



Т р у д ы
Одесского политехнического
университета

**Научный
и производственно-практический сборник
по техническим и естественным наукам**

Вып.2(18).2002

Одесса

Министерство образования и науки Украины
Одесский национальный политехнический университет

Труды
ОДЕССКОГО ПОЛИТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Научный и производственно-практический
сборник

Вып. 2(18). 2002

УДК 532.542+532.517.43

С.В. Сурков, инженер, Одес. нац. политехн. ун-т

ВОЛНОВАЯ МОДЕЛЬ ВТОРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ В ПРИЗМАТИЧЕСКИХ КАНАЛАХ

С.В. Сурков. **Хвильова модель вторинних течій у призматичних каналах.** Показано, що рівняння, які описують вторинні течії у каналах із некруглим поперечним перерізом, можуть при деяких припущеннях приводити до виникнення стоячих хвиль завихреності. Проаналізовано окремі випадки, які відповідають різній формі поперечного перерізу каналу.

S.V. Surkov. **The wave model of the secondary flows in prismatic ducts.** It is shown that equations describing the secondary flows in the ducts of arbitrary cross-section may at certain assumptions bring to the appearance of standing waves of vorticity. Particular cases corresponding to different shapes of duct cross-section are analyzed.

Вторичные течения в каналах некруглого поперечного сечения обнаружены экспериментально и описаны [1]. Суть явления состоит в том, что если основной поток движется параллельно оси x , то в поперечном сечении yOz возникают течения с замкнутыми линиями тока (вихри), причем, если поперечное сечение канала имеет форму многоугольника, то вдоль биссектрис углов жидкости движется к углам, и оттуда растекается в обе стороны [2]. Теоретические модели вторичных течений, как правило, сложны. При этом учитываются два противоборствующих процесса, воздействующих на вихрь: растяжение вдоль оси вихря, приводящее к увеличению угловой скорости, и вязкое трение, приводящее к ее уменьшению [3].

Если пренебречь обоими этими воздействиями, можно получить достаточно простую модель, тем не менее хорошо согласующуюся с экспериментальными данными.

При установившемся течении, стабилизированном вдоль оси x , скорости потока не изменяются вдоль оси x , а изменяется только давление вследствие необратимых потерь потенциальной энергии. В этом случае уравнения Навье-Стокса упрощаются и принимают вид

$$u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right), \quad (1)$$

$$u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right), \quad (2)$$

$$u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right), \quad (3)$$

где x, y, z — координаты, м;

u_x, u_y, u_z — проекции скорости жидкости, м/с;

X, Y, Z — проекции единичной массовой силы, м/с²;

ρ — плотность жидкости, кг/м³;

p — гидростатическое давление, Па;

ν — кинематическая вязкость жидкости, м²/с.

Уравнение неразрывности принимает вид

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Уравнение (4) позволяет использовать в поперечном сечении потока функцию тока ψ , при этом проекции скорости

$$u_y = \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad u_z = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad (5)$$

а (4) удовлетворяется автоматически.

Завихренность потока Ω , представляющая собой удвоенную угловую скорость вращения жидких частиц относительно оси x , определяется уравнением

$$\Omega = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}. \quad (6)$$

С учетом (5)

$$\Omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2},$$

или, если использовать двумерный оператор Лапласа,

$$\Omega = -\nabla^2 \psi.$$

После дифференцирования уравнения (3) по y , а (2) по z , и вычитания производных

$$u_y \frac{\partial \Omega}{\partial y} + u_z \frac{\partial \Omega}{\partial z} = \nu \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} \right).$$

Пренебрегая вязкостью и переходя к переменным “функция тока — завихренность”, можно получить

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \Omega}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial z} = 0. \quad (7)$$

Следует отметить, что если $\Omega = C\psi$, где C — константа, то уравнение (7) удовлетворяется тождественно. Таким образом, существует подмножество решений уравнения (7), которые можно получить из уравнения

$$\nabla^2 \psi = C\psi. \quad (8)$$

Уравнение (8) широко используется в математической физике, и описывает стоячие волны. В частности, оно описывает колебания мембраны, электрон в потенциальной яме и т.д. Его решения записываются в виде произведения синусоид

$$\psi = A \prod_{i=1}^n \sin k_i y_i, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

где A — константа, $\text{м}^2/\text{с}$;

$k_i = \frac{2\pi}{l_i}$ — волновое число, м^{-1} ;

l_i — длина пространственной волны в соответствующем направлении, м ;

y_i — координата точки в поперечном сечении канала, отсчитываемая в соответствующем направлении, м .

Для анализа решений уравнения (8) применялся известный в гидромеханике прием: вначале записывались функции вида (9) и строились линии тока. Поскольку линии тока непроницаемы для жидкости, любую из них можно объявить твердой стенкой, ограничивающей поток. После этого становится возможен анализ граничных условий.

При построении линий тока ($\psi = \text{const}$) значения функции тока изменялись с постоянным шагом $\Delta\psi$. Для построений на компьютере использовался универсальный простой алгоритм [4], согласно которому значения ψ рассчитывались для каждого пикселя изображения, а затем закрашивались пиксели, ближайšie к соответствующим линиям тока.

Случай 1.

$$\psi = A \sin k_1 y \sin k_2 z. \quad (10)$$

Линии тока образуют ячейки прямоугольной формы (рис. 1). При этом линии тока, ограничивающие и объединяющие любую группу ячеек, можно считать твердыми границами канала.

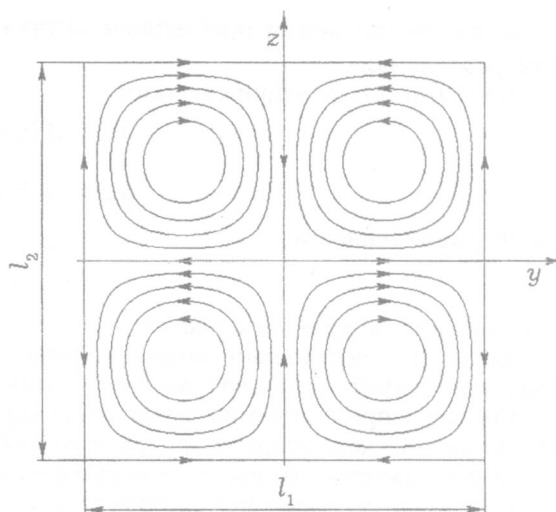


Рис. 1. Линии тока, описываемые уравнением (10), построенные с шагом $\Delta\psi/A = 0,2$

В рассматриваемом простейшем случае длины волн l_1 и l_2 совпадают с поперечными размерами канала.

Из (10) и (5) проекции скорости

$$u_y = A k_2 \sin k_1 y \cos k_2 z,$$

$$u_z = -A k_1 \cos k_1 y \sin k_2 z,$$

а из (6) завихренность

$$\Omega = (k_1^2 + k_2^2) \psi,$$

т.е. уравнение (8) удовлетворяется.

Хотя при построении модели вязкость не учитывалась, полученные течения имеют смысл рассмотреть и для случая вязкой жидкости.

Согласно принципу минимума диссипируемой энергии, сформулированному Гельмгольцем, механическая энергия, диссипируемая при действительном стационарном движении вязкой несжимаемой жидкости в некотором объеме не больше, чем в аналогичном произвольном движении несжимаемой жидкости с тем же распределением скоростей на поверхности, ограничивающей этот объем [5].

В рассматриваемых плоских течениях диссипируемая мощность

$$N_d = 2\mu \left[\left(\frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)^2 \right], \quad (11)$$

где μ — динамическая вязкость жидкости, Па·с.

Величины в уравнении (11), заключенные в квадратные скобки, связаны со скоростями угловых и линейных деформаций жидких частиц.

Скорость угловой деформации жидких частиц относительно оси x

$$\theta_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = \frac{k_1^2 - k_2^2}{2} A \sin k_1 y \sin k_2 z.$$

Если $k_1 = k_2$, скорость угловой деформации $\theta_x = 0$. Следовательно, рассматриваемое течение обладает уникальным свойством — касательные напряжения в каждой его точке равны нулю.

Скорости линейных деформаций жидких частиц

$$\frac{\partial u_y}{\partial y} = A k_1 k_2 \cos k_1 y \cos k_2 z,$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = -A k_1 k_2 \cos k_1 y \cos k_2 z$$

будут достигать минимальных значений при наименьших значениях волновых чисел k_1 и k_2 .

Таким образом, в реальном потоке будут возникать вихри, имеющие ячейку квадратной формы максимально возможного размера, который “вписывается” в поперечное сечение канала.

Из эксперимента известно очень похожее течение, которое формируется в прямоугольном канале между вращающимися цилиндрами. Это вихри Тэйлора, и располагаются они в канале в один ряд [2].

Теперь, когда выяснен физический смысл волновых чисел k_1 и k_2 , можно ограничиться рассмотрением течений с минимальными скоростями линейных деформаций, у которых $k_1 = k_2 = \dots = k$. Кроме того, можно использовать безразмерные (относительные) переменные

$$\bar{\psi} = \frac{\psi}{A}, \quad \bar{y} = ky, \quad \bar{z} = kz, \quad \bar{u}_i = \frac{u_i}{kA}, \quad \bar{\Omega} = \frac{\Omega}{k^2 A}, \quad \bar{\theta}_x = \frac{\theta_x}{k^2 A}.$$

Случай 2.

$$\bar{\psi} = \sin \left(\frac{\bar{y}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \bar{z} \right) \sin \left(\frac{\bar{y}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \bar{z} \right) \sin \bar{y}. \quad (12)$$

Вихревые ячейки имеют форму равносторонних треугольников (рис. 2). Сгруппировав их по шесть, можно получить структуры, напоминающие ячейки Бенара [6]. В этом случае

$$\bar{\Omega} = 4\bar{\psi},$$

$$\bar{\theta}_x = -\frac{1}{2} [\sin \bar{y} \cos(\sqrt{3}\bar{z}) + \sin 2\bar{y}] \neq 0,$$

т.е. касательные напряжения не равны нулю.

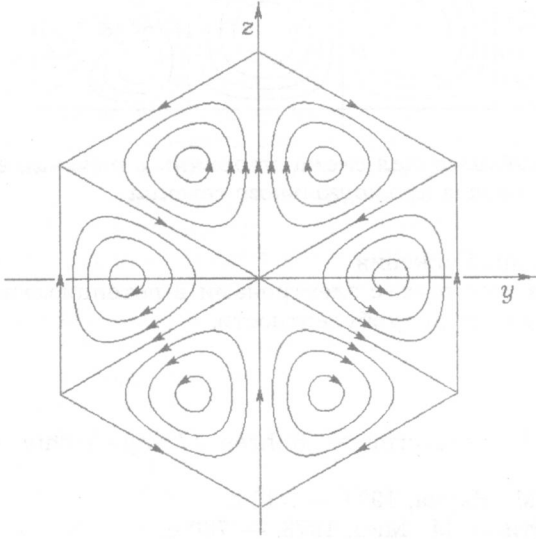


Рис. 2. Линии тока, описываемые уравнением (12) при $\Delta\bar{\psi} = 0,2$

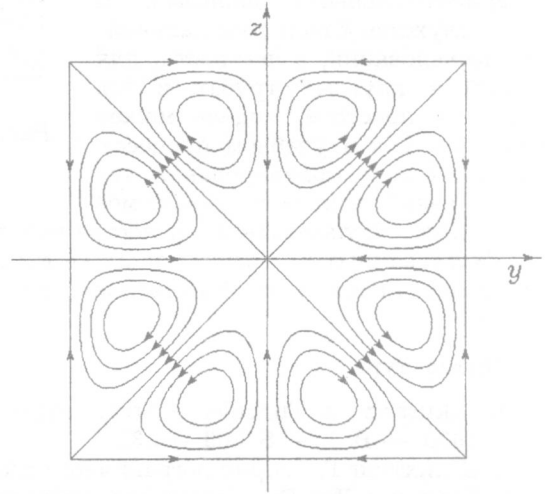


Рис. 3. Линии тока, описываемые уравнением (13) при $\Delta\bar{\psi} = 0,1$

Случай 3.

$$\bar{\psi} = \sin \bar{y} \sin \bar{z} \sin \frac{\bar{z} + \bar{y}}{2} \sin \frac{\bar{z} - \bar{y}}{2}. \quad (13)$$

Расчитанные линии тока для этого течения (рис. 3) хорошо согласуются с результатами эксперимента для трубы с квадратным поперечным сечением [2].

Выражение (13) целесообразно привести к удобному для дифференцирования виду

$$\bar{\psi} = \frac{1}{8} [\cos(2\bar{y} - \bar{z}) - \cos(2\bar{y} + \bar{z}) + \cos(2\bar{z} + \bar{y}) - \cos(2\bar{z} - \bar{y})].$$

Тогда из (5) проекции скорости

$$\bar{u}_y = \frac{1}{8} [\sin(2\bar{y} - \bar{z}) + \sin(2\bar{y} + \bar{z}) - 2\sin(2\bar{z} + \bar{y}) + 2\sin(2\bar{z} - \bar{y})],$$

$$\bar{u}_z = \frac{1}{8} [2\sin(2\bar{y} - \bar{z}) - 2\sin(2\bar{y} + \bar{z}) + \sin(2\bar{z} + \bar{y}) + \sin(2\bar{z} - \bar{y})].$$

После дифференцирования и упрощения

$$\bar{\Omega} = 5\bar{\psi},$$

$$\bar{\theta}_x = \frac{3}{16} [\cos(2\bar{y} - \bar{z}) - \cos(2\bar{y} + \bar{z}) - \cos(2\bar{z} + \bar{y}) + \cos(2\bar{z} - \bar{y})] \neq 0.$$

Случай 4. Течение в прямоугольном канале с отношением сторон, равным целому числу.

Для этого случая можно предложить приближенную схему, представляющую собой комбинацию случаев 1 и 3 (рис. 4).

Из проведенного анализа следует, что соотношение сторон в канале должно оказывать существенное влияние на структуру потока, а значит и на гидравлическое сопротивление канала.

Используемая схема, в частности, позволяет описать периодические структуры в тонких каналах прямогоугольного сечения, наблюдаемые визуально [7].

Таким образом, модель вторичных течений, основанная на уравнении (8), позволяет получить линии тока, согласующиеся с известными экспериментальными данными, и может служить базой для дальнейших исследований, в частности, для течений в круглых трубах и т.д. Благодаря простоте, модель может использоваться в учебном процессе. При численном моделировании течений вязкой жидкости такая модель может использоваться в качестве начального приближения.

Сходство вихрей, возникающих во вторичных течениях, с электронами в потенциальной яме является косвенным обоснованием квантовой аналогии турбулентности.

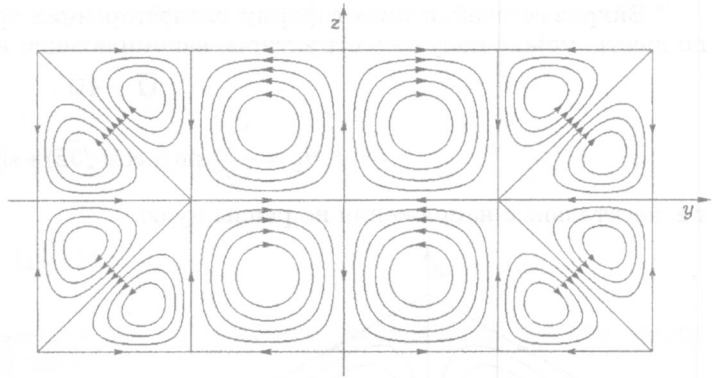


Рис. 4. Приближенная схема вторичных течений в канале прямогоугольного сечения

Литература

1. Nikuradze J. Turbulente Strömungen in nicht kreisförmigen Röhren // Ing.-Archiv. — 1930. — В. 1. — S. 306 — 332.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. — М.: Наука, 1974. — 712 с.
3. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. — М.: Мир, 1973. — 760 с.
4. Сурков С.В. Потенциальная модель взаимодействия турбулентного вихря со стенкой // Тр. Одес. политехн. ун-та. — Одесса, 1998. — Вып. 2(6). — С. 148 — 150.
5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1987. — 840 с.
6. Альбом течений жидкости и газа: Пер. с англ. / Сост. М. Ван-Дайк. — М.: Мир, 1986. — 184 с.
7. Бычков Ю.М. Гидродинамика тонких потоков несжимаемой жидкости. — Кишинев: Штиинца, 1981. — 110 с.

Поступила в редакцию 29 июня 2002 г.

УДК 556.166

Б.В. Киндюк, канд. техн. наук, доц., Одес. нац. политехн. ун-т

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ВОДООБРАЗОВАНИЯ ВЫСОКИХ ДОЖДЕВЫХ ПАВОДКОВ

Б.В. Киндюк. Дослідження процесу водоутворення високих дощових паводків. Розглянуто можливість застосування макрогенетичної теорії А.В. Огієвського до процесу формування високих дощових паводків у гірських районах Українських Карпат.

B.V. Kindyuk. Research of water-formation process of high rain freshets. The possibility of applying A.V. Ogievskiy's macrogenetic theory to the process of high rain freshet formation in the mountainous areas of the Ukrainian Carpathians is considered.

Высокие дождевые паводки, проходящие на реках Украинских Карпат, наносят значительный ущерб народному хозяйству региона.

Так, в июне 1980 г. интенсивные ливни обусловили катастрофические паводки, разрушившие шоссе и мосты, затопившие целый ряд населенных пунктов. На отдельных участках рек Латорицы, Рики, Днестра, Стрыя, Быстрицы Солотвинской и Ломницы па-