=0\Leftrightarrow-\frac{3}{8}(x+y)(x-y)^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=x,\\ y=-x.\end{array}\right.$$

Построим теперь искомое множество точек:



Задание № 9

Изобразим, прежде всего, указанные линии $y=1-x^2$, $y=\sqrt{x}+1$, $x=1$ на плоскости xOy. Воспользуемся, далее, геометрическим смыслом определённого интеграла[1]:



$$S=\int_0^1\left(\sqrt{x}+1-1+x^2\right)dx=$$

$$=\int_0^1\left(x^{\frac{1}{2}}+x^2\right)dx=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^2}{3}\right)\Bigg|_0^1=$$

$$=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1\,(\text{кв. ед.})$$

Ответ: $S=1$ кв. ед.

[1] Есть и более оригинальное решение этой задачи, без применения определённого интеграла. Предлагаем вам самостоятельно найти это решение. Прежде всего, внимательно посмотрите на рисунок. Решение будет очевидным!

2010 год

8 – 9 классы

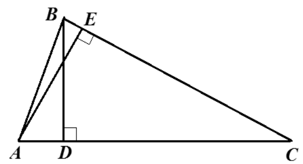
1-й уровень

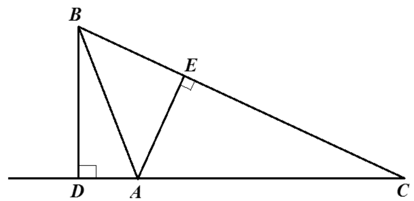
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Д	**В**	**В**	**А**	**Г**	**А**	**Б**	**В**	**В**	**В**

2-й уровень

Задание № 11

Решение. Пусть ΔABC – данный треугольник: BD – высота ($BD\perp AC$); $|BD|=11{,}2$ см; AE также высота ($AE\perp BC$); $|AE|=12$ см. (см. рис.). Далее, $AE\cap BC=E$; $|BE|:|EC|=5:9$. Найдём $|AC|=?$





Обозначим $|AC|=x$ $(x>0)$. Так как ΔAEC – прямоугольный, тогда, по теореме Пифагора, получим, что $|EC|=\sqrt{|AC|^2-|AE|^2}=\sqrt{x^2-144}$.

По условию: $|BE|:|EC|=5:9$, значит:

$|BC|=|BE|+|EC|=\frac{14}{9}|EC|=\frac{14}{9}\sqrt{x^2-144}$

Нетрудно вычислить $S_{\Delta ABC}$. Очевидно, $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|$ или $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|BC|\cdot|AE|$. То есть: $|AC|\cdot|BD|=|AE|\cdot|BC|$.

Таким образом:

$$\left(11{,}2x=12\cdot\frac{14}{9}\sqrt{x^2-144}\right)\Rightarrow\left(3x=5\sqrt{x^2-144}\ \Big|\uparrow 2\right)\Rightarrow\left(9x^2=25\left(x^2-144\right)\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(16x^2=3600\right)\Rightarrow\left(x^2=225\right)\Rightarrow[x>0]\Rightarrow x=15.$$

Ответ: 15 см

Задание № 12

Обозначим: $\sqrt{\left|40\sqrt{2}-57\right|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}=x$. Так как, $\left(40\sqrt{2}\right)^2=1600\cdot 2=3200$ и $57^2=3249$, то $57>40\sqrt{2}\Rightarrow 40\sqrt{2}-57<0\Rightarrow\left|40\sqrt{2}-57\right|=57-40\sqrt{2}$.

Значит: $x=\sqrt{\left|40\sqrt{2}-57\right|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}=\sqrt{57-40\sqrt{2}}-\sqrt{57+40\sqrt{2}}$. Тогда:

$$x^2=57-40\sqrt{2}-2\sqrt{\left(57-40\sqrt{2}\right)\left(57+40\sqrt{2}\right)}+57+40\sqrt{2}=114-2\sqrt{49}=114-14=$$
$$=100\Rightarrow x_{1,2}=\pm10.$$

Очевидно, что $\sqrt{40\sqrt{2}+57}>\sqrt{57-40\sqrt{2}}\Rightarrow(x<0)\Rightarrow x=-10$.

Ответ: -10

Задание № 13

Решение. Так как точка $\boldsymbol{D}$ лежит на оси $\boldsymbol{OY}$ и равноудалена от точек $\boldsymbol{E}(-1;2;1)$ и $\boldsymbol{F}(2;-3;1)$, то в этом случае можем записать:

а) $D(x;y;z)\in Oy\Rightarrow[x_D=z_D=0]\Rightarrow D(0;y;0)$;

б) $|ED|=|FD|$, где $|ED|=\sqrt{(0+1)^2+(y-2)^2+(0-1)^2}=\sqrt{y^2-4y+6}$;

$$|FD|=\sqrt{(0-2)^2+(y+3)^2+(0-1)^2}=\sqrt{y^2+6y+14}.$$

Следовательно:

$$\left(\sqrt{y^2-4y+6}=\sqrt{y^2+6y+14}\right)\Rightarrow\left(y^2-4y+6=y^2+6y+14\right)\Rightarrow(10y=-8)\Rightarrow$$

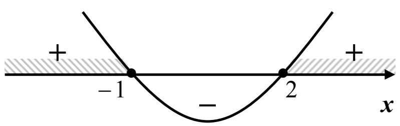
$\Rightarrow y=-0{,}8.$

Ответ: $D(0;-0{,}8;0)$

Задание № 14

Решение. Решим неравенство: $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\ge0$.

ОДЗ: $x^2-x-2\ge0\Rightarrow\left[x^2-x-2=0;\ x_1=-1;\ x_2=2\right]\Rightarrow x\in(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$



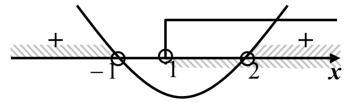
Очевидно, что исходное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{ll}(x-1)\sqrt{x^2-x-2}=0, & (1)\\ (x-1)\sqrt{x^2-x-2}>0. & (2)\end{array}\right.$$

Рассмотрим отдельно:

$$(1):\ (x-1)\sqrt{x^2-x-2}=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=1\notin\text{ОДЗ},\\ x_2=-1\in\text{ОДЗ},\\ x_3=2\in\text{ОДЗ}.\end{array}\right.$$

$$(2):\ (x-1)\sqrt{x^2-x-2}>0\Rightarrow\begin{cases}x-1>0,\\ x^2-x-2>0,\\ x\in\text{ОДЗ}\end{cases}$$



$x\in(2;+\infty)$

Таким образом, можем записать окончательный ***ответ***: $x\in\{-1\}\cup[2;+\infty)$

<u>3-й уровень</u>

Задание № 15

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases}|x-1|+|y-5|=1,\\ y=5+|x-1|.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x-1|+|y-5|=1,\\ y-5=|x-1|.\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}|x-1|\ge0\\ y-5\ge0\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}|x-1|+y-5=1,\\ y-5=|x-1|.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2|x-1|=1,\\ y-5=|x-1|.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x-1|=\frac{1}{2},\\ y-5=\frac{1}{2}.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|x-1|=\frac{1}{2},\\ y=\frac{11}{2}.\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x-1=\pm\frac{1}{2},\\ y=\frac{11}{2}.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{3}{2},\\ x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\\ y=\frac{11}{2}.\end{cases}\Rightarrow\left\{\left(\frac{1}{2};\frac{11}{2}\right),\left(\frac{3}{2};\frac{11}{2}\right)\right\}.$$

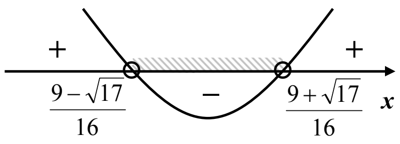
Ответ: $\left(\frac{1}{2};\frac{11}{2}\right),\left(\frac{3}{2};\frac{11}{2}\right)$

Задание № 16

Решение. Найдём все значения параметра $\boldsymbol{a}$, при которых уравнение $(3a-1)x^2+2ax+3a-2=0$ имеет два различных корня. Очевидно, что если:

1. $a=\dfrac{1}{3}$, то исходное уравнение имеет единственное решение $x=\dfrac{3}{2}$;

2. $a\neq\dfrac{1}{3}$, то исходное уравнение будет иметь два различных корня $x_{1,2}$, если $D=(2a)^2-4(3a-1)(3a-2)=-4(8a^2-9a+2)>0\Leftrightarrow 8a^2-9a+2<0$. Так как $8a^2-9a+2=0$ при $a_{1,2}=\dfrac{9\pm\sqrt{17}}{16}$, то $a\in\left(\dfrac{9-\sqrt{17}}{16};\dfrac{9+\sqrt{17}}{16}\right)$ при $a\neq\dfrac{1}{3}$.



Таким образом, нетрудно записать окончательный ***ответ***:

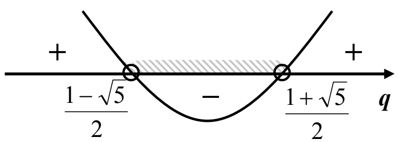
$$a\in\left(\frac{9-\sqrt{17}}{16};\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3};\frac{9+\sqrt{17}}{16}\right)$$

Задание № 17

Решение. Пусть a, b, c – стороны некоторого треугольника, которые представляют собой три последовательных члена возрастающей геометрической прогрессии, и пусть, для определённости, $a>b>c$. Тогда, по свойству сторон треугольника, можем записать: $a+b>c$. Значит:

$$a+aq>aq^2\,\Big|:a\neq 0\ (a>0),$$
$$1+q>q^2,$$
$$q^2-q-1<0.$$

Решая вспомогательное уравнение $q^2-q-1=0$, найдём его корни: $q_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Следовательно, возвращаясь к неравенству, получим:



$$q\in\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Осталось сравнить знаменатель q этой прогрессии с числом 2.

а) Очевидно, что $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<0$;

б) Сравним теперь ($\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ и 2) $\Leftrightarrow$ ($1+\sqrt{5}$ и 4) $\Leftrightarrow$ ($\sqrt{5}$ и $3=\sqrt{9}$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ($\sqrt{5}<\sqrt{9}$) $\Rightarrow\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}<2\right)$.

Следовательно, нетрудно записать окончательный ***ответ***: $q<2$.

Задание № 18

Решение. Исключим угол α из следующей системы уравнений:

$$\begin{cases}\sin\alpha+\cos\alpha=x,\\ \sin^3\alpha+\cos^3\alpha=y.\end{cases}$$

Для этого рассмотрим отдельно первое уравнение системы:

$$\sin\alpha+\cos\alpha=x\,\big|\uparrow 2$$
$$\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=x^2,$$
$$1+2\sin\alpha\cos\alpha=x^2,$$
$$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{x^2-1}{2}.$$

Аналогично, для первого уравнения системы можем записать:

$$\sin\alpha+\cos\alpha=x\,\big|\uparrow 3$$
$$\sin^3\alpha+3\sin^2\alpha\cos\alpha+3\sin\alpha\cos^2\alpha+\cos^3\alpha=x^3,$$
$$\underbrace{(\sin^3\alpha+\cos^3\alpha)}_{y}+3\underbrace{\sin\alpha\cos\alpha}_{\frac{x^2-1}{2}}\underbrace{(\sin\alpha+\cos\alpha)}_{x}=x^3,$$
$$2y+3x^3-3x=2x^3,$$
$$x^3-3x+2y=0.$$

Последнее уравнение и является результатом исключения угла α из исходной системы уравнений.

Ответ: $x^3-3x+2y=0$

10 класс

1-й уровень

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Б	**А**	**Б**	**А**	**Д**	**Д**	**А**	**Д**	**Д**	**В**

2-й уровень

Задание № 11

Решение. Так как $f(x)$ линейная функция, то $f(x)=ax+b,(a\neq 0)$. По условию $f(0)=1$. Следовательно, $f(0)\equiv a0+b=1\Rightarrow b=1$. Итак, $f(x)=ax+1$.

Обозначим через $g(x)=f^2(x)-2f(x^2)=(ax+1)^2-2(ax^2+1)$. Таким образом:

$$g(x)=a^2x^2+2ax+1-2ax^2-2,$$
$$g(x)=(a^2-2a)x^2+2ax-1.$$

Но, по условию, функция $g(x)$ также линейная. Значит, $a^2-2a=0$. Так как $a\neq 0$, то $a=2$.

Итак, $f(x)=2x+1$. Следовательно, $f(2)=5$.

Ответ: 5

Задание № 12

Решение. Докажем неравенство $log_c\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1\right)\geq 0$, где $ab>0,\ c>1$. Заметим:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1=\frac{a^2+b^2}{ab}-1=\frac{(a^2-2ab+b^2)+2ab}{ab}-1=\frac{(a-b)^2}{ab}+\frac{2ab}{ab}-1=\frac{(a-b)^2}{ab}+1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}ab>0,\\(a-b)^2\geq 0\end{array}\right]\Rightarrow\frac{(a-b)^2}{ab}+1\geq 1\Rightarrow[c>1]\Rightarrow log_c\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-1\right)\geq 0.$$

Что и требовалось доказать.

Задание № 13

Решение. Так как, по условию, точка $C(x;y;z)$ лежит на оси OX, то $y_c=z_c=0$, то есть $C(x;0;0)$. Далее, точка $C(x;0;0)$, по условию, равноудалена от точек $A(1,2,3)$ и $B(2,3,4)$. Следовательно, $|AC|=|BC|$, где:

$$|AC|=\sqrt{(x-1)^2+(0-2)^2+(0-3)^2}=\sqrt{x^2-2x+14};$$
$$|BC|=\sqrt{(x-2)^2+(0-3)^2+(0-4)^2}=\sqrt{x^2-4x+29}.$$

Таким образом:

$$\left(\sqrt{x^2-2x+14}=\sqrt{x^2-4x+29}\right)\Leftrightarrow\left(x^2-2x+14=x^2-4x+29\right)\Rightarrow(2x=15)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x=\frac{15}{2}.$$

Ответ: $C\left(\frac{15}{2};0;0\right)$

Задание № 14

Решение.

Очевидно, что $x\neq 2$. В противном случае мы имели бы неопределённость вида $\left[0^0\right]$.

1) Рассмотрим случай, когда $|x-2|=1\Leftrightarrow x-2=\pm 1\Rightarrow x_1=3,\ x_2=1$. Сделаем проверку – подставим $x_{1,2}$ в исходное уравнение:

$$x_1=3:\ \left(|x-2|^{x^2-2x}\right)\Big|_{x=3}=1^{9-6}=1^3=1;\ \left(|x-2|^{2-x}\right)\Big|_{x=3}=1^{2-3}=1^{-1}=1\Rightarrow 1\equiv 1.$$

Как видим, в результате подстановки получаем тождество. Следовательно, $x_1=3$ является решением исходного уравнения.

Аналогично, нетрудно показать, что $x_2=1$ также является решением исходного уравнения.

2) Рассмотрим теперь случай, когда $0<|x-2|\neq 1$. Тогда, очевидно:

$$\begin{cases}x^2-2x=2-x,\\x\neq\{1,2,3\}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-x-2=0,\\x\neq\{1,2,3\}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\{-1,2\}\\x\neq\{1,2,3\}\end{cases}\Rightarrow x=-1.$$

Ответ: $x=\{-1;\ 1;\ 3\}$

3-й уровень

Задание № 15

Решение. Пусть в начале года курс гривны к доллару составлял d долларов за одну гривну. Так как курс гривны ежеквартально падает на $28\frac{4}{7}\%=\frac{200}{7}\%$, а кварталов в году четыре, то к концу года за одну гривну будут давать:

$$d\left(1-\frac{200}{700}\right)^4=\left(\frac{5}{7}\right)^4\cdot d \text{ долларов.}$$

Далее, пусть в начале года мы имели x долларов. Тогда, по варианту:

а) в конце года мы будем иметь $x+0{,}6x=1{,}6x$ долларов, что согласно курсу составит $1{,}6\cdot\left(\frac{7}{5}\right)^4\cdot\frac{x}{d}$ гривен;

б) x долларов, конвертированные в начале года в $\frac{x}{d}$ гривен, преобразуются в конце года в сумму $\frac{x}{d}+5{,}1\cdot\frac{x}{d}=6{,}1\cdot\frac{x}{d}$ гривен.

Сравним теперь варианты (**а**) и (**б**), то есть: $1{,}6\cdot\left(\frac{7}{5}\right)^4\cdot\frac{x}{d}$ и $6{,}1\cdot\frac{x}{d}$.

Или, что равносильно, $1{,}6\cdot\left(\frac{7}{5}\right)^4$ и $6{,}1$. Нетрудно показать, что $1{,}6\cdot\left(\frac{7}{5}\right)^4>6{,}1$. Следовательно, вариант (**а**) является более выгодным.

Ответ: вариант (**а**) является более выгодным

Задание № 16

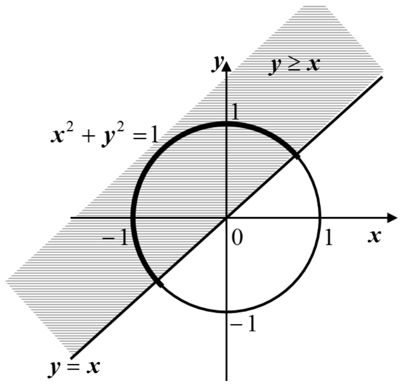
Решение.

Перепишем исходное условие в виде:

$$\begin{cases}2x^2+2y^2-2xy-1=(y-x)^2,\\ y-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+2y^2-2xy-1=y^2-2xy+x^2,\\ y\ge x\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ y\ge x.\end{cases}$$



Таким образом, геометрическим местом точек, удовлетворяющих условию $\sqrt{2x^2+2y^2-2xy-1}=y-x$, на плоскости XOY является часть окружности $x^2+y^2=1$, лежащая над прямой $y=x$.

Задание № 17

Решение.

Перепишем исходное уравнение в виде $5x=arcctg(ctg5x+cos8x)$. Заметим, что $0<arcctg\alpha<\pi$. Следовательно, $(0<5x<\pi)\Rightarrow\left(0<x<\frac{\pi}{5}\right)$. Тогда:

$5x=arcctg(ctg5x+cos8x)\,|\,ctg$

$ctg5x=ctg5x+cos8x,$

$cos8x=0,$

$8x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z\quad\Rightarrow\quad x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{8},\ k\in Z.$

Значит, с учётом условия, полученного выше, можем записать:

$$\left(0<x<\frac{\pi}{5}\right)\Leftrightarrow\left(0<\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{8}<\frac{\pi}{5}\right)\Rightarrow\left(-\frac{\pi}{16}<\frac{\pi k}{8}<\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{16}\right)\Rightarrow\left(-\frac{\pi}{16}<\frac{\pi k}{8}<\frac{11\pi}{80}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(-\frac{1}{2}<k<1\frac{1}{10}\right)\Rightarrow[k\in Z]\Rightarrow k=\{0;1\}.$$

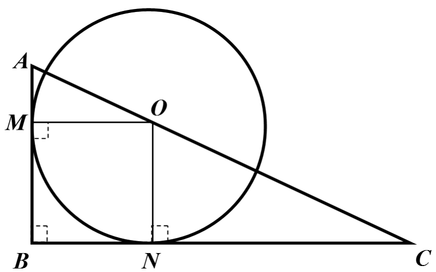
Таким образом, если $k=0$, то $x=\frac{\pi}{16}$. Если же $k=1$, то $x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi}{8}=\frac{3\pi}{16}$.

Ответ: $\frac{\pi}{16}$; $\frac{3\pi}{16}$

Задание № 18

Дано: ΔABC – прямоугольный ($\angle B=90^o$); окружность с центром в точке O и $R=3$, $O\in AC$; катеты AB и BC треугольника касаются данной окружности; $|OC|=5$.

Найти: $S_{\Delta ABC}=?$



Решение.

Итак, ΔABC данный прямоугольный треугольник (см. рис.); M, N – точки касания окружности с катетами AB и BC соответственно. Следовательно: $|OM|=|ON|=R=3$; $|BM|=|BN|$. Значит, $MBNO$ – квадрат: $|BN|=|OM|=|ON|=|MB|=3$.

Далее, ΔONC– прямоугольный: $\angle ONC=90^o$; $|OC|=5$; $|ON|=3$. По теореме Пифагора получим: $|NC|=\sqrt{|OC|^2-|ON|^2}=\sqrt{25-9}=4\Rightarrow|BC|=|BN|+|NC|=7$.

Кроме того, $\Delta ONC\sim\Delta ABC\Rightarrow\frac{|AB|}{|ON|}=\frac{|BC|}{|NC|}\Rightarrow|AB|=\frac{|BC|\cdot|ON|}{|NC|}=\frac{21}{4}$.

Тогда

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|BC|=\frac{1}{2}\cdot\frac{21}{4}\cdot 7=\frac{147}{8}.$$

Ответ: $\frac{147}{8}$

11 класс

1-й уровень

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Б	**Б**	**А**	**В**	**Б**	**Д**	**Г**	**В**	**Г**	**Д**

2-й уровень

Задание № 11

Решение. Покажем, что уравнение $\sqrt{3x^2+5x-8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$ не имеет решений. Действительно, так как

$$\forall x\in R:\ 3x^2+5x-8<3x^2+5x+1,\ \text{то}\ \sqrt{3x^2+5x-8}<\sqrt{3x^2+5x+1}$$

для тех $x\in R$, для которых квадратные корни имеют смысл. Таким образом:

$$\sqrt{3x^2+5x-8}-\sqrt{3x^2+5x+1}<0\neq 1,$$

то есть исходное уравнение не имеет решений, что и требовалось доказать.

Задание № 12

Решение. Дана функция $y=1-\ln x$, $D(y)=(0;+\infty)$. Как вам известно[1], производная $f'(x_0)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0. Поэтому найдём, прежде всего,

$$y'=(1-\ln x)'=-\frac{1}{x},\quad x>0.$$

Тогда, по условию:

$$\left(k_{\text{кас}}=tg135^{\circ}=y(x_0)\right)\Rightarrow\left(tg135^{\circ}=-\frac{1}{x_0}\right)\Leftrightarrow\left(-\frac{1}{x_0}=-1\right)\Rightarrow\left(x_0=1\in D(y)\right).$$

Значит, $y_0=(1-\ln x)\big|_{x=1}=1-\ln 1=1\Rightarrow M_0(x_0;y_0)=M_0(1;1)$.

Ответ: $M_0(1;1)$

[1] Геометрический смысл производной.

Задание № 13

Решение. При решении уравнения сделаем, прежде всего, замену. Обозначим $\left(\sqrt{5+2\sqrt6}\right)^x=t,\ t>0$. Тогда нетрудно видеть, что

$$\left(\sqrt{5-2\sqrt6}\right)^x=\left(\frac{\sqrt{5-2\sqrt6}\cdot\sqrt{5+2\sqrt6}}{\sqrt{5+2\sqrt6}}\right)^x=\left(\frac{\sqrt{5^2-\left(2\sqrt6\right)^2}}{\sqrt{5+2\sqrt6}}\right)^x=\left(\frac{\sqrt{25-24}}{\sqrt{5+2\sqrt6}}\right)^x=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt6}}\right)^x=\frac{1}{\left(\sqrt{5+2\sqrt6}\right)^x}=\frac{1}{t}.$$

Таким образом, исходное уравнение перепишется в виде: $t+\frac{1}{t}=10$. Или, так как $t>0$, в виде: $t^2-10t+=0\ \Rightarrow\ t_{1,2}=5\pm\sqrt{25-1}=5\pm\sqrt{24}=5\pm2\sqrt6,\ \ t_{1,2}>0$.

Итак, если:

1) $t_1=5+2\sqrt6$, то $\left(\sqrt{5+2\sqrt6}\right)^x=5+2\sqrt6\Leftrightarrow\left(5+2\sqrt6\right)^{\frac{x}{2}}=\left(5+2\sqrt6\right)^1\Rightarrow x=2$;

2) $t_2=5-2\sqrt6$, то $\left(\sqrt{5+2\sqrt6}\right)^x=5-2\sqrt6\Leftrightarrow\left(5+2\sqrt6\right)^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{5+2\sqrt6}\Rightarrow x=-2$.

Ответ: ± 2

Задание № 14

Решение.

Пусть в первом ящике находится x деталей и пусть y деталей находится во втором ящике $(x,y\in N)$. Тогда, согласно условию, можем записать:

$$\begin{cases}x+y>29,\\ x-2>3y,\\ 3x-2y<60\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>29-y,\\ x>3y+2,\\ 20+\frac{2}{3}y>x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}20+\frac{2}{3}y>29-y,\\ 20+\frac{2}{3}y>3y+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y>\frac{27}{5},\\ y<\frac{54}{7}.\end{cases}$$

То есть:

$$5\frac{2}{5}<y<7\frac{5}{7}\Rightarrow\left[\,y\in N\,\right]\Rightarrow y\in\{6;7\}.$$

Таким образом, если:

1) $y=6\ \Rightarrow\ \begin{cases}x>23,\\ x>20,\\ x<24\end{cases}\Rightarrow\ 23<x<24\ \Rightarrow\ \left[\,x\in N\,\right]\ \Rightarrow\ x\in\{\varnothing\}$;

2) $y=7 \Rightarrow \begin{cases} x>22, \\ x>23, \\ x<24\dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow 23<x<24\dfrac{2}{3} \Rightarrow \left[x\in N \right] \Rightarrow x=24$.

Ответ: в первом ящике 24 детали, во втором – 7 деталей

<u>3-й уровень</u>

Задание № 15

Решение.

По условию, $y=f(x)$ периодическая функция. То есть, по определению, это означает, что $(\exists T=const\neq 0)(\forall x\in D(y))\Rightarrow (f(x-T)=f(x)=f(x+T))$. При этом очевидно, что точки x, $(x-T)$, $(x+T)$ принадлежат $D(y)$ и, кроме того, если T – период функции, то kT $(k\in N)$ также является периодом исходной функции.

Далее, так как $f(\sqrt{72})=f(\sqrt{36\cdot 2})=f(6\sqrt{2})$ и $f(\sqrt{8})=f(\sqrt{4\cdot 2})=f(2\sqrt{2})$, то, учитывая периодичность функции $y=f(x)$, можем записать:

$$f(0)=f(-\sqrt{2})=f(2\sqrt{2})=f(6\sqrt{2}).$$

Обозначим: $f(\sqrt{8})=f(2\sqrt{2})=z$. Тогда условие задачи перепишется в виде:

$$\begin{cases} 3z^2+7z+4=0, \\ z^2+3z+\dfrac{20}{9}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1^{(1)}=-\dfrac{4}{3};\ \ z_2^{(1)}=-1, \\ z_1^{(2)}=-\dfrac{4}{3};\ \ z_2^{(2)}=-\dfrac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow z=-\dfrac{4}{3} \Rightarrow f(\sqrt{8})=-\dfrac{4}{3}.$$

Ответ: $-\dfrac{4}{3}$

Задание № 16

Решим неравенство $\log_{\sin^2 x}(\cos x)\leq \dfrac{1}{2}$. Очевидно, что для данного неравенства

ОДЗ: $\begin{cases} \cos x>0, \\ \sin^2 x\neq 1, \\ \sin^2 x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x>0, \\ \sin x\in(-1;0)\cup(0;1). \end{cases}$ Тогда можем записать:

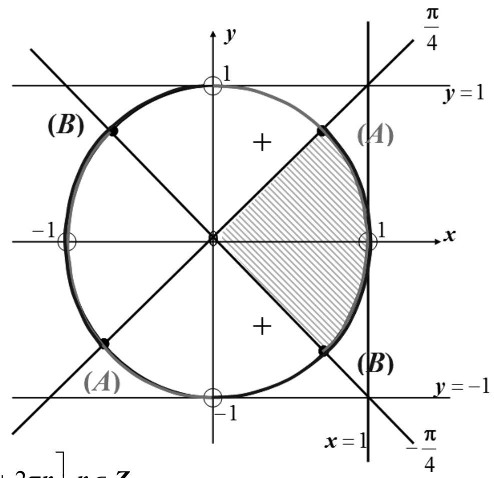
$$\left(\log_{\sin^2 x}(\cos x)\leq \frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot\log_{|\sin x|}(\cos x)\leq 1\right)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{см. ОДЗ:}\\ \sin x\in(-1;0)\cup(0;1)\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\cos x\geq|\sin x|)\Leftrightarrow(-\cos x\leq\sin x\leq\cos x)\,|:\cos x>0(\text{см. ОДЗ})\Rightarrow(-1\leq tgx\leq 1).$$

Итак, с учётом ОДЗ, исходное неравенство будет равносильно системе:

$$\begin{cases} tgx\geq -1, & (A) \\ tgx\leq 1, & (B) \\ \cos x>0\ (\text{I, II – четверти}), \\ \sin x\in(-1;0)\cup(0;1). \end{cases}$$

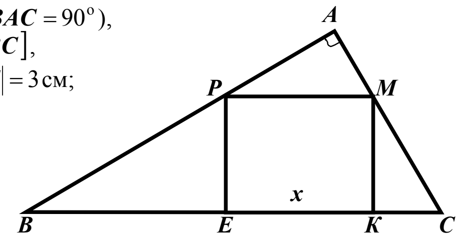
Таким образом, нетрудно записать ***ответ*** (см. рис.):



$$x\in\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi n;\,2\pi n\right)\cup\left(2\pi n;\ \frac{\pi}{4}+2\pi n\right],\ n\in Z$$

Задание № 17

Дано: ΔABC – прямоугольный ($\angle BAC=90^\circ$),
$EKMP$ – прямоугольник, $[EK]\subset[BC]$,
точка $M\in AC$; точка $P\in AB$; $|AC|=3$см;
$|AB|=4$ см; $S_{EKMP}=\dfrac{5}{3}$ см^2;
$P_{EKMP}<9$см.
Найти: $|EK|$; $|KM|$; $|MP|$; $|PE|=?$



Решение.

Пусть $|EK|=x$ см. Тогда $S_{EKMP}\overset{def}{=}|EK|\cdot|MK|=\dfrac{5}{3}\Rightarrow|MK|=\dfrac{5}{3x}$ см. Так как $\Delta MKC\sim\Delta BAC$ (треугольники прямоугольные и $\angle C$ – общий), то $\dfrac{|KC|}{|MK|}=\dfrac{|AC|}{|AB|}$,

следовательно: $|KC|=\dfrac{|AC|\cdot|MK|}{|AB|}=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{3x}=\dfrac{5}{4x}$ (см).

Аналогично, $\Delta BEP\sim\Delta BAC$ (треугольники прямоугольные и $\angle B$ – общий), то $\dfrac{|BE|}{|PE|}=\dfrac{|AB|}{|AC|}$, следовательно:

$$|BE|=\frac{|PE|\cdot|AB|}{|AC|}=\left[\,|PE|=|MK|\,\right]=\frac{5}{3x}\cdot\frac{4}{3}=\frac{20}{9x}\ \text{(см)}.$$

Кроме этого: $|BC|=\sqrt{|AB|^2+|AC|^2}=\sqrt{16+9}=5$ (см); $|BC|=|BE|+|EK|+|KC|$.
Тогда нетрудно будет записать следующее уравнение:

$$\frac{20}{9x}+x+\frac{5}{4x}=5;$$

$$36x^2-180x+125=0\Rightarrow x_{1,2}=\frac{90\pm60}{36}\Rightarrow x_1=\frac{25}{6};\quad x_2=\frac{5}{6}.$$

Итак, если:

1) $|EK|=\frac{25}{6}$ см, то $|MK|=\frac{2}{5}$ см. Значит, $P_{EKMP}=2\left(\frac{25}{6}+\frac{2}{5}\right)=\frac{137}{15}=9\frac{2}{15}>9$ – что противоречит условию $P_{EKMP}<9$ см;

2) $|EK|=\frac{5}{6}$ см, то $|MK|=2$ см. Значит, $P_{EKMP}=2\left(\frac{5}{6}+2\right)=\frac{17}{3}=5\frac{2}{3}<9$ – что удовлетворяет условию $P_{EKMP}<9$ см.

Ответ: $|EK|=|MP|=\frac{5}{6}$ см; $|KM|=|PE|=2$ см

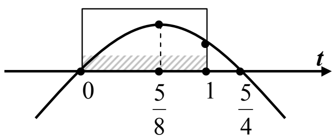
Задание № 18

Решение.

$$y=\sin^2x+\sin^2 2x=\sin^2x+(2\sin x\cos x)^2=\sin^2x+4\sin^2x\cos^2x=\sin^2x+$$
$$+4\sin^2x\left(1-\sin^2x\right)=5\sin^2x-4\sin^4x.$$

Пусть

$\sin^2x=t;\ 0\le t\le1\ \Rightarrow y=5t-4t^2=t(5-4t)$.



Как видим, функция $y=5t-4t^2$ принимает наименьшее значение при $t=0$, то есть при $\sin^2x=0$, и наибольшее значение при $t=\frac{5}{8}$, то есть при $\sin^2x=\frac{5}{8}$.

Следовательно: $0\le y\le5\cdot\frac{5}{8}-4\cdot\frac{25}{64}\Leftrightarrow y\in\left[0;\frac{25}{16}\right]$.

Кроме того:

$$y=\sin^2x+\sin^2 2x=\frac{1}{2}(1-\cos2x)+\frac{1}{2}(1-\cos4x)=1-\frac{1}{2}\cos2x-\frac{1}{2}\cos4x.$$

Значит: $F(x)=x-\frac{1}{4}\sin2x-\frac{1}{8}\sin4x+C,\ \ \forall C\in R$.

2011 год

8 – 9 классы

1-й уровень

1	2	3	4	5	6	7	8
Б	**А**	**Г**	**Г**	**А**	**В**	**В**	**А**

2-й уровень

Задание № 9

Решение.

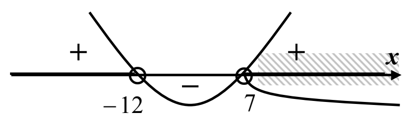
$$\left(\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{27}\right)^2+7\right)\left(\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{27}\right)^2-7\right)=\left(\sqrt3-2\sqrt[4]{3\cdot27}+\sqrt{27}+7\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\sqrt3+2\sqrt[4]{3\cdot27}+\sqrt{27}-7\right)=\left(\sqrt3-6+\sqrt{27}+7\right)\left(\sqrt3+6+\sqrt{27}-7\right)=$$
$$=\left(\left(\sqrt3+\sqrt{27}\right)+1\right)\left(\left(\sqrt3+\sqrt{27}\right)-1\right)=\left(\sqrt3+\sqrt{27}\right)^2-1=3+2\sqrt{3\cdot27}+27-1=$$
$$=3+18+27-1=47.$$

Ответ: 47

Задание № 10

Решение. $\frac{\sqrt{x^2+5x-84}}{x-7}\ge0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{(x+12)(x-7)}}{x-7}\ge0$. Последнее неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x+12)(x-7)=0,\\ x-7\ne0\end{cases}\\ \begin{cases}(x+12)(x-7)>0,\\ x-7>0\end{cases}\end{array}\right.\qquad\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=-12,\\ x>7\end{array}\right.$$

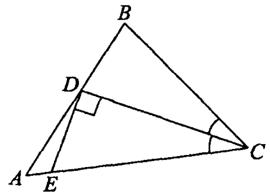


Ответ: $\{-12\}\cup(7;+\infty)$

Задание № 11

Решение. Пусть в прошлом году в городе было X жителей и, соответственно, $0{,}08X$ безработных. Тогда в этом году жителей стало $0{,}96X$, а безработных $0{,}08X+0{,}08X\cdot0{,}05=0{,}08X\cdot1{,}05$. Следовательно, нетрудно сделать вывод, что в этом году безработные составляют $\frac{0{,}08X\cdot1{,}05}{0{,}96X}\cdot100\%=\frac{8\cdot105}{96}\%=\frac{35}{4}\%$ от общего числа жителей города.

Задание № 12



Дано: ΔABC – равнобедренный с основанием AC; CD – биссектриса ($\angle ACD = \angle BCD$); $CD \cap AB = D$; точка $E \in AC$, причём $DE \perp DC$ и $CE = 2$.
Найдём длину AD.

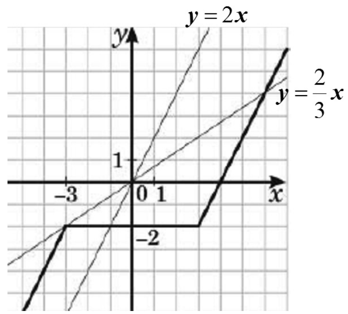
Решение.
Обозначим $\angle DCE = \alpha$. Тогда $\angle CAD = \angle ACB = 2\alpha$, так как ΔABC – равнобедренный. Значит, $CD = CE \cdot \cos\alpha$ (см. рис.), и по теореме синусов для треугольника ACD имеем:

$$AD = CD \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{CE\cos\alpha\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2\cos\alpha\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = 1.$$

Ответ: 1

3-й уровень

Задание № 13



Найдём все значения k, при которых прямая $y = kx$ пересекает в трёх различных точках ломаную, заданную условиями

$$y = \begin{cases} 2x + 4, & \text{если } x < -3 \\ -2, & \text{если } -3 \le x \le 3 \\ 2x - 8, & \text{если } x > 3 \end{cases}$$

Решение. Во-первых, построим ломаную, заданную условиями (см. рис.). Во-вторых, прямая $y = kx$ будет пересекать в трёх различных точках данную ломаную, если её угловой коэффициент k больше углового коэффициента аналогичной прямой, проходящей через точку $(-3;-2)$, и меньше углового коэффициента прямой, параллельной прямым $y = 2x - 8$ и $y = 2x + 4$.

Найдём угловой коэффициент прямой $y = kx$, проходящей через точку $(-3;-2)$: $-2 = k(-3) \Rightarrow k = \frac{2}{3}$ (см. рис.). Далее, нетрудно видеть, что угловой коэффициент прямой, параллельной прямым $y = 2x - 8$ и $y = 2x + 4$, равен 2.

Таким образом, прямая $y = kx$ имеет с ломаной три общие точки при $\frac{2}{3} < k < 2$.

Ответ: $k \in \left(\frac{2}{3}; 2\right)$

10 класс

1-й уровень

1	2	3	4	5	6	7	8
Д	**В**	**А**	**Б**	**Г**	**Д**	**Г**	**Г**

2-й уровень

Задание № 9

Решение. По условию:

$$r \ge 550 \Rightarrow q \cdot p \ge 550 \Rightarrow (210 - 20p) \cdot p \ge 550 \Rightarrow 2p^2 - 21p + 55 \le 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2(p-5)\left(p - \frac{11}{2}\right) \le 0 \Rightarrow 5 \le p \le \frac{11}{2}.$$

Таким образом, максимальный уровень цены, при котором значение выручки предприятия за месяц составит не менее 550 тыс. грн, равен 5,5 тыс. грн.

Ответ: 5,5 тыс. грн

Задание № 10

Решение.

Рассмотрим отдельно функции $f(x) = \sqrt{16 - (4x+5)^2}$ и $g(x) = 4 + \cos^2\frac{2\pi x}{5}$.

Очевидно, на области определения функция $f(x) = \sqrt{16 - (4x+5)^2} \le \sqrt{16} = 4$, то есть наибольшее значение функции $f(x) = \sqrt{16 - (4x+5)^2}$ равно 4 и достигается только лишь при одном значении $x = -1{,}25$.

Аналогично, нетрудно видеть, что наименьшее значение функции $g(x) = 4 + \cos^2\frac{2\pi x}{5}$ тоже равно 4. Причём

$$g(-1{,}25) = 4 + \cos^2\frac{2\pi(-1{,}25)}{5} = 4 + \cos^2\frac{\pi}{2} = 4.$$

Значит, $x = -1{,}25$ является единственным корнем исходного уравнения.
Замечание. Решение уравнения можно было бы оформить следующим образом:

$$\left(\sqrt{16 - (4x+5)^2} = 4 + \cos^2\frac{2\pi x}{5}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{16 - (4x+5)^2} \le 4, \\ 4 + \cos^2\frac{2\pi x}{5} \ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{16 - (4x+5)^2} = 4, \\ 4 + \cos^2\frac{2\pi x}{5} = 4. \end{cases}$$

Последняя система имеет единственное решение $x = -1{,}25$.

Ответ: $x = -1{,}25$

Задание № 11

Решение.

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-8x+16}-y=0, \\ y-|x+3|=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{(x-4)^2}-y=0, \\ y-|x+3|=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x-4|-y=0, \\ y-|x+3|=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

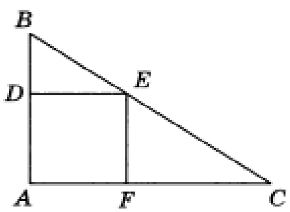
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=|x-4|, \\ y=|x+3| \end{cases} \Rightarrow \left(|x-4|=|x+3|\right)\Big|\uparrow 2 \;\Rightarrow \left(x^2-8x+16=x^2+6x+9\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x_0=\frac{1}{2},\; y_0=\left|\frac{1}{2}+3\right|=\frac{7}{2}\right)\Rightarrow (x_0;y_0)=\left(\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)\Rightarrow x_0+y_0=\frac{1}{2}+\frac{7}{2}=4.$$

Ответ: 4

Задание № 12

В прямоугольный треугольник с катетами 2 и 6 вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найдём периметр квадрата.



Решение.

Итак, пусть в прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB=2$ и $AC=6$ вписан квадрат $ADEF$ (см. рис.).

Обозначим сторону квадрата через x. Тогда $BD=2-x$ и $FC=6-x$. Треугольники BDE и EFC подобны по двум углам. Отсюда имеем: $\frac{2-x}{x}=\frac{x}{6-x}$. Решим полученное из этого соотношения квадратное уравнение $(2-x)(6-x)=x^2$ при условии, что $x>0$, $2-x>0$ и $6-x>0$, то есть при условии, что $x\in(0;2)$. Получим $x=1{,}5$. Значит, периметр квадрата равен 6.

Ответ: 6

<u>3-й уровень</u>

Задание № 13

Решение. Требуется найти все значения параметра a, при каждом из которых расстояние между корнями уравнения $ax^2+(2a+2)x+(a+3)=0$ больше 1. Очевидно, что корни исходного квадратного уравнения находятся по формуле:

$$x_{1,2}=\frac{-(a+1)\pm\sqrt{(a+1)^2-a(a+3)}}{a}=\frac{-(a+1)\pm\sqrt{1-a}}{a}.$$

Тогда расстояние $|x_2-x_1|$ между этими корнями равно:

$$|x_2-x_1|=\left|\frac{2\sqrt{1-a}}{a}\right|=\frac{2\sqrt{1-a}}{|a|}.$$

Значит:

$$|x_2-x_1|=\frac{2\sqrt{1-a}}{|a|}>1\Leftrightarrow\frac{4(1-a)}{a^2}>1\Leftrightarrow\frac{a^2+4a-4}{a^2}<0\Leftrightarrow\begin{cases} a^2+4a-4<0, \\ a\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow$$

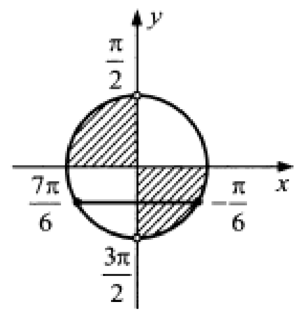
$$\Leftrightarrow\begin{cases} \left(a-\left(-2-2\sqrt{2}\right)\right)\left(a-\left(-2+2\sqrt{2}\right)\right)<0, \\ a\neq 0 \end{cases}\quad\Rightarrow\; a\in\left(-2-2\sqrt{2};0\right)\cup\left(0;-2+2\sqrt{2}\right).$$

Задание № 14

Решение.

$$\frac{2\sin^2 x-7\sin x-4}{\sqrt{-3tgx}}=0\Leftrightarrow\begin{cases} 2\sin^2 x-7\sin x-4=0, \\ -3tgx>0, \\ \cos x\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x=4, \\ \sin x=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \\ tgx<0, \\ \cos x\neq 0 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} \sin x=-\frac{1}{2}, \\ tgx<0, \\ \cos x\neq 0 \end{cases}\Rightarrow$$



$$\Rightarrow x=-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\; n\in Z.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{6}+2\pi n,\; n\in Z$

11 класс

1-й уровень

1	2	3	4	5	6	7	8
В	**Г**	**А**	**В**	**Б**	**Б**	**А**	**Б**

2-й уровень

Задание № 9

Решение.

$$\frac{1}{2}-x^2=\sqrt{\frac{1}{2}-x}\;\Leftrightarrow\;\begin{cases}\left(\frac{1}{2}-x^2\right)^2=\frac{1}{2}-x,\\ \frac{1}{2}-x^2\ge 0\end{cases}\;\Leftrightarrow\;\begin{cases}\frac{1}{4}-x^2+x^4=\frac{1}{2}-x,\\ x^2\le\frac{1}{2}\end{cases}\;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^4-\left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)=0,\\ x^2\le\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^4-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=0,\\ |\,x\,|\le\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^4=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2,\\ |\,x\,|\le\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=\left|x-\frac{1}{2}\right|,\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\le x\le\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=-\left(x-\frac{1}{2}\right),\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\le x\le\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+x-\frac{1}{2}=0,\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\le x\le\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2},\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\le x\le\frac{1}{\sqrt{2}}.\end{cases}$$

Так как:

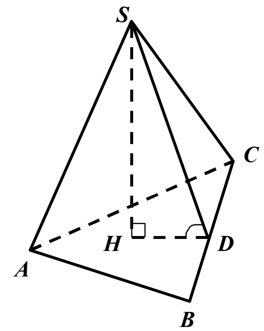
1) $|\,x_1\,|=\left|\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right|=\left|\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right|>\frac{1+1}{2}=1>\frac{1}{\sqrt{2}}\;\Rightarrow\;x_1=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}<-\frac{1}{\sqrt{2}}\;\Rightarrow$

$\Rightarrow\;x_1=\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\notin\left[-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right];$

2) $0<x_2=\frac{\sqrt{3}-1}{2}<\frac{\sqrt{4}-1}{2}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{2}}\;\Rightarrow\;x_2=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\in\left[-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right].$

Ответ: $\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

Задание № 10



Дано: $\boldsymbol{SABC}$ – правильная треугольная пирамида; $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{AC}=2\sqrt{3}$; двугранный угол при основании равен 60°.
Найти: $\boldsymbol{V_{SABC}}=?$

Решение.

Пусть $\angle\boldsymbol{SDH}$ – двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды $\boldsymbol{SABC}$ (см. рис.). Тогда $\angle\boldsymbol{SDH}=60^{\circ}$ и, кроме того, $\boldsymbol{HD}\equiv\boldsymbol{r}=\frac{\boldsymbol{a}}{2\sqrt{3}}=1$ (где $\boldsymbol{r}$ – радиус вписанной окружности в данный равносторонний треугольник $\boldsymbol{ABC}$ со стороной $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{AC}=2\sqrt{3}$). Далее, из прямоугольного треугольника $\boldsymbol{SHD}$ находим: $\boldsymbol{SH}=\boldsymbol{HD}\cdot\boldsymbol{tg}60^{\circ}=\sqrt{3}$.

Объём пирамиды равен:

$$V_{SABC}\overset{def}{=}\frac{1}{3}S_{\text{осн}}\cdot h=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot SH\overset{def}{=}\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot SH=\frac{1}{3}\cdot\frac{12\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{3}=3.$$

Ответ: 3

Задание № 11

Решение.

$$\begin{cases}y-\cos x=0,\\ \left(6\sqrt{\cos x}-1\right)\left(5y+4\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=\cos x,\\ 6\sqrt{\cos x}-1=0,\end{cases}\\ \begin{cases}y=\cos x,\\ 5y+4=0,\\ \cos\ge 0;\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=\cos x,\\ \cos x=\frac{1}{36},\end{cases}\\ \begin{cases}y=-\frac{4}{5},\\ \cos x=-\frac{4}{5}\\ \cos\ge 0;\end{cases}\Rightarrow\{\varnothing\},\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

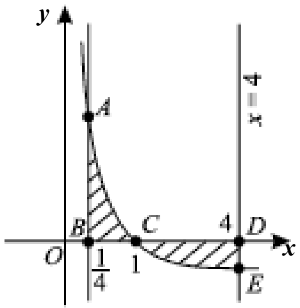
$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{1}{36},\\ x=\pm\arccos\frac{1}{36}+2\pi n,\; n\in Z.\end{cases}$$

Ответ: $\left(\pm\arccos\frac{1}{36}+2\pi n;\;\frac{1}{36}\right),\;n\in Z$

Задание № 12

Требуется вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=\frac{1}{x}-1,\ x=\frac{1}{4},\ x=4,\ y=0$.

Решение. Графиком функции $y=\frac{1}{x}-1$, как вы знаете, является гипербола,



смещённая на единицу вниз по оси ординат относительно гиперболы $y=\frac{1}{x}$. Заметим, что данный график пересекает ось абсцисс в точке $x=1$, что нетрудно определить, решив уравнение $\frac{1}{x}-1=0$.

Таким образом, фигура (или область), ограниченная указанными в задаче линиями, будет иметь вид заштрихованной части плоскости XOY, изображённой на рисунке. Тогда площадь этой фигуры равна: $S=S_{ABC}+S_{CDE}$ (см. рис.). Поскольку функция $y=\frac{1}{x}-1$ на интервале $(1;4]$ принимает отрицательные значения, то площадь части CDE будет вычисляться по формуле $S_{CDE}=-\int_1^4 y(x)dx$, в то время как площадь части ABC определяется равенством $S_{ABC}=\int_{\frac{1}{4}}^{1} y(x)dx$. Значит:

$$S\equiv S_{ABC}+S_{CDE}=\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left(\frac{1}{x}-1\right)dx-\int_1^4\left(\frac{1}{x}-1\right)dx=(ln\,x-x)\Big|_{\frac{1}{4}}^{1}-(ln\,x-x)\Big|_1^4=$$

$$=ln1-1-ln\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-ln4+4+ln1-1=2{,}25.$$

Ответ: 2,25

3-й уровень

Задание № 13

Решение. Числа $log_2\left(2x^2+4x\right)$, $log_2\left(8-x^2-19x\right)$ и $log_2\left(x^2-15x+7\frac{1}{2}\right)$ являются длинами сторон равнобедренного треугольника в следующих трёх случаях (подумайте, почему):

1-й случай:

$$\begin{cases}2x^2+4x=8-x^2-19x\\2\,log_2\left(2x^2+4x\right)>log_2\left(x^2-15x+7\frac{1}{2}\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+8)\left(x-\frac{1}{3}\right)=0\\\left(2x^2+4x\right)^2>x^2-15x+7\frac{1}{2}>1\\2x^2+4x>0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=-8\\x=\frac{1}{3}\end{array}\right.\\\left(2x^2+4x\right)^2>x^2-15x+7\frac{1}{2}>1\\2x^2+4x>0\end{cases}\Rightarrow\quad x=-8,$$

так как при $x=-8$ получаем: $(2\cdot64-4\cdot8)^2>64+15\cdot8+7\frac{1}{2}$, а при $x=\frac{1}{3}$: $\left(2\cdot\frac{1}{9}+4\cdot\frac{1}{3}\right)^2<\frac{1}{9}-15\cdot\frac{1}{3}+7\frac{1}{2}$.

2-й случай:

$$\begin{cases}2x^2+4x=x^2-15x+7\frac{1}{2}\\2\,log_2\left(2x^2+4x\right)>log_2\left(8-x^2-19x\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+19x=7\frac{1}{2}\\8-x^2-19x>1\end{cases}\Rightarrow\{\varnothing\}.$$

3-й случай:

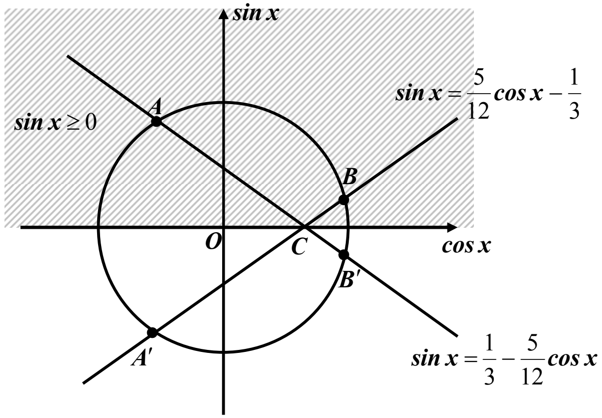
$$\begin{cases}8-x^2-19x=x^2-15x+7\frac{1}{2}\\2\,log_2\left(8-x^2-19x\right)>log_2\left(2x^2+4x\right)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+4x=\frac{1}{2}\\2x^2+4x>1\end{cases}\Rightarrow\{\varnothing\}.$$

Ответ: -8

Задание № 14

Решение. Выясним, имеет ли уравнение $12\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=|4-5\cos x|$ хотя бы одну пару корней, расстояние между которыми не превосходит $\frac{\pi}{2}$? Заметим:

$$12\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=|4-5\cos x| \Leftrightarrow 12\sin x=|5\cos x-4| \Leftrightarrow \begin{cases}12\sin x=\pm(5\cos x-4),\\ \sin x\geq 0.\end{cases}$$



Как видно, решения полученной системы изображаются на числовой окружности точками ***A*** и **B** (см. рис.), причём расстояния между ними (ближайшими корнями) равно:

$$\overset{\frown}{AB}=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{A'B'}}{2}=\angle ACB=\pi-2\,arctg\frac{5}{12}>\frac{\pi}{2},$$

так как $arctg\frac{5}{12}<\frac{\pi}{4}$. Следовательно, исходное уравнение не имеет хотя бы пары корней, расстояние между которыми не превосходит $\frac{\pi}{2}$.

Ответ: нет

2012 год

8 – 9 классы

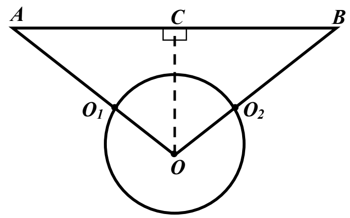
1-й уровень

1	2	3	4	5	6	7	8
В	**В**	**А**	**В**	**Д**	**А**	**Д**	**Д**

2-й уровень

Задание № 9

Решение. Если расстояние по прямой между космонавтами, летящими над поверхностью Земли на высоте 230 км, равно 2200 км, то они могут увидеть друг друга.



Действительно, пусть $|AO_1|=|BO_2|=230$ км, $AB=2200$ км, радиус Земли $R=6370$ км. Если $|OC|>R$, то, очевидно, космонавты увидят друг друга. Рассмотрим ΔAOB – равнобедренный, OC – высота и медиана. Следовательно, $|AC|=|CB|=1100$ км. Таким образом:

$$|OC|=\sqrt{|AO|^2-|AC|^2}=\sqrt{(230+6370)^2-1100^2}=\sqrt{6600^2-1100^2}=$$

$$=\sqrt{(6600+1100)\cdot(6600-1100)}=\sqrt{77\cdot 100\cdot 55\cdot 100}=100\sqrt{77\cdot 55}=1100\sqrt{35}\approx 6600.$$

Итак, $|OC|\approx 6600>R=6370$. Значит, космонавты могут увидеть друг друга.

Ответ: да, космонавты смогут увидеть друг друга

Задание № 10

Решение.

$$\frac{x-1}{2x+1}+\frac{x+1}{2x-1}=\frac{8x-1}{4x^2-1} \Leftrightarrow \frac{(x-1)(2x-1)+(x+1)(2x+1)}{(2x+1)(2x-1)}=\frac{8x-1}{4x^2-1} \Leftrightarrow$$

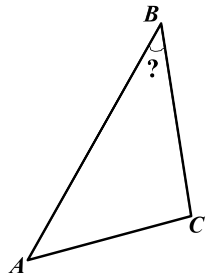
$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)(2x-1)+(x+1)(2x+1)}{4x^2-1}=\frac{8x-1}{4x^2-1} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)(2x-1)+(x+1)(2x+1)=8x-1,\\ 4x^2-1\neq 0.\end{cases}$$

То есть:

$$\begin{cases}4x^2-8x+3=0,\\ x\neq\pm\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{16-12}}{4}=\dfrac{4\pm2}{4},\\ x\neq\pm\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{3}{2},\ x_2=\dfrac{1}{2},\\ x\neq\pm\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow x=\frac{3}{2}.$$

Ответ: $\frac{3}{2}$

Задание № 11



Решение. Нет, не может. Действительно, пусть ΔABC – данный треугольник (см. рис.): $AB=15$ см, $AC=10$ см. Тогда, по теореме синусов:

$$\frac{|AB|}{\sin\angle C}=\frac{|AC|}{\sin\angle B}\Rightarrow \sin\angle B=\frac{|AC|\cdot\sin\angle C}{|AB|}=\frac{10\cdot\sin\angle C}{15}=$$

$=\frac{2}{3}\cdot\sin\angle C.$ Итак, $\sin\angle B=\frac{2}{3}\cdot\sin\angle C.$

Если теперь предположить, что $\sin\angle B=\frac{3}{4}$, то получим: $\frac{3}{4}=\frac{2}{3}\cdot\sin\angle C$.

Следовательно, $\sin\angle C=\frac{9}{8}>1$, что невозможно. Получили противоречие. Значит, наше предположение неверно.

Ответ: $\sin\angle B\neq\frac{3}{4}$

Задание № 12

Решение. Обозначим через x число всех собак в вольере. Тогда, по условию, ротвейлеров $0{,}25x$, такс – $0{,}75x$. Далее, пусть всего корма y. Тогда $0{,}25x$ ротвейлеров получают $0{,}52y$ корма, а остальные $0{,}48y$ корма получают $0{,}75x$ таксы. Значит, один ротвейлер получает $\frac{0{,}52y}{0{,}25x}$ корма, а одна такса получает $\frac{0{,}48y}{0{,}75x}$ корма. Таким образом:

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{0{,}48y}{0{,}75x}-100\%\\ \dfrac{0{,}52y}{0{,}25x}-?\%\end{matrix}\right\}\Rightarrow ?\%=\frac{0{,}52y}{0{,}25x}\cdot100\%\cdot\frac{0{,}75x}{0{,}48y}=325\%\Rightarrow325\%-100\%=225\%.$$

Ответ: на 225% больше

3-й уровень

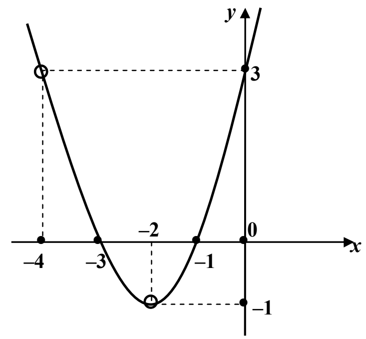
Задание № 13

Решение.

$$y=\frac{(x^2+7x+12)(x^2+3x+2)}{x^2+6x+8}=\left[\begin{matrix}x^2+7x+12=0\Rightarrow x_1=-3,x_2=-4\\ x^2+3x+2=0\Rightarrow x_3=-1,x_4=-2\\ x^2+6x+8=0\Rightarrow x_5=-4,x_6=-2\end{matrix}\right]=$$

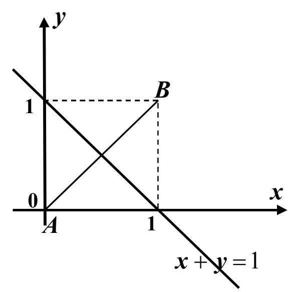
$$=\frac{(x+3)(x+4)(x+1)(x+2)}{(x+4)(x+2)}=\begin{cases}(x+3)(x+1),\\ x\neq\{-2,-4\}\end{cases}\Leftrightarrow y=\begin{cases}x^2+4x+3,\\ x\neq\{-2,-4\}.\end{cases}$$

Построим график:



Задание № 14

Решение. Обозначим через $C(x,y)$ третью вершину данного равностороннего треугольника ΔABC: $A(0;0)$, $B(1;1)$. Тогда:



$$|AC|=|BC|\Leftrightarrow\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$$

То есть, $x^2+y^2=x^2-2x+1+y^2-2y+1$. Отсюда $x+y=1$. Значит, точка $C(x,y)$ лежит на прямой $x+y=1$, а так как ΔABC равносторонний, то $|AC|=|BC|=|AB|$, где $|AB|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$. Значит: $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}\Rightarrow x^2+y^2=2$. Таким образом:

$$\begin{cases}x+y=1\\ x^2+y^2=2\end{cases}\Rightarrow C(x_1;y_1):\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ y_1=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\quad\text{или}\quad C(x_2;y_2):\begin{cases}x_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ y_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$$

10 класс

1-й уровень

1	2	3	4	5	6	7	8
А	**В**	**В**	**Д**	**Г**	**Б**	**Б**	**Б**

2-й уровень

Задание № 9

Решение. Так как величины углов, прилежащих к основанию, равны 60° и 45°, то угол, противолежащий основанию, равен 75°. Тогда, по теореме синусов:

$$\frac{6}{\sin 75^{\circ}}=\frac{a}{\sin 45^{\circ}}=\frac{b}{\sin 60^{\circ}}.$$

Известно, что меньшая сторона остроугольного треугольника лежит против меньшего острого угла, поэтому меньшей будет сторона $a=\dfrac{6\cdot \sin 45^{\circ}}{\sin 75^{\circ}}$.

Так как

$$\sin 75^{\circ}=\sin\left(30^{\circ}+45^{\circ}\right)=\sin 30^{\circ}\cdot\cos 45^{\circ}+\cos 30^{\circ}\cdot\sin 45^{\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

то

$$a=\frac{6\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\frac{12}{\sqrt{3}+1}=\frac{12\left(\sqrt{3}-1\right)}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{12\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}=6\left(\sqrt{3}-1\right).$$

Ответ: $6\left(\sqrt{3}-1\right)$

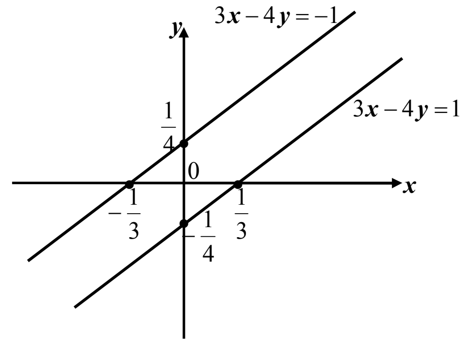
Задание № 10

Решение. Очевидно, что:

$$9x^2-24xy+16y^2=1\Leftrightarrow\left(3x-4y\right)^2=1\Leftrightarrow 3x-4y=\pm 1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3x-4y=1,\\ 3x-4y=-1.\end{array}\right.$$

Таким образом, как видим, исходное условие $9x^2-24xy+16y^2=1$ равносильно совокупности двух уравнений, определяющих пару параллельных прямых $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$ и $y=\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}$.

Поэтому нетрудно изобразить на координатной плоскости XOY искомое геометрическое место точек (см. рис.).



Задание № 11

Решение. Требуется найти все значения x, для которых график функции $f(x)=|\,2x+14\,|$ расположен не ниже графика функции $g(x)=|\,3x+10\,|$, т. е. $\left(f(x)\geq g(x)\right)\Rightarrow|2x+14|\geq|3x+10|\Leftrightarrow(2x+14)^2\geq(3x+10)^2$. Следовательно, $\left(4x^2+56x+196\geq 9x^2+60x+100\right)\Rightarrow 5x^2+4x-96\leq 0$. Решая последнее неравенство, получим: $x\in\left[-4{,}8;\ 4\right]$.

Ответ: $x\in\left[-4{,}8;\ 4\right]$

Задание № 12

Решение.

$$x^2-\cos 2x^2+1=0\Leftrightarrow 1+x^2=\cos 2x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1+x^2\geq 1,\ \forall x\in R\\ -1\leq\cos 2x^2\leq 1,\ \forall x\in R\end{array}\right]\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}1+x^2=1,\\ \cos 2x^2=1.\end{array}\right.$$

Таким образом, получаем:

$$\left\{\begin{array}{l}x^2=0,\\ \cos 2x^2=1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\ \cos 2x^2\Big|_{x=0}=1\ \right]\Rightarrow x=0.$$

Ответ: $x=0$

3-й уровень

Задание № 13

Решение. Так как три положительных числа являются последовательными членами некоторой возрастающей геометрической прогрессии, то эти числа равны b, bq, bq^2. После увеличения среднего числа в 2 раза получим три числа b, $2bq$, bq^2, которые уже будут последовательными членами арифметической прогрессии.

Тогда, согласно характеристическому свойству арифметической прогрессии, можем записать:

$$2bq=\frac{b+bq^2}{2}\Rightarrow b-4bq+bq^2=0\Rightarrow\left[\,b\neq 0\,\right]\Rightarrow q^2-4q+1=0\Rightarrow q=2\pm\sqrt{2^2-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow q=2\pm\sqrt{3}.$$

Далее, так как исходная геометрическая прогрессия является возрастающей, то есть $q>1$, нетрудно сделать вывод, что $q=2+\sqrt{3}$.

Ответ: $2+\sqrt{3}$

Задание № 14

Решение. Исходное неравенство равносильно следующей совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\dfrac{7}{x}\geq 0\\ 5-\dfrac{28}{x}<0\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{7}{x}>\left(5-\dfrac{28}{x}\right)^2\\ 5-\dfrac{28}{x}\geq 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\ \dfrac{28}{x}>5\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{7}{x}>25-10\cdot\dfrac{28}{x}+\left(\dfrac{28}{x}\right)^2\\ \dfrac{28}{x}\leq 5\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x>0\\ x<5{,}6\end{cases} & (A)\\ \begin{cases}\dfrac{7}{x}>25-40\cdot\dfrac{7}{x}+16\left(\dfrac{7}{x}\right)^2\\ x\geq 5{,}6\end{cases} & (B)\end{array}\right.$$

Рассмотрим отдельно первое неравенство системы (B), предварительно сделав замену $t=\dfrac{7}{x}$ для простоты дальнейших выкладок:

$$t>25-40\cdot t+16t^2\ \Rightarrow 16t^2-41t+25<0\Rightarrow\left[\begin{array}{c}16t^2-41t+25=0\\ t_1=1,\quad t_2=\dfrac{25}{16}\end{array}\right]\Rightarrow 1<t<\frac{25}{16}.$$

Таким образом: $\left(1<\dfrac{7}{x}<\dfrac{25}{16}\right)\Leftrightarrow\left(\dfrac{16}{25}<\dfrac{x}{7}<1\right)\Leftrightarrow\left(\dfrac{112}{25}<x<7\right)\Leftrightarrow(4{,}48<x<7).$

Итак:

$$\left[\begin{array}{ll}0<x<5{,}6 & (A)\\ \begin{cases}4{,}48<x<7\\ x\geq 5{,}6\end{cases} & (B)\end{array}\right.\Rightarrow[x\in Z]\Rightarrow x=\{1,2,3,4,5,6\},$$

то есть шесть целочисленных корней.

Ответ: шесть

11 класс

<u>1-й уровень</u>

1	2	3	4	5	6	7	8
В	**В**	**А**	**А**	**Г**	**Б**	**Д**	**В**

<u>2-й уровень</u>

Задание № 9

Решение.

$\left(\vec a+\vec b+\vec c\right)^2=\left|\vec a+\vec b+\vec c\right|^2;$

$\left|\vec a+\vec b+\vec c\right|^2=\left(\sqrt{18}\right)^2=18;$

$$\left(\vec a+\vec b+\vec c\right)^2=\vec a^2+\vec b^2+\vec c^2+2\vec a\cdot\vec b+2\vec b\cdot\vec c+2\vec a\cdot\vec c=|\vec a|^2+|\vec b|^2+|\vec c|^2+2|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot cos\left(\widehat{\vec a,\vec b}\right)+$$

$$+2|\vec b|\cdot|\vec c|\cdot cos\left(\widehat{\vec b,\vec c}\right)+2|\vec a|\cdot|\vec c|\cdot cos\left(\widehat{\vec a,\vec c}\right)=9+9+9+2\cdot3\cdot3\cdot cos\left(\widehat{\vec a,\vec c}\right)=27+18\cdot cos\left(\widehat{\vec a,\vec c}\right).$$

$$27+18\cdot cos\left(\widehat{\vec a,\vec c}\right)\equiv 18\ \Rightarrow\ 18\cdot cos\left(\widehat{\vec a,\vec c}\right)=-9\ \Rightarrow\ cos\left(\widehat{\vec a,\vec c}\right)=-\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \left(\widehat{\vec a,\vec c}\right)=120^{o}.$$

Ответ: 120^{o}

Задание № 10

Решение.

$$f'(x)=4\cdot\left(1-3x^2+9x^8-27x^{26}+\ldots+3^8x^{\left(3^8-1\right)}-3^9x^{\left(3^9-1\right)}+3^{10}x^{\left(3^{10}-1\right)}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(1)=4\left(1-3+9-27+\ldots+3^8-3^9+3^{10}\right)=4\left(1+1(-3)^1+1(-3)^2+\ldots+1(-3)^9+1(-3)^{10}\right)=$$

$$=4\cdot1\cdot\frac{1-(-3)^{10}}{1-(-3)}=1-(-3)^{10}=1-3^{10}=-\left(3^{10}-1\right)=-(****9-1)=-(****8)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(1)=-(****8):5\ \Rightarrow\ r=3.$$

Ответ: 3

Задание № 11

Решение. Найдём сумму всех целочисленных корней уравнения $(2x-11)^{log_7(49-6x)}=(49-6x)^{log_7(2x-11)}$. Для этого прологарифмируем по основанию 7 и левую, и правую части уравнения.

Получим:

$$\boldsymbol{log}_7(2\boldsymbol{x}-11)^{\boldsymbol{log}_7(49-6\boldsymbol{x})} = \boldsymbol{log}_7(49-6\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{log}_7(2\boldsymbol{x}-11)};$$
$$\boldsymbol{log}_7(49-6\boldsymbol{x})\cdot \boldsymbol{log}_7(2\boldsymbol{x}-11) = \boldsymbol{log}_7(2\boldsymbol{x}-11)\cdot \boldsymbol{log}_7(49-6\boldsymbol{x}),$$

то есть $0\equiv 0$ на всей области допустимых значений первоначального уравнения. Найдём ОДЗ:

$$\begin{cases} 2\boldsymbol{x}-11>0, \\ 49-6\boldsymbol{x}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\boldsymbol{x}>11, \\ 6\boldsymbol{x}<49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x}>\dfrac{11}{2}, \\ \boldsymbol{x}<\dfrac{49}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \left(5\frac{1}{2}<\boldsymbol{x}<8\frac{1}{6}\right).$$

Таким образом, уравнение $(2\boldsymbol{x}-11)^{\boldsymbol{log}_7(49-6\boldsymbol{x})} = (49-6\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{log}_7(2\boldsymbol{x}-11)}$ справедливо для всех $\left(5\frac{1}{2}<\boldsymbol{x}<8\frac{1}{6}\right)$. Целочисленными корнями из полученного интервала являются значения $\{6;7;8\}$, сумма которых равна 21.

Ответ: 21

Задание № 12

Решение. Воспользуемся формулой: $\boldsymbol{sin}\,\alpha - \boldsymbol{sin}\,\beta = 2\,\boldsymbol{sin}\dfrac{\alpha-\beta}{2}\boldsymbol{cos}\dfrac{\alpha+\beta}{2}$. Тогда:

$$\boldsymbol{sin}\,3\boldsymbol{x} = \boldsymbol{sin}\,7\boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{sin}\,7\boldsymbol{x} - \boldsymbol{sin}\,3\boldsymbol{x} = 0 \Leftrightarrow 2\,\boldsymbol{sin}\,2\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{cos}\,5\boldsymbol{x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \boldsymbol{sin}\,2\boldsymbol{x}=0 \\ \boldsymbol{cos}\,5\boldsymbol{x}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \boldsymbol{x}=\dfrac{\pi\boldsymbol{n}}{2},\ \boldsymbol{n}\in\boldsymbol{Z} \\ \boldsymbol{x}=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{\pi\boldsymbol{m}}{5},\ \boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<\dfrac{\pi\boldsymbol{n}}{2}<2\pi,\ \boldsymbol{n}\in\boldsymbol{Z} \\ 0<\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{\pi\boldsymbol{m}}{5}<2\pi,\ \boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<\boldsymbol{n}<4,\ \boldsymbol{n}\in\boldsymbol{Z} \\ 0<2\boldsymbol{m}+1<20,\ \boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<\boldsymbol{n}<4,\ \boldsymbol{n}\in\boldsymbol{Z} \\ -0{,}5<\boldsymbol{m}<9{,}5,\ \boldsymbol{m}\in\boldsymbol{Z} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \boldsymbol{n}=\{1;2;3\} \\ \boldsymbol{m}=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}. \end{array}\right.$$

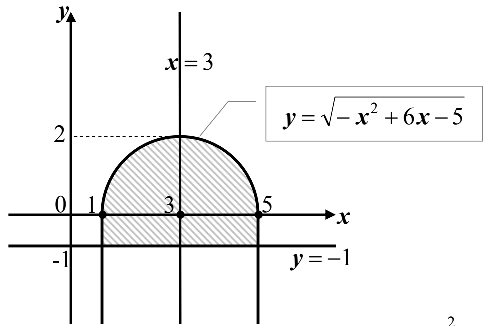
Итак, если $\boldsymbol{n}=\{1;2;3\}$, то так как $\boldsymbol{x}=\dfrac{\pi\boldsymbol{n}}{2}$, получаем $\boldsymbol{x}\in\left\{\dfrac{\pi}{2};\pi;\dfrac{3\pi}{2}\right\}$. Если же $\boldsymbol{m}=\{0;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$, то так как $\boldsymbol{x}=\dfrac{\pi(2\boldsymbol{m}+1)}{10}$, нетрудно получить следующие значения: $\boldsymbol{x}\in\left\{\dfrac{\pi}{10};\dfrac{3\pi}{10};\dfrac{\pi}{2};\dfrac{7\pi}{10};\dfrac{9\pi}{10};\dfrac{11\pi}{10};\dfrac{13\pi}{10};\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{17\pi}{10};\dfrac{19\pi}{10}\right\}$.

Объединяя полученные множества решений, видим, что на интервале $(0;2\pi)$ уравнение имеет **11 корней**.

<u>3-й уровень</u>

Задание № 13

Решение. Графиком функции $\boldsymbol{y}=\sqrt{-\boldsymbol{x}^2+6\boldsymbol{x}-5}$ является верхняя половина окружности $(\boldsymbol{x}-3)^2+\boldsymbol{y}^2=2^2$ с центром в точке $(3;0)$ и радиусом $\boldsymbol{R}=2$. По условию, область $\boldsymbol{D}$ имеет вид $\boldsymbol{D}=\left\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\,\middle|\,-1\le\boldsymbol{y}\le\sqrt{-\boldsymbol{x}^2+6\boldsymbol{x}-5}\right\}$, то есть:



$$\begin{cases} \boldsymbol{y}\ge -1, \\ \boldsymbol{y}\le\sqrt{-\boldsymbol{x}^2+6\boldsymbol{x}-5}, \\ -\boldsymbol{x}^2+6\boldsymbol{x}-5\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{y}\ge -1, \\ \boldsymbol{y}\le\sqrt{-\boldsymbol{x}^2+6\boldsymbol{x}-5}, \\ \boldsymbol{x}\in[1;5] \end{cases}$$

где, как уже отмечалось,

$$\boldsymbol{y}^2=-\boldsymbol{x}^2+6\boldsymbol{x}-5 \Leftrightarrow (\boldsymbol{x}-3)^2+\boldsymbol{y}^2=2^2.$$

Таким образом, нетрудно видеть (см. рис.), что при $\boldsymbol{b}=3$ прямая $\boldsymbol{x}=3$ делит данную область $\boldsymbol{D}$ плоскости $\boldsymbol{XOY}$ на две области равной площади.

Ответ: 3

Задание № 14

Известно, что расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит точка $\boldsymbol{C}$, а на другой – точки $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, причём треугольник $\boldsymbol{ABC}$ – равнобедренный и его боковая сторона равна 13. Требуется найти радиус окружности, вписанной в треугольник $\boldsymbol{ABC}$.

Решение. Возможны следующие три случая (рис. 1, 2, 3):

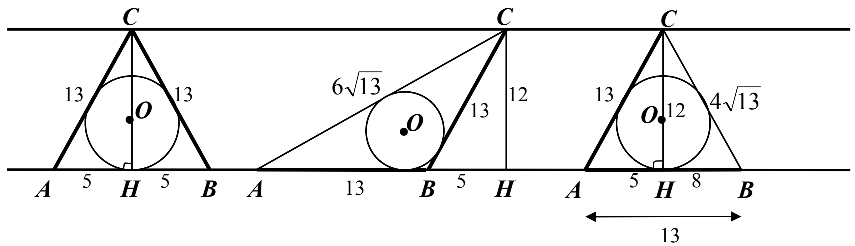


рис. 1 рис. 2 рис. 3

1-й случай:

Рассмотрим первый случай (рис. 1): $AC = BC = 13$. Пусть H – точка касания вписанной окружности треугольника ABC с основанием AB, r_1 – радиус окружности, вписанной в треугольник ABC. Тогда CH – высота и медиана треугольника ABC. Из прямоугольного треугольника AHC находим, что $AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$. Тогда

$$S_{\Delta ABC} = AH \cdot CH = 5 \cdot 12 = 60,$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) \cdot r_1 = \frac{1}{2}(10 + 13 + 13) \cdot r_1 = 18r_1.$$

Следовательно, из равенства $18r_1 = 60$ находим, что $r_1 = \frac{10}{3}$.

2-й случай:

Рассмотрим второй случай (рис. 2). Пусть, для определённости, $AB = BC = 13$ и пусть CH – высота треугольника ABC, r_2 – радиус окружности, вписанной в треугольник ABC. Тогда $BH = 5$, $AH = AB + BH = 13 + 5 = 18$. Из прямоугольного треугольника ACH находим:

$$AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{18^2 + 12^2} = 6\sqrt{9+4} = 6\sqrt{13},$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 12 = 78, \quad S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(AB + AC + BC) \cdot r_2 = \left(13 + 3\sqrt{13}\right)r_2.$$

Следовательно, из равенства $\left(13 + 3\sqrt{13}\right) \cdot r_2 = 78$ получаем, что $r_2 = \frac{3\left(13 - 3\sqrt{13}\right)}{2}$.

3-й случай:

Рассмотрим теперь третий случай (рис. 3): $AC = AB = 13$. Пусть H – точка касания вписанной окружности треугольника ABC с основанием AB, r_3 – радиус окружности, вписанной в треугольник ABC. Тогда CH – высота треугольника ABC. Из прямоугольных треугольников AHC и BHC находим:

$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5 \Rightarrow HB = AB - AH = 13 - 5 = 8,$$

$$BC = \sqrt{12^2 + 8^2} = \sqrt{4^2(9+4)} = 4\sqrt{13}.$$

Тогда

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 13 = 78,$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(AB + BC + AC)r_3 = \frac{1}{2}\left(13 + 13 + 4\sqrt{13}\right)r_3 = \left(13 + 2\sqrt{13}\right)r_3.$$

Следовательно, из равенства $\left(13 + 2\sqrt{13}\right) \cdot r_3 = 78$ находим, что $r_3 = \frac{2\left(13 - 2\sqrt{13}\right)}{3}$.

Ответ: $\frac{10}{3}, \ \frac{3\left(13 - 3\sqrt{13}\right)}{2}, \ \frac{2\left(13 - 2\sqrt{13}\right)}{3}$

2013 год

9 класс

1-й уровень

1	2	3	4	5	6	7	8
А	**Б**	**А**	**Б**	**В**	**В**	**Б**	**Г**

2-й уровень

Задание № 9

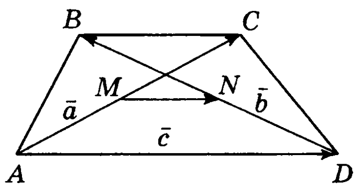
Решение. В данной геометрической прогрессии $b_8 = 2^{-12}$ и $b_{10} = 2^{-14}$. Следовательно, по определению геометрической прогрессии, можем записать:

$$\begin{cases} b_8 \overset{def}{\equiv} b_1q^7 = 2^{-12}, \\ b_{10} \overset{def}{\equiv} b_1q^9 = 2^{-14} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{b_1q^7}{b_1q^9} = \dfrac{2^{-12}}{2^{-14}}, \\ b_1q^7 = 2^{-12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{q^2} = 2^2, \\ b_1q^7 = 2^{-12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^2 = \dfrac{1}{4}, \\ b_1q^7 = 2^{-12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} q = \dfrac{1}{2}, \\ q = -\dfrac{1}{2}, \end{array}\right. \\ b_1q^7 = 2^{-12} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} q = -\dfrac{1}{2}, \\ b_1 = 2^{-12} : \left(-\dfrac{1}{2}\right)^7 \end{cases} \Rightarrow b_1 = 2^{-12} \times (-2)^7 = -2^{-5}, \\ \begin{cases} q = \dfrac{1}{2}, \\ b_1 = 2^{-12} : \left(\dfrac{1}{2}\right)^7 \end{cases} \Rightarrow b_1 = 2^{-12} \times 2^7 = 2^{-5}. \end{array}\right.$$

Ответ: $b_1 = 2^{-5}$ или $b_1 = -2^{-5}$

Задание № 10



Решение. В трапеции $ABCD$: $\overline{AC} = \bar{a}$, $\overline{DB} = \bar{b}$ и $\overline{AD} = \bar{c}$. Точки M и N – середины диагоналей AC и BD соответственно. Выразим вектор $\overline{MN}$ через векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

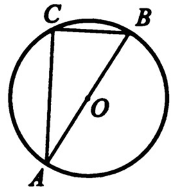
По правилу многоугольника сложения векторов можем записать: $\overline{AD} = \overline{AM} + \overline{MN} + \overline{ND}$. Так как точки M и N – середины диагоналей AC

и $\boldsymbol{BD}$ соответственно, то $\overline{AM}=\frac{1}{2}\overline{a}$ и $\overline{DN}=\frac{1}{2}\overline{b}$. Вектор $\overline{ND}$ по модулю равен вектору $\overline{DN}$, но противоположно направлен. Значит, $\overline{ND}=-\frac{1}{2}\overline{b}$. Таким образом: $\overline{MN}=\overline{AD}-\left(\overline{AM}+\overline{ND}\right)=\overline{AD}-\overline{AM}-\overline{ND}=\overline{c}-\frac{1}{2}\overline{a}+\frac{1}{2}\overline{b}$.

Ответ: $\overline{c}-\frac{1}{2}\overline{a}+\frac{1}{2}\overline{b}$

Задание № 11

Решение. Пусть $\boldsymbol{ABC}$ – данный прямоугольный треугольник: $S_{ABC}=24\,\text{см}^2$, $P_{ABC}=24\,\text{см}$. Данный треугольник, по условию, вписан в окружность радиуса $\boldsymbol{R}$ (см. рис.). Тогда:



$$S_{ABC}\overset{def}{=}\frac{1}{2}AC\cdot BC\Rightarrow AC\cdot BC=48.$$

Далее, пусть, например, $BC=x$, $x>0$. Тогда можем записать:

$$AC=\frac{48}{x};\quad P\overset{def}{=}AB+BC+AC=24;\quad AB=24-x-\frac{48}{x}.$$

С другой стороны, по теореме Пифагора $AB^2=AC^2+BC^2$. Следовательно:

$$\left(24-x-\frac{48}{x}\right)^2=\left(\frac{48}{x}\right)^2+x^2\ \Rightarrow\ x^2-14x+48=0\ \Rightarrow\ x_1=6;\ x_2=8.$$

Таким образом, либо $BC=6\,\text{см}$, тогда $AC=8\,\text{см}$, либо $BC=8\,\text{см}$, тогда $AC=6\,\text{см}$. В любом случае, гипотенуза $AB=10\,\text{см}$. Так как прямоугольный треугольник вписан в окружность, то гипотенуза этого треугольника будет её диаметром. Значит, $R=AO=\frac{1}{2}AB=5\,(\text{см})$.

Ответ: 5 см

Задание № 12

Решение. Пусть $\boldsymbol{x}$ число отсутствовавших на уроках учеников. Тогда:

Число учеников	Было вчера	Стало сегодня
Присутствовало на уроках	$8x$	$8x-2$
Отсутствовало на уроках	x	$x+2$

Нетрудно видеть, что всего учеников в классе $9x$. Далее, $x+2$ составляет 20%, то есть $\frac{1}{5}$ часть от $8x-2$. Следовательно:

$$8x-2=5(x+2)\ \Leftrightarrow\ 8x-2=5x+10\ \Leftrightarrow\ 3x=12\ \Rightarrow\ x=4.$$

Значит, в классе: $9x\big|_{x=4}=36$ учеников.

Ответ: 36 учеников

3-й уровень

Задание № 13

Решение. Даны гипербола $y=\frac{3}{x}$ и прямая, уравнение которой $y=kx+b$. Известно, что данная прямая проходит через точку $(0;3)$. Значит, $b=3$. Таким образом, уравнение исходной прямой запишется в виде: $y=kx+3$.

Обозначим через $(x_0;y_0)$ точку касания прямой и гиперболы. Очевидно,

$$\begin{cases} y_0=kx_0+3, \\ y_0=\dfrac{3}{x_0} \end{cases}\Rightarrow \frac{3}{x_0}=kx_0+3\Rightarrow \left[\, x_0\neq 0 \,\right]\Rightarrow kx_0^2+3x_0-3=0.$$

Последнее уравнение имеет единственное решение (т. к. $(x_0;y_0)$ точка касания прямой и гиперболы), если $D\overset{def}{=}9+12k=0$. То есть если $k=-\frac{3}{4}$.

Следовательно, уравнение прямой: $y=-\frac{3}{4}x+3$. Теперь нетрудно найти точку пересечения данной прямой и оси абсцисс:

$$\begin{cases} y=-\frac{3}{4}x+3, \\ y=0 \end{cases}\Rightarrow\ \frac{3}{4}x=3\ \Rightarrow\ x=4.$$

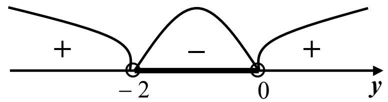
Ответ: $(4;0)$

Задание № 14

Решение. Решим неравенство: $(x^2+3x+12)(x^2+3x-10)<-120$. Для этого обозначим $x^2+3x=y$. Тогда исходное неравенство перепишется в виде:

$$(y+12)(y-10)<-120\Leftrightarrow y^2+2y-120+120<0\Leftrightarrow y^2+2y<0\Leftrightarrow y(y+2)<0.$$

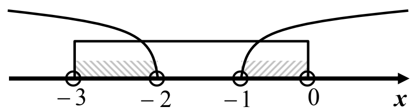
Следовательно:



То есть: $-2<y<0$.

Возвращаясь к прежней переменной, можем записать:

$$\left(-2<x^2+3x<0\right)\Leftrightarrow\begin{cases} x^2+3x>-2, \\ x^2+3x<0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x^2+3x+2>0, \\ x(x+3)<0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} (x+2)(x+1)>0, \\ x(x+3)<0 \end{cases}$$



Ответ: $x\in(-3;-2)\cup(-1;0)$

10 класс

1-й уровень

1	2	3	4	5	6	7	8
Б	**В**	**В**	**В**	**А**	**Б**	**А**	**Г**

2-й уровень

Задание № 9

Решение. Решим уравнение: $\sqrt{\boldsymbol{x}^3+3\boldsymbol{x}^2-16\boldsymbol{x}+\sqrt{2}-1}=-1-2\boldsymbol{x}^2$. Попытки найти корни, возводя обе части уравнения в квадрат, обречены на неудачу. Проверим неотрицательность правой части исходного уравнения.

Очевидно, что неравенство $\left(-1-2\boldsymbol{x}^2\geq 0\right)$ решений не имеет, так как $\left(-1-2\boldsymbol{x}^2<0,\ \forall \boldsymbol{x}\in \boldsymbol{R}\right)$. Но тогда и исходное уравнение не имеет решений, так как левая его часть – неотрицательная функция для всех $\boldsymbol{x}$, для которых $\boldsymbol{x}^3+3\boldsymbol{x}^2-16\boldsymbol{x}+\sqrt{2}-1\geq 0$.

Ответ: $\{\varnothing\}$

Задание № 10

Решение. Перемножим векторы:

$$\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}\cdot\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2}=\frac{1}{4}(\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{a}-\bar{b})=\frac{1}{4}(\bar{a}\cdot\bar{a}-\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{b}\cdot\bar{a}-\bar{b}\cdot\bar{b}).$$

Воспользуемся свойствами скалярного произведения:

1) $\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}|^2,\ \bar{b}\cdot\bar{b}=|\bar{b}|^2$ (скалярный квадрат);

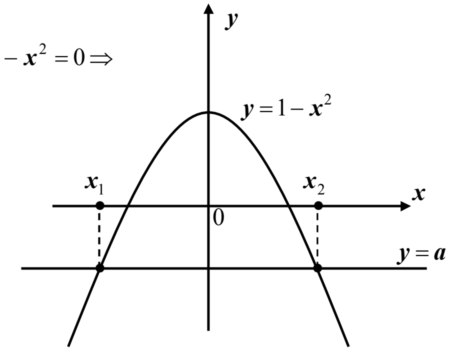
2) $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$ (переместительное свойство скалярного произведения).

Тогда: $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}\cdot\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2}=\frac{1}{4}\left(|\bar{a}|^2-|\bar{b}|^2\right)$. По условию вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют общее начало в вершине равнобедренного треугольника, а их концы находятся в вершинах при основаниях этого треугольника. Значит, модули этих векторов равны как отрезки боковых сторон равнобедренного треугольника, то есть $|\bar{a}|^2=|\bar{b}|^2$. Следовательно, скалярное произведение векторов $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}\cdot\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2}=0$. По следствию из теоремы о скалярном произведении векторов, если скалярное произведение векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны. Таким образом, угол между векторами $\frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$ и $\frac{\bar{a}-\bar{b}}{2}$ равен 90°.

Ответ: 90°

Задание № 11

Решение. Найдём значение $\boldsymbol{a}$, при котором расстояние между точками пересечения параболы $\boldsymbol{y}=1-\boldsymbol{x}^2$ с прямой $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}$ составляет $\sqrt{5}$. Для этого решим, прежде всего, уравнение:



$$1-\boldsymbol{x}^2=\boldsymbol{a}\Leftrightarrow(1-\boldsymbol{a})-\boldsymbol{x}^2=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{1-\boldsymbol{a}}\right)^2-\boldsymbol{x}^2=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(\sqrt{1-\boldsymbol{a}}-\boldsymbol{x}\right)\left(\sqrt{1-\boldsymbol{a}}+\boldsymbol{x}\right)=0.$$

Следовательно:

$\boldsymbol{x}_1=-\sqrt{1-\boldsymbol{a}},\boldsymbol{x}_2=\sqrt{1-\boldsymbol{a}}$.

Тогда расстояние равно:

$|\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_1|=\sqrt{5}$,

$\sqrt{1-\boldsymbol{a}}-\left(-\sqrt{1-\boldsymbol{a}}\right)=\sqrt{5}$,

$2\sqrt{1-\boldsymbol{a}}=\sqrt{5}$,

$4(1-\boldsymbol{a})=5\ \Rightarrow\ 1-\boldsymbol{a}=\frac{5}{4}\Rightarrow\boldsymbol{a}=-\frac{1}{4}$.

Ответ: $-\frac{1}{4}$

Задание № 12

Решение. Решим уравнение: $\left(4\boldsymbol{cos}^2\,\boldsymbol{x}+4\boldsymbol{cos}\,\boldsymbol{x}-3\right)\cdot\sqrt{5\boldsymbol{sin}\,\boldsymbol{x}}=0$. Очевидно:

1) $\boldsymbol{sin}\,\boldsymbol{x}<0$, то уравнение решений не имеет;

2) $\boldsymbol{sin}\,\boldsymbol{x}=0$, то $\boldsymbol{x}=\pi\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{n}\in\boldsymbol{Z}$;

3) $\boldsymbol{sin}\,\boldsymbol{x}>0$, то $4\boldsymbol{cos}^2\,\boldsymbol{x}+4\boldsymbol{cos}\,\boldsymbol{x}-3=0$, откуда $\boldsymbol{cos}\,\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}$ или $\boldsymbol{cos}\,\boldsymbol{x}=-\frac{3}{2}$.

Уравнение $\boldsymbol{cos}\,\boldsymbol{x}=-\frac{3}{2}$ решений не имеет, так как $|\,\boldsymbol{cos}\,\boldsymbol{x}\,|\leq 1$. Учитывая, что $\boldsymbol{sin}\,\boldsymbol{x}>0$, из уравнения $\boldsymbol{cos}\,\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}$ получаем: $\boldsymbol{x}=\frac{\pi}{3}+2\pi\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{k}\in\boldsymbol{Z}$.

Замечание. Решая уравнение $4\boldsymbol{cos}^2\,\boldsymbol{x}+4\boldsymbol{cos}\,\boldsymbol{x}-3=0$, делаем замену: $\boldsymbol{cos}\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{t}$. В результате чего получаем квадратное уравнение $4\boldsymbol{t}^2+4\boldsymbol{t}-3=0$, корни которого равны: $\boldsymbol{t}_1=-\frac{3}{2},\ \boldsymbol{t}_2=\frac{1}{2}$. Откуда $\boldsymbol{cos}\,\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}$ или $\boldsymbol{cos}\,\boldsymbol{x}=-\frac{3}{2}$.

Ответ: $\left\{\pi\boldsymbol{n},\ \frac{\pi}{3}+2\pi\boldsymbol{k}\right\},\ \boldsymbol{n},\boldsymbol{k}\in\boldsymbol{Z}$

3-й уровень

Задание № 13

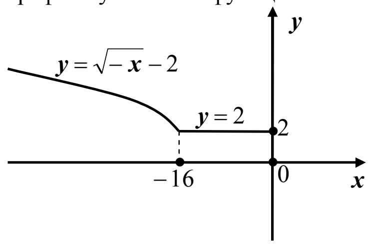
Решение. Построим график функции $y=\dfrac{\sqrt{-x}+\left|4-\sqrt{-x}\right|}{2}$. Найдём, прежде всего, область определения функции, то есть решим неравенство: $-x\ge 0$. Итак, $D(y)=(-\infty;\ 0\,]$.

Далее, найдём точки, в которых модуль обращается в нуль, то есть решим уравнение: $4-\sqrt{-x}=0$, откуда $x=-16$.

– если $x\in(-\infty;-16\,)$, то $y=\dfrac{\sqrt{-x}-\left(4-\sqrt{-x}\right)}{2}=\dfrac{2\sqrt{-x}-4}{2}=\sqrt{-x}-2$;

– если $x\in[-16;0\,]$, то $y=\dfrac{\sqrt{-x}+4-\sqrt{-x}}{2}=2$.

Построим эскиз графика указанной функции.



Задание № 14

Решение. Известно, что внутренние углы некоторого выпуклого многоугольника, наименьший угол которого равен 120°, образуют арифметическую прогрессию с разностью 5°. Тогда:

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=(n-2)\cdot 180^{\circ},\\&\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=\frac{2\cdot 120^{\circ}+(n-1)\cdot 5^{\circ}}{2}\cdot n\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{2\cdot 120+(n-1)\cdot 5}{2}\cdot n=(n-2)\cdot 180,$$

$$240n+5n(n-1)-360(n-2)=0\ \Rightarrow\ 5n^2-125n+720=0\Leftrightarrow n^2-25n+144=0\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ n_{1,2}=\{9;16\}.$$

Но так как многоугольник выпуклый и наименьший его угол равен 120°, то $n=9$. Если бы $n=16$, то получили бы угол больше 180° (многоугольник в этом случае был бы невыпуклым). Напомним, выпуклый многоугольник – такой, который весь находится по одну сторону от продолжения любой из его сторон.

Ответ: 9

11 класс

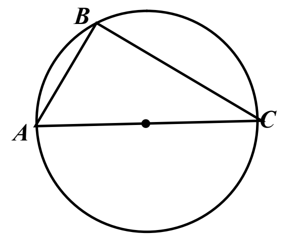
1-й уровень

1	2	3	4	5	6	7	8
В	**Б**	**В**	**Г**	**Б**	**Б**	**Д**	**Д**

2-й уровень

Задание № 9

Решение. По условию, треугольник ABC вписан в окружность радиуса $\sqrt{2}$. Его вершины делят эту окружность на три части в отношении $1:2:3$. Найдём сторону правильного треугольника, площадь которого равна площади данного треугольника ABC.

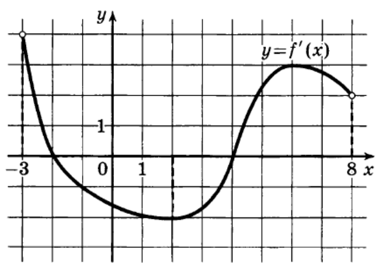


Так как вершины треугольника (см. рис.) делят окружность на три части в отношении $1:2:3$, то в ΔABC: $\angle B=90^{\circ}$, $\angle A=60^{\circ}$, $\angle C=30^{\circ}$. Далее, по условию, радиус окружности равен $\sqrt{2}$, то есть $OA=\sqrt{2}\ \Rightarrow\ AC=2\sqrt{2};\ AB=\sqrt{2};\ BC=\sqrt{6}$. Значит, $S_{\Delta ABC}=\dfrac{AB\cdot BC}{2}=\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}}{2}=\dfrac{2\cdot\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.

Если обозначить сторону правильного треугольника через a $(a>0)$, то его площадь, как известно, находится по формуле: $S=\dfrac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}$. Учитывая предыдущую запись $S_{\Delta ABC}=\sqrt{3}$, получим: $\dfrac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}\ \Rightarrow\ a^2=4\ \Rightarrow\ a=2$.

Ответ: 2

Задание № 10



Решение. На рисунке изображён график функции $y=f'(x)$ – ***производной функции*** $f(x)$, определенной на интервале $(-3;8)$. Как известно, в точке минимума убывание функции сменяется её возрастанием, то есть производная функции меняет свой знак с ***минуса*** на ***плюс***. Это означает, что точкой минимума является точка, в которой ***график производной*** пересекает ось абсцисс «снизу вверх», Другими словами, слева вблизи от этой точки график производной лежит ниже оси абсцисс (производная отрицательная, функция убывает), а справа вблизи от этой точки график производной лежит выше оси абсцисс (производная положительна, функция возрастает). Такой точкой (см. рис.) является точка $x = 4$.

Ответ: $x = 4$

Задание № 11

Решение. Требуется дать обоснованный ответ на вопрос, сколько ***различных действительных корней*** имеет уравнение $\sqrt{x}\cdot\left(x^4-\sqrt{5}+\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\right)=0$?

Очевидно, ***таких корней два***. Действительно:

$$\sqrt{x}\cdot\left(x^4-\sqrt{5}+\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x^4-\sqrt{5}+\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}=0\end{array}\right.\\ x>0\end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x^4=\sqrt{5}-\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\ x>0.\end{array}\right.$$

Заметим, что $\sqrt{5}-\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}>0$, так как

$$\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}-\frac{1}{2}\gtrless 0\right)\Leftrightarrow\left(\sqrt{5}\gtrless\sqrt{3}+\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow\left(2\sqrt{5}\gtrless 2\sqrt{3}+1\right)\Big|\uparrow 2 \Rightarrow \left(20\gtrless 12+4\sqrt{3}+1\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(7\gtrless 4\sqrt{3}\right)\Big|\uparrow 2\Rightarrow(49>48).$$

Значит, уравнение $x^4=\sqrt{5}-\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}$ имеет один действительный корень (не важно – какой!).

Ответ: два

Задание № 12

Решение. При решении уравнения: $ctg\dfrac{6\pi}{x}\cdot\sqrt{x^2-9}=0$ разумно начать с более простого, второго множителя. Очевидно, он равен 0 при $x=\pm 3$, но оба эти значения ***не входят в область определения*** первого множителя (проверьте это самостоятельно). Тогда

$$ctg\frac{6\pi}{x}=0 \Rightarrow \frac{6\pi}{x}=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z \Rightarrow \frac{1}{x}=\frac{1}{12}+\frac{n}{6},\ n\in Z \Rightarrow x=\frac{12}{2n+1},\ n\in Z.$$

Полученные значения входят в область определения второго множителя ($x^2-9\ge 0\Leftrightarrow|x|\ge 3\Leftrightarrow x\in(-\infty;-3\,]\cup[\,3;+\infty)$) только лишь при $n=0;1;-1;-2$. Следовательно, $x\in\{\pm 12;\pm 4\}$.

Замечание.

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{12}{2n+1}\ge 3,\\ \dfrac{12}{2n+1}\le -3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{4}{2n+1}\ge 1,\\ \dfrac{4}{2n+1}\le -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{3-2n}{2n+1}\ge 0,\\ \dfrac{2n+5}{2n+1}\le 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}n\in\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right]\\ n\in\left[-\dfrac{5}{2};-\dfrac{1}{2}\right)\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

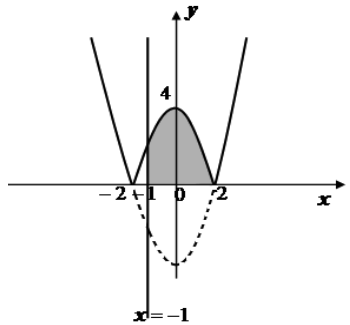
$$\Leftrightarrow n\in\left[-\frac{5}{2};-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right] \Leftrightarrow n=\{0;1;-1;-2\}.$$

Ответ: $x\in\{\pm 12;\pm 4\}$

__3-й уровень__

Задание № 13

Решение. Найдём площадь области, ограниченной линиями $y=\left|x^2-4\right|$, $x=-1$ и отрезком $[-1;2]$ оси абсцисс. Для этого сделаем, прежде всего, рисунок. Тогда, воспользовавшись геометрическим смыслом определённого интеграла, можем записать:



$$S=\int_{-1}^{2}\left(4-x^2\right)dx=\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{2}=4\left(2-(-1)\right)-$$

$$-\frac{1}{3}\left(2^3-(-1)^3\right)=4\cdot 3-\frac{1}{3}(8+1)=12-3=9.$$

Ответ: 9

Задание № 14

Решение. Решить неравенство: $10\cdot 3^{\log_3^2 x}\le x^3+x^{\log_3 x}$.

$$\left(10\cdot 3^{\log_3^2 x}\le x^3+x^{\log_3 x}\right)\Leftrightarrow\left(10\cdot\left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x}\le x^3+x^{\log_3 x}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(10\cdot x^{\log_3 x}\le x^3+x^{\log_3 x}\right)\Leftrightarrow\left(\left(9\cdot x^{\log_3 x}\le x^3\right)\Big|\log_3\right)\Leftrightarrow\left(\log_3\left(9\cdot x^{\log_3 x}\right)\le\log_3 x^3\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(\log_3 9+\log_3 x^{\log_3 x}\le 3\log_3 x\right)\Leftrightarrow\left(2+(\log_3 x)^2\le 3\log_3 x\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left((\log_3 x)^2-3\log_3 x+2\le 0\right)\Rightarrow\left[\log_3 x=t\right]\Rightarrow\left(t^2-3t+2\le 0\right)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t_1=1,\\ t_2=2\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t\in[1;2]\Rightarrow\left(1\le\log_3 x\le 2\right)\Rightarrow x\in[3;9].$$

Ответ: $x\in[3;9]$

2014 год

9 класс

1-й уровень

1	2	3	4	5	6	7	8
Б	**А**	**Б**	**В**	**Б**	**В**	**Г**	**Г**

2-й уровень

Задание № 9

Решение.

1-й способ: Пусть в прошлом году на первый факультет было подано $\boldsymbol{x}$ заявлений, а на второй – $\boldsymbol{y}$ заявлений. Тогда можем составить следующее уравнение: $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=1100$. В этом году на первый факультет подано $0{,}8\boldsymbol{x}$ заявлений, а на второй – $1{,}3\boldsymbol{y}$ заявлений. Составим уравнение $0{,}8\boldsymbol{x}+1{,}3\boldsymbol{y}=1130$. Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=1100, \\ 0{,}8\boldsymbol{x}+1{,}3\boldsymbol{y}=1130. \end{cases}$$

Решая систему уравнений[1], получим: $\boldsymbol{x}=600,\ \boldsymbol{y}=500$. Значит, $0{,}8\boldsymbol{x}=480$, $1{,}3\boldsymbol{y}=650$.

Ответ: на первый факультет подано 480 заявлений, на второй – 650 заявлений.

2-й способ: Обозначим через $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ число заявлений, поданных соответственно на первый и второй факультеты в этом году. Получим следующую систему уравнений:

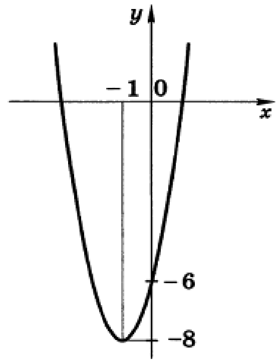
$$\begin{cases} \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=1130, \\ 1{,}25\boldsymbol{x}+\dfrac{10}{13}\boldsymbol{y}=1100. \end{cases}$$

Второе уравнение системы можно преобразовать, умножив обе его части на 13 и разделив на 1,25. Тогда, второе уравнение перепишется в виде: $13\boldsymbol{x}+8\boldsymbol{y}=13\cdot 880$. После чего нам останется решить систему:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=1130, \\ 13\boldsymbol{x}+8\boldsymbol{y}=11440. \end{cases}$$

[1] Для удобства обе части второго уравнения системы умножим на 10.

Задание № 10



Решение. Найдём координаты точек, в которых парабола, изображённая на рисунке, пересекает ось абсцисс. Для этого, прежде всего, составим уравнение данной параболы. Возможны разные способы составления уравнения параболы; один из них – воспользоваться уравнением вида $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^2+\boldsymbol{y}_0$, где $(\boldsymbol{x}_0;\boldsymbol{y}_0)$ – координаты вершины параболы. Очевидно, в нашем случае уравнение данной параболы имеет вид: $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}+1)^2-8,\ \boldsymbol{a}>0$. Тогда (см. рис.) можем записать:

1) при $\boldsymbol{x}=0: \boldsymbol{y}=-6 \Rightarrow \boldsymbol{a}-8=-6 \Rightarrow \boldsymbol{a}=2$. Значит, $\boldsymbol{y}=2(\boldsymbol{x}+1)^2-8$.

2) нули функции $\boldsymbol{y}=0$, т. е. абсциссы точек пересечения параболы с осью $\boldsymbol{OX}$, найдём из условия $2(\boldsymbol{x}+1)^2-8=0 \Rightarrow (\boldsymbol{x}+1)^2=4 \Rightarrow \boldsymbol{x}+1=\pm 2 \Rightarrow \boldsymbol{x}_{1,2}=\{-3;1\}$.

Ответ: $(-3;0)$, $(1;0)$

Задание № 11

Решение. Дано уравнение: $(\boldsymbol{x}+1)+(\boldsymbol{x}+5)+(\boldsymbol{x}+9)+\ldots+(\boldsymbol{x}+157)=3200$. Обозначим:

$\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{x}+1,\ \ \boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{x}+5=\boldsymbol{x}+1+4=\boldsymbol{a}_1+4,\ \ \boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{x}+9=\boldsymbol{x}+1+8=\boldsymbol{a}_1+2\cdot 4, \ldots\ldots,$

$\boldsymbol{a}_k=\boldsymbol{x}+157=(\boldsymbol{x}+1)+156=\boldsymbol{a}_1+39\cdot 4 \Rightarrow \boldsymbol{a}_k=(\boldsymbol{a}_1+(\boldsymbol{k}-1)\cdot 4)\equiv(\boldsymbol{a}_1+39\cdot 4)\Rightarrow \boldsymbol{k}=40.$

$$\boldsymbol{S}_{40}\equiv\frac{\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_{40}}{2}\cdot 40=3200 \Leftrightarrow \frac{\boldsymbol{x}+1+\boldsymbol{x}+157}{2}\cdot 40=3200 \Rightarrow 2\boldsymbol{x}+158=160 \Rightarrow \boldsymbol{x}=1.$$

Ответ: $\boldsymbol{x}=1$

3-й уровень

Задание № 12

Решение. Прежде всего, определим знак выражения, стоящего в первой скобке:

$$\frac{\sqrt{15}+\sqrt{17}}{8}-1(<)(>)0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{15}+\sqrt{17}}{8}(<)(>)1 \Leftrightarrow \sqrt{15}+\sqrt{17}(<)(>)8\Big|\uparrow 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15+2\cdot\sqrt{15\cdot 17}+17(<)(>)64 \Leftrightarrow 15+2\cdot\sqrt{15\cdot 17}+17(<)(>)64 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{15\cdot 17}(<)(>)16\Big|\uparrow 2 \Leftrightarrow 255(<)(>)256\Big| \Leftrightarrow 255<256 \Rightarrow \frac{\sqrt{15}+\sqrt{17}}{8}-1<0.$$

Значит, $4\boldsymbol{x}-13>0 \Rightarrow \boldsymbol{x}>\dfrac{13}{4}$.

Ответ: $\boldsymbol{x}>\dfrac{13}{4}$

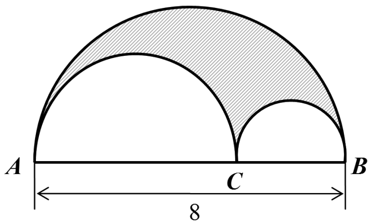
10 класс

1-й уровень

1	2	3	4	5	6	7	8
Г	**Д**	**Б**	**А**	**Б**	**Г**	**В**	**А**

Указания[1]:

Задание № 3



Решение. Длина границы заштрихованной фигуры равна сумме длин полуокружностей (см. рис.) радиусов $R_1 = 4$, R_2 и R_3 таких, что $R_2 + R_3 = 4$. Таким образом, длина границы заштрихованной фигуры равна:

$$L = \pi R_1 + \pi R_2 + \pi R_3 = \pi(R_1 + R_2 + R_3) = \pi(4+4) = 8\pi.$$

Ответ: $\boxed{\text{Б}}$

Задание № 6

Решение. Сделаем преобразования:

$$a_n = 20 + 18n - 2n^2 = -2(n^2 - 9n - 10) = -2\left(\left(n^2 - 2n\frac{9}{2} + \frac{81}{4}\right) - \frac{81}{4} - 10\right) =$$

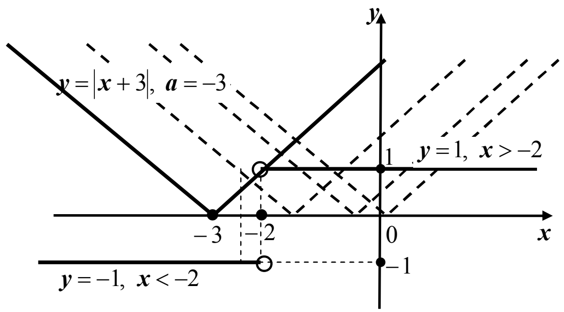
$$= -2\left(\left(n - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{121}{4}\right) = \frac{121}{2} - 2\left(n - \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{121 - (2n-9)^2}{2} \Rightarrow [n = \{4;5\}] \Rightarrow a_n = 60.$$

Можно воспользоваться и графическим способом решения данной задачи.

Ответ: $\boxed{\text{Г}}$

Задание № 8

Решение. Построим графики данных функций:



Ответ: $\boxed{\text{А}}$

---

[1] Рассмотрим решения лишь некоторых заданий первого уровня.

2-й уровень

Задание № 9

Решение. Решим уравнение: $\sqrt{5-x} - \sqrt{7-x} + \sqrt{2x-15} = 2$. Попытки решить уравнение, производя последовательно возведение в квадрат и уединение радикала, ведут здесь к уравнению четвёртой степени и заводят вас в тупик.

Поэтому выпишем условия, при которых корни, входящие в левую часть данного уравнения, имеют смысл:

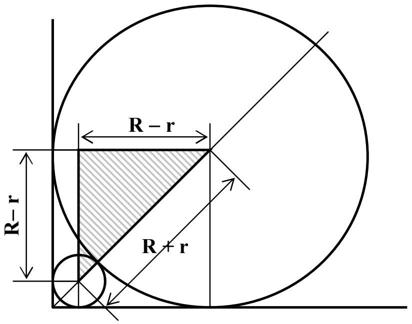
$$\begin{cases} 5 - x \ge 0, \\ 7 - x \ge 0, \\ 2x - 15 \ge 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le 5, \\ x \le 7, \\ x \ge 7{,}5. \end{cases}$$

Последняя система содержит противоречивые неравенства и, следовательно, решений не имеет. Поэтому и исходное уравнение не имеет решений.

Ответ: $\{\varnothing\}$

Задание № 10

Решение. По условию, две окружности касаются друг друга и сторон прямого угла. Требуется найти отношение радиусов этих окружностей. Сделаем, прежде всего, рисунок. Тогда:



$$(R+r)^2 = (R-r)^2 + (R-r)^2,$$
$$(R+r)^2 = 2(R-r)^2,$$
$$R^2 + 2Rr + r^2 = 2(R^2 - 2Rr + r^2),$$
$$R^2 + 2Rr + r^2 = 2R^2 - 4Rr + 2r^2,$$
$$R^2 - 6Rr + r^2 = 0.$$

Рассмотрим два случая:

<u>1-й случай</u>: $R^2 - 6Rr + r^2 = 0 \,|\, : R^2$.

Получаем уравнение $\left(\frac{r}{R}\right)^2 - 6\cdot\left(\frac{r}{R}\right) + 1 = 0$. Сделаем замену: $t = \frac{r}{R}$, $0 < t < 1$.

Нетрудно видеть, что квадратное уравнение $t^2 - 6t + 1 = 0$ имеет корни: $t_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow 0 < (t = 3 - 2\sqrt{2}) < 1 \quad (t = 3 + 2\sqrt{2} > 1)$.

Ответ: $\frac{r}{R} = 3 - 2\sqrt{2}$

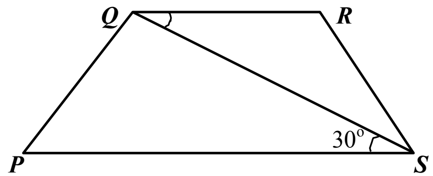
<u>*2-й случай*</u>: $R^2 - 6Rr + r^2 = 0 \,\big|\, : r^2$. Получим уравнение $\left(\dfrac{R}{r}\right)^2 - 6\cdot\left(\dfrac{R}{r}\right) + 1 = 0.$

Сделаем замену: $t = \dfrac{R}{r},\ t > 1$. Тогда квадратное уравнение $t^2 - 6t + 1 = 0$ имеет корни: $t_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow t = 3 + 2\sqrt{2} > 1 \ \left(0 < t = 3 - 2\sqrt{2} < 1\right).$

Ответ: $\dfrac{R}{r} = 3 + 2\sqrt{2}$

Задание № 11

Решение. Пусть $PQRS$ – данная трапеция: длина основания QR равна 10, длина диагонали QS равна 19, а величина угла QSP равна 30° (см. рис.). По условию $PS \parallel QR$. Значит, $\angle RQS = \angle QSP = 30^{\circ}$. Воспользуемся теоремой косинусов для треугольника RQS:



$$RS^2 = QR^2 + QS^2 - 2QR\cdot QS\cos(\angle RQS) \Rightarrow RS^2 - QR^2 = QS^2 - 2QR\cdot QS\cos(\angle RQS)$$

Значит, $RS^2 - QR^2 = 19^2 - 2\cdot 10\cdot 19\cdot \cos 30^{\circ} = 19^2 - 2\cdot 10\cdot 19\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 19\left(19 - 10\sqrt{3}\right).$

Разность $19 - 10\sqrt{3} > 0$. Действительно: $\left(19^2 = 361 > 300 = \left(10\sqrt{3}\right)^2\right)$. Поэтому $RS^2 > QR^2$ и, значит, $RS > QR$.

Ответ: $RS > QR$

<u>3-й уровень</u>

Задание № 12

Решение. Найдём целочисленные решения неравенства $\dfrac{x^2 + 4x - 5}{1 + tg^2\dfrac{\pi x}{2}} \le 0.$

Так как $1 + tg^2\dfrac{\pi x}{2} > 0$ при всех x, для которых $\dfrac{\pi x}{2} \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$, то исходное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x \ne 2k + 1,\ k \in Z, \\ x^2 + 4x - 5 \le 0. \end{cases}$$

Решая неравенство $x^2 + 4x - 5 \le 0$, получаем $x \in [-5; 1]$. Таким образом, все целые решения исходного неравенства – это числа $\{-4; -2; 0\}$, так как $x \ne 2k + 1,\ k \in Z$.

Ответ: $\{-4; -2; 0\}$

11 класс

<u>1-й уровень</u>

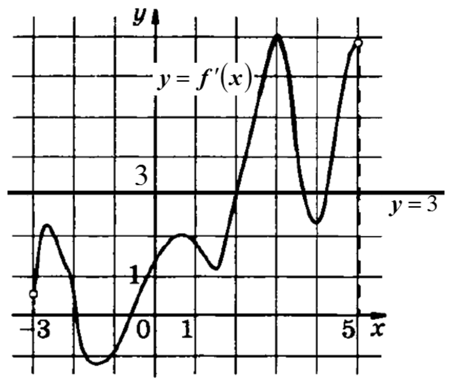
1	2	3	4	5	6	7	8
В	**Д**	**А**	**Б**	**В**	**А**	**Б**	**Г**

<u>2-й уровень</u>

Задание № 9

Решение. Функция $y = f(x)$ определена на интервале $(-3; 5)$. На рисунке изображён график $y = f'(x)$. Так как касательные к графику функции $y = f(x)$ параллельны прямой $y = 3x - 5$ или совпадают с ней, то $f'(x_0) = 3$. Построим прямую $y = 3$. Получим три точки пересечения данной прямой с графиком функции $y = f'(x)$, т. е. $\exists x_i : f'(x_i) = 3,\ i = 1, 2, 3$.

Это означает, что существует три касательных к графику функции $y = f(x)$, которые параллельны прямой $y = 3x - 5$ или совпадают с ней.



Ответ: три касательных

Задание № 10

Решение. Найдём наименьшее целое значение функции $y = \sqrt{16 - 13\cdot 3^{-|x|}}$. Для этого найдём $E(y)$ и выберем наименьшее целое значение. Так как:

$$|x| \ge 0 \Rightarrow -|x| \le 0 \Rightarrow 0 < 3^{-|x|} = \frac{1}{3^{|x|}} \le 3^0 = 1 \Rightarrow -13 \le -13\cdot 3^{-|x|} < 0 \,\Big|\, +16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \le 16 - 13\cdot 3^{-|x|} < 16 \,\Big|\, \sqrt{\ } \Rightarrow \sqrt{3} \le \sqrt{16 - 13\cdot 3^{-|x|}} < 4.$$

Значит $E(y) = \left[\sqrt{3}; 4\right)$. Таким образом, наименьшее целое значение исходной функции равно двум.

Ответ: 2

Задание № 11

Решение. Решим уравнение: $\sqrt{1-\cos x}=\sin x$. Согласно общему правилу решения иррациональных уравнений вида $\sqrt{f(x)}=g(x)$ (см. теорию), запишем систему, равносильную исходному уравнению:

$$\begin{cases}1-\cos x=\sin^2 x,\\ \sin x\ge 0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1-\cos x=1-\cos^2 x,\\ \sin x\ge 0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos^2 x-\cos x=0,\\ \sin x\ge 0.\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\cos x(\cos x-1)=0,\\ \sin x\ge 0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \cos x=1,\end{array}\right.\\ \sin x\ge 0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z,\\ x=2\pi k,\ \ k\in Z,\end{array}\right.\\ \sin x\ge 0.\end{cases}$$

Условию $\sin x\ge 0$ удовлетворяют только решения: $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$ и $x=2\pi k,\ k\in Z$.

Ответ: $x=\left\{\dfrac{\pi}{2}+2\pi n;2\pi k\right\},\ \ n,k\in Z$

<u>3-й уровень</u>

Задание № 12

Решение. Дано неравенство: $x\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{3}-x\right)\ge|x|$. Найдём ОДЗ: $x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{3}\right)$. Для освобождения от знака абсолютной величины разобьём ОДЗ на два промежутка: $x\in(-\infty;0)$ и $x\in\left[0;\dfrac{1}{3}\right)$.

<u>1-й случай</u>: $x\in(-\infty;0)\Rightarrow|x|=-x$. Поэтому исходное неравенство перепишется так:

$$x\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}-x\right)\ge -x\Leftrightarrow x\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}-x\right)+x\ge 0\Leftrightarrow x\left(\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}-x\right)+1\right)\ge 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow[x\in(-\infty;0)]\Rightarrow\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}-x\right)+1\le 0\Leftrightarrow\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}-x\right)\le -1\Leftrightarrow\frac{1}{3}-x\ge 2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\le-\frac{5}{3}\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-\frac{5}{3}\right].$$

Очевидно, что в область $x\in(-\infty;0)$ попадают все x из полученного промежутка $\left(-\infty;-\dfrac{5}{3}\right]$.

<u>2-й случай</u>: $x\in\left[0;\dfrac{1}{3}\right)\Rightarrow|x|=x$. Поэтому исходное неравенство перепишется в виде:

$$x\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}-x\right)\ge x\Leftrightarrow x\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}-x\right)-x\ge 0\Leftrightarrow x\left(\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}-x\right)-1\right)\ge 0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\in\left[0;\dfrac{1}{3}\right)\\ \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{3}-x\right)-1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left[0;\dfrac{1}{3}\right)\\ \log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{3}-x\right)\ge 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\left[0;\dfrac{1}{3}\right)\\ 0<\dfrac{1}{3}-x\le\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x\in\left[0;\dfrac{1}{3}\right)\\ -\dfrac{1}{6}\le x<\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow\ x\in\left[0;\frac{1}{3}\right).$$

Таким образом, решениями исходного неравенства являются все значения $x\in\left(-\infty;-\dfrac{5}{3}\right]\cup\left[0;\dfrac{1}{3}\right)$.

Ответ: $x\in\left(-\infty;-\dfrac{5}{3}\right]\cup\left[0;\dfrac{1}{3}\right)$

2015 год

9 класс

1-й уровень

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Д	**Б**	**Д**	**А**	**В**	**Б**	**Д**	**В**	**В**

Указания*[1]*:

Задание № 2

Решение. Исходное квадратное уравнение не имеет решений (имеются в виду действительные решения) при $D<0$. Таким образом,

$$D\equiv a^2-8<0\Rightarrow a^2<8\Rightarrow |a|<2\sqrt{2}\Leftrightarrow -2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$$

Ответ: $\boxed{\text{Б}}$

Задание № 3

Решение.

$$\sqrt{a^2-7a+13-\sqrt{9-6a+a^2}}=\sqrt{a^2-7a+13-\sqrt{(3-a)^2}}=\sqrt{a^2-7a+13-|3-a|}=$$

$$=[a=3{,}5\Rightarrow 3-a<0]=\sqrt{a^2-7a+13+3-a}=\sqrt{a^2-8a+16}=\sqrt{(a-4)^2}=|a-4|=$$

$$=[a=3{,}5\Rightarrow a-4<0]=4-a=[a=3{,}5]=0{,}5$$

С другой стороны, $|a-4|=[a=3{,}5]=|3{,}5-4|=|-0{,}5|=0{,}5$.

Ответ: $\boxed{\text{Д}}$

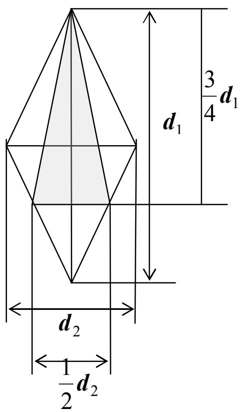
Задание № 6

Решение.

$$S_P=\frac{1}{2}d_1d_2,$$

$$S_{Tp}=\frac{1}{2}\frac{d_2}{2}\frac{3d_1}{4}=\frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}d_1d_2\right)=\frac{3}{8}S_P.$$

$$\frac{S_{Tp}}{S_P}=\frac{3}{8}.$$



Ответ: $\boxed{\text{Б}}$

[1] Рассмотрим решения лишь некоторых заданий первого уровня.

2-й уровень

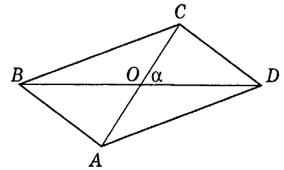
Задание № 10

Решение. Решением неравенства $(2\sqrt{6}-5)(3x-7)<0$ является:

$$(2\sqrt{6}-5)(3x-7)<0\Rightarrow\left[2\sqrt{6}-5=\sqrt{24}-\sqrt{25}<0\right]\Rightarrow 3x-7>0\Rightarrow 3x>7\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x>\frac{7}{3}\Leftrightarrow x>2\frac{1}{3}.$$

Задание № 11



Решение. По условию, в параллелограмме $ABCD$: $AD=\frac{\sqrt{7}}{2}$, $BD=\sqrt{3}$ и $AC=1$. Рассмотрим ΔAOD: $AD=\frac{\sqrt{7}}{2}$, $BO=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $AO=\frac{1}{2}$ (так как диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам). Обозначим $\angle AOD=\alpha$. Тогда, по теореме косинусов: $AD^2=AO^2+OD^2-2\cdot AO\cdot OD\cdot\cos\alpha$. То есть:

$$\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\cos\alpha\;\Rightarrow\;\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно, угол, лежащий против стороны AD, – тупой и равен 150°. Значит, острый угол между диагоналями параллелограмма равен 30°.

Ответ: 30°

3-й уровень

Задание № 12

Решение. Перепишем исходное уравнение в виде $x^3-x-2x+2=0$. Сгруппировав слагаемые, получим:

$$x(x^2-1)-2(x-1)=0\Leftrightarrow x(x-1)(x+1)-2(x-1)=0\Leftrightarrow (x-1)(x(x+1)-2)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-2)=0.$$

Последнее уравнение равносильно следующей совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l}x-1=0,\\ x^2+x-2=0\end{array}\right.\;\Rightarrow\;\left[\begin{array}{l}x_1=1,\\ x_2=-2,\;x_3=1\end{array}\right.\;\Rightarrow\;x_1+x_2+x_3=0.$$

Ответ: 0

10 класс

1-й уровень

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Б	**Б**	**Б**	**В**	**Г**	**Г**	**А**	**Г**	**Д**

Указания[1]:

Задание № 1

Решение.

$$\frac{\sqrt{a^2-a\sqrt{8}+2}}{\sqrt{2}-a}=\frac{\sqrt{\left(a-\sqrt{2}\right)^2}}{\sqrt{2}-a}=\frac{\left|a-\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2}-a}=[a<1]=\frac{-\left(a-\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2}-a}=\frac{\sqrt{2}-a}{\sqrt{2}-a}=1$$

Ответ: $\boxed{\text{Б}}$

Задание № 6

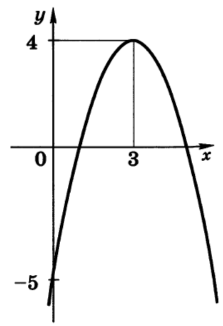
Решение. Так как $\left(\dfrac{1}{|x-1|}+2\right)>0$, то исходное неравенство равносильно следующей системе:

$$\begin{cases}x\neq1\\ x^2\leq4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq1\\ |x|\leq2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq1\\ -2\leq x\leq2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\in Z\\ x\neq1\\ x\in\{-2,-1,0,1,2\}\end{cases}\Rightarrow(-2-1+0+2)=-1.$$

Ответ: $\boxed{\text{Г}}$

2-й уровень

Задание № 10



Решение. Возможны разные способы составления уравнения параболы: один из них – воспользоваться уравнением вида $y=a(x-x_0)^2+y_0$, где $(x_0;y_0)$ – координаты вершины параболы. Тогда получим:

$$y=a(x-3)^2+4\Rightarrow[y(0)=-5]\Rightarrow-5=9a+4\Rightarrow9a=-9\Rightarrow$$
$$\Rightarrow a=-1.$$

То есть уравнение параболы имеет вид: $y=-(x-3)^2+4$. Теперь нетрудно найти координаты точек, в которых парабола, изображённая на рисунке, пересекает ось абсцисс. Для этого решим уравнение $y=0$:

[1] Рассмотрим решения лишь некоторых заданий первого уровня.

$$-(x-3)^2+4=0\ \Rightarrow\ (x-3)^2=4\ \Rightarrow\ x-3=\pm2\ \Rightarrow\ x_{1,2}=\{1;5\}.$$

Значит, $(1;0)$, $(5;0)$ – точки, в которых парабола, изображённая на рисунке, пересекает ось абсцисс.

Ответ: $(1;0)$, $(5;0)$

Задание № 11

Решение.

$$\left.\begin{array}{l}S_1\equiv\pi R^2-100\%\\ S_2\equiv\pi\left(R+R\dfrac{k}{100}\right)^2-144\%\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}S_1\equiv\pi R^2-100\%\\ S_2\equiv\pi R^2\left(1+\dfrac{k}{100}\right)^2-144\%\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow144\pi R^2=100\pi R^2\left(1+\frac{k}{100}\right)^2\Rightarrow12=10\cdot\frac{100+k}{100}\Leftrightarrow120=100+k\Rightarrow k=20\%$$

Ответ: на 20%

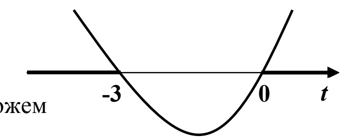
3-й уровень

Задание № 12

Решение. Перепишем исходное неравенство $(x^2+2x)^2+3(x+1)^2>3$ в виде:

$$(x^2+2x)^2+3(x^2+2x+1)-3>0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{сделаем замену:}\\ x^2+2x=t\end{array}\right]\Rightarrow t^2+3(t+1)-3>0\Rightarrow$$

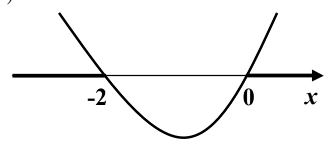
$$\Rightarrow t^2+3t>0\Leftrightarrow t(t+3)>0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t<-3,\\ t>0.\end{array}\right.$$



Тогда, возвращаясь к прежней переменной, можем записать:

$$\left[\begin{array}{l}x^2+2x<-3\\ x^2+2x>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2+2x+3<0\\ x(x+2)>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\varnothing,(D=4-12<0)\\ x(x+2)>0\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x\in(-\infty;-2)\cup(0;+\infty).$$



Ответ: $x\in(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$

11 класс

1-й уровень

1	2	3	4	5	6	7	8	9
В	**Б**	**А**	**Д**	**В**	**А**	**Г**	**В**	**В**

Указания*[1]*:

Задание № 3

Решение. Нетрудно видеть, что $\left(1+\boldsymbol{sin}^2\frac{\pi}{8}+\boldsymbol{sin}^4\frac{\pi}{8}+\boldsymbol{sin}^6\frac{\pi}{8}+\ldots\right)$ – сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии: $|\boldsymbol{q}|=\boldsymbol{sin}^2\frac{\pi}{8}<1$.

Тогда:

$$\boldsymbol{S}\equiv\frac{1}{1-\boldsymbol{q}}=\frac{1}{1-\boldsymbol{sin}^2\frac{\pi}{8}}=\frac{1}{\boldsymbol{cos}^2\frac{\pi}{8}}=\frac{1}{\frac{1}{2}\left(1+\boldsymbol{cos}\frac{2\pi}{8}\right)}=\frac{1}{\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{4}{2+\sqrt{2}}=$$

$$=\frac{4\left(2-\sqrt{2}\right)}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}=\frac{4\left(2-\sqrt{2}\right)}{4-2}=\frac{4\left(2-\sqrt{2}\right)}{2}=2\left(2-\sqrt{2}\right)=4-2\sqrt{2}.$$

Ответ: $\boxed{\text{А}}$

Задание № 5

Решение.

$$\boldsymbol{x}^2+\sqrt{\boldsymbol{x}^2}-12=0\Leftrightarrow|\boldsymbol{x}|^2+|\boldsymbol{x}|-12=0\Rightarrow|\boldsymbol{x}|_1=-4,|\boldsymbol{x}|_2=3\Rightarrow\left[|\boldsymbol{x}|\ge0\right]\Rightarrow|\boldsymbol{x}|=3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\boldsymbol{x}_{1,2}=\pm9\Rightarrow\boldsymbol{x}_1\cdot\boldsymbol{x}_2=-9.$$

Ответ: $\boxed{\text{В}}$

Задание № 6

Решение.

$$\boldsymbol{y}=\sqrt{\frac{\boldsymbol{cos}3}{5-2\boldsymbol{x}}}\Rightarrow\frac{\boldsymbol{cos}3}{5-2\boldsymbol{x}}\ge0\Rightarrow\left[-1<\boldsymbol{cos}3<0\right]\Rightarrow5-2\boldsymbol{x}<0\Rightarrow2\boldsymbol{x}>5\Rightarrow\boldsymbol{x}>\frac{5}{2}\Leftrightarrow$$

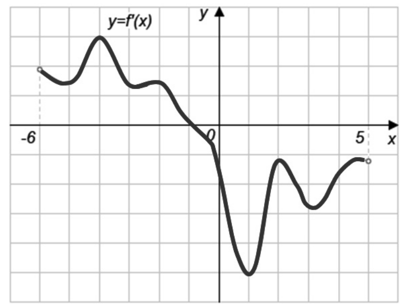
$$\Leftrightarrow\boldsymbol{x}\in\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$$

Ответ: $\boxed{\text{А}}$

[1] Рассмотрим решения лишь некоторых заданий первого уровня.

2-й уровень

Задание № 10



Решение. На отрезке $[-5;-1]$ производная функции принимает положительные значения, следовательно, функция на этом отрезке строго возрастает и минимальное значение принимает в левом конце отрезка, то есть в точке (-5).

Ответ: -5

Задание № 11

Решение. Из неравенств $\boldsymbol{cos}3\boldsymbol{x}\le1$ и $\boldsymbol{cos}\frac{5}{2}\boldsymbol{x}\le1$, которые верны для всех $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{R}$, следует оценка:

$$\boldsymbol{cos}3\boldsymbol{x}+\boldsymbol{cos}\frac{5}{2}\boldsymbol{x}\le2.$$

Таким образом, исходное уравнение будет равносильно следующей системе уравнений:

$$\begin{cases}\boldsymbol{cos}3\boldsymbol{x}=1,\\ \boldsymbol{cos}\frac{5}{2}\boldsymbol{x}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\boldsymbol{x}=2\pi\boldsymbol{k},\\ \frac{5}{2}\boldsymbol{x}=2\pi\boldsymbol{n}\end{cases}\boldsymbol{k},\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{Z}\Leftrightarrow\begin{cases}\boldsymbol{x}=\frac{2\pi\boldsymbol{k}}{3},\\ \boldsymbol{x}=\frac{4\pi\boldsymbol{n}}{5}\end{cases}\boldsymbol{k},\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{Z}$$

Решения последней системы соответствуют случаю равенства

$$\begin{cases}\frac{2\pi\boldsymbol{k}}{3}=\frac{4\pi\boldsymbol{n}}{5}\\ \boldsymbol{k},\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5\boldsymbol{k}=6\boldsymbol{n}\\ \boldsymbol{k},\boldsymbol{n}\in\boldsymbol{Z}\end{cases}$$

Так как $5\boldsymbol{k}$ и $6\boldsymbol{n}$ – целые числа, то число $6\boldsymbol{n}$ должно делиться на простое число 5, а это равносильно равенству $\boldsymbol{n}=5\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{l}\in\boldsymbol{Z}$. Тогда $\boldsymbol{k}=6\boldsymbol{l}$ и $\boldsymbol{x}=4\pi\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{l}\in\boldsymbol{Z}$.

Ответ: $\boldsymbol{x}=4\pi\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{l}\in\boldsymbol{Z}$

3-й уровень

Задание № 12

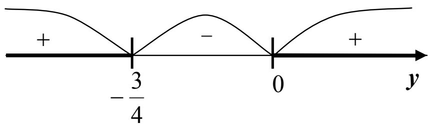
Решение. Напомним тождество: $\log_a(x)^{2m} = 2m\log_a|x|,\ m \in Z$. Используя это тождество, перепишем исходное неравенство в следующем виде:

$$\frac{6-4\lg|x|}{3+4\lg|x|} - 2 < 0.$$

Обозначив $\lg|x| = y$, получим:

$$\frac{6-4y-6-8y}{3+4y} < 0 \ \Leftrightarrow\ \frac{y}{3+4y} > 0.$$

Изобразим на рисунке участки знакопостоянства последнего рационального неравенства:



Получаем совокупность:

$$\left[\begin{array}{l} y < -\frac{3}{4}, \\ y > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lg|x| < -\frac{3}{4}, \\ \lg|x| > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < |x| < 10^{-\frac{3}{4}}, \\ |x| > 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \left(-10^{-\frac{3}{4}}; 0\right) \cup \left(0;\ 10^{-\frac{3}{4}}\right), \\ x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty). \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup \left(-10^{-\frac{3}{4}}; 0\right) \cup \left(0; 10^{-\frac{3}{4}}\right) \cup (1; +\infty)$

2016 год

9 класс

1-й уровень

Задание № 1		*Задание № 2*		*Задание № 3*	
1.а	1.б	2.а	2.б	3.а	3.б
Г	**В**	**Б**	**В**	**В**	**А**

2-й уровень

Задание № 4

Решение. Прежде всего выделим два полных квадрата вида $(x+a)^2$ и $(y+b)^2$.

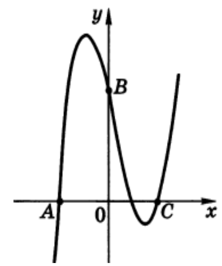
$$V(x,y) = x^2 + y^2 - 10x + 2y = x^2 - 10x + y^2 + 2y = (x-5)^2 - 25 + (y+1)^2 - 1 =$$

$$= \underbrace{(x-5)^2 + (y+1)^2}_{\geq 0} - 26 \Rightarrow V_{наим}(x,y) \Leftrightarrow (x-5)^2 + (y+1)^2 - \textbf{наим}. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-5)^2 + (y+1)^2 = 0 \Rightarrow x = 5;\ y = -1;\ V_{наим}(x,y) = -26.$$

Ответ: $x = 5;\ y = -1;\ V_{наим}(x,y) = -26$

Задание № 5



Решение. На рисунке изображён график функции $y = x^3 - x^2 - 4x + 4$. Найдём координаты точек A, B и C.

Итак:

1. $B(0;y) \Rightarrow y(0) = x^3 - x^2 - 4x + 4\Big|_{x=0} \Rightarrow y = 4 \Rightarrow B(0;4)$;

2. $A(x_A;0),\ x_A < 0;\ C(x_C;0),\ x_C > 0$. Тогда:
$y = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0.$

Далее, $x^3 - x^2 - 4x + 4 = x^2(x-1) - 4(x-1) = (x-1)(x^2-4) = (x-1)(x-2)(x+2).$

Таким образом, получаем:
$(x-1)(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = -2 \Rightarrow [\textbf{см.рис.}] \Rightarrow x_A = -2;\ x_C = 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow A(-2;0);\ C(2;0).$

Ответ: $A(-2;0);\ B(0;4);\ C(2;0)$

3-й уровень

Задание № 6

Решение. Прежде всего выполним следующие преобразования:

$$\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{21}+\sqrt{19}}=\frac{1}{\sqrt{3}+1}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{21}+\sqrt{19}}\cdot\frac{\sqrt{21}-\sqrt{19}}{\sqrt{21}-\sqrt{19}}=\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3}-1+\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{7}-\sqrt{5}+$$

$$+\ldots+\sqrt{21}-\sqrt{19})=\frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{21}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{21}-1\right).$$

Теперь нетрудно видеть, что

$$\frac{1}{2}\underbrace{\left(\sqrt{16}-1\right)}_{=3}<\frac{1}{2}\left(\sqrt{21}-1\right)<\frac{1}{2}\underbrace{\left(\sqrt{25}-1\right)}_{=4}\Leftrightarrow\ \frac{3}{2}<\frac{1}{2}\left(\sqrt{21}-1\right)<2$$

Ответ: значение исходного выражения заключено между 1 и 2

Задание № 7

Решение. Решим уравнение $\left(x^2-7x+13\right)^2-(x-3)(x-4)=1$. Заметим, что $x^2-7x+13>0,\ \forall x\in R$, так как $D=49-52=-3<0$.

Далее:

1). $(x-3)(x-4)=x^2-7x+12;$

2). $\left(x^2-7x+13\right)^2-\left(x^2-7x+12\right)=1\Rightarrow\left[x^2-7x+13=t,\ t>0\right]\Rightarrow t^2-(t-1)=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t^2-t=0\Leftrightarrow t(t-1)=0\Rightarrow t_1=0,\ t_2=1\Rightarrow[t>0]\Rightarrow t=1.$

Следовательно: $x^2-7x+13=1\Leftrightarrow x^2-7x+12=0\ \Rightarrow\ x_1=3;\ x_2=4$

Ответ: $x_1=3;\ x_2=4$

10 класс

1-й уровень

Задание № 1		*Задание № 2*		*Задание № 3*	
1.а	1.б	2.а	2.б	3.а	3.б
А	**В**	**А**	**В**	**В**	**В**

2-й уровень

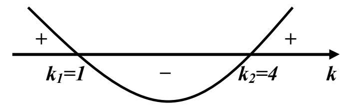
Задание № 4

Решение. Найдём значения параметра k, при которых число 0 находится между корнями уравнения $x^2+3x+(k-4)(1-k)=0$.

Так как, по условию, уравнение имеет два корня, то они удовлетворяют теореме Виета:

$$\begin{cases}x_1\cdot x_2=(k-4)(1-k),\\ x_1+x_2=-3\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{matrix}\textbf{\textit{для определенности}}\\ x_1<0<x_2\end{matrix}\right]\Rightarrow x_1\cdot x_2<0\Leftrightarrow(k-4)(1-k)<0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow(k-4)(k-1)>0\Rightarrow\left[k_1=1,k_2=4\right]\Rightarrow$



$\Rightarrow k\in(-\infty;1)\cup(4;+\infty).$

Ответ: $k\in(-\infty;1)\cup(4;+\infty).$

Задание № 5

Решение. Так как третий член геометрической прогрессии равен 2, восьмой её член равен (-64), то:

$$\left.\begin{matrix}b_3\equiv b_1q^2=2,\\ b_8\equiv b_1q^7=-64\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left(\frac{b_8}{b_3}=\frac{q^7}{q^2}=q^5\right)=\left(\frac{b_8}{b_3}=\frac{-64}{2}=-32\right)\Rightarrow\left(q^5=-32\right)\Rightarrow q=-2.$$

Тогда:

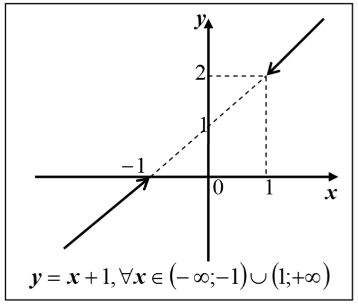
1. $b_1(-2)^2=2\Leftrightarrow 4b_1=2\Rightarrow b_1=\frac{1}{2}\Rightarrow\left[b_5=b_1q^4\right]\Rightarrow b_5\equiv\frac{1}{2}(-2)^4=8$

2. $b_5\equiv b_3q^{5-3}\Rightarrow b_5=2(-2)^2=8.$

Ответ: $b_5=8$

<u>3-й уровень</u>

Задание № 6



Решение. $D(y)\colon \begin{cases} x^2-1>0, \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x^2>1 \Leftrightarrow |x|>1$,

то есть: $\left[\begin{array}{l} x>1, \\ x<-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

Тогда,

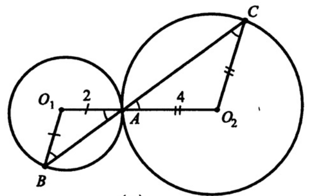
$$\forall x\in D(y)\colon\ y=\frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}{x-1}=\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1.$$

Ответ: $y=x+1,\ \ \forall x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ (см. рис.).

Задание № 7

Решение.

Рассмотрим следующие случаи (см. рис. **(а)** и **(б)**). Очевидно, что $\Delta AO_1B \sim \Delta AO_2C$ (равнобедренные треугольники с равными углами при основаниях). Следовательно,



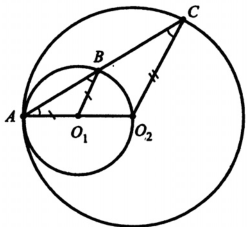
(а)

$$AB : AC = 2:4 = 1:2.$$

Тогда, для случая:

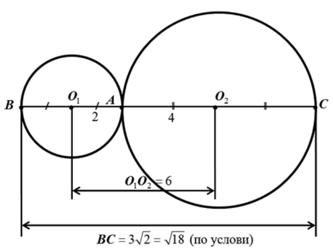
– **(а)** окружности касаются внешним образом $\Rightarrow AC = 2\,BC/3 = 2\sqrt{2}$;

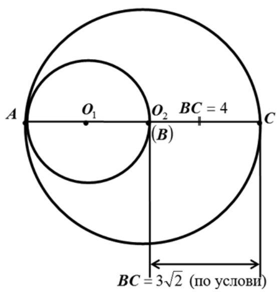
– **(б)** окружности касаются внутренним образом $\Rightarrow AC = 2BC = 6\sqrt{2} > 8$, что больше, чем диаметр окружности. Как видим, этот случай невозможен.



(б)

Замечание: Возможны ещё два случая (см. рисунки ниже), для которых, как и в случае **(б)**, решений нет.





Ответ: $2\sqrt{2}$

11 класс

<u>1-й уровень</u>

Задание № 1		***Задание № 2***		***Задание № 3***	
1.а	1.б	2.а	2.б	3.а	3.б
А	**В**	**Г**	**Б**	**Б**	**Г**

<u>2-й уровень</u>

Задание № 4

Решение. Найдём множество значений функции $f(x)=\sin^2 x+\sin x+1$. Обозначив, для удобства, $\sin x = t$, $t\in[-1;1]$, получим сложную функцию $g(t)\equiv t^2+t+1=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$, $\forall t\in[-1;1]$. Графиком полученной функции, как вам известно, является парабола, вершина которой достижима при $t_0=-\frac{1}{2}\in[-1;1]$. Поэтому наименьшее значение функции $g(t)$ равно $g(t_0)=\frac{3}{4}$. Наибольшее же значение функции $g(t)$ будет достигаться в точке, принадлежащей допустимому множеству, которая наиболее удалена от вершины. В нашем случае это точка $t=1$, т. е. $\max\limits_{t\in[-1;1]} g(t)\equiv g(1)=3$. Таким образом, $\frac{3}{4}\le g(t)\le 3$, $\forall t\in[-1;1]$.

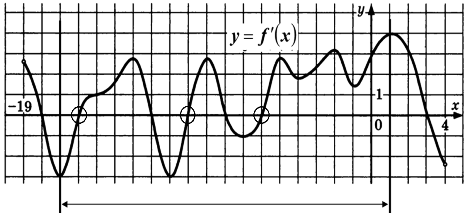
Значит, возвращаясь к исходной функции $f(x)$, можем записать окончательный ***ответ***: $f(x)\in\left[\frac{3}{4};3\right]$, $\forall x\in R$

Задание № 5

Решение.

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-19;4)$, т. е. график $y=f'(x)$. Определим ***количество точек минимума*** функции $f(x)$ на отрезке $[-17;1]$. Для этого воспользуемся достаточным условием экстремума функции: если непрерывная функция $y=f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности критической точки x_0 и при переходе через неё (слева направо) производная $f'(x)$ меняет свой знак с плюса на минус, то x_0 есть точка максимума; с минуса на плюс, то x_0 – точка минимума.

Далее, по рисунку видно, что только лишь в трёх точках отрезка $[-17;1]$ график производной $y=f'(x)$ переходит, при возрастании x, из нижней полуплоскости ($f'(x)<0$) в верхнюю полуплоскость ($f'(x)>0$). То есть производная $f'(x)$ меняет свой знак с минуса на плюс в трёх точках. Значит, функция $f(x)$ на отрезке $[-17;1]$ имеет три точки минимума.



Ответ: три точки минимума

3-й уровень

Задание № 6

Решение.

$$\sqrt{-24\cos x+25}=4\cos x-3 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix}\cos x=y,\\ y\in[-1;1]\end{matrix}\right] \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{-24y+25}=4y-3,\\ y\in[-1;1]\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}4y-3\ge 0,\\ -24y+25=16y^2-24y+9,\\ y\in[-1;1]\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y\ge\frac{3}{4},\\ 16y^2-16=0,\\ y\in[-1;1]\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y\ge\frac{3}{4},\\ y=\pm 1,\\ y\in[-1;1]\end{cases} \Rightarrow y=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos x=1 \Rightarrow x=2\pi n,\ n\in Z.$$

Ответ: $x=2\pi n,\ n\in Z$

Задание № 7

Решение.

$$\log_{x+3}\left(9-x^2\right)-\frac{1}{16}\log^2_{x+3}(x-3)^2\ge 2,$$

$$\log_{x+3}(x+3)(3-x)-\frac{4}{16}\log^2_{x+3}|x-3|\ge 2 \Leftrightarrow \left[\begin{matrix}x+3>0\Rightarrow 3-x>0,\\ x+3\ne 1\end{matrix}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+\log_{x+3}(3-x)-\frac{1}{4}\log^2_{x+3}(3-x)\ge 2 \Leftrightarrow \left[\,t=\log_{x+3}(3-x)\,\right] \Leftrightarrow t^2-4t+4\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (t-2)^2\le 0\Rightarrow t=2\Leftrightarrow \log_{x+3}(3-x)=2 \Leftrightarrow \begin{cases}3-x=(x+3)^2,\\ 1\ne x+3>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+6)(x+1)=0,\\ -2\ne x>-3\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=-1.$$

Ответ: $x=-1$

2017 год

9 класс

1-й уровень

Задание № 1		*Задание № 2*		*Задание № 3*	
1.а	1.б	2.а	2.б	3.а	3.б
В	**В**	**Г**	**В**	**Б**	**А**

2-й уровень

Задание № 4

Решение.
Запишем исходную числовую последовательность в виде:

$$\sin 60^\circ,\ \sin^2 60^\circ,\ldots,\ \sin^n 60^\circ,\ldots \Leftrightarrow \left[\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\right] \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2},\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2,\ldots,\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n,\ldots$$

Таким образом, нетрудно видеть, что данная последовательность представляет собой убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}}<1$. Значит, можно найти сумму всех её членов, воспользовавшись формулой: $S=\frac{a}{1-q}$. То есть:

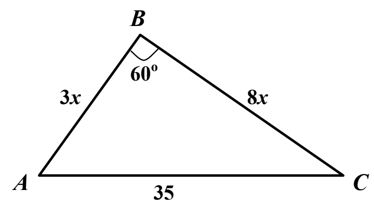
$$S=\frac{a}{1-q}=\left[\begin{matrix}q=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ a=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{matrix}\right]=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow S=\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}$

Задание № 5

Решение.
Пусть ABC – заданный треугольник, и пусть $AC=35$ см. По условию, $AB:BC=3:8$. Обозначим: $AB=3x$, $BC=8x$, $\angle B=60^\circ$. Тогда, по теореме косинусов, можем записать:

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos\angle B.$$



То есть в нашем случае имеем:

$$1225=9\boldsymbol{x}^2+64\boldsymbol{x}^2-2\cdot3\boldsymbol{x}\cdot8\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{cos}60^{\circ}\ \Rightarrow\ 1225=73\boldsymbol{x}^2-24\boldsymbol{x}^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 49\boldsymbol{x}^2=1225\ \Rightarrow\ \boldsymbol{x}^2=25\Rightarrow[\boldsymbol{x}>0]\Rightarrow\ \boldsymbol{x}=5.$$

Значит, $\boldsymbol{x}=5$ (см). Следовательно, $\boldsymbol{BC}=5\cdot8=40$ (см)

Ответ: 40 см

3-й уровень

Задание № 6

Решение.

Найдём ***наименьшее целое*** решение неравенства $\boldsymbol{x}<\sqrt{5}(\boldsymbol{x}+1)+1$. Итак:

$$\boldsymbol{x}<\sqrt{5}(\boldsymbol{x}+1)+1\Leftrightarrow\boldsymbol{x}<\sqrt{5}\boldsymbol{x}+\sqrt{5}+1\Rightarrow\boldsymbol{x}-\sqrt{5}\boldsymbol{x}<\sqrt{5}+1\Rightarrow-(\sqrt{5}-1)\boldsymbol{x}<\sqrt{5}+1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boldsymbol{x}>-\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\Leftrightarrow\boldsymbol{x}>-\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\cdot\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1}\Leftrightarrow\boldsymbol{x}>-\frac{1}{4}(\sqrt{5}+1)^2\Leftrightarrow\boldsymbol{x}>-\frac{1}{4}(6+2\sqrt{5})\Leftrightarrow$$

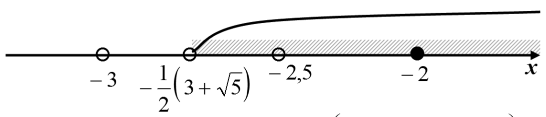
$$\Leftrightarrow\boldsymbol{x}>-\frac{1}{2}(3+\sqrt{5}).$$

Определим теперь, где на координатной прямой расположена точка $\boldsymbol{x}_0=-\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$. Для этого рассмотрим очевидные неравенства:

$$\left(\frac{1}{2}(3+\sqrt{4})<\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})<\frac{1}{2}(3+\sqrt{9})\right)\Leftrightarrow\left(\frac{5}{2}<\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})<\frac{6}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(-3<-\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})<-2{,}5\right).$$

Таким образом, получим:



$$\boldsymbol{x}\in\left(-\frac{1}{2}(3+\sqrt{5});+\infty\right)$$

Значит, ***наименьшим целым*** решением неравенства будет значение $\boldsymbol{x}=-2$.

Ответ: − 2

Задание № 7

Решение.

Решим уравнение: $(\boldsymbol{x}^2+3\boldsymbol{x}-11)\cdot(2\boldsymbol{x}^2+6\boldsymbol{x}-19)+1=0$.

Для этого прежде всего выполним некоторые преобразования:

$$(\boldsymbol{x}^2+3\boldsymbol{x}-11)\cdot(2\boldsymbol{x}^2+6\boldsymbol{x}-19)+1=0,$$
$$(\boldsymbol{x}^2+3\boldsymbol{x}-11)\cdot(2(\boldsymbol{x}^2+3\boldsymbol{x}-11+11)-19)+1=0,$$
$$(\boldsymbol{x}^2+3\boldsymbol{x}-11)\cdot(2(\boldsymbol{x}^2+3\boldsymbol{x}-11)+3)+1=0.$$

Сделаем замену: $\boldsymbol{x}^2+3\boldsymbol{x}-11=\boldsymbol{t}$. Тогда исходное уравнение перепишется в виде:

$$\boldsymbol{t}\cdot(2\boldsymbol{t}+3)+1=0\ \Leftrightarrow\ 2\boldsymbol{t}^2+3\boldsymbol{t}+1=0\ \Rightarrow\ \boldsymbol{t}_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{4}=\frac{-3\pm1}{4}.$$

Значит, возвращаясь к прежней переменной, можем записать:

$$\boldsymbol{t}_1=-1:\ \boldsymbol{x}^2+3\boldsymbol{x}-11=-1\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{x}^2+3\boldsymbol{x}-10=0\ \Rightarrow\ \boldsymbol{x}_1=-5;\ \boldsymbol{x}_2=2.$$

$$\boldsymbol{t}_2=-\frac{1}{2}:\ \boldsymbol{x}^2+3\boldsymbol{x}-11=-\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ 2\boldsymbol{x}^2+6\boldsymbol{x}-22=-1\ \Leftrightarrow\ 2\boldsymbol{x}^2+6\boldsymbol{x}-21=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boldsymbol{x}_{3,4}=\frac{-3\pm\sqrt{9+42}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{51}}{2}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{x}_3=\frac{-3-\sqrt{51}}{2};\ \boldsymbol{x}_4=\frac{-3+\sqrt{51}}{2}.$$

Ответ: $\left\{-5;2;\frac{-3\pm\sqrt{51}}{2}\right\}$

10 класс

1-й уровень

Задание № 1		Задание № 2		Задание № 3	
1.а	1.б	2.а	2.б	3.а	3.б
Д	**А**	**В**	**Г**	**Г**	**В**

2-й уровень

Задание № 4

Решение.

Прежде всего запишем ОДЗ: $\begin{cases} -\cos x \geq 0 \\ -\sin x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \leq 0 \\ \sin x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$ **III**-я четверть.

Далее, с учётом ОДЗ, можем записать:

$$\sqrt{-\cos x} = \sqrt{-\sin x} \;\Leftrightarrow\; \cos x = \sin x \;\Leftrightarrow\; tgx = 1 \;\Rightarrow\; x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Ответ: $\frac{5\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$

Задание № 5

Решение.

Так как a_1, a_2, a_3 три последовательных члена арифметической прогрессии, то можем записать их в виде: $a_2 - d$, a_2, $a_3 + d$, где d – разность данной прогрессии. Тогда, по условию:

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 21, \\ a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 231 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a_2 = 21, \\ (a_2 - d) \cdot a_2 \cdot (a_2 + d) = 231 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 = 7, \\ a_2 \cdot (a_2^2 - d^2) = 231 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_2 = 7, \\ 7 \cdot (49 - d^2) = 231 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 7, \\ 49 - d^2 = 33 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 7, \\ d^2 = 49 - 33 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 7, \\ d^2 = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = 7, \\ d_{1,2} = \pm 4. \end{cases}$$

Следовательно:

$$d = 4:\ a_1 = 3;\ a_2 = 7,\ a_3 = 11;$$
$$d = -4:\ a_1 = 11;\ a_2 = 7,\ a_3 = 3.$$

Таким образом, нетрудно видеть, что наименьшим из трёх данных последовательных членов арифметической прогрессии является $a = 3$.

Ответ: 3

3-й уровень

Задание № 6

Решение.

Корни $x_{1,2}$ квадратного трёхчлена $f(x) = 2x^2 + \left(1 - 3\sqrt{2}\right)x - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$ являются, по определению, корнями уравнения:

$$2x^2 + \left(1 - 3\sqrt{2}\right)x - \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + \frac{\left(1 - 3\sqrt{2}\right)}{2}x - \frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}{2} = 0.$$

Следовательно, по теореме Виета, можем записать:

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = -\dfrac{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}{2}, \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{\left(1 - 3\sqrt{2}\right)}{2}. \end{cases}$$

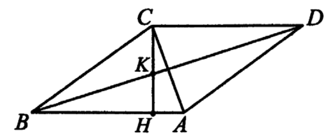
Таким образом:

$$x_1 + 3x_1x_2 + x_2 = -\frac{\left(1 - 3\sqrt{2}\right)}{2} - 3\frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}}{2} = -\frac{1}{2}\left(1 - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1 - 3\sqrt{2} + 3\sqrt{\left(1 + \sqrt{2}\right)^2}\right) = -\frac{1}{2}\left(1 - 3\sqrt{2} + 3\left(1 + \sqrt{2}\right)\right) = -\frac{1}{2}\left(1 - 3\sqrt{2} + 3 + 3\sqrt{2}\right) = -2.$$

Ответ: -2

Задание № 7



Решение.

Пусть $ABCD$ данный ромб с острым углом B, косинус которого равен $\frac{12}{13}$. Высота CH ромба пересекает диагональ BD в точке K, $CK = 2{,}6$.

Найдём площадь данного ромба, воспользовавшись формулой: $S_{ABCD} \equiv ah = CH \cdot AB$. Так как диагональ BD ромба делит его угол пополам, то BD – биссектриса угла B треугольника BHC (прямоугольного). Тогда, по свойству биссектрисы, имеем: $\frac{HK}{CK} = \frac{BH}{BC}$. Но $\cos\angle B = \frac{BH}{BC} = \frac{12}{13}$.

Следовательно, $\frac{HK}{CK} = \frac{12}{13} \Rightarrow HK = \frac{12}{13} \cdot 2{,}6 = 2{,}4 \Rightarrow CH \equiv CK + HK = 5$.

Найдём теперь сторону ромба из треугольника BHC:

$$\sin\angle B = \frac{CH}{BC} \Rightarrow BC = \frac{CH}{\sin\angle B} \Rightarrow \left[\sin\angle B = \sqrt{1 - \cos^2\angle B} = \frac{5}{13}\right] \Rightarrow BC = 5 : \frac{5}{13} = 13$$

Итак, $S_{ABCD} = CH \cdot AB = \left[AB = BC\right] = 5 \cdot 13 = 65$.

Ответ: 65

11 класс

1-й уровень

Задание № 1		*Задание № 2*		*Задание № 3*	
1.а	1.б	2.а	2.б	3.а	3.б
А	**Б**	**В**	**В**	**Б**	**А**

2-й уровень

Задание № 4

Решение.
Требуется решить уравнение: $\sqrt{\cos \pi x - 1} = (x-1)(x-2)$. Для этого, во-первых, запишем ОДЗ:

$$\begin{cases} \cos \pi x - 1 \ge 0, \\ (x-1)(x-2) \ge 0. \end{cases}$$

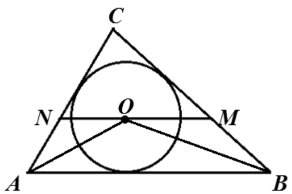
Во-вторых, очевидно, что: $\cos \pi x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow \cos \pi x \ge 1 \Leftrightarrow \cos \pi x = 1$. Значит, с учётом этого, можем записать:

$$\sqrt{\cos \pi x - 1} = (x-1)(x-2) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \pi x = 1, \\ (x-1)(x-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ \cos \pi \ne 1; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2, \\ \cos 2\pi = 1 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow x = 2.$$

Следовательно, сумма корней совпадает со значением единственного корня исходного уравнения и равна двум.

Ответ: 2

Задание № 5



Решение. Пусть O центр окружности, вписанной в треугольник ABC (см. рис.); $MN \parallel AB$ (точка M лежит на стороне BC, точка N лежит на AC); $AB = 6$; $P_{ABMN} = 14$. Найдём длину отрезка MN.
Для этого соединим вершины A и B треугольника с центром O. Тогда $\angle NAO = \angle OAB, \angle OBM = \angle OBA$, так как центр вписанной в треугольник окружности является точкой пересечения биссектрис.
Но $\angle OAB = \angle NOA, \angle ABO = \angle MOB$ как накрестлежащие углы (по условию $MN \parallel AB$). Значит, ΔANO и ΔOMB равнобедренные: $AN = NO, OM = MB$.
Тогда: $P_{ABMN} \equiv 14 = 6 + AN + NO + OM + MB = 6 + 2NM \Rightarrow NM = 4$.

Ответ: 4

3-й уровень

Задание № 6

Решение.
Найдём точки, в которых касательные $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ к графику функции $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$ образуют с осью Ox угол $\dfrac{3\pi}{4}$. Абсциссы этих точек, согласно геометрическому смыслу производной функции в точке, являются корнями уравнения: $f'(x_0) = tg\dfrac{3\pi}{4}$. В нашем случае:

$$f'(x) = \left(\frac{x+1}{x-3}\right)' = -\frac{4}{(x-3)^2}; \quad tg\frac{3\pi}{4} = -1 \Rightarrow -\frac{4}{(x-3)^2} = -1.$$

Решив последнее уравнение, получаем: $x_1 = 5,\ x_2 = 1$.
Далее, ординаты точек касания находим из условия, что эти точки принадлежат графику функции $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$. Следовательно:

$$y_1 \equiv f(x_1) = \left.\left(\frac{x+1}{x-3}\right)\right|_{x=5} = 3; \quad y_2 \equiv f(x_2) = \left.\left(\frac{x+1}{x-3}\right)\right|_{x=1} = -1.$$

Теперь нетрудно написать уравнения касательных: $y = 3 - (x-5)$ и $y = -1 - (x-1)$, или $y = -x + 8$ и $y = -x$. Поскольку ось Ox имеет уравнение $y = 0$, то координаты её точек пересечения с первой и второй прямыми удовлетворяют соответственно системам уравнений:

$$\begin{cases} y = -x + 8, \\ y = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y = -x, \\ y = 0. \end{cases}$$

Значит, первая касательная пересекает ось Ox в точке с координатами $(8; 0)$, вторая – в точке с координатами $(0; 0)$.

Ответ: $(8; 0)$, $(0; 0)$

Задание № 7

Решение. Для уравнения $(x-2)^{\log_2(x+31)} = (x-2)^3$ возможны случаи:

– при $x - 2 \ne \{0, 1, -1\} \Leftrightarrow x \ne \{2, 3, 1\}$: $\log_2(x+31) = 3 \Rightarrow x + 31 = 8 \Rightarrow x = -23$;
– при $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$: $0^{\log_2 33} = 0^3$. Так как $\log_2 33 > 0$, то уравнение имеет место (справедливо тождество: $0 \equiv 0$);
– при $x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 3$: $1^{\log_2 34} = 1^3$, уравнение также имеет место (так как справедливо тождество: $1 \equiv 1$);
– при $x - 2 = -1 \Leftrightarrow x = 1$: $(-1)^{\log_2 32} = (-1)^5 = -1$; $(-1)^3 = -1$, то есть уравнение также имеет место (так как справедливо тождество: $-1 \equiv -1$).

Ответ: $\{-23;\ 1;\ 2;\ 3\}$

Замечание:
Решение сложно-показательных (или показательно-степенных) уравнений вида:

$$f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x)=h(x), \\ f(x)>0,\ f(x)\neq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)=0, \\ \exists\ g(x)>0,\ h(x)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)=1, \\ g(x), h(x) \text{ имеют смысл} \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)=-1, \\ g(x), h(x) \text{ одинаковой чётности} \end{cases} \end{array}\right.$$

Отметим также, если $f(x)<0 \Leftrightarrow -f(x)>0$. Следовательно, исходное уравнение можно переписать в виде:

$$\left((-f(x))^{g(x)} = (-f(x))^{h(x)}\right) \Leftrightarrow (-1)^{g(x)}\cdot f(x)^{g(x)} = (-1)^{h(x)}\cdot f(x)^{h(x)}.$$

Другими словами, возможны различные комбинации, рассмотренной выше совокупности. Так, для нашего уравнения, если рассматривать случай

$$\begin{cases} g(x)=h(x), \\ f(x)>0,\ f(x)\neq 1 \end{cases}, \text{ то есть } \begin{cases} \log_2(x+31)=3 \\ x-2>0,\ x-2\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x+31)=3 \\ x\in(2;3)\cup(3;+\infty), \end{cases}$$

то $x=-23$ не является решением уравнения, так как не принадлежит множеству $(2;3)\cup(3;+\infty)$. Однако если сделать проверку, то есть если учесть последнее замечание, можно сделать вывод, что при $x=-23$ справедливо тождество $(-25)^{\log_2 8} \equiv (-25)^3$. Таким образом, окончательно можно записать:

$$f(x)^{g(x)} = f(x)^{h(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x)=h(x), \\ f(x)\neq 0,\ f(x)\neq \pm 1 \\ (\text{необходима проверка!}) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)=0, \\ \exists\ g(x)>0,\ h(x)>0 \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)=1, \\ g(x), h(x) \text{ имеют смысл} \end{cases} \\ \begin{cases} f(x)=-1, \\ g(x), h(x) \text{ одинаковой чётности} \end{cases} \end{array}\right.$$

Литература

1. Березин В. Н. и др. Сборник задач для факультативных и внеклассных занятий по математике: Кн. для учителя. – М.: «Просвещение», 1985.
2. Будна О. С. Зовнішнє оцінювання (підготовка). Математика. Репетитор. – Х.: Веста: «Ранок», 2007.
3. Бурда М. І. та ін. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з алгебри. 9 клас. – Х.: Гімназія, 2007.
4. Бурда М. І., Біляніна О. Я., Вашуленко О. П. та ін. Збірник завдань для державної підсумкової атестації з математики. 11 клас: У 2-х кн. – Х.: Гімназія, 2008.
5. Буряк Д. В., Зєрнов О. Є, Крапива Н. В., Малигіна Л. І. Вступний іспит з математики в Одеський державний політехнічний університет. – Одеса: видавництво «ТЕС», 1999.
6. Буряк Д. В, Павленко В. Д., Порпулит А. Н., Буряк Н. В. Готовимся к контрольной работе по математике: Учебное пособие. – Одесса: Астропринт, 2010.
7. Ваховский Е. Б., Рывкин Ф. Ф. Задачи по элементарной математике повышенной трудности. – М.: 1971.
8. Вороний О. М. Готуємось до олімпіад з математики. – Х.: Вид. група «Основа», 2008.
9. Егерев В. К., Зайцев В. В. и др. Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во ВТУЗы. Учебное пособие. / Под редакцией М. И. Сканави. – 4-е изд. – М.: Высш. школа, 1980.
10. Каплан Я. Л. Рівняння. – К.: «Радянська школа», 1968.
11. Колесникова С. И. Математика. Решение сложных задач Единого государственного экзамена. 3-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2007. – (Домашний репетитор: Подготовка к ЕГЭ).
12. Коутинхо С. Введение в теорию чисел. Алгоритм RSA. – М.: «Постмаркет», 2001.
13. Крапива Н. В., Буряк Д. В., Баласанян Г. А., Колесніков О. Є. Математика. Вступний письмовий іспит в Одеський національний політехнічний університет. / Під ред. О. М. Цабієва. – 5-те вид. – Одеса: Наука і техніка, 2005.
14. Кушнір І. А. Методи розв'язання задач з геометрії: Кн. для вчителів. – К.: Абрис, 1994.
15. Нестеренко Ю. В., Олехник С. Н., Потапов М. К. Задачи вступительных экзаменов по математике: Учебное пособие. – 2-е изд., доп. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1983.
16. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. Часть II. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1986. – (Б-ка мат. кружка).
17. Сивашинский И. Х. Задачи по математике для внеклассных занятий (9 – 11 классы). – М.: «Просвещение», 1968.
18. Симонов А. Я., Бакаев Д. С., Эпельман А. Г. и др. Система тренировочных задач и упражнений по математике. – М.: «Просвещение», 1991.

Математика. Готовимся к контрольной работе : учебное
М34 пособие / Д. В. Буряк, Л. И. Плотникова, А. Н. Порпулит, Н. В. Буряк. — 2-е изд. — Одесса : Астропринт, 2017. — 284 с.
ISBN 978–966–927–287–4

Пособие адресовано всем, кто готовится к контрольной работе по математике II (областного) этапа Всеукраинского конкурса-защиты научно-исследовательских работ МАН, отделение «Вычислительная техника и программирование». Пособие будет полезным выпускникам школ при подготовке к внешнему независимому оцениванию, учителям математики, руководителям факультативов и кружков, а также всем учащимся начиная с 8-го класса, которые интересуются математикой.

Второе издание содержит минимальный теоретический материал, который сопровождается рассмотрением большого количества тренировочных задач. Изложение ведется на доступном, но, по-возможности, строгом языке.

В пособие вошли все контрольные работы (условия и решения) начиная с 2005 года.

УДК 51(076)

Посібник призначено всім, хто готується до контрольної роботи з математики II (обласного) етапу Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт МАН, відділення «Обчислювальна техніка й програмування». Посібник може бути рекомендований випускникам шкіл, які готуються до ЗНО з математики. Він буде корисним й учителям математики, керівникам факультативів і гуртків, а також усім учням, починаючи з 8-го класу, які цікавляться математикою.

Друге видання містить мінімальний теоретичний матеріал, який супроводжується розглядом великої кількості тренувальних завдань. Викладання ведеться доступною, але, по-можливості, строгою мовою.

До посібника увійшли всі контрольні роботи (як умови, так і розв’язки) починаючи з 2005 року.

Навчальне видання

БУРЯК Дмитро Володимирович
ПЛОТНІКОВА Лілія Іванівна
ПОРПУЛІТ Олександр Миколайович
та ін.

МАТЕМАТИКА.
ГОТУЄМОСЯ ДО КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

Навчальний посібник

2-ге видання

Російською мовою

Надруковано в авторській редакції
з готового оригінал-макета

Коректор *Л. М. Лейдерман*

Фрмат 60х84/16. Ум. друк. арк. 16,51.
Тираж 300 прим. Зам. № 351 (82).

Видавництво і друкарня «Астропринт»
65091, м. Одеса, вул. Разумовська, 21
Тел.: (0482) 37-07-95, 37-14-25, 33-07-17, (048) 7-855-855
e-mail: astro_print@ukr.net; www.astroprint.ua; www.stranichka.in.ua
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1373 від 28.05.2003 р.